Институт математики им.А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

Холмамадова Шогуна Авобековна

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И НАИЛУЧШЕЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик АН Республики Таджикистан,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е 3

Глава I. Некоторые точные неравенства в теории аппроксимации аналитических в круге функций в пространстве $H_p,\ 1 \le p \le \infty$

§1.1. Постановка задачи и предварительные факты 19

§1.2. Об оценке первой производной функции $f(z) \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$ 24

§1.3. Об оценке второй производной функции $f(z) \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$ 37

§1.4. О точных оценках нормы второй производной функции в пространстве $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < \infty$ 48

Глава II. О наилучшей полиномиальной аппроксимации аналитических функций в пространстве Харди и значение поперечников некоторых классов функций

§2.1. Наилучшее приближение функций $f \in H_p^{(r)} \cap H_{p,a}^{(r)},\ 1 \le p \le \infty$. 53

§2.2. Точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h)$, $W_{m,q}^{(r)}(h),\ W_{m,q,a}^{(r)}(h)$ в пространстве H_2. 61

§2.3. Точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\varphi)$, $\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\varphi)$ 66

§2.4. Точные значения n-поперечников классов функций $W_{m,q}^{(r)}(h,\Phi)$ и $W_{m,q,a}^{(r)}(h,\Phi)$ в H_2 72

Л и т е р а т у р а 79

Введение

В экстремальных задачах теории аппроксимации большое значение имеют неравенства, которые в различных нормированных пространствах оценивают сверху норму промежуточной производной функции через норму самой функции и норму её старшей производной. Первые такие неравенства были получены Э.Ландау, Г.Адамаром, Г.Бором, С.Н.Бернштейном, А.Н. Колмогоровым. Различные типы таких неравенств для вещественных функций как для конечного отрезка, так и для всей оси собраны в монографии В.Ф.Бабенко, Н.П.Корнейчука, В.А.Кофанова и С.А.Пичугова [4].

В то же время в комплексной области, даже в круговых областях такие неравенства доказаны в очень редких случаях. Отметим лишь неравенства Л.В.Тайкова [29], где получены точные оценки величины производной функции через модуль непрерывности её второй производной по аргументу. Эти оценки аналогичны известным неравенствам Ландау-Адамара, содержащим функции и их первую и вторую производных.

Исследования, проведенные в настоящей работе, примыкают к результатам Л.В.Тайкова [29], Н.Айнуллоева [3] и развивают их в круговых областях комплексной плоскости. В качестве следствия выводятся точные оценки для производных полиномов, посредством усреднённых значений модулей непрерывности и гладкости самих полиномов.

Говорят, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 < \rho \leq 1$$

принадлежит банахову пространству Харди $H_p,\ 1 \leq p \leq \infty$, если

$$\|f\|_p := \|f\|_{H_p} = \lim_{\rho \to 1-0} M_p(f, \rho) < \infty,$$

где

$$M_p(f,\rho)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p},\ 1\le p\le\infty,$$

$$\|f\|_\infty:=\|f\|_{H_\infty}=\max\{\|f(z)\|:|z|<1\}<\infty,\ p=\infty.$$

Хорошо известно, что норма функции $f\in H_p$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(t):=f(e^{it})$. Всюду далее через $H_{p,\rho},\ 1\le p\le\infty$, $0<\rho\le 1$ обозначим пространство Харди аналитических в круге $|z|<\rho$ функций с конечной нормой $\|f\|_{H_{p,\rho}}:=\|f(\rho z)\|_{H_p}<\infty$. Символом

$$E_{n-1}(f)_p:=E(f,\mathcal{P}_{n-1})_{H_p}=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_p:p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

обозначим величину наилучшего приближения функции $f\in H_p,\ 1\le p\le\infty$ подпространством полиномов $\mathcal{P}_{n-1}=\{p_{n-1}(z):\ p_{n-1}(z)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kz^k,\ a_k\in\mathbb{C}\}$ степени не выше $n-1$.

Производную r-го порядка функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z=\rho e^{it}$ обозначим $f_a^{(r)}(z)$, а обычную производную r-го порядка обозначим $f^{(r)}(z)$. При этом

$$f_a^{'}(z)=\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=f^{'}(z)\cdot zi,\ \text{и для } r=2,3,\cdots,f_a^{(r)}(z)=\left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a^{'},$$

$$f^{(r)}(z)=d^rf/dz^r,\ r=1,2,\cdots,$$

а соответствующие граничные значения производных обозначим через $f_a^{(r)}(t)$ и $f^{(r)}(t)$. Положим

$$H_p^{(r)}=\left\{f\in H_p,\|f^{(r)}\|_p<\infty\right\},\ H_{p,a}^{(r)}=\left\{f\in H_{p,a},\|f_a^{(r)}\|_p<\infty\right\}.$$

Всюду далее гладкость функции $f\in H_p,\ 1\le p\le\infty$ охарактеризуем скоростью убывания к нулю модуля непрерывности m-го порядка её граничных

значений $f(t)$ в норме пространства $L_p[0,2\pi],\ 1\le p\le\infty$.

$$\omega_m(f;t)_p=\sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f\big(\,\cdot+(m-k)\tau\big)\right\|_p:|\tau|\le t\right\}\qquad(0.0.1)$$

при $t\to 0$, либо зададим скорость убывания к нулю мажорантой некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega_m(f;t)_p$. В частности, из (0.0.1) для произвольной $f(z)\in H_2^{(r)}\cap H_{2,a}^{(r)}$ имеем:

$$\omega_m^2(f_a^{(r)};t)_2=2^m\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|c_k|^2(1-\cos k\tau)^m:\ |\tau|\le t\right\},$$

$$\omega_m^2(f^{(r)};t)_2=2^m\sup\left\{\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k|^2(1-\cos(k-r)\tau)^m:\quad|\tau|\le t\right\},$$

где $\alpha_{k,r}=k(k-1)\cdots(k-r+1):=(k!)/(k-r)!,\ k\ge r$.

При решении экстремальных задач во всех основных результатах в качестве экстремальной функции выступает функция

$$f_0(z)=z^n\in H_p^{(r)}\cap H_{p,a}^{(r)},\ 1\le p\le\infty,$$

модуль непрерывности m-го порядка которой в H_p -норме, при всех $p\in[1,\infty)$ имеет вид.

$$\omega_m^2(f_{0,a}^{(r)};t)_p=\begin{cases}2^m n^{2r}(1-\cos nt)^m, & 0\le nt\le\pi\\ 4^m n^{2r}, & nt>\pi.\end{cases}$$

$$\omega_m^2(f_0^{(r)};t)_p=\begin{cases}2^m\alpha_{n,r}^2(1-\cos(n-r)t)^m, & 0\le(n-r)t\le\pi\\ 4^m\alpha_{n,r}^2, & (n-r)t>\pi.\end{cases}$$

Во втором параграфе получены точные оценки величины производной аналитической в единичном круге функции через усредненное значение ее

модуля непрерывности и модуля непрерывности ее второй производной. Одним из основных результатов второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Для любой функции* $f(z) \in H^{(2)}_{p,a}$, $1 \le p \le 2$ *и любого заданного* $u \in (0, \pi/(2n)]$ *имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\|f_a^{'}\|_{H_p} \le \frac{1}{2} \int_0^u \omega(f_a^{''}, 2x)_p \left(1 - \sin\frac{\pi x}{2u}\right) dx +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int_0^u \omega(f, 2x)_p \sin\frac{\pi x}{2u} dx. \qquad (0.0.2)$$

Неравенство (0.0.2) *неулучшаемо в том смысле, что существует функция* $f_0(z) \in H_p$, $1 \le p \le \infty$, *для которой соотношение* (0.0.2) *обращается в равенство при некотором значении* $u = u_0 \in (0, \pi/2n)$.

Из теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы* 1.2.1 *справедливо неравенство*

$$\|f_a^{'}\|_p \le \frac{1}{2} \int_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{''}, 2x)_p \,(1 - \sin nx)\, dx + \frac{1}{2}\, n^2 \int_0^{\pi/(2n)} \omega(f, 2x)_p \sin nx dx,$$

которое обращается в равенство для $f_0(z) = z^n \in H_p$, $1 \le p \le \infty$. *Более того, для любых* $n, r \in \mathbb{N}$ *верно неравенство*

$$\|f_a^{(r)}\|_p \le \frac{1}{2} \int_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r+1)}, 2x)_p (1 - \sin nx) dx + \frac{n^2}{2} \int_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r-1)}, 2x)_p \sin nx dx,$$

которое тоже обращается в равенство для $f_0(z) = z^n \in H_p$, $1 \le p \le \infty$.

В этом же параграфе доказана следующая

Теорема 1.2.2. *Для произвольного алгебраического комплексного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ *справедливо точное неравенство*

$$\|p_{n,a}^{'}\|_{H_p} \le \frac{1}{4} n^2 \int_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt.$$

которое обращается в равенство для полинома $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1.2.2. *Для любых* $n, r \in \mathbb{N},\ (n > r)$ *и любого алгебраического комплексного полинома* $p_n(z)$ *справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4} n^{r+1} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,\ \ \|p_n^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4} n \alpha_{n,r} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,$$

обращающиеся в равенства для полинома $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Воспользуясь элементарным неравенством [15]

$$\|p_n\|_{H_{p,\rho}} \le \rho^n \|p_n\|_{H_p},\quad (1 \le p \le \infty),$$

из следствия 1.2.2 выведем

Следствие 1.2.3. *Для произвольного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ *справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \le \frac{1}{4} \rho^n n^{r+1} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,\ \ 0 < \rho \le 1,\ \ 1 \le p \le \infty,$$

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \le \frac{1}{4} \rho^n n \alpha_{n,r} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,\ \ 0 < \rho \le 1,\ \ 1 \le p \le \infty.$$

В следующей теореме дано обобщение неравенства из следствия 1.2.2.

Теорема 1.2.3. *При любых* $n, r \in \mathbb{N}$ *,*$n \ge r$ *и* $1 \le q \le \infty$ *для произвольного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ *справедливо неравенство*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4}\ \pi^{1/q'} \cdot n^{r+1/q} \left(\int_0^{\pi/n} \omega^q(p_n, t)_p dt \right)^{1/q},\ \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,\ 1 \le q' \le \infty \right),$$

которое обращается в равенство при $q = 1$ *(или* $q' = \infty$*) для экстремального полинома* $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Используя неравенства

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,\ \rho}} \le \rho^n \cdot\ n^{-r}\ E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_p}\ ,\ E_{n+r-1}(f)_{H_{p,\ \rho}} \le \rho^n \alpha_{n+r,r}^{-1}\ E_{n-1}(f^{(r)})_{H_p},$$

сформулируем следствие, вытекающее из вышеприведённых теорем.

Следствие 1.2.4. *Для произвольной функции* $f_0 \in H_{p,\rho}^{(r)} \cup H_{p,\rho,a}^{(r)}$, $(1 \le p \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,\rho}} \le \rho^n n^{-r} \frac{1}{2} \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f_a^{(r+1)}, 2x\right)_p (1 - \sin nx)dx +$$

$$+ \frac{n^2}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f_a^{(r-1)}, 2x\right)_p \sin nx dx \Bigg\}, \tag{0.0.3}$$

$$E_{n+r-1}(f)_{H_{p,\rho}} \le \rho^n \alpha_{n+r,r}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f^{(r+1)}, 2x\right)_p (1 - \sin nx)dx +$$

$$+ \frac{n^2}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f^{(r-1)}, 2x\right)_p \sin nx dx \Bigg\}, \tag{0.0.4}$$

и знак равенства в неравенствах (0.0.3) *и* (0.0.4) *достигается соответственно для функций* $f_0(z) = z^n \in H_{p,\rho}$ *и* $g_0(z) = z^{n+r} \in H_{p,\rho},\ 1 \le p \le \infty$.

В третьем параграфе мы докажем точные неравенства для оценки величины нормы второй производной аналитической в единичном круге функции, принадлежащей пространству Харди $f(z) \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$, через усреднённое значение модуля гладкости самой функции и через усреднённое значение модуля гладкости её второй производной.

