На правах рукописи

Холмамадова Шогуна Авобековна

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И НАИЛУЧШЕЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:	**Шабозов Мирганд Шабозович**, доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Фарков Юрий Анатольевич**, доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», Институт общественных наук, профессор кафедры прикладных информационных технологий
	Саидусайнов Муким Саидусайнович, кандидат физико-математических наук, Таджикский государственный университет коммерции, доцент кафедры высшей математики и естественно-научных дисциплин
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Таджикский национальный университет

Защита состоится 11 декабря 2015 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул.Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А.Джураева, Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http: www.mitas.tj.

Автореферат разослан "___" ____________ 2015г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.01 **У.Х.Каримов**

Общая характеристика работы

Актуальность теми. В экстремальных задачах теории аппроксимации большое значение имеют неравенства, которые в различных нормированных пространствах оценивают сверху норму промежуточной производной функции через норму самой функции и норму её старшей производной. Наиболее важными являются неулучшаемые неравенства, в которых для некоторой функции, при выполнении условии существования неравенства, достигается знак равенства. Такие функции называются экстремальными. Различные типы таких неравенств для вещественных функций как для конечного отрезка, так и для всей оси собраны в монографии В.Ф.Бабенко, Н.П.Корнейчука, В.А.Кофанова и С.А.Пичугова "Неравенства для производных и их приложения " , Киев: Наукова думка, 2003 г.

В то же время в комплексной области, даже в круговых областях такие неравенства доказаны в очень редких случаях. Отметим лишь неравенства Л.В.Тайкова[1], где получены точные оценки величины производной функции через модуль непрерывности её второй производной по аргументу. Эти оценки аналогичны известным неравенствам Ландау-Адамара, содержащим функции и их первую и вторую производных.

Исследования, проведенные в настоящей работе, примыкают к результатам Л.В.Тайкова и развивают их в круговых областях комплексной плоскости. В качестве следствия выводятся точные оценки для производных полиномов, которые аналогичны известным неравенствам Бернштейна и Харди.

Цель работы

1. Получить точные оценки величины первой и второй производных аналитической в круге функции через усреднённое значение модуля непрерывности самой функции и модуля непрерывности её второй производной в банаховом пространстве Харди $H_p,\ 1 \le p \le \infty$. Применить полученные результаты к оценке производных комплексных алгебраических полиномов в $H_p,\ 1 \le p \le \infty$.

2. Получить оценку нормы второй производной функции $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$ через усреднённое значение модуля гладкости самой функции и модуля гладкости её второй производной.

3. Получить точные значения наилучших полиномиальных приближений функций $f \in H_p,\ 1 \le p \le 2$ через усреднённое значение модулей непре-

[1] Л.В.Тайков, Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica, 1976, т.2, с.77-85.

рывности высших порядков производных $f^{(r)} \in H_2$ в норме пространства $L_q[0, 2\pi],\ 1 \leq q \leq 2$.

4. Вычислить точные значения различных n-поперечников для классов аналитических функций из H_2, задаваемых усреднёнными значениями модулей непрерывности высших порядков производных в пространстве $L_q[0, 2\pi],\ 1 \leq q \leq 2$.

Метод исследования. В работе использованы современные методы функционального анализа и некоторые новые подходы к решению экстремальных задач теории аппроксимации в банаховых пространствах аналитических в круге функций.

Научная новизна исследований

1. Получены точные оценки величины первой и второй производных функции $f \in H_p,\ 1 \leq p \leq \infty$ через усреднённые значения модулей непрерывности и гладкости самой функции и её второй производной. Даны приложения полученных результатов к оценке промежуточных производных полиномов через усреднённые значения модулей непрерывности самих полиномов.

2. Получена оценка нормы второй производной функции $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$ через усреднённое значение модуля гладкости самой функции и модуля гладкости её второй производной. Получены новые точные неравенства для производных полиномов через модуль гладкости самих полиномов.

3. Получены новые точные неравенства, связывающие наилучшие приближения $f \in H_p,\ 1 \leq p \leq 2$ с усреднёнными значениями модулей непрерывности высших порядков в пространстве $L_q[0, 2\pi],\ 1 \leq q \leq 2$.

4. Найдены точные значения различных n-поперечников для классов функций, задаваемых усреднёнными значениями модулей непрерывности высших порядков, удовлетворяющих на границе области некоторым ограничениям.

