«Утверждаю»
Ректор Таджикского
национального университета
академик АН РТ, профессор
_____________ Имомов М.С.
9 июня 2015 г.

Отзыв ведущей организации
на диссертацию Камарадиновой Заррины Нусратуллоены «Средние Рисса арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы. Диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел, её основным предметом исследования является представления производящего ряда функции числа решений представлений тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 3z_1z_2z_3$ в виде суммы двух квадратов через дзета-функции Римана и L – функций Дирихле, а также вывод асимптотических формул для «среднего Рисса» веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, и функции суммы квадратов, распространённых на значения тернарной кубической формы.

Важным направлением в аналитической теории чисел является нахождение асимптотик функций $\tau_k(f(\bar{z}))$ и $r(f(\bar{z}))$, где $f(\bar{z})$ — целозначный многочлен от нескольких переменных $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. Сюда могут быть отнесены, как основные задачи, рассматриваемые в диссертации в случае $\alpha = 0$, так и нахождение асимптотик для сумм вида

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n)\tau_l(n+a) = \sum_{z_1 \ldots z_l \leq x} \tau_k(z_1 \ldots z_l + a),$$

где $k, l \geq 2$. Исследованию $k = 2$, $l \geq 2$ посвящены фундаментальные работы Эстермана, Титчмарша, Хооли, Линника, Бредихина, Мотохаши, Тимофеева, А.И. Виноградова и других математиков. Следует сказать, что случай $k = l = 3$ до сих пор представляет собой актуальную проблему, не решенную до сих пор.

Заметим ещё, что многими авторами наряду с асимптотикой для среднего значения многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ рассматривается "среднее Рисса" веса α, $\alpha \geq 0$ этой функции, то есть асимптотика для сумм вида

$$D_{\alpha,k}(x) = \sum_{n\leq x} \tau_k(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha}.$$

В частности, асимптотическая формула для $D_{1,k}(x)$ установлена в работе А.А. Карацубы, где она затем с помощью метода асимптотического дифференцирования используется для нахождения асимптотики среднего значения функции $\tau_k(n)$, то есть для "средних Рисса" веса нуль. Также следует отметить, работы опубликованные в последние годы Х.Т. Нгуеном, Е.Е. Баядиловым и О.В. Колпаковой, основные результаты которых подробно изложены во введении диссертации.

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Первый параграф каждой главы носит вспомогательный характер.

Во введении даётся краткий исторический обзор по теме диссертации, обосновывается актуальность темы, приводятся основные результаты, полученные автором, излагается вкратце содержание диссертации.

Основным результатом первой главы является теорема 1.1 о представлении производящего ряда функции $s(n) = \rho(n)t(n)$ в виде

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^s} = \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s),$$

где χ_q — неглавный характер по модулю q, $\mathscr{B}(s)$ сходится абсолютно в области $\Re s > 0,5$. Напомним, что $s(n)$ – мультипликативная функция, и это свойство следует из мультипликативности функций $\rho(n)$ и $t(n)$, где $4\rho(n) = r(n)$ – число решений уравнения $x_1^2 + x_2^2 = n$ в целых числах x_1 и x_2, а $3t(n) = t_0(n)$ – количество решений диофантова уравнения $n = \varphi(z_1, z_2, z_3)$ в целых числах z_1, z_2 и z_3.

Вторая глава посвящена среднему Рисса веса $\alpha > 0$ коэффициентов ряда Дирихле, а именно выводу аналога формулы Перрона для средних Рисса веса α коэффициентов ряда Дирихле

$$\Phi(x,\alpha) = \sum_{n\leq x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha}.$$

Следует заметить, что аналогичный результат доказала О.В. Колпакова.

Во втором параграфе третьей главы доказывается теорема 3.1 об асимптотической формуле для "среднего Рисса" веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, распространённой на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha \geq 0$ – произвольное вещественное число, тогда при $k > 3k_1(1+\alpha)$, $k_1 = 79,95$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\leq x} \tau_k(\varphi(z_1, z_2, z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1, z_2, z_3)}{x}\right)^{\alpha} = xQ_{2k-1}(\ln x) + R_{\alpha,k}(x),$$

где $Q_{2k-1}(y)$ — многочлен степени $2k-1$, определяемым равенством

$$xQ_{2k-1}(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^{2k}(s) L^k(s,\chi) g_k(s) x^s B(s, \alpha+1),$$