Теорема 1.3.1. *Для произвольной функции* $f(z) \in H_{p,a}^{(2)},\ 1 \le p \le \infty$ *имеет место точное неравенство*

$$\|f_a''\|_{H_p} \le \frac{n}{\pi - 2} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f'', 2t)_p (1 - \sin nt) dt + n^2 \int_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f, 2t)_p \sin nt dt \right\}. \qquad (0.0.5)$$

Неравенство (0.0.5) *обращается в равенство для функции* $f_0(z) = z^n \in H^{(2)}_{p,a}$.

Из неравенства (0.0.5), воспользуясь неравенством Зигмунда, можно получить оценки нормы производных для комплексных алгебраических полиномов через усреднённые значения их модулей гладкости.

Теорема 1.3.2. *Для произвольного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ *справедливо неравенство*

$$\left\| p''_{n,a} \right\|_{H_q} \leq \frac{n^3}{2(\pi - 2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n, t)_{H_q} dt$$

и равенство достигается для полинома $q_n(z) = cz^n \in H^{(2)}_{q,a},\ c \in \mathbb{C}$.

Следствие 1.3.1. *Для любых целых неотрицательных* $r \geq 2$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ *справедливо точное неравенство*

$$\left\| p^{(r)}_{n,a} \right\|_{H_p} \leq \frac{n^{r+1}}{2(\pi - 2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n, t)_p \ dt$$

и знак равенство реализуется для полинома $q_n(z) = cz^n \in H^{(r)}_{q,a}$, $c \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.3.3. *Для произвольного полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$, *при любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$ *справедливо неравенство*

$$\left\| p^{(r)}_{n,a} \right\|_{H_p} \leq \frac{\pi^{1/q'}}{2(\pi - 2)} n^{r + \frac{1}{q}} \left(\int_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n, t)_p \ dt \right)^{1/q}, \left(1 \leq q \leq \infty,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \right),$$

причём при $q' = \infty$ *неравенство точное.*

Теорема 1.3.4. *Для натуральных чисел* $0 \le k \le n, h > 0$ *и любого* $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $k \le r \le n$, $1 \le p \le \infty$, *при произвольном* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\left\| f_a^{(k)} \right\|_{H_p} \le \frac{1}{(\pi-2)rh^k} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi/2} \omega_2 \left(f, \frac{2t}{n} \right)_p P(t)dt + \frac{h^{r-k}}{(\pi-2)r} \int_0^{\pi/2} \omega_2 \left(f_a^{(r)}, \frac{2t}{n} \right)_p Q(t)dt \right\}, \qquad (0.0.6)$$

где

$$P(t) = (r-k)(1-\sin t)+(nh)^2(r-k+2)\sin t,\ Q(t) = k(1-\sin t)+(nh)^2(k-2)\sin t.$$

Знак равенства в (0.0.6) *достигается для функции* $f_0(z) = cz^n \in H_{p,a}^{(r)}$, $(1 \le p \le \infty)$ *при значении* $h = 1/n$.

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы* 1.3.4 *при* $h = 1/n$ *справедливо неравенство*

$$\left\| f_a^{(k)} \right\|_p \le \frac{\pi(r-k)+4}{2(\pi-2)r}\ n^k\ \omega\left(f; \frac{\pi}{n} \right)_p + \frac{(\pi-4)k+2r+4}{2(\pi-2)r} n^{-r+k} \omega\left(f_a^{(r)}; \frac{\pi}{n} \right)_p .$$

В заключительном четвёртом параграфе первой главы приводятся точные оценки величины нормы второй производной функции, принадлежащей пространству суммируемых в p-й степени функций на всей оси $L_p(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, через модуль гладкости самой функции и модуль гладкости её второй производной.

Теорема 1.4.1. *Для любых натуральных чисел* $0 < k \le n$ *и любого* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\| f^{(k)} \|_2 \le$$

$$\leq \frac{1}{(\pi-2)\lambda^k}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f,\frac{2t}{\lambda}\right)_2 P(t)dt+\frac{\lambda^{n-k}}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f^{(n)},\frac{2t}{\lambda}\right)_2 Q(t)dt, \quad (0.0.7)$$

где

$$P(t)=\frac{n-k}{n}(1-\sin t)+\lambda^4\frac{n-k+2}{n}\sin t,\ Q(t)=\frac{k}{n}(1-\sin t)+\lambda^4\frac{k-2}{n}\sin t.$$

Неравенство (0.0.7) *неулучшаемо в том смысле, что для каждого* $\lambda>0$ *существует последовательность функций* $f_n(x,\lambda)$, *для которых отношение левой части неравенства* (0.0.7) *к правой стремится к единице при* $n\to\infty$.

Теорема 1.4.2. *Для произвольного тригонометрического полинома*

$$T_m(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\rho_k\cos(kx+\varphi_k)$$

при $r\geq 2$ *справедливо неравенство*

$$\|T_m^{(r)}\|_p\leq\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/q'}\cdot\frac{m^{r+1/q}}{\pi-2}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/(2m)}\omega_2^q(T_m,t)_p dt\right)^{1/q},$$

$$\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ 1\leq q,q'\leq\infty\right).$$

Вторая глава диссертации посвящена наилучшей полиномиальной аппроксимации аналитических функций в пространстве Харди и значению поперечников некоторых классов функций. Отметим, что поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди вычислены в работах [1,5-12,14,16-18,22-26,28,30,32-35,36,38-48].

В параграфе 2.1 доказаны теоремы, в которых получены точные оценки для наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{H_2}$ через усредненные значения моду-

лей непрерывности $\omega_m(f^{(r)};t)$ и $\omega_m(f_a^{(r)};t)$ в предположении, что приближающаяся функция $f \in H_p^{(r)} \cap H_{p,a}^{(r)}$, $1 \le p \le 2$.

Теорема 2.1.1. *Пусть функция $f(z) \in H_2^{(r)}$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при $0 < h \le \pi/(n-r)$, $1 \le p \le 2$ имеет место точное неравенство.*

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le$$

$$\le 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1 - \frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2}\left(\frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_{H_2}dt\right)^{m/2}. \qquad (0.0.8)$$

Существует функция $f_0(z) \in H_2^{(r)}$, для которой неравенство (0.0.8) *обращается в равенство.*

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $f(z) \in H_{2,a}^{(r)}$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при $0 < h \le \pi/n$ и $1 \le p \le 2$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le$$

$$\le 2^{-m/2}n^{(-r)}\left(1 - \frac{\sin(nh}{(nh}\right)^{-m/2} \cdot \left(\frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt\right)^{m/2}. \qquad (0.0.9)$$

Существует функция $f_0(z) \in H_{2,a}^{(r)}$, для которой (0.0.9) *обращается в равенство.*

Теорема 2.1.3. *Пусть $f(z) \in H_p^{(r)}, 1 \le p \le 2$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при $0 < h \le \pi/(n-r)$, $n > r$, $1 \le q \le 2$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p \le$$

$$\le 2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\left(\int_0^h \omega_m^q(f^{(r)},t)_2dt\right)^{1/q}. \qquad (0.0.10)$$

Существует функция $f_0(z) \in H_2^{(r)}$, которая обращает (0.0.10) *в равенство.*

Из теоремы 2.1.3 аналогичным образом доказывается, что если структурные свойства аналитических функций задавать модулем непрерывности $\omega_m(f_a^{(r)};t)_2$, то справедлива

Теорема 2.1.4. *Пусть* $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}$, $1 \le p \le 2$. *Тогда для любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \le q \le 2$ *и* $0 < h \le \pi/n$ *имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p \le 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mq} dt \right)^{-1/q} \left(\int_0^h \omega_m^q(f_a^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}. \quad (0.0.11)$$

При $1 \le p \le 2$ *для функции* $f_0(z) = z^n \in H_{2,a}^{(r)}$ *неравенство* (0.0.11) *обращается в равенство.*

Во втором параграфе второй главы найдены точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h)$, $W_{m,q}^{(r)}(h)$, $W_{m,q,a}^{(r)}(h)$ в пространстве H_2.

Прежде чем сформулировать основные результаты данного параграфа, приведем несколько определений и обозначений общего характера.

Пусть $S = \{x \in H_2 : \ \|x\| \le 1\}$ – единичный шар в H_2; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество в H_2; $\Lambda_n \subset H_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset H_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : H_2 \to \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор, переводящий элементы пространства H_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^\perp : H_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства H_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, H_2) = \sup \{\sup \{\varepsilon > 0; \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset H_2\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf \{\sup \{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset H_2\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf \{\sup \{\inf \{\|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda_n \subset H_2\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}H_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H_2\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}^{\perp}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}^{\perp}H_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками множества $\mathfrak{M}$ в пространстве H_2. Указанные n-поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве H_2 удовлетворяют соотношения.

$$b_n(\mathfrak{M}; H_2) \le d^n(\mathfrak{M}; H_2) \le d_n(\mathfrak{M}; H_2) = \lambda_n(\mathfrak{M}; H_2) = \pi_n(\mathfrak{M}; H_2).$$

Во втором параграфе второй главы, в соответствии с результатами, полученными в параграфе 2.1, рассматриваются следующие классы аналитических функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h),\ \mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h),\ W_{m,q}^{(r)}(h),\ W_{m,q,a}^{(r)}(h)$.

При любых $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \le 2$ и $h > 0$ определим следующих классы аналитических функций:

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h) := \mathcal{F}(m, n, r : h) = \left\{ f \in H_2^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)_{H_2} dt \le 1 \right\},$$

$$\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h) := \mathcal{F}_a(m, n, r : h) = \left\{ f \in H_{2,a}^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}; t)_{H_2} dt \le 1 \right\},$$

$$W_{m,q}^{(r)}(h) := W_q(m, n, r : h) = \left\{ f \in H_2^{(r)} :\ \int_0^h \omega_m^{q}(f^{(r)}; t)_{H_2} dt \le 1 \right\},$$

$$W_{m,q,a}^{(r)}(h) := W_{q,a}(m, n, r : h) = \left\{ f \in H_{2,a}^{(r)} :\ \int_0^h \omega_m^{q}(f_a^{(r)}; t)_{H_2} dt \le 1 \right\}.$$

Имеют место следующие утверждения

Теорема 2.2.1. *При всех* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ *и соответственно* $n>r$, $0 < h \le \pi/(n-r),\ 0 < h \le \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\delta_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), H_2) = 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1 - \frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2},$$

$$\delta_n(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h), H_2) = 2^{-m/2}n^{-r}\left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m/2},$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* $n-$*поперечников* $b_n(\cdot),\ d^n(\cdot),\ d_n(\cdot),$ $\lambda_n(\cdot),\ \pi_n(\cdot)$.

Теорема 2.2.2. *При* $m, n, r \in \mathbb{N}$, *соответственно* $0 < h \le \pi/(n-r)$, $n > r,\ 1 \le q \le 2,\ 0 < h \le \pi/n,\ 1/r < q \le 2$ *справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_{m,q}^{(r)}(h), H_2\right) = 2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q},$$

$$\delta_n\left(W_{m,q,a}^{(r)}(h), H_2\right) = 2^{-m}n^{-r}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q},$$

где $\delta_n(\cdot)-$ *любой из* $n-$*поперечников* $b_n(\cdot),\ d^n(\cdot),\ d_n(\cdot),\ \lambda_n(\cdot),\ \pi_n(\cdot)$.

В параграфе 2.3 для классов функций

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h, \Phi) = \left\{ f \in H_2^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)_{H_2} dt \le \Phi(h) \right\},$$

$$\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h, \Phi) = \left\{ f \in H_{2,a}^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}; t)_{H_2} dt \le \Phi(h) \right\}$$

при выполнении некоторых ограничений относительно мажоранты $\Phi(t)$ вычислены точные значения n-поперечников. Данные классы определены при любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, соответственно при $0 < h \le \pi/(n-r),\ r < n,\ 1 \le q \le 2$

и $0 < h \le \pi/n,\ 1/r < q \le 2$, а $\Phi(t)$ – произвольная, непрерывная, возрастающая при $t \ge 0$ функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Также для произвольного центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset H_2$ полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{H_2} = sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.3.1. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любом $h \in (0, \pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \ge \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{(n-r)h} \cdot \int\limits_0^{(n-r)h} (1-\cos t)_* dt, \qquad (0.0.12)$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\delta_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi), H_2) = E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi))_{H_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{m/2},$$

где $\delta_k(\cdot)$ –любой из k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$ или $\Pi_k(\cdot)$. Множество мажорант $\Phi(t)$, удовлетворяющих условию (0.0.12)*, не пусто.*

Этому условию удовлетворяет, например, функция $\Phi(t) = t^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi-2)$.