Практическая ценность. Полученные в диссертации результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быть применены в других банаховых пространствах аналитических в круге функций, например в прастранстве Бергмана.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах по теории приближения функций в Хорогском госуниверситете (г. Хорог, 2010-2015гг.), на семинарах отдела теории функций Института математики АН РТ им. А.Джураева (г. Душанбе, 2010-2013гг.), на международной научной конференции "Современные проблемы математики и их приложения" (г. Душанбе, 23-24 июня 2010г.), на международной научной конференции "Современные проблемы математики и её приложения" (г. Душанбе, 28-29 июня 2011г.), на международной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций" (г. Душанбе, 29-30 июня 2012г.), в Институте математики АН Республики Таджикистан, на международной научной конференции "Современные проблемы математики и её преподавания"(г.Худжанд, 28-29 июня 2014г.), на международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений"(г.Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 7 статьях 1-7, из них 5-в журналах, рекомендуемых ВАК РФ. В совместных работах [1,4] научному руководителю М.Ш. Шабозову принадлежит постановка задач и выбор метода доказательства, а из совместной статьи [5] в диссертацию включены результаты, принадлежащие соискателю.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 57 наименования и занимает 86 страницы машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Во введении даётся краткий исторический обзор результатов по рассматриваемой проблеме, обосновывается актуальность темы и приводится краткое содержание диссертации с указанием основных результатов.

В первом параграфе первой главы приводятся основные определения и вспомогательные факты, используемые в дальнейшем.

Известно, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 < \rho \le 1$$

принадлежит банахову пространству Харди $H_p,\ 1 \le p \le \infty$, если

$$\|f\|_p := \|f\|_{H_p} = \lim_{\rho \to 1-0} M_p(f, \rho) < \infty,$$

где

$$M_p(f,\rho)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p},\ 1\le p\le\infty,$$

$$\|f\|_\infty:=\|f\|_{H_\infty}=\max\{\|f(z)\|:|z|<1\},\ p=\infty.$$

Хорошо известно, что норма функции $f\in H_p$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(t):=f(e^{it})$. Всюду далее через $H_{p,\rho}$, $1\le p\le\infty$, $0<\rho\le 1$ обозначим пространство Харди аналитических в круге $|z|<\rho$ функций с конечной нормой $\|f\|_{H_{p,\rho}}:=\|f(\rho z)\|_{H_p}<\infty$. Символом

$$E_{n-1}(f)_p:=E(f,\mathcal{P}_{n-1})_{H_p}=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_p:p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

обозначим величину наилучшего приближения функции $f\in H_p$, $1\le p\le\infty$ подпространством полиномов $\mathcal{P}_{n-1}=\{p_{n-1}(z):\ p_{n-1}(z)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kz^k,\ a_k\in\mathbb{C}\}$ степени не выше $n-1$. Производную r-го порядка функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z=\rho e^{it}$ обозначим $f_a^{(r)}(z)$, а обычную производную r-го порядка обозначим $f^{(r)}(z)$. При этом $f_a^{'}(z)=f^{'}(z)\cdot zi$, $f_a^{(r)}(z)=\left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a^{'}$, $r\ge 2, r\in N$, а соответствующие граничные значения производных обозначим через $f_a^{(r)}(t):=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(ik)^rc_ke^{ikt}, r\in\mathbb{Z}_+$ и

$$f^{(r)}(t):=\sum_{k=r}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-r+1)c_ke^{i(k-r)t}, r\in\mathbb{Z}_+.$$

Положим $H_p^{(r)}=\left\{f\in H_p,\|f^{(r)}\|_p<\infty\right\}$, $H_{p,a}^{(r)}=\left\{f\in H_{p,a},\|f_a^{(r)}\|_p<\infty\right\}$. Всюду далее, гладкость функции $f\in H_p$, $1\le p\le\infty$ охарактеризуем скоростью убывания к нулю модуля непрерывности m-го порядка её граничных значений $f(t)$ в норме пространства $L_p[0,2\pi]$, $1\le p\le\infty$

$$\omega_m(f;t)_p=\sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f\big(\cdot+(m-k)\tau\big)\right\|_p:|\tau|\le t\right\}\qquad(1)$$

при $t\to 0$, либо зададим скорость убывания (1) к нулю мажорантой некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega_m(f;t)_p$.