кроме того, для остаточного члена $R_{\alpha,k}(x)$ справедлива оценка вида

$$R_{\alpha,k}(x) \ll_{\varepsilon} x^{1-\delta_{k,\alpha,a}+\varepsilon}, \quad \delta_{k,\alpha,a} = \left(\frac{2+3\alpha}{6a(k-k_1)}\right)^{2/3}, \quad a \leq 4,45.$$

Теорема 3.1 доказывается методом комплексного интегрирования с использованием основной теоремы второй главы, то есть аналога формулы Перрона для средних Рисса веса α коэффициентов ряда Дирихле, представлении производящего ряда функции $\tau_k(n)t(n)$, доказанной Е.Е. Баядиловым, соотношением

$$T_{\alpha,k}(x) = 3\sum_{n\leq x} \tau_k(n) t(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha},$$

и является обобщением для “среднего Рисса” веса $\alpha \geq 0$, теоремы Е.Е. Баядилова об асимптотической формуле для среднего значения $T_{0,k}(x)$ и теоремы О.В. Колпаковой о средних Рисса многомерной функции делителей с произвольным значением веса $\alpha \geq 0$ в случае, когда множество натуральных чисел, не превосходящих x, заменяется на множество значений тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$, не превосходящих x.

В третьем параграфе третьей главы, прилагая результаты предыдущих глав, а именно: теорему 1.1 о представлении производящего ряда функции $s(n) = \rho(n)t(n)$; теорему 2.1 об аналоге формулы Перрона для средних Рисса веса α коэффициентов ряда Дирихле, методом контурного интегрирования для “среднего Рисса” веса $\alpha \geq 0$ функции суммы квадратов, распространённых на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ доказана асимптотическая формула

$$S_{\alpha}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\leq x} r(\varphi(z_1, z_2, z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1, z_2, z_3)}{x}\right)^{\alpha} = 12xQ_{\alpha}(\ln x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где $Q_\alpha(y)$ — линейный многочлен, определяемый равенством

$$xQ_\alpha(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s)x^s B(s,\alpha+1).$$

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность полученных результатов и выводов обусловлена корректностью математических преобразований, опирающихся на современные методы теории чисел и комплексного анализа, а именно:

- методы дзета-функции Римана и L – функций Дирихле;
- метод контурного интегрирования;
- метод производящих рядов Дирихле.

Новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя. К новым результатам полученных в диссертации относятся следующие:

- получено представление производящего ряда функции числа решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов через дзета-функции Римана и L – функции Дирихле;
- доказана асимптотическая формула для "среднего Рисса" веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, распространённой на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.
- доказана асимптотическая формула для "среднего Рисса" веса $\alpha \geq 0$ функции суммы квадратов, распространённой на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел и комплексного анализа. Полученные результаты могут быть использованы в научных учреждениях и в вузах, где ведутся исследования по аналитической теории чисел, например, в МИРАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, в МГПУ и в Таджикском национальном университете.

Апробация работы и публикации. Основные положения диссертации З.Н.Камарадиновой в достаточной мере освещены в 9 публикациях, в том числе, 4 статьи – в журналах из списка ВАК РФ, рекомендуемых для кандидатских диссертаций и прошли апробацию на научно-исследовательских семинарах и международных конференциях.

Замечания. Имеющиеся в диссертации отдельные опечатки редакционного и стилистического характера не вносят особых трудностей при её чтении.

Заключение. Диссертация З.Н.Камарадиновой на тему «Средние Рисса арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой получены результаты, имеющие важное значение для развития аддитивных задач аналитической теории чисел.

Работа выполнена на высоком научном уровне, обладает научной новизной и практической значимостью, соответствует критериям установленным Положением о присуждения учёных степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09 2013 г. №842, а сама З.Н.Камарадинова заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв составили кандидаты физико – математических наук, доценты Бобоёров Ш.К., Бобоева Р, Собиров А.Ш. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, механико – математического факультета Таджикского национального университета, протокол №9 от 23 мая 2015 года.

Заведующий кафедрой
алгебры и теории чисел,
кандидат физ.–мат. наук, доцент Бобоёров Ш.К.

Контактная информация ведущей организации
Таджикский национальный университет.
Адрес: 734025, г.Душанбе, проспект Рудаки, 17
сайт: http://www.tnu.tj/index.php/ru, телефон:(992-372) 21-77-11
E-mail:boboyorov72@mail.ru

Подпись кандидата физ.–мат. наук, доцента
Бобоёрова Шавката Кенджабоевича заверяю
Начальник отдела кадров ТНУ Сироджиддини Эмомали