Теорема 2.3.2. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любом $h \in (0, \pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \ge \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{(n-r)h} \cdot \int\limits_0^{(n-r)h} (1-\cos t)_* dt,$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\delta_n(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi), H_2) =$$

$$= E_{n-1}(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi))_{H_2} = n^{-r} \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{m/2},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников.

В четвёртом параграфе второй главы для наиболее общих классов функций $W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)$ и $W^{(r)}_{m,q,a}(h,\Phi)$, при выполнении некоторых ограничений относительно мажоранты $\Phi(u)$, вычисляются точные значения всех введённых n-поперечников в гильбертовом пространстве H_2. Указанные классы функции определены следующим образом. При любых $m,n,r\in\mathbb{N}$, соответственно при $0<h\le\pi/(n-r), r<n, 1\le q\le 2$ и $0<h\le\pi/n, 1/n<q\le 2$ полагается

$$W^{(r)}(\Phi):=W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)=\left\{f\in H^{(r)}_2:\ \int\limits_0^h\omega^q_m(f^{(r)};t)_{H_2}dt\le\Phi(h)\right\},$$

$$W^{(r)}_a(\Phi):=W^{(r)}_{m,q,a}(h,\Phi)=\left\{f\in H^{(r)}_{2,a}:\ \int\limits_0^h\omega^q_m(f^{(r)}_a;t)_{H_2}dt\le\Phi(h)\right\}.$$

Положено $(\sin t)^m_*=\{\sin^m t,\ \text{если } 0<t\le\pi/2;\ 1 \text{ если } t>\pi/2\}$. Приводим основной результат заключительного параграфа второй главы.

Теорема 2.4.1. *Пусть функция $\Phi(u)$ при всех $\mu\in\mathbb{R}_+$, $m,n,r\in\mathbb{N}$, соответственно для $1\le q\le 2$, $0<h\le\pi/(n-r)$, $n>r$ и $1/r<q\le 2$, $0<h\le\pi/n$, удовлетворяет условию*

$$\Phi^q(u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mq}_* dv\le\Phi^q(\mu u)\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mq}dv. \tag{0.0.13}$$

Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\gamma_n(W^r(\Phi),H_2)=2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}(n-r)^{\frac{1}{q}}\alpha^{-1}_{n,r}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{mq}t dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right),$$

$$\gamma_n(W^r_a(\Phi),H_2)=2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}n^{-\left(r-\frac{1}{q}\right)}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{mq}t dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников: колмогоровский* $d_n(\cdot)$*, бернштейновский* $b_n(\cdot)$*, гельфандовский* $d^n(\cdot)$*, линейный* $\lambda_n(\cdot)$*, проекционный* $\pi_n(\cdot)$*. Множество функций* Φ*, удовлетворяющих условию* (0.0.13)*, не пусто.*

Следствие 2.4.1. *Для любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$*, соответственно при* $1 < q \le 2$ *и* $1/r < q \le 2$*, справедливы равенства*

$$\gamma_n(W^r(\Phi_*), H_2) = 2^{-m}\ \pi^{\alpha-1/q}\ (\alpha q)^{1/q}\ \alpha_{n,r}^{-1}\ (n-r)^{1/q},\ n > r;$$

$$\gamma_n(W_a^r(\Phi_*), H_2) = 2^{-m}\ \pi^{\alpha-1/q}\ (\alpha q)^{1/q}\ n^{-r+1/q},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

ГЛАВА I

Некоторые точные неравенства в теории аппроксимации аналитических функций в пространстве Харди $H_p,\ 1 \le p \le \infty$

§1.1. Постановка задачи и предварительные факты

В экстремальных задачах теории приближения аналитических в круге функций точные неравенства позволяют установить новые связи между конструктивными и структурными свойствами функций. Поэтому известное неравенство Джексона-Стечкина, содержащее оценки величины наилучшего приближения аналитических в круге функций алгебраическими комплексными полиномами посредством модулей непрерывности $m (m \in \mathbb{N})$-го порядка её r-той производной, интенсивно изучалось во многих работах (Л.В.Тайков [28-31], Н.Айнуллоев и Л.В.Тайков [2], М.З.Двейрин [14-16], С.Б.Вакарчук [5-10], М.Ш.Шабозов и Г.А.Юсупов [44], М.Ш.Шабозов и О.Ш.Шабозов [47,49]) с целью его оптимизации. Подобные задачи изучаются в данной главе для некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди $H_p, 1 \le p \le \infty$.

В первом параграфе получены точные оценки величины производной аналитической в единичном круге функций через усредненное значение ее модуля непрерывности и модуля непрерывности ее второй производной.

Во втором параграфе аналогичная задача решена для второй производной аналитических в круге функций, а именно получена точная оценка величины второй производной через усредненное значение ее модуля гладкости и модуля гладкости ее второй производной. В качестве применения полученных результатов приводится точная оценка второй производной алгебраических

комплексных полиномов через усредненные значения модулей непрерывности и модулей гладкости самих полиномов.

В третьем параграфе приведены точные оценки величины нормы второй производной функции, принадлежащей пространству $L_p(\mathbb{R})$ $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, суммируемых в p-й степени функций на всей оси, через усреднённые значения модулей гладкости самой функции и её второй производной.

Для дальнейшего изложения приводим основные определения и факты. Обозначим через $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ – множество положительных чисел, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – множество точек всей действительной оси.

Определение 1.1.1. Говорят, что произвольная аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ z = \rho e^{it}, \ 0 < \rho \leq 1, \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

принадлежит пространству Харди H_p, $1 \leq p \leq \infty$, если

$$\|f\|_{H_q} = \begin{cases} \lim\limits_{\rho \to 1-0} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) \right|^q dt \right)^{1/q} < \infty, & \text{если } 1 \leq p < \infty \\ \max \{ |f(z)| : |z| < 1 \} < \infty, & \text{если } p = \infty. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Известно [21,27], что для $f \in H_p$ почти везде на окружности $|z| = 1$ существуют угловые граничные значения $f(t) := f(e^{it}) \in L_p$, $1 \leq q \leq \infty$. Через $f^{(r)}(t)$ $\left(r \in \mathbb{Z}_+; \ f^{(0)}(t) \equiv f(t)\right)$ обозначим граничные значения r-й производной $f^{(r)}(z) = d^r f / dz^r$, а через $f_a^{(r)}(t)$ $\left(r \in \mathbb{Z}_+; \ f^{(0)}(t) \equiv f(t)\right)$ обозначим граничные значения r-й производной по аргументу $f_a^{(r)}(z) = d^r f(\rho e^{it}) / dt$,

$r \in \mathbb{Z}_+$. При этом $f_a^{'}(z) = f^{'}(z)zi$ и имеет место рекуррентная формула

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{ f_a^{(r-1)} \right\}_a^{'}, r \geq 2.$$

Всюду в дальнейшем полагаем

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r},\ \alpha_{k,r} = k(k-1)\cdots(k-r+1),\ k \geq r, \qquad (1.1.2)$$

$$f_a^{(r)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (ik)^r c_k \rho^k e^{ikt} := \sum_{k=0}^{\infty} (ik)^r c_k z^k. \qquad (1.1.3)$$

Множество всех комплексных алгебраических полиномов степени n обозначим

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in C,\ |a_n| \neq 0 \right\}.$$

Величина

$$E_{n-1}(f)_{H_p} := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_{H_p} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{H_p} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

называется наилучшим приближением функции $f \in H_p$ полиномами $p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}$. Если $f \in H_p$ имеет непрерывные граничные значения $f(t)$, то их гладкость характеризуем модулем непрерывности m-го порядка в L_p-норме

$$\omega_m(f;t)_{H_p} = \sup \left\{ \|\Delta_m(f;\cdot,u)\|_p : u \in [0,t] \right\}, 1 \leq p \leq \infty,$$

где $\|\cdot\|_p$ – определено равенством (1.1.1) и, как обычно,

$$\Delta_m(f;x,u) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+ku)$$

– конечная разность m-го порядка функции $f(z) \in H_p$ в точке x с шагом u. В частности, из равенства (1.1.2) следует, что если $f^{(r)}(t)$ угловое граничное значение $f^{(r)}(z) \in H_2$, то, согласно неравенству Парсеваля, имеем

$$\omega_m^2(f^{(r)};t)_2 = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 (1-\cos(k-r)u)^m :\ u \in [0,t] \right\}. \quad (1.1.4)$$

Аналогичным образом, если $f_a^{(r)}(z) \in H_2$, то, используя равенство (1.1.3) и применяя снова равенства Парсеваля, находим

$$\omega_m^2(f_a^{(r)};t)_2 = 2^m \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}|c_k|^2(1-\cos(ku))^m : \ u \in [0,t]\right\}. \tag{1.1.5}$$

В частности, для функции $f_0(z) = z^n \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$ из равенств (1.1.4) и (1.1.5) сразу получаем

$$\omega_m^2(f_0^{(r)};t)_2 = \begin{cases} 2^m\alpha_{n,r}^2(1-\cos(n-r)t)^m, & \text{если } 0 < (n-r)t \le \pi \\ 4^m\alpha_{n,r}^2, & \text{если } (n-r)t \ge \pi. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

$$\omega_m^2(f_{0,a}^{(r)};t)_2 = \begin{cases} 2^m n^{2r}(1-\cos nt)^m, & \text{если } 0 < nt < \pi \\ 4^m n^{2r}, & \text{если } nt \ge \pi. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Отметим, что для произвольной аналитической в единичном круге функции $f(z) \in H_2$ в силу уравнения замкнутости справедливо равенство

$$E_{n-1}^{\ 2}(f)_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|^2 = \sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2, \tag{1.1.8}$$

а также в силу неравенства Гёльдера и (1.1.8) имеет место соотношение

$$E_{n-1}^{\ 2}(f)_p \le E_{n-1}^{\ 2}(f)_2, 1 \le p \le 2.$$

Всюду далее для $1 \le p \le \infty$ положим

$$H_p^r = \left\{f(z) \in H_p,\ \|f^{(r)}\|_p < \infty\right\},$$

$$H_{p,a}^r = \left\{f(z) \in H_p,\ \|f_a^{(r)}\|_p < \infty\right\}.$$

Нам для выводов наших основных результатов в первом и втором параграфах понадобится следующее обобщённое неравенство Минковского

$$\left\|\int_c^d f(\cdot,u)du\right\|_{L_{p[a,b]}} \le \int_c^d \|f(\cdot,u)\|_{L_{p[a,b]}}du,\ 1 \le p \le \infty \tag{1.1.9}$$

в предположении, что интеграл справа существует. При $p = 1, \infty$ справедливость (1.1.9) очевидна, а при $1 < p < \infty$ оно известно как обобщённое неравенство Минковского (см., например, [20, с.395]):

$$\left(\int_a^b \left| \int_c^d f(t,u)du \right|^p dt \right)^{1/p} \leq \int_c^d \|f(\cdot,u)\|_{L_{p[a,b]}} du, \ 1 \leq p \leq \infty. \qquad (1.1.10)$$

Нам также понадобится следующее хорошо известное неравенство Харди (см., например [37], с.232):

$$\|f^{(k)}\|_p \leq \|f\|_p^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|_p^{\frac{k}{n}}, \quad (1 \leq p \leq \infty, \, 1 \leq k \leq n, \, k, n \in \mathbb{N}),$$

а также его линейная форма в следующем виде

$$\left\| f^{(k)} \right\|_p \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right) h^{-k} \ \|f\|_p \ + \ \frac{k}{n} \ h^{n-k} \ \left\| f^{(n)} \right\|_p,$$

где $\|f\|_p := \|f\|_{H_p}, \ (1 \leq p \leq \infty)$.