Во втором параграфе получены точные оценки величины производной аналитической в единичном круге функции через усредненное значение ее модуль непрерывности и модуль непрерывности ее второй производной. Одним из основных результатов второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Для любой функции* $f(z) \in H_{p,a}^{(2)}$, $1 \le p \le 2$ *и любого заданного* $u \in (0, \pi/(2n)]$ *имеет место неравенство*

$$\|f_a^{'}\|_{H_p} \le \frac{1}{2}\int\limits_0^u \omega(f_a^{''}, 2x)_p \left(1 - \sin\frac{\pi x}{2u}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int\limits_0^u \omega(f, 2x)_p \sin\frac{\pi x}{2u} dx. \quad (2)$$

Неравенство (2) *точно в том смысле, что существует функция* $f_0(z) \in H_p$, $1 \le p \le \infty$, *для которой соотношение* (2) *обращается в равенство при некотором значении* $u = u_0 \in (0, \pi/2n)$.

Из теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы* 1.2.1 *справедливо неравенство*

$$\|f_a^{'}\|_p \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{''}, 2x)_p \left(1 - \sin nx\right) dx + \frac{1}{2}\, n^2 \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f, 2x)_p \sin nx dx,$$

которое обращается в равенство для $f_0(z) = z^n \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$. *Более того, для любых* $n, r \in \mathbb{N}$ *верно неравенство*

$$\|f_a^{(r)}\|_p \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r+1)}, 2x)_p (1 - \sin nx) dx + \frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r-1)}, 2x)_p \sin nx dx,$$

которое тоже обращается в равенство для $f_0(z) = z^n \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$.

В этом же параграфе доказано следующее утверждение

Теорема 1.2.2. *Для произвольного алгебраического комплексного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ *справедливо точное неравенство*

$$\|p_{n,a}^{'}\|_{H_p} \le \frac{1}{4} n^2 \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,$$

которое обращается в равенство для полинома $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие 1.2.2. *Для любых* $n, r \in \mathbb{N}$ *и любого алгебраического комплексного полинома* $p_n(z)$ *справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4} n^{r+1} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,$$

$$\|p_n^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4} n\alpha_{n,r} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,$$

где $\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1) = n!/(n-r)!$, $n \ge r$, *обращающиеся в равенства для полинома* $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.
Воспользуясь элементарным неравенством $\|p_n\|_{H_{p,\rho}} \le \rho^n \|p_n\|_{H_p}$, $(1 \le p \le \infty)$, из следствия 1.2.2 выведем

Следствие 1.2.3. *Для произвольного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ *справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \le \frac{1}{4}\rho^n n^{r+1} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,\ 1 \le p \le \infty,\ 0 < \rho \le 1,$$

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \le \frac{1}{4}\rho^n n\alpha_{n,r} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,\ 1 \le p \le \infty,\ 0 < \rho \le 1.$$

Вторым из основных результатов второго параграфа является

Теорема 1.2.3. *При любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n \ge r$ *и* $1 \le q \le \infty$ *для произвольного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ *справедливо неравенство*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4}\ \pi^{1/q'} \cdot n^{r+1/q} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega^q(p_n, t)_p dt \right)^{1/q},$$

$$(q' + (q')^{-1} = 1,\ 1 \le q, q' \le \infty).$$

Используя хорошо известные неравенства доказанные М.З.Двейриным[2]:

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,\ \rho}} \le \rho^n \cdot\ n^{-r}\ E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_p},$$
$$E_{n+r-1}(f)_{H_{p,\ \rho}} \le \rho^n \alpha_{n+r,r}^{-1}\ E_{n-1}(f^{(r)})_{H_p},$$

сформулируем следствие, вытекающее из теоремы 1.2.1.

Следствие 1.2.4. *Для произвольной функции* $f_0 \in H_{p,\rho}^{(r)} \cap H_{p,\rho,a}^{(r)}$, $(1 \le p \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,\rho}} \le \rho^n n^{-r} \frac{1}{2} \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f_a^{(r+1)}, 2x\right)_p (1 - \sin nx)dx +$$

[2]М.З.Двейрин. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений, вып.6, Киев: Наукова думка, 1975, с.41-54.

$$+\frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(f_a^{(r-1)},2x\right)_p\sin nxdx\Biggr\},\qquad(3)$$

$$E_{n+r-1}(f)_{H_{p,\rho}}\leq\rho^n\alpha_{n+r,r}^{-1}\cdot\frac{1}{2}\Biggl\{\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(f^{(r+1)},2x\right)_p(1-\sin nx)dx+$$

$$+\frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(f^{(r-1)},2x\right)_p\sin nxdx\Biggr\},\qquad(4)$$

и знак равенства в неравенствах (3) *и* (4) *достигается соответственно для функций* $f_0(z)=z^n\in H_{p,\rho}$ *и* $g_0(z)=z^{n+r}\in H_{p,\rho}$, $1\leq p\leq\infty$, $0<\rho\leq 1$.