§1.2. Об оценке первой производной функции $f(z) \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$

В этом параграфе мы решим экстремальную задачу о точной оценке величины производной первого порядка аналитической в круге функции $f(z) \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$ через усредненные значения модуля непрерывности самой функции и модуля непрерывности ее второй производной по аргументу. Из полученных результатов выводятся следствия, содержащие точные неравенства для алгебраических комплексных полиномов

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},\ |a_n| \neq 0, \tag{1.2.1}$$

являющиеся обобщением известными неравенствами С.Н.Бернштейна [37] для полиномов вида (1.2.1):

$$\|p_{n,a}^{(k)}\|_{H_p} \le n^k \|p_n\|_{H_p}, \quad \|p_n^{(k)}\|_{H_p} \le n(n-1)...(n-k)\|p_n\|_{H_p}.$$

доказанны Л.В. Тайковым [28]. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. *Для любой функции $f(z) \in H_{p,a}^{(2)}$, $1 \le p \le 2$ и любого заданного $u \in (0, \pi/(2n)]$ имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\|f_a^{'}\|_{H_p} \le \frac{1}{2} \int_0^u \omega(f_a^{''}, 2x)_p \left(1 - \sin\frac{\pi x}{2u}\right) dx +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int_0^u \omega(f, 2x)_p \sin\frac{\pi x}{2u}\, dx. \tag{1.2.2}$$

Неравенство (1.2.2) *неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in H_p$ $(1 \le p \le \infty)$, для которой* (1.2.2) *обращается в равенство при некотором значении $u = u_0 \in (0, \pi/2n)$.*

Доказательство. Так как $f \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$, то в силу аналитичности $f(z)$, согласно теореме Вейерштрасса, производная $f_a^{'}(z)$ аналитична в круге

$|z| < 1$. По производной $f_a^{'}(z)$ для всех $u \in (0, \pi/(2\pi)]$, $n \in \mathbb{N}$ вводим в рассмотрение специальный оператор

$$A(f_a{}', t) = \frac{\pi}{4u} \int\limits_0^u \{f_a{}'(t+x) + f_a{}'(t-x)\} \cos \frac{\pi x}{2u} dx. \tag{1.2.3}$$

Из (1.2.3), полагая, в частности, $f_a^{'}(z) \equiv 1$, получаем равенство:

$$A(1, t) = \frac{\pi}{2u} \int\limits_0^u \cos \frac{\pi x}{2u} dx = \int\limits_0^u d(\sin \frac{\pi x}{2u}) = 1.$$

Так как согласно неравенству треугольника (в данном случае неравенство Минковского)

$$\|f_a^{'}\|_{H_p} \leq \|f_a^{'} - A(f_a^{'})\|_{H_p} + \|A(f_a^{'})\|_{H_p}, \ 1 \leq p \leq \infty, \tag{1.2.4}$$

то мы оцениваем каждое из слагаемых в правой части (1.2.4). Интегрируя по частям, для первого слагаемого стоящего под нормой получаем

$$f_a^{'}(t) - A(f_a^{'}, t) =$$

$$= -\frac{\pi}{4u} \int\limits_0^u \{f_a{}'(t+x) - 2f_a^{'}(t) + f_a{}'(t-x)\} \cos \frac{\pi x}{2u} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^u \{f_a{}'(t+x) - 2f_a^{'}(t) + f_a{}'(t-x)\} \ d\left(\sin \frac{\pi x}{2u}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \{f_a{}'(t+x) - 2f_a^{'}(t) + f_a{}'(t-x)\} \ \sin \frac{\pi x}{2u} \Big|_0^u +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^u \{f_a{}''(t+x) - f_a{}''(t-x)\} \sin \frac{\pi x}{2u} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\{f_a{}'(t+u) - 2f_a^{'}(t) + f_a{}'(t-u)\}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^u \{f_a{}''(t+x) - f_a{}''(t-x)\}\sin\frac{\pi x}{2u}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^u \{f_a{}''(t+x) - f_a{}''(t-x)\}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^u \{f_a{}''(t+x) - f_a{}''(t-x)\}\sin\frac{\pi x}{2u}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^u \{f_a{}''(t+x) - f_a{}''(t-x)\}\left\{1-\sin\frac{\pi x}{2u}\right\}dx. \qquad (1.2.5)$$

Из равенства (1.2.5), применяя обобщенное неравенство Минковского (1.1.9), будем иметь

$$\|f_a^{'} - A(f_a^{'})\|_p =$$

$$= \left\| -\frac{1}{2}\int_0^u \{f_a{}''(\cdot+x) - f_a{}''(\cdot-x)\}\left\{1-\sin\frac{\pi x}{2u}\right\}dx \right\|_p \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^u \|f_a{}''(\cdot+x) - f_a{}''(\cdot-x)\|_p \left\{1-\sin\frac{\pi x}{2u}\right\}dx. \qquad (1.2.6)$$

С другой стороны, выполнив интегрирование по частям в равенстве (1.2.3), получаем:

$$A(f_a^{'},t) = \frac{\pi}{4u}\int_0^u \{f_a{}'(t+x) + f_a{}'(t-x)\}\cos\frac{\pi x}{2u}dx =$$

$$= \frac{\pi}{4u}\int_0^u \cos\frac{\pi x}{2u}\; d(f(t+x) - f(t-x)) =$$

$$= \frac{\pi}{4u} \cdot \ (f(t+x) - f(t-x)) \cos \frac{\pi x}{2u} \Big|_0^u +$$

$$+ \frac{\pi}{4u} \cdot \frac{\pi}{2u} \int_0^u \{f(t+x) - f(t-x)\} \sin \frac{\pi x}{2u} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int_0^u \{f(t+x) - f(t-x)\} \sin \frac{\pi x}{2u} dx.$$

Отсюда, применив снова обобщенное неравенство Минковского, приходим к следующей оценке

$$\|A(f_a^{'})\|_{H_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(f_a^{'})|^p dt \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^u \{f(t+x) - f(t-x)\} \sin \frac{\pi x}{2u} dx \right|^p dt \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \cdot \left\| \int_0^u \{f(\cdot + x) - f(\cdot - x)\} \sin \frac{\pi x}{2u} dx \right\|_p \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int_0^u \|f(\cdot + x) - f(\cdot - x)\|_p \ \sin \frac{\pi x}{2u} dx,$$

Таким образом, мы доказали, что для произвольной функции $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|A(f_a^{'})\|_{H_p} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int_0^u \|f(\cdot + x) - f(\cdot - x)\|_p \sin \frac{\pi x}{2u} \ dx. \qquad (1.2.7)$$

Складывая неравенства (1.2.6) и (1.2.7), с учётом (1.2.4) запишем

$$\|f_a^{'}\|_{H_p} \leq \frac{1}{2} \int_0^u \|f_a{}''(\cdot + x) - f_a{}''(\cdot - x)\|_p \left\{1 - \sin \frac{\pi x}{2u}\right\} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^2\int\limits_0^u \|f(\cdot+x)-f(\cdot-x)\|_p \sin\frac{\pi x}{2u}dx, \tag{1.2.8}$$

откуда с учетом определения модуля непрерывности $\omega(f,t)_p$ сразу вытекает утверждение теоремы 1.2.1. Знак равенства в неравенстве (1.2.8) при $u=\pi/(2n)$ достигается для функции $f_0(z)=z^n\in H_p,\ 1\le p\le\infty$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы* 1.2.1 *справедливо неравенство*

$$\|f_a^{'}\|_p \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{''},2x)_p\,(1-\sin nx)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\,n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f,2x)_p \sin nx dx, \tag{1.2.9}$$

которое обращается в равенство для $f_0(z)=z^n\in H_p,\ 1\le p\le\infty$. *Более того, для любых* $n,r\in\mathbb{N}$ *верно неравенство*

$$\|f_a^{(r)}\|_p \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r+1)},2x)_p(1-\sin nx)dx+$$

$$+\frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r-1)},2x)_p \sin nx dx, \tag{1.2.10}$$

которое тоже обращается в равенство для $f_0(z)=z^n\in H_p,\ 1\le p\le\infty$.

Докажем точность неравенства (1.2.9) для функции $f_0(z)=z^n\in H_p$, $1\le p\le\infty$. В самом деле, с одной стороны, так как

$$f_{0,a}^{'}(z)=\left(\rho^n e^{int}\right)^{'}=in\rho^n e^{int}=inz^n,$$

$$f_{0,a}^{''}(z)=\{f_{0,a}^{'}(z)\}_a^{'}=\left(in\rho^n e^{int}\right)_t^{'}=(in)^2\rho^n e^{int}=(in)^2 z^n,$$

то мы имеем

$$\|f'_{0,a}\|_{H_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f'_{0,a}(e^{it})|^p dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |in(e^{int})|^p dt\right)^{1/p} = n\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt\right)^{1/p} = n. \qquad (1.2.11)$$

С другой стороны, согласно формуле (1.1.7) имеем:

$$\omega(f^{(r)}_{0,a}, h)_p = \begin{cases} 2n^r \sin\dfrac{nh}{2}, & \text{если } \ 0 \le nh \le \pi \\ 2n^r, & \text{если } nh \ge \pi. \end{cases} \qquad (1.2.12)$$

Воспользуясь формулой (1.2.12), запишем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f''_{0,a}, 2x)_p(1-\sin nx)dx + \frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f, 2x)_p \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} 2n^2 \sin nx(1-\sin nx)dx + \frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} 2\sin nx \sin nx dx =$$

$$= n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)} (\sin nx - \sin^2 nx)dx + n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)} \sin^2 nx dx =$$

$$= n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)} \sin nx dx = -ncosnx\Big|_0^{\pi/(2n)} = n. \qquad (1.2.13)$$

Точность неравенства (1.2.9) на функцию $f_0(z) = z^n \in H_p, 1 \le p \le \infty$ вытекает из сопоставления равенств (1.2.11) и (1.2.13). Аналогичным образом устанавливается точность неравенства (1.2.10).

Теорема 1.2.2. *Для произвольного алгебраического комплексного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ справедливо точное неравенство*

$$\|p_{n,a}^{'}\|_{H_p} \leq \frac{1}{4}n^2 \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n,t)_p dt, \tag{1.2.14}$$

которое обращается в равенство для полинома $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В неравенстве (1.2.8) полагаем $f(z) = p_n(z)$, и используя неравенство Зигмунда [19, стр. 20-22]

$$\|P_{n,a}^{''}(\cdot + x) - P_{n,a}^{''}(\cdot - x)\|_p \leq n^2 \ \|P_n(\cdot + x) - P_n(\cdot - x)\|_p,$$

запишем

$$\|p_{n,a}^{'}\|_{H_p} \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^u \|p_{n,a}{}''(\cdot + x) - p_{n,a}{}''(\cdot - x)\|_p \left\{1 - \sin\frac{\pi x}{2u}\right\} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int\limits_0^u \|p_n(\cdot + x) - p_n(\cdot - x)\|_p \sin\frac{\pi x}{2u} dx \leq$$

$$\leq \frac{n^2}{2} \int\limits_0^u \|p_n(\cdot + x) - p_n(\cdot - x)\|_p \left\{1 - \sin\frac{\pi x}{2u}\right\} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \int\limits_0^u \|p_n(\cdot + x) - p_n(\cdot - x)\|_p \sin\frac{\pi x}{2u} dx =$$

$$= \int\limits_0^u \|p_n(\cdot + x) - p_n(\cdot - x)\|_p \left\{\frac{n^2}{2}\left(1 - \sin\frac{\pi x}{2u}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2u}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{2u}\right\} dx.$$

Отсюда, при $u = \pi/(2n)$, получаем

$$\|p_{n,a}^{'}\|_{H_p} \leq \int\limits_0^{\pi/(2n)} \|p_n(\cdot + x) - p_n(\cdot - x)\|_p \left\{\frac{n^2}{2}(1 - \sin nx) + \frac{n^2}{2}\sin nx\right\} dx =$$

$$= \frac{n^2}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \|p_n(\cdot + x) - p_n(\cdot - x)\|_p \, dx \leq$$

$$\leq \frac{n^2}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(p_n, 2x)_p dx = \frac{n^2}{4} \int\limits_0^{\pi/(n)} \omega(p_n, t)_p dt.$$

Докажем точность неравенства (1.2.14) для полинома

$$q_n(z) = az^n \in H_p,\ 1 \leq p \leq \infty,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

В самом деле, по формуле (1.2.12) имеем:

$$\omega(q_n, 2x)_p = 2|a| \sin nx,\ 0 \leq nx \leq \pi/2,$$

а потому, с одной стороны, имеем:

$$\frac{n^2}{2} \cdot \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(q_n, 2x)_p dx = \frac{n^2}{2} \cdot 2 \cdot |a| \cdot \int\limits_0^{\pi/(2n)} \sin nx dx = n|a|. \tag{1.2.15}$$

С другой стороны, так как $q'_{n,a}(z) = in \cdot a \cdot z^n$, то имеем:

$$\|q'_{n,a}(z)\|_p = \|in \cdot a \cdot z^n\|_p = |a| \cdot n \cdot \|z^n\|_p = |a|n. \tag{1.2.16}$$

Точность неравенства (1.2.13) следует из сравнения равенств (1.2.15) и (1.2.16). Теорема 1.2.2 доказана.