В третьем параграфе доказаны точные неравенства для оценки величины нормы второй производной аналитической в единичном круге функции, принадлежащей пространству Харди H_p, $1\leq p\leq\infty$, через усреднённое значение модуля гладкости самой функции и через усреднённое значение модуля гладкости её второй производной.

Теорема 1.3.1. *Для произвольной функции* $f(z)\in H_{p,a}^{(2)}$, $1\leq p\leq\infty$ *имеет место точное неравенство*

$$\|f_a''\|_{H_p}\leq\frac{n}{\pi-2}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(f'',2t)_p(1-\sin nt)dt+n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(f,2t)_p\sin ntdt\right\}.\qquad(5)$$

Неравенство (5) *обращается в равенство для функции* $f_0(z)=z^n\in H_{p,a}^{(2)}$.

В этом же параграфе, воспользуясь неравенством Зигмунда[3], получены оценки нормы производных для комплексных алгебраических полиномов через усреднённые значения их модулей гладкости.

Теорема 1.3.2. *Для произвольного полинома* $p_n(z)\in\mathcal{P}_n$ *справедливо неравенство*

$$\left\|p_{n,a}''\right\|_{H_p}\leq\frac{n^3}{2(\pi-2)}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2(p_n,t)_pdt,$$

и равенство достигается для полинома $q_n(z)=cz^n\in H_{p,a}^{(2)}$, $c\in\mathbb{C}$, $1\leq p\leq\infty$.

[3] A.Zygmund. Smooth Functions.// Duke Math Journ., 12(1945), p.47-56

Следствие 1.3.1. *Для любых целых неотрицательных $r \geq 2$ и любого $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ справедливо точное неравенство*

$$\left\|p_{n,a}^{(r)}\right\|_{H_p} \leq \frac{n^{r+1}}{2(\pi-2)} \int\limits_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p \, dt.$$

Теорема 1.3.3. *Для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$, при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$ справедливо неравенство*

$$\left\|p_{n,a}^{(r)}\right\|_{H_p} \leq \frac{\pi^{1/q'}}{2(\pi-2)} n^{r+\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n,t)_p \, dt\right)^{1/q},$$

$$\left(q^{-1} + (q')^{-1} = 1, \ 1 \leq q, q' \leq \infty\right),$$

причём при $q' = \infty$ неравенство точное.

Теорема 1.3.4. *Для натуральных чисел $0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ и любого $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}, 1 \leq p \leq \infty$ при произвольном $n > r \geq k$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_{H_p} \leq \frac{1}{(\pi-2)rh^k} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} \omega_2\left(f, \frac{2t}{n}\right)_p P(t)dt + \frac{h^{r-k}}{(\pi-2)r} \int\limits_0^{\pi/2} \omega_2\left(f_a^{(r)}, \frac{2t}{n}\right)_p Q(t)dt \right\}, \qquad (6)$$

где

$$P(t) = (r-k)(1-\sin t) + (nh)^2(r-k+2)\sin t, \ Q(t) = k(1-\sin t) + (nh)^2(k-2)\sin t.$$

Знак равенства в (6) *достигается для функции $f_0(z) = cz^n \in H_{p,a}^{(r)}$, $1 \leq p \leq \infty$ при значении $h = 1/n$.*

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы* 1.3.4 *при $h = 1/n$ справедливо неравенство*

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_p \leq \frac{\pi(r-k)+4}{2(\pi-2)r} \, n^k \, \omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p + \frac{(\pi-4)k+2r+4}{2(\pi-2)r} n^{-r+k} \omega\left(f_a^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_p.$$

В заключительном четвёртом параграфе первой главы приводятся точные оценки величины нормы второй производной функции, принадлежащей пространству суммируемых в p-й степени функций на всей оси $L_p(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, через модуль гладкости самой функции и модуль гладкости её второй производной.