Следствие 1.2.2. *Для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ и любого алгебраического комплексного полинома $p_n(z)$ справедливы точные неравенства*

$$\|p^{(r)}_{n,a}\|_p \leq \frac{1}{4} n^{r+1} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt, \tag{1.2.17}$$

$$\|p^{(r)}_n\|_p \leq \frac{1}{4} n\alpha_{n,r} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,$$

обращающиеся в равенства для полинома $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Через $H_{p,\rho}$ $(1 \le p \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$ обозначим множество аналитических в круге $|z| < \rho$ функций $f(z)$ с конечной нормой

$$\|f(z)\|_{H_{p,\rho}} := \|f(\rho z)\|_{H_p} < \infty.$$

В работе [15] в частности доказано, что для произвольного $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\|p_n\|_{H_{p,\rho}} \le \rho^n \|p_n\|_{H_p},\ (1 \le p \le \infty)$$

и равенство в полученном неравенстве имеет место для полинома $p_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C}$. Если воспользоваться этим неравенством, то можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 1.2.3. *Для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ справедливы точные неравенства*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \le \frac{1}{4}\rho^n n^{r+1} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,\ 0 < \rho \le 1,\ 1 \le p \le \infty,$$

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,\rho}} \le \frac{1}{4}\rho^n n \alpha_{n,r} \int_0^{\pi/n} \omega(p_n, t)_p dt,\ 0 < \rho \le 1,\ 1 \le p \le \infty.$$

Полученные неравенства являются своеобразными обобщениями неравенства Л.В.Тайкова [29]. Они обращаются в равенства для произвольного полинома $p_n(z) = az^n, a \in \mathbb{C}$.

Лемма 1.2.1. *Пусть функция $f(x) \ge 0$ принадлежит пространству $L_p[a,b],\ 1 \le q \le \infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^q(x)dx\right)^{1/q},\ q \ge 1.$$

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера для интегралов

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|dx\right) \le \left(\int_a^b |f(x)|^{q'}dx\right)^{1/q'} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\left(\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1,\ 1\le q,q'\le\infty\right),$$

имеем

$$\int_a^b f(x)dx \le \left(\int_a^b 1^{q'}dx\right)^{1/q'} \left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{1/q} =$$

$$= (b-a)^{1/q'}\left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{1/q} = (b-a)(b-a)^{1/q'-1}\left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{1/q} =$$

$$= (b-a)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^q(x)dx\right)^{1/q},\ 1\le q\le\infty. \qquad (1.2.18)$$

Из неравенства (1.2.18) сразу получаем

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^q(x)dx\right)^{1/q},\ 1\le q\le\infty, \qquad (1.2.19)$$

чем и завершаем доказательство леммы 1.2.1. Рассмотрим теперь одно применение доказанной леммы 1.2.1. Имеет место следующая

Теорема 1.2.3. *При любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n \ge r$ *и* $1 \le q \le \infty$ *для произвольного полинома* $p_n(z)$ *имеет место неравенство*

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4}\,\pi^{1/q'}\cdot n^{r+1/q}\left(\int_0^{\pi/n}\omega^q(p_n,t)_p dt\right)^{1/q},$$

$$\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ 1\le q,q'\le\infty\right). \qquad (1.2.20)$$

Доказательство очевидно. В самом деле, применяя неравенство (1.2.19) к правой части неравенства (1.2.17), получаем

$$\|p_{n,a}^{(r)}\|_p \le \frac{1}{4}\, n^{r+1} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(p_n,t)_p\, dt = \frac{1}{4}\, n^{r+1}\, \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \omega^q(p_n,t)_p\, dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{4}\, n^r\, \pi \left(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \omega^q(p_n,t)_p\, dt \right)^{1/q} = \frac{1}{4}\, \pi^{1-\frac{1}{q}}\, n^{r+\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega^q(p_n,t)_p\, dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{4}\, \pi^{1/q'}\, n^{r+\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega^q(p_n,t)_p\, dt \right)^{1/q}, \ 1 \le q \le \infty,$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.2.3.

Замечание 1. Неравенство (1.2.20) является аналогом неравенства С.М.Никольского для разных норм, полученных для целых функций, на случай алгебраических комплексных полиномов, принадлежащих пространству Харди $H_p,\ 1 \le p \le \infty$.

Замечание 2. На протяжение всего параграфа мы все утверждения теорем и следствий доказали для производной по аргументу. Отметим, что буквальным повторением приведенных выше рассуждений можно получить утверждения всех теорем и следствий для обычных производных $f^{(r)}(z)$, $r \in \mathbb{N}$.

Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем.

Л.В. Тайков [28] доказал, что для произвольной функции $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$, у которой производные r-го порядка $f_a^{(r)} \in H_p$, $f^{(r)} \in H_p$, $1 \le p \le \infty$, имеют место неравенства

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le n^{-r} E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_p}, \tag{1.2.21}$$

$$E_{n+r-1}(f)_p \le [(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)]^{-1}\cdot E_{n-1}\left(f^{(r)}\right)_p. \qquad (1.2.22)$$

Применяя неравенства (1.2.21) и (1.2.22), из утверждения следствия 1.2.1 соответственно получаем следующие соотношения

$$E_{n-1}(f)_p \le n^{-r}E_{n-1}(f_a^{(r)})_p \le n^{-r}\|f_a^{(r)}\|_p \le$$

$$\le \frac{1}{2n^r}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r+1)},2x)_p(1-\sin nx)dx + n^2\cdot \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a^{(r-1)},2x)_p \sin nx dx\right\},$$

$$E_{n+r-1}(f)_p \le [(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)]^{-1}\cdot \left\|f^{(n)}\right\|_p \le$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f^{(r+1)},2x)_p(1-\sin nx)dx + n^2\cdot \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f^{(r-1)},2x)_p \sin nx dx\right\},$$

и непосредственное вычисление показывает, что знак равенства, с учетом (1.1.6) и (1.1.7), в них имеет место соответственно для функций $f_0(z)=z^n$ и $g_0(z)=z^{n+r}$, $r,n\in\mathbb{N}$.

В работе [50] вышеуказанные неравенства Л.В.Тайкова, полученные для наилучших приближений $f\in H_p$, $1\le p\le\infty$, распространены для пространства $H_{p,\rho}(1\le p\le\infty, 0<\rho\le 1)$ и имеют вид

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,\ \rho}} \le \rho^n n^{-r}\ E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_p} \qquad (1.2.23)$$

$$E_{n+r-1}(f)_{H_{p,\rho}} \le \rho^n\left[(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)\right]^{-1}\ E_{n-1}(f)^{(r)})_{H_p} :=$$

$$= \rho^n\alpha_{n+r,r}^{-1}\ E_{n-1}(f^{(r)})_{H_p}. \qquad (1.2.24)$$

Неравенства (1.2.23) и (1.2.24) представляют возможность распространить полученные выше результаты для H_p на случай пространства $H_{p,\rho}$, где $(1 \le p \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$. Например, имеет место следующее утверждение

Следствие 1.2.4. *Для произвольной функции* $f_0 \in H^{(r)}_{p,\rho} \cap H^{(r)}_{p,\rho,a}$ $(1 \le p \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f)_{H_{p,\rho}} \le \rho^n n^{-r} \frac{1}{2} \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f_a^{(r+1)}, 2x\right)_p (1 - \sin nx)dx +$$

$$+ \frac{n^2}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f_a^{(r-1)}, 2x\right)_p \sin nx dx \Bigg\}, \tag{1.2.25}$$

$$E_{n+r-1}(f)_{H_{p,\rho}} \le \rho^n \alpha^{-1}_{n+r,r} \cdot \frac{1}{2} \Bigg\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f^{(r+1)}, 2x\right)_p (1 - \sin nx)dx +$$

$$+ \frac{n^2}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f^{(r-1)}, 2x\right)_p \sin nx dx \Bigg\}, \tag{1.2.26}$$

и знак равенства в неравенствах (1.2.25) *и* (1.2.26) *достигается соответственно для функций* $f_0(z) = z^n \in H_{p,\rho}$ *и* $g_0(z) = z^{n+r} \in H_{p,\rho},\ 1 \le p \le \infty$.

§1.3. Об оценке второй производной функции $f(z) \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$

В этом параграфе мы докажем точные неравенства для оценки величины нормы второй производной аналитической в единичном круге функции, принадлежащей пространству Харди $f(z) \in H_p,\ 1 \le p \le \infty$, через усреднённое значение модуля гладкости самой функции и через усреднённое значение модуля гладкости её второй производной. Наши результаты базируются на статье Н.Айнуллоева [3], который обобщил полученные результаты Л.В.Тайкова для величины нормы второй производной $\|f^{''}\|_{L_p(R)}$, $R = (-\infty, +\infty)$, $1 \le p \le \infty$. Используя схему рассуждения работы Н.Айнуллоева [3], мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Для произвольной функции $f(z) \in H^{(2)}_{p,a},\ 1 \le p \le \infty$ имеет место точное неравенство*

$$\|f_a''\|_{H_p} \le \frac{n}{\pi - 2} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f'', 2t)_p (1 - \sin nt)dt + n^2 \int_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f, 2t)_p \sin nt dt \right\}. \qquad (1.3.1)$$

Неравенство (1.3.1) *обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in H^{(2)}_{p,a}$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор

$$F(f_a^{''}, x) = \frac{n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \left\{ f_a^{''}(x + t) + f_a^{''}(x - t) \right\} (1 - \sin nt)dt. \qquad (1.3.2)$$

Очевидно, что $F(f^{''}, x) \in H^2_{p,a},\ (1 \le p \le \infty)$. Имеем

$$\|f_a''\|_{H_p} \le \|f_a'' - F(f_a^{''})\|_{H_p} + \|F(f_a^{''})\|_{H_p}. \qquad (1.3.3)$$

Оценим каждое из слагаемых в равенстве (1.3.3). Учитывая равенство

$$\frac{2n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}(1-\sin nt)dt=1,$$

запишем равенство

$$f_a''(x)-F(f_a'',x)=$$

$$=-\frac{n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left\{f_a''(x+t)-2f_a''(x)+f_a''(x-t)\right\}(1-\sin nt)dt. \qquad (1.3.4)$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.1.10) к неравенству (1.3.4), будем иметь

$$\|f_a''-F(f_a'')\|_{H_p}=$$

$$=\frac{n}{\pi-2}\left\|\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left\{f_a''(\cdot+t)-2f_a''(\cdot)+f_a''(\cdot-t)\right\}(1-\sin nt)dt\right\|_p\le$$

$$\le\frac{n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left\|f_a''(\cdot+t)-2f_a''(\cdot)+f_a''(\cdot-t)\right\|_p(1-\sin nt)dt. \qquad (1.3.5)$$

Оценим норму $\|F(f_a'')\|_{H_p}$. Из равенства (1.3.2) получаем

$$F(f_a'',x)=\frac{n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}d\left\{f_a'(\cdot+t)-f_a'(\cdot-t)\right\}(1-\sin nt)=$$

$$=\left\{f_a'(x+t)-f_a'(x-t)\right\}(1-\sin nt)\Big|_0^{\pi/2n}+$$

$$+\frac{n^2}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left[f_a'(x+t)-f_a'(x-t)\right]\cos ntdt=$$

$$= \frac{n^2}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} d\left[f(x+t) + f(x-t)\right] \cos nt =$$

$$= \frac{n^2}{\pi - 2} \left[f(x+t) + f(x-t)\right] \cos nt \Big|_0^{\pi/(2n)} +$$

$$+ \frac{n^3}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \left[f(x+t) + f(x-t)\right] \sin nt dt =$$

$$= -\frac{n^2}{\pi - 2}\, 2f(x) + \frac{n^3}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \left[f(x+t) + f(x-t)\right] \sin nt dt =$$

$$= \frac{n^3}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \left[f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\right] \sin nt dt. \qquad (1.3.6)$$

Применяя снова обобщенное неравенство Минковского (1.1.10) к правой части (1.3.6), получим

$$\|F(f_a'')\|_{H_p} \leq$$

$$\leq \frac{n^3}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \|f(\cdot + t) - 2f(\cdot) + f(\cdot - t)\|_p \sin nt dt. \qquad (1.3.7)$$

Складывая неравенства (1.3.5) и (1.3.7), с учётом (1.3.3) получаем

$$\|f_a''\|_{H_p} \leq \frac{n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \left\| f_a''(\cdot + t) - 2f_a''(\cdot) + f_a''(\cdot - t) \right\|_p (1 - \sin nt) dt +$$

$$+ \frac{n^3}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2n)} \|f(\cdot + t) - 2f(\cdot) + f(\cdot - t)\|_p \sin nt dt. \qquad (1.3.8)$$

Теперь заметим, что если функция $f(z) \in H^{''}_{p,a}$ имеет непрерывные граничные значения $f^{''}_a(t)$, то их гладкость характеризуем модулем гладкости

$$\omega_2(f^{''}_a; 2\tau)_{H_p} = \sup\left\{\|f^{''}_a(\cdot + t) - 2f^{''}_a(\cdot) + f^{''}_a(\cdot - t)\|_p : \ |t| \le \tau\right\}. \qquad (1.3.9)$$

Теперь, учитывая соотношения (1.3.8) и (1.3.9), сразу получаем утверждение теоремы (1.3.1). Заметим, что если функция $f(z) \in H^{(r)}_{p,a}, 1 \le p \le \infty$, то из неравенства (1.3.8) сразу получаем

$$\|f^{(r)}_a\|_{H_p} \le \frac{n}{\pi - 2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f^{(r)}, 2t)_p (1 - \sin nt)dt + n^2 \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(f^{(r-2)}, 2t)_p \sin ntdt \right\}. \qquad (1.3.10)$$

Отметим, что посредством неравенств (1.3.8), (1.3.10) и неравенства Зигмунда [19] можно получить оценки нормы производных для комплексных алгебраических полиномов через усреднённые значения их модулей гладкости, а именно справедлива следующая

Теорема 1.3.2. *Для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ справедливо неравенство*

$$\left\|p^{''}_{n,a}\right\|_{H_q} \le \frac{n^3}{2(\pi - 2)} \int\limits_0^{\pi/n} \omega_2(p_n, t)_{H_q} dt, \qquad (1.3.11)$$

и равенство достигается для полинома $q_n(z) = cz^n \in H^{(2)}_{q,a}, \ c \in \mathbb{C}$.

Доказательство. В самом деле, полагая в неравенстве (1.3.1) $f(z) = p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ и применяя упомянутое неравенство Зигмунда для алгебраических полиномов следующего вида

$$\|p''_{n,a}(x + t) - 2p''_n(x) + p''_n(x - t)\|_{H_q} \le n^2 \|p_n(x + t) - 2p_n(x) + p_n(x - t)\|_{H_q},$$

будем иметь

$$\|p''_{n,a}\|_{H_p} \le \frac{n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \|p''_{n,a}(\cdot+t)-2p''_n(\cdot)+p''_n(\cdot-t)\|_p(1-\sin nt)dt+$$

$$+\frac{n^3}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \|p_n(\cdot+t)-2p_n(\cdot)+p_n(\cdot-t)\|_p \sin nt dt \le$$

$$\le \frac{n^3}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \|p_n(\cdot+t)-2p_n(\cdot)+p_n(\cdot-t)\|_p dt \le$$

$$\le \frac{n^3}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(p_n,2t)_p dt = \frac{n^3}{2(\pi-2)}\int\limits_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p dt,$$

что и требовалось доказать. Знак равенства для полинома $g_n(z)=cz^n\in\mathcal{P}_n$, $c\in\mathbb{C}$ проверяется непосредственным вычислением. В самом деле, так как

$$g''_{n,a}(z)=c(in)^2z^n, \|g''_{n,a}(z)\|_p=\|c(in)^2z^n\|_p=|c|n^2\|z\|_p=|c|n^2, \qquad (1.3.12)$$

с другой стороны

$$\Delta_2(g_n,2x)=|c|\|e^{in(x+t)}-2e^{int}+e^{in(x-t)}\|_p=2|c|(1-\cos nx),$$

то есть

$$\omega_2(g_n,2x)=2|c|(1-\cos nx).$$

Поэтому имеем

$$\frac{n^3}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(g_n,2t)_p\,dt=\frac{2|c|n^3}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}(1-\cos nt)dt=$$

$$=\frac{2|c|n^2}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}(1-\cos nt)d(nt)=|c|n^2. \qquad (1.3.13)$$

Точность неравенства (1.3.11) следует из (1.3.12) и (1.3.13) и теорема 1.3.2 полностью доказана. Из теоремы 1.3.2 вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *Для любых целых неотрицательных $r \geq 2$ и любого $n \in \mathbb{N}, n \geq r$ справедливо точное неравенство*

$$\left\|p_{n,a}^{(r)}\right\|_{H_p} \leq \frac{n^{r+1}}{2(\pi-2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p \; dt. \tag{1.3.14}$$

В самом деле, неравенство (1.3.14) вытекает из неравенства Бернштейна в пространстве Харди и неравенства (1.3.11)

$$\left\|p_{n,a}^{(r)}\right\|_{H_p} \leq n^{r-2} \left\|p_{n,a}^{''}\right\|_p \leq \frac{n^{r+1}}{2(\pi-2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p \; dt$$

Из леммы 1.2.1 и неравенства (1.3.14) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.3.3. *Для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$, при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$ справедливо неравенство*

$$\left\|p_{n,a}^{(r)}\right\|_{H_p} \leq \frac{\pi^{1/q'}}{2(\pi-2)} n^{r+\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n,t)_p \; dt \right)^{1/q}, \tag{1.3.15}$$

$$\left(1 \leq q \leq \infty, \; \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \; 1 \leq q' \leq \infty\right).$$

Доказательство. В самом деле, поскольку при любом $t \in [0, \pi/n]$ модуль гладкости $\omega_2(p_n,t) \geq 0$, то, согласно неравенству (1.3.11), из (1.3.14), с учётом леммы 1.2.1 имеем:

$$\left\|p_{n,a}^{(r)}\right\|_{H_p} \leq \frac{n^{r+1}}{2(\pi-2)} \int_0^{\pi/n} \omega_2(p_n,t)_p \; dt \leq \frac{n^{r+1}}{2(\pi-2)} \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n,t)_p \; dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{\pi^{1-\frac{1}{q}}\ n^{r+\frac{1}{q}}}{2(\pi-2)} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n,t)_p\ dt \right)^{1/q} = \frac{\pi^{1/q'}\ n^{r+\frac{1}{q}}}{2(\pi-2)} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega_2^q(p_n,t)_p\ dt \right)^{1/q},$$

$$\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,\ 1 \le q, q' \le \infty \right),$$

чем и завершаем доказательство неравенства (1.3.15).

Теорема 1.3.4. *Для натуральных чисел* $0 \le k \le n, h > 0$ *и любого* $f(z) \in H_{p,a}^{(r)},\ r \in \mathbb{N}, k \le r \le n,\ 1 \le p \le \infty$, *при произвольном* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\left\| f_a^{(k)} \right\|_{H_p} \le \frac{1}{(\pi-2)rh^k} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} \omega_2 \left(f, \frac{2t}{n} \right)_p P(t)dt + \frac{h^{r-k}}{(\pi-2)r} \int\limits_0^{\pi/2} \omega_2 \left(f_a^{(r)}, \frac{2t}{n} \right)_p Q(t)dt \right\}, \qquad (1.3.16)$$

где

$$P(t) = (r-k)(1-\sin t) + (nh)^2(r-k+2)\sin t,$$

$$Q(t) = k(1-\sin t) + (nh)^2(k-2)\sin t.$$

Знак равенства в (1.3.16) *достигается для функции* $f_0(z) = cz^n \in H_{p,a}^{(r)}$, $(1 \le p \le \infty)$ *при значении* $h = 1/n$.

Доказательство. Оценим норму $\left\| f_a^{(k)} \right\|_{H_p}$, согласно неравенству (1.3.8) имеем:

$$\left\| f_a^{(k)} \right\|_H \le$$

$$\leq \frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|f_a^{(k)}\left(x+\frac{t}{n}\right)-2f_a^{(k)}(x)+f_a^{(k)}\left(x-\frac{t}{n}\right)\right\|_p(1-\sin t)dt+$$

$$+\frac{n^2}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|f_a^{(k-2)}\left(x+\frac{t}{n}\right)-2f_a^{(k-2)}(x)+f_a^{(k-2)}\left(x-\frac{t}{n}\right)\right\|_p\sin t dt. \quad (1.3.17)$$

Нам понадобится следующее неравенство Харди ([19], с.232)

$$\|f_a^{(k)}\|_p \leq \|f\|_p^{1-\frac{k}{r}}\|f_a^{(r)}\|_p^{\frac{k}{r}}, k,r\in\mathbb{N},\ k<r,\ 1\leq p\leq\infty$$

и его эквивалентная линейная форма

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_p \leq \left(1-\frac{k}{r}\right)h^{-k}\ \|f\|_p+\frac{k}{r}\,h^{r-k}\ \left\|f_a^{(r)}\right\|_p, (1\leq p\leq\infty, h>0). \quad (1.3.18)$$

Полагая

$$\varphi(x)=\Delta_{2t/n}^{(2)}(f;x)=f\left(x+\frac{t}{n}\right)-2f(x)+f\left(x-\frac{t}{n}\right)$$

и используя линейную форму (1.3.18) неравенства Харди, запишем

$$\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}\left(f^{(k)}\right)\right\|_{H_p}\leq\frac{r-k}{rh^k}\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}(f)\right\|_p+\frac{k}{r}h^{r-k}\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}\left(f^{(r)}\right)\right\|_p,$$

$$\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}\left(f^{(k-2)}\right)\right\|_{H_p}\leq\frac{r-k+2}{rh^k}\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}(f)\right\|_p+\frac{k-2}{r}h^{r-k+2}\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}\left(f^{(r)}\right)\right\|_p.$$

Используя эти неравенства, с учётом (1.3.17) получаем

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_{H_p}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}\left(f_a^{(k)}\right)\right\|_p(1-\sin t)dt+\frac{n^2}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|\Delta_{2t/n}^{(2)}\left(f_a^{(k-2)}\right)\right\|_p\sin t dt\leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\{\frac{r-k}{rh^k}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}(f)\right\|_p+\frac{k}{r}h^{r-k}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}\left(f_a^{(r)}\right)\right\|_p\right\}(1-\sin t)dt+$$

$$+\frac{n^2}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\{\frac{r-k+2}{rh^{k-2}}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}(f)\right\|_p+\frac{k-2}{r}h^{r-k+2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}\left(f_a^{(r)}\right)\right\|_p\right\}\sin t dt=$$

$$=\frac{1}{(\pi-2)rh^k}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}(f)\right\|_p\left((r-k)\left(1-\sin t\right)+n^2(r-k+2)h^2\sin t\right)dt+$$

$$+\frac{h^{r-k}}{(\pi-2)r}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}(f_a^{(r)})\right\|_p\left((nh)^2(k-2)\sin t+k(1-\sin t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{(\pi-2)rh^k}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}(f)\right\|_p P(t)dt+\frac{h^{r-k}}{(\pi-2)r}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}(f_a^{(r)})\right\|_p Q(t)dt.$$

Отсюда, имея ввиду, что

$$\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}(f)\right\|_p\leq\omega_2\left(f,\frac{2t}{n}\right)_p,\qquad\left\|\Delta^{(2)}_{2t/n}\left(f_a^{(r)}\right)\right\|_{H_p}\leq\omega_2\left(f_a^{(r)},\frac{2t}{n}\right)_p,$$

приходим к неравенству

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_p\leq\frac{1}{(\pi-2)rh^k}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f,\frac{2t}{n}\right)_p P(t)dt+$$

$$+\frac{h^{r-k}}{(\pi-2)r}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f_a^{(r)},\frac{2t}{n}\right)_p Q(t)dt,\tag{1.3.19}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.4.