Теорема 1.4.1. *Для любых натуральных чисел* $0<k\leq n$ *и любого* $\lambda>0$ *справедливо неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\pi-2)\lambda^k}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f,\frac{2t}{\lambda}\right)_2 P(t)dt+\frac{\lambda^{n-k}}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f^{(n)},\frac{2t}{\lambda}\right)_2 Q(t)dt, \tag{7}$$

где

$$P(t)=\frac{n-k}{n}(1-\sin t)+\lambda^4\frac{n-k+2}{n}\sin t,\ Q(t)=\frac{k}{n}(1-\sin t)+\lambda^4\frac{k-2}{n}\sin t.$$

Неравенство (7) *неулучшаемо в том смысле, что для каждого* $\lambda>0$ *существует последовательность функций* $f_n(x,\lambda)$, *для которых отношение левой части неравенства* (7) *к правой стремится к единице при* $n\to\infty$.

Теорема 1.4.2. *Для произвольного тригонометрического полинома*

$$T_m(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\rho_k\cos(kx+\varphi_k)$$

при $r\geq 2$ *справедливо неравенство*

$$\|T_m^{(r)}\|_p\leq\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/q'}\cdot\frac{m^{r+1/q}}{\pi-2}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/(2m)}\omega_2^q(T_m,t)_p dt\right)^{1/q},$$

$$\left(q^{-1}+(q')^{-1}=1,\ 1\leq q,q'\leq\infty\right).$$

Полученное неравенство для $q=1$ ранее доказано Н.Айнуллоевым[4].

Вторая глава диссертации посвящена наилучшей полиномиальной аппроксимации аналитических функций в пространстве Харди и отысканию

[4] Н.Айнуллоев. Точная оценка второй производной в пространстве L_p // Матем. заметки, 1991, т.49, вып.5, с.3-6.

точных значений n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих H_2. В параграфе 2.1 доказаны теоремы, в которых получены точные оценки для наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{H_p}$, $1 \le p \le 2$ через усредненные значения модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)};t)$ и $\omega_m(f_a^{(r)};t)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть функция $f(z) \in H_2^{(r)}$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при $0 < h \le \pi/(n-r)$, $n > r$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le$$

$$\le 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1 - \frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_{H_2}dt\right)^{m/2} \qquad (8)$$

Существует функция $f_0(z) \in H_2^{(r)}$, для которой неравенство (8) *обращается в равенство.*

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}$, $1 \le p \le 2$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при $0 < h \le \pi/n$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le$$

$$\le 2^{-m/2}n^{-r}\left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m/2} \cdot \left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt\right)^{m/2}. \qquad (9)$$

Существует функция $f_0(z) \in H_{2,a}^{(r)}$ для которой (9) *обращается в равенство.*

Теорема 2.1.3 *Пусть $f(z) \in H_p^{(r)}, 1 \le p \le 2$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при $0 < h \le \pi/(n-r)$, $n > r$, $1 \le q \le 2$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p \le$$

$$\le 2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\left(\int\limits_0^h \omega_m^q(f^{(r)},t)_2dt\right)^{1/q}. \qquad (10)$$

Существует функция $f_0(z) \in H_2^{(r)}$, которая обращает (10) *в равенство.*

Аналогичным образом доказывается, что если структурные свойства аналитических функций задавать модулем непрерывности $\omega_m(f_a^{(r)};t)_2$, то справедлива

Теорема 2.1.4. *Пусть $f(z)\in H^{(r)}_{p,a}$, $1\le p\le 2$. Тогда для любых $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/r\le q\le 2$ и $0<h\le\pi/n$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p\le 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\left(\int\limits_0^h\omega_m^q(f_a^{(r)},t)_2dt\right)^{1/q}. \quad (11)$$

Для функции $f_0(z)=z^n\in H^{(r)}_{2,a}$ неравенство (11) *обращается в равенство.* Отметим, что теоремы 2.1.3 и 2.1.4 являются распространением результата М.Ш.Шабозова[5] доказанного для функции класса $L^{(r)}_q[0,2\pi]$ на случай аналитических в круге функций, принадлежащих классам $H^{(r)}_{p,a}$ и $H^{(r)}_p$, $1\le p\le 2$.

Во втором параграфе второй главы найдены точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве H_2.

Прежде чем сформулировать основные результаты данного параграфа, приведем несколько определений и обозначений общего характера.