Точность неравенства (1.3.19) на функцию $f_0(z) = cz^n \in H^{(r)}_{p,a}$ при $h = 1/n$ проверяется непосредственным вычислением. Перепишем неравенство (1.3.19) в следующем виде

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_p \le \frac{n}{2(\pi-2)rh^k}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2\left(f,\ t\right)_p P(nt/2)dt+$$

$$+\frac{nh^{r-k}}{2(\pi-2)r}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2\left(f_a^{(r)},\ t\right)_p Q(nt/2)dt, \tag{1.3.20}$$

Из неравенства (1.3.20), пользуясь условием возрастания модуля гладкости, получаем следующее

Следствие 1.3.2 *В условиях теоремы* 1.3.4 *при* $h = 1/n$ *справедливо неравенство*

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_p \le \frac{\pi(r-k)+4}{2(\pi-2)r}\ n^k\ \omega\left(f;\frac{\pi}{n}\right)_p +$$

$$+\frac{(\pi-4)k+2r+4}{2(\pi-2)r}n^{-r+k}\omega\left(f_a^{(r)};\frac{\pi}{n}\right)_p. \tag{1.3.21}$$

В самом деле, из неравенства (1.3.20) имеем:

$$\left\|f_a^{(k)}\right\|_p \le \frac{n}{2(\pi-2)rh^k}\ \omega_2\left(f,\ \frac{\pi}{n}\right)_p\int\limits_0^{\pi/n}P(nt/2)dt+$$

$$+\frac{nh^{r-k}}{2(\pi-2)r}\ \omega_2\left(f_a^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_p\int\limits_0^{\pi/n}Q(nt/2)dt, \tag{1.3.22}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{\pi/n}P(nt/2)dt = \left\{(\pi-2)(r-k)+2(nh)^2(r-k+2)\right\}n^{-1}, \tag{1.3.23}$$

$$\int_0^{\pi/n} Q(nt/2)dt = \left\{(\pi-2)k + 2(nh)^2(k-2)\right\} n^{-1}, \tag{1.3.24}$$

после подстановки (1.3.23) и (1.3.24) в (1.3.22) и простых упрощений при $h = 1/n$ приходим к неравенству (1.3.21).

В завершение этого параграфа отметим, что используя неравенство (1.3.1) и результат Л.В.Тайкова [28] , о том что для любого $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le n^{-r} E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_p} \le n^{-r} \left\| f_a^{(r)} \right\|_{H_p},$$

как следствие получаем результат теоремы 3 работы М.Ш.Шабозова и М.М.Миркалоновой [51]:

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le \frac{1}{(\pi-2)n^{r-1}} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(f_a^{(r)}, 2t\right)_{H_p} (1-\sin nt)dt + n^2 \int_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(f_a^{(r-2)}, 2t\right)_{H_p} \sin nt dt \right\},$$

в котором равенство достигается для $f_0(z) = cz^n \in H_{p,a}^{(r)}, c \in \mathbb{C},\ 1 \le p \le \infty$.

§1.4. О точных оценках нормы второй производной функции в пространстве $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < \infty$

В этом параграфе мы приводим точные оценки величины нормы второй производной функции, принадлежащей пространству суммируемых в p-й степени функций на всей оси $L_p(\mathbb{R}),\ \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, через модуль гладкости самой функции и модуль гладкости её второй производной.

Пусть $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p < \infty$ – пространство всех измеримых суммируемых в р-й степени функций $f(x)$, заданных на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,\ 1 \le p < \infty.$$

Равенством

$$\omega_2(f;\delta)_p = \sup \left\{ \|\Delta_h^{(2)}(f)\|_p :\ h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta \right\},\ \delta > 0,$$

где $\Delta_h^{(2)}(f;x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h),\ x \in \mathbb{R}$, определяем, как обычно, модуль гладкости функции $f \in L_p(\mathbb{R})$.

В работе Н.Айнуллоева [21] приводятся точные оценки величины нормы второй производной функции в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ через усредненное значение модуля гладкости производной функции второго порядка и модуль гладкости самой функции. Применительно к нашим целям неравенство Н.Айнуллоева для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ с абсолютно непрерывными производными f' и $f'' \in L_p(\mathbb{R})$ и любого заданного $\lambda > 0$ имеет вид

$$\|f''\|_p \le \frac{1}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/2} \left\| f''\left(x + \frac{t}{\lambda}\right) - 2f''(x) + f''\left(x - \frac{t}{\lambda}\right) \right\|_p (1 - \sin t) dt +$$

$$+\frac{\lambda^2}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\|f\left(x+\frac{t}{\lambda}\right)-2f(x)+f\left(x-\frac{t}{\lambda}\right)\right\|_p\sin t dt. \qquad (1.4.1)$$

Из (1.4.1) в качестве следствия сразу вытекает

$$\|f''\|_p \le$$

$$\le \frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f'',\frac{2t}{\lambda}\right)_p(1-\sin t)dt+\frac{\lambda^2}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f,\frac{2t}{\lambda}\right)_p\sin t dt. \qquad (1.4.2)$$

В качестве примера приводится приложение неравенств (1.4.1) и (1.4.2) для функции $f(x)$, определенной на всей числовой оси с нормой $\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$ в смысле пространства $L_2(-\infty,+\infty)$.

Теорема 1.4.1. *Для любых натуральных чисел $0 < k \le n$ и любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_2 \le$$

$$\le \frac{1}{(\pi-2)\lambda^k}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f,\frac{2t}{\lambda}\right)_2 P(t)dt+\frac{\lambda^{n-k}}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2}\omega_2\left(f^{(n)},\frac{2t}{\lambda}\right)_2 Q(t)dt, \qquad (1.4.3)$$

где

$$P(t)=\frac{n-k}{n}(1-\sin t)+\lambda^4\frac{n-k+2}{n}\sin t, \qquad (1.4.4)$$

$$Q(t)=\frac{k}{n}(1-\sin t)+\lambda^4\frac{k-2}{n}\sin t. \qquad (1.4.5)$$

Неравенство (1.4.3) *неулучшаемо в том смысле, что для каждого* $\lambda > 0$ *существует последовательность функций* $f_n(x, \lambda)$, *для которых отношение левой части неравенства* (1.4.3) *к правой стремится к единице при* $n \to \infty$.

Доказательство. Оценивая норму $\|f^{(k)}\|_2$, согласно неравенству (1.4.1), получаем

$$\|f^{(k)}\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi - 2} \int_0^{\pi/2} \left\| f^{(k)}\left(x + \frac{t}{\lambda}\right) - 2f^{(k)}(x) + f^{(k)}\left(x - \frac{t}{\lambda}\right) \right\|_2 (1 - \sin t)dt +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{\pi - 2} \int_0^{\pi/2} \left\| f^{(k-2)}\left(x + \frac{t}{\lambda}\right) - 2f^{(k-2)}(x) + f^{(k-2)}\left(x - \frac{t}{\lambda}\right) \right\|_2 \sin t dt. \quad (1.4.6)$$

Оценим норму производных функций под знаком интеграла, согласно неравенству Харди [18], справедливую для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\left\|\varphi^{(m)}\right\|_2 \leq \|\varphi\|_2^{(n-m)/n} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_2^{m/n}, \quad 0 \leq m \leq n,\ m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.4.7)$$

Применим неравенство (1.4.7) в эквивалентной форме

$$\left\|\varphi^{(m)}\right\|_2 \leq \frac{n-m}{n\lambda^m} \|\varphi\|_2 + \frac{m}{n}\lambda^{n-m} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_2. \quad (1.4.8)$$

Полагая

$$\varphi(x) \equiv \Delta^{(2)}_{2t/\lambda}(f; x) = f\left(x + \frac{t}{\lambda}\right) - 2f\left(x\right) + f\left(x - \frac{t}{\lambda}\right)$$

при $m = k$ и $m = k - 2$, применяя неравенство (1.4.8), получаем

$$\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(k)}\right)\right\|_2 \leq \frac{n-k}{n\lambda^k} \left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f\right)\right\|_2 + \frac{k}{n}\lambda^{n-k} \left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(n)}\right)\right\|_2,$$

$$\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(k-2)}\right)\right\|_2 \le \frac{n-k+2}{n\lambda^{k-2}}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}(f)\right\|_2 + \frac{k-2}{n}\lambda^{n-k+2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(n)}\right)\right\|_2.$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (1.4.6) под знаком интеграла и приведя подобные члены, получаем

$$\left\|f^{(k)}\right\|_2 \le$$

$$\le \frac{1}{\pi-2}\int_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(k)}\right)\right\|_2(1-\sin t)dt + \frac{\lambda^2}{\pi-2}\int_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(k-2)}\right)\right\|_2\sin t dt \le$$

$$\le \frac{1}{(\pi-2)\lambda^k}\int_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}(f)\right\|_2 P(t)dt + \frac{\lambda^{n-k}}{\pi-2}\int_0^{\pi/2}\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(n)}\right)\right\|_2 Q(t)dt,$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ определены равенствами (1.4.4) и (1.4.5).

В последнем неравенстве, пользуясь тем, что

$$\left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}(f)\right\|_2 \le \omega_2\left(f,\frac{2t}{\lambda}\right)_2, \qquad \left\|\Delta^{(2)}_{2t/\lambda}\left(f^{(n)}\right)\right\|_2 \le \omega_2\left(f^{(n)},\frac{2t}{\lambda}\right)_2,$$

приходим к неравенству (1.4.3).

Установим теперь точность неравенства (1.4.3). В [13] доказано, что для любого $\psi > 0$

откуда и следует неравенство (2.1.1). Докажем теперь, что для функции $f_0(z) = z^n \in H_2^{(r)}$ в неравенстве (2.1.1) имеет место знак равенство. В самом деле, простые вычисления приводят к соотношениям $E_{n-1}(f_0)_2 = \|z^n\|_{H_2} = 1$,

$$\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 = 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos(n-r)t)^m, \ 0 \le t \le h,$$

$$\left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}; t)_{H_2} dt \right)^{m/2} = 2^{m/2} \cdot \alpha_{n,r} \cdot \left(1 - \frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h} \right)^{m/2},$$

а потому мы получаем

$$1 \equiv E_{n-1}(f_0)_{H_2} =$$

$$= 2^{-m/2} \cdot \alpha_{n,r}^{-1} \cdot \left(1 - \frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h} \right)^{-m/2} \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}; t)_{H_2} dt \right)^{m/2} =$$

$$= 2^{-m/2} \alpha_{n,r}^{-1} \left(1 - \frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h} \right)^{-m/2} 2^{m/2} \alpha_{n,r} \left(1 - \frac{(n-r)h}{(n-r)h} \right)^{m/2} \equiv 1.$$

Теорема 2.1.1 полностью доказана.

Этим же методом буквальным повторением доказывается

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $f(z) \in H_{2,a}^{(r)}$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при $0 < h \le \pi/n$, $1 \le p \le 2$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{H_p} \le$$

$$\le 2^{-m/2} n^{-r} \left(1 - \frac{\sin nh}{nh} \right)^{-m/2} \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}; t)_{H_2} dt \right)^{m/2}. \qquad (2.1.3)$$

Существует функция $f_0(z) \in H_{2,a}^{(r)}$, для которой (2.1.3) обращается в равенство.

В следующей теореме докажем более общее утверждение, включающее в себя, в частности, утверждение теоремы 2.1.1.

Теорема 2.1.3 *Пусть* $f(z) \in H_p^{(r)}, 1 \le p \le 2$. *Тогда для любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *при* $0 < h \le \pi/(n-r),\ n > r,\ 1 \le q \le 2$ *имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p \le$$

$$\le 2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q}\left(\int_0^h \omega_m^q(f^{(r)},t)_2 dt\right)^{1/q}. \qquad (2.1.4)$$

При $p = 2$ *существует функция* $f_0(z) \in H_2^{(r)}$, *обращающая* (2.1.4) *в равенство.*

Доказательство. Используя упрощенный вариант неравенства Минковского (см., например, [26], стр.104)

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{q/2} dt\right)^{1/q} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_0^h |f_k(t)|^q dt\right)^{2/q}\right)^{1/2}, \qquad (2.1.5)$$

$$(h > 0,\ 0 < q \le 2),$$

и учитывая (1.1.4), получаем

$$\left(\int_0^h \omega_m^q(f^{(r)},t)_2 dt\right)^{1/q} \ge \left(\int_0^h \left[2^m\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k|^2(1-\cos(k-r)t)^m\right]^{q/2} dt\right)^{1/q} \ge$$

$$\ge \left(2^m\sum_{k=n}^{\infty}\left(\alpha_{k,r}^q|c_k|^q\int_0^h(1-\cos(k-r)t)^{mq/2}dt\right)^{2/q}\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\left(\alpha_{k,r}^q\int_0^h(1-\cos(k-r)t)^{mq/2}dt\right)^{2/q}\right\}^{1/2}. \qquad (2.1.6)$$

Функция натурального аргумента

$$\varphi(k) = \alpha_{k,r}^q \int\limits_0^h (1 - \cos(k-r)t)^{mq/2}\, dt$$

для значений $k \geq n > r$ является строго возрастающей, поскольку при $1 \leq \ q \leq 2$ имеем

$$\varphi'(k) = \frac{h}{k-r} \cdot \alpha_{k,r}^q \, (1 - \cos(k-r)h)^{mq/2} +$$

$$+\alpha_{k,r}^q \left(q \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{k-s} - \frac{1}{k-r} \right) \int\limits_0^h (1 - \cos(k-r)t)^{mq/2}\, dt \geq 0,$$

а потому

$$\min\{\varphi(k) : k \geq n > r\} = \varphi(n) = \alpha_{n,r}^q \int\limits_0^h (1 - \cos(n-r)t)^{mq/2}\, dt. \qquad (2.1.7)$$

Учитывая соотношение (2.1.7), продолжим неравенство (2.1.6):

$$\left(\int\limits_0^h \omega_m^q(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \left(\alpha_{n,r}^2 \left(\int\limits_0^h (1 - \cos(n-r)t)^{mq/2} dt \right)^{2/q} \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2} \alpha_{n,r} \left(\int\limits_0^h (1 - \cos(n-r)t)^{mq/2}\, dt \right)^{1/q} E_{n-1}(f)_2 \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \alpha_{n,r} \left(\int\limits_0^h \left(2 \sin^2 \frac{(n-r)t}{2} \right)^{mq/2} dt \right)^{1/q} E_{n-1}(f)_p =$$

$$= 2^m \alpha_{n,r} \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{(n-r)t}{2} \right)^{mq} dt \right)^{1/q} E_{n-1}(f)_p, \ 1 \leq p \leq 2. \qquad (2.1.8)$$

Из неравенства (2.1.8) следует (2.1.4). Непосредственным вычислением убедимся, что знак равенства в неравенстве (2.1.4) реализует функция $f_0(z) = z^n \in H_2^{(r)}$. В самом деле, с одной стороны, $E_{n-1}(f_0)_{H_2} := E_{n-1}(z^n)_{H_2} = 1$, а с другой стороны, простой подсчет показывает, что

$$\omega_m(f_0^{(r)}, t)_{H_2} = 2^m \alpha_{n,r} \left(\sin \frac{n-r}{2} t \right)^m, \ n > r.$$

Отсюда для $0 < h \le \pi/(n-r)$ и $1 \le q \le 2$ имеем:

$$1 \equiv E_{n-1}(f_0)_{H_2} =$$

$$= 2^{-m} \alpha_{n,r}^{-1} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{(n-r)t}{2} \right)^{mq} dt \right)^{-1/q} \left(\int_0^h \omega_m^q(f_0^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q} \equiv 1,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.3.

Аналогичным образом доказывается, что если структурные свойства аналитических функций задавать модулем непрерывности $\omega_m(f_a^{(r)}; t)_2$, то справедлива

Теорема 2.1.4. *Пусть $f(z) \in H_{p,a}^{(r)}$, $1 \le p \le 2$. Тогда для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \le q \le 2$ и $0 < h \le \pi/n$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p \le 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mq} dt \right)^{-1/q} \left(\int_0^h \omega_m^q(f_a^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}. \quad (2.1.9)$$

При $1 \le p \le 2$ для функции $f_0(z) = z^n \in H_{\rho,a}^{(r)}$ неравенство (2.1.9) обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, учитывая неравенство

$$\omega_m^2(f_a^{(r)}; t)_2 = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} |c_k|^2 (1 - \cos ku)^m : \ u \in [0, t] \right\} \ge$$

$$\ge 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} |c_k|^2 (1 - \cos kt)$$

и применяя снова неравенство Минковского (2.1.5), получаем

$$\left(\int_0^h \omega_m^q(f_a^{(r)};t)_2 dt \right)^{1/q} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \left(k^{rq} \int_0^h (1-\cos kt)^{mq/2} dt \right)^{2/q} \right\}^{1/2}. \qquad (2.1.10)$$

Докажем, что функция

$$\varphi(k) = k^{rq} \int_0^h (1-\cos kt)^{mq/2} dt$$

в области $Q = \{k : k \geq n,\ k, n \in \mathbb{N}\}$ возрастает при $1/r < q \leq 2, r \in \mathbb{N}$, а потому

$$min\{\varphi(k) : k \geq n > r\} = \varphi(n) = n^{rq} \int_0^h (1-\cos nt)^{mq/2} dt. \qquad (2.1.11)$$

В самом деле, введя при $y \geq k > n$, $k, n \in \mathbb{N}$ в рассмотрение функцию непрерывного аргумента

$$\varphi(y) = y^{rq} \int_0^h (1-\cos yt)^{mq/2} dt,\ r, m \in \mathbb{N},\ 0 < q \leq 2,$$

сделав замену переменных в интеграле, имеем:

$$\varphi(y) = y^{rq-1} \int_0^{yh} (1-\cos t)^{mq/2} dt,$$

Отсюда, дифференцируя по переменному y, запишем

$$\varphi'(y) = (rq-1)y^{rq-2} \int_0^{yh} (1-\cos t)^{mq/2} dt + y^{rq-1} h (1-\cos yh)^{mq/2} \geq 0,$$

при $q > 1/r,\ r \in \mathbb{N}$ и таким образом имеет место равенство (2.1.11).

С учётом последнего соотношения из (2.1.10) сразу получаем

$$\left(\int_0^h \omega_m^q(f_a^{(r)};t)_2 dt\right)^{1/q} \geq 2^{m/2}\cdot n^r \left(\int_0^h (1-\cos nt)^{mq/2} dt\right)^{1/q} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2\right\}^{1/2} =$$

$$= 2^m \cdot n^r \left(\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q} \cdot E_{n-1}(f)_2. \qquad (2.1.12)$$

Из неравенства (2.1.12) с учётом соотношения $E_{n-1}(f)_p \leq E_{n-1}(f)_2,\ 1 \leq p \leq 2$ сразу вытекает (2.1.9). Для функции $f_0(z) = z^z \in H_p^{(r)},\ 1 \leq p \leq \infty$ имеем

$$E_{n-1}(f_0)_p \equiv 1,\ 1 \leq p \leq \infty,\ \omega_m\left(f_{0,a}^{(r)}\right)_p = 2^m n^r \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m,\ 1 \leq p \leq \infty,$$

но неравенство $E_{n-1}(f)_p \leq E_{n-1}(f)_2$ для функции $f_0(z) = z^z \in H_p$ только при $1 \leq p \leq 2$ обращается в равенство, откуда и следует, что неравенство (2.1.9) при значении $1 \leq p \leq 2$ для $f_0(z) = z^n$ обращается в равенство, чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.4.

§2.2. Точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h),\ \mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h),\ W_{m,q}^{(r)}(h),\ W_{m,q,a}^{(r)}(h)$ в пространстве H_2

Прежде чем сформулировать основные результаты данного параграфа, приведем несколько определений и обозначений общего характера.

Пусть $S = \{x \in H_2 :\ \|x\| \le 1\}$ – единичный шар в H_2; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество в H_2. $\Lambda_n \subset H_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset H_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : H_2 \to \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор, переводящий элементы пространства H_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^\perp : H_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства H_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, H_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset H_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset H_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset H_2\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}H_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H_2\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, H_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}^\perp H_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками множества $\mathfrak{M}$ в пространстве H_2. Указанные n-поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве H_2 удовлетворяют соотношения [26,33].

$$b_n(\mathfrak{M}; H_2) \le d^n(\mathfrak{M}; H_2) \le d_n(\mathfrak{M}; H_2) = \lambda_n(\mathfrak{M}; H_2) = \pi_n(\mathfrak{M}; H_2). \qquad (2.2.1)$$

Неравенство $b_n(\mathfrak{M}; H_2) \le d_n(\mathfrak{M}; H_2)$ доказано в [33], все остальные в [20,26].

В предыдущем параграфе 2.1 мы доказали серию теорем 2.1.1-2.1.4, в которых получили точные оценки для наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{H_2}$

через усредненные значения $\omega_m(f^{(r)};t)$ и $\omega_m(f_a^{(r)};t)$ в предположении, что приближающаяся функция $f \in H_p^{(r)} \cap H_{p,a}^{(r)}$, $1 \le p \le 2$. В соответствие с полученными результатами введём в рассмотрение следующие классы аналитических функций. При любых $m,n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \le 2$ и $h > 0$ определим следующие классы аналитических функций

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h) := \mathcal{F}(m,n,r:h) = \left\{ f \in H_2^{(r)} : \ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_{H_2}dt \le 1 \right\},$$

$$\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h) := \mathcal{F}_a(m,n,r:h) = \left\{ f \in H_{2,a}^{(r)} : \ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt \le 1 \right\},$$

$$W_{m,q}^{(r)}(h) := W_q(m,n,r:h) = \left\{ f \in H_2^{(r)} : \ \int_0^h \omega_m^{q}(f^{(r)};t)_{H_2}dt \le 1 \right\},$$

$$W_{m,q,a}^{(r)}(h) := W_{q,a}(m,n,r:h) = \left\{ f \in H_{2,a}^{(r)} : \ \int_0^h \omega_m^{q}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt \le 1 \right\}.$$

Имеют место следующие утверждения

Теорема 2.2.1. *При всех $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и соответственно $n>r$, $0 < h \le \pi/(n-r)$, $0 < h \le \pi/n$ справедливы равенства*

$$\delta_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), H_2) = 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1 - \frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2}, \tag{2.2.2}$$

$$\delta_n(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h), H_2) = 2^{-m/2}n^{-r}\left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m/2}, \tag{2.2.3}$$

где $\delta_n(\cdot)-$ любой из вышеперечисленных $n-$поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$, $\pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Не умаляя общности, докажем соотношение (2.2.2), поскольку (2.2.3) доказывается по аналогичной схеме. Используя неравенство (2.1.1) и определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, запишем оценку сверху

$$\sup\left\{E_{n-1}(f)_{H_2} : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right\} \le 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1-\frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2}. \quad (2.2.4)$$

Для оценки снизу бернштейновского $n-$поперечника класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ вводим в рассмотрение $(n+1)-$мерную сферу

$$S_{n+1} = \left