Пусть $S=\{x\in H_2:\ \|x\|\le 1\}$ – единичный шар в H_2; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество в H_2. $\Lambda_n\subset H_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n\subset H_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}:H_2\to\Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор, переводящий элементы пространства H_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^\perp:H_2\to\Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства H_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M},H_2)=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0;\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset H_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M},H_2)=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2:f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset H_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M},H_2)=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_2:g\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_n\subset H_2\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M},H_2)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|_2:f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathcal{L}H_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset H_2\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M},H_2)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^\perp f\|_2:f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathcal{L}^\perp H_2\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset H_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным* n-поперечниками множества $\mathfrak{M}$ в пространстве H_2.

В соответствии с результатами, полученными в параграфе 2.1, при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{Z}_+$, $0<q\le 2$ и $h>0$ рассматриваются следующие классы

[5]М.Ш.Шабозов. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.

аналитических функций:

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h):=\mathcal{F}(m,n,r;h)=\left\{f\in H_2^{(r)}:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_{H_2}dt\le 1\right\},$$

$$\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h):=\mathcal{F}_a(m,n,r;h)=\left\{f\in H_{2,a}^{(r)}:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_m^{2/m}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt\le 1\right\},$$

$$W_{m,q}^{(r)}(h):=W_q(m,n,r;h)=\left\{f\in H_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\omega_m^{q}(f^{(r)};t)_{H_2}dt\le 1\right\},$$

$$W_{m,q,a}^{(r)}(h):=W_{q,a}(m,n,r;h)=\left\{f\in H_{2,a}^{(r)}:\ \int\limits_0^h\omega_m^{q}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt\le 1\right\}.$$

Имеют место следующие утверждения

Теорема 2.2.1. *При всех* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ *и соответственно* $n>r$, $0<h\le\pi/(n-r),\ 0<h\le\pi/n$ *справедливы равенства*

$$\delta_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(h),H_2)=2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1-\frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2},$$

$$\delta_n(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h),H_2)=2^{-m/2}n^{-r}\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m/2},$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* $n-$*поперечников* $b_n(\cdot),\ d^n(\cdot),\ d_n(\cdot),$ $\lambda_n(\cdot),\ \pi_n(\cdot)$.

Теорема 2.2.2. *При* $m,n,r\in\mathbb{N}$, *соответственно* $0<h\le\pi/(n-r)$, $n>r,\ 1\le q\le 2,\ 0<h\le\pi/n,\ 1/r<q\le 2$ *справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_{m,q}^{(r)}(h),H_2\right)=2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q},$$

$$\delta_n\left(W_{m,q,a}^{(r)}(h),H_2\right)=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q},$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot),\ d^n(\cdot),\ d_n(\cdot),\ \lambda_n(\cdot),\ \pi_n(\cdot)$.

В третьем параграфе второй главы для классов функций

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi)=\left\{f\in H_2^{(r)}:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_{H_2}dt\le\Phi(h)\right\},$$

$$\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi)=\left\{f\in H_{2,a}^{(r)}:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_m^{2/m}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt\le\Phi(h)\right\}.$$

при выполнении некоторых ограничений относительно мажоранты $\Phi(t)$ вычислены точные значения n-поперечников. Для произвольного центрально-симметричного множества $\mathfrak{M}\subset H_2$ пологаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{H_2}=\sup\{E_{n-1}(f):f\in\mathfrak{M}\},$$

$$(1-\cos t)_*=\{1-\cos t,\ \text{если } 0<t\le\pi\ ;\ 2,\ \text{если } t>\pi\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.3.1. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любом $h\in(0,2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))}\ge\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{(n-r)h}\cdot\int\limits_0^{(n-r)h}(1-\cos t)_*dt, \tag{12}$$

то при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\delta_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi),H_2)=E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi))_{H_2}=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}^{m/2},$$

где $\delta_n(\cdot)$ –любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$. Множество мажорант $\Phi(t)$, удовлетворяющих условию (12), не пусто. Указанному условию удовлетворяет, например, функция $\Phi(t)=t^\alpha$, где $\alpha=2/(\pi-2)$.

Теорема 2.3.2. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любом $h\in(0,2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))}\ge\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{(n-r)h}\cdot\int\limits_0^{(n-r)h}(1-\cos t)_*dt,$$

то при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\delta_n(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi),H_2)=$$

$$= E_{n-1}(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi))_{H_2} = n^{-r}\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}^{m/2},$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

В четвёртом параграфе второй главы при любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, соответственно при $0 < h \le \pi/(n-r), r < n, 1 \le q \le 2$ и $0 < h \le \pi/n, 1/r < q \le 2$, $r \in \mathbb{N}$, для классов функций

$$W_{m,q}^{(r)}(h,\Phi) = \left\{ f \in H_2^{(r)} : \int_0^h \omega_m^q(f^{(r)};t)_{H_2}dt \le \Phi(h) \right\},$$

$$W_{m,q,a}^{(r)}(h,\Phi) = \left\{ f \in H_{2,a}^{(r)} : \int_0^h \omega_m^q(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt \le \Phi(h) \right\},$$

при выполнение некоторых ограничений относительно мажоранты Φ вычислены точные значения n-поперечников.

Положим $(\sin t)_*^m = \{\sin^m t, \text{ если } 0 < t \le \pi/2;\ 1 \text{ если } t > \pi/2\}$.

Приводим основной результат четвёртого параграфа второй главы.

Теорема 2.4.1. *Пусть функция $\Phi(u)$ при всех $\mu \in \mathbb{R}_+$, $m, n, r \in \mathbb{N}$, соответственно для $1 \le q \le 2$, $0 < h \le \pi/(n-r)$, $n > r$ и $1/r < q \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, удовлетворяет условию*

$$\Phi^q(u)\int_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mq}dv \le \Phi^q(\mu u)\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mq}dv. \tag{13}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\gamma_n(W_{m,q}^{(r)}(h,\Phi),H_2) = 2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}(n-r)^{\frac{1}{q}}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{mq}tdt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right),$$

$$\gamma_n(W_{m,q,a}^{(r)}(h,\Phi),H_2) = 2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}n^{-\left(r-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{mq}tdt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников: колмогоровский $d_n(\cdot)$, бернштейновский $b_n(\cdot)$, гельфандовский $d^n(\cdot)$, линейный $\lambda_n(\cdot)$, проекционный $\pi_n(\cdot)$. Множество функций Φ, удовлетворяющих условию (13), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$, где

$$\alpha := \pi \left\{ p \int\limits_0^\pi \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{mp} dv \right\}^{-1}.$$

Следствие 2.4.1. *Для любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$, *соответственно при* $1 < q \le 2$ *и* $1/r < q \le 2$, *справедливы равенства*

$$\gamma_n(W^{(r)}_{m,q}(h, \Phi_*), H_2) = 2^{-m}\, \pi^{\alpha - 1/q}\, (\alpha q)^{1/q}\, \alpha^{-1}_{n,r}\, (n-r)^{1/q},\ n > r;$$

$$\gamma_n(W^{(r)}_{m,q,a}(h, \Phi_*), H_2) = 2^{-m}\, \pi^{\alpha - 1/q}\, (\alpha q)^{1/q}\, n^{-r+1/q},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН РТ М.Ш.Шабозову за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Холмамадова Ш.А. Некоторые точные неравенства теории приближения аналитических в круге функций / М.Ш. Шабозов, Ш.А. Холмамадова // ДАН РТ. 2010. Т.53, №8. С.581-588.

2. Холмамадова Ш.А. Об оценке производных аналитических в круге функций / Ш.А. Холмамадова // ДАН РТ. 2011. Т.54, №4. С.265-269.

3. Холмамадова Ш.А. О точных оценках нормы второй производной функции в пространстве $L_p(\mathbb{R}), \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ / Ш.А. Холмамадова // ДАН РТ. 2011. Т.54, №6. С.431-435.

4. Холмамадова Ш.А. О поперечниках некоторых классов аналитических в круге функций / М.Ш. Шабозов, Ш.А. Холмамадова // Известия Тульского государственного университета. Серия естественные науки, 2012. Вып.3. С.48-59.

5. Холмамадова Ш.А. О неравенствах для производных полиномов в пространстве Харди H_p / М.М. Миркалонова, Ш.А. Холмамадова // ДАН РТ. 2013. Т.56, №10. С.767-771.

В других изданиях:

6. Холмамадова Ш.А. О наилучшей полиномиальной аппроксимации аналитических функций в пространстве Харди / Ш.А. Холмамадова // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", 29-30 июня 2012. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2012. – С.179-182.

7. Холмамадова Ш.А. О точных неравенствах для производных полиномов в пространствах H_p, $1 \leq p \leq \infty$ / Ш.А. Холмамадова // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (г.Душанбе, 27-28 апреля 2015). – С. 30-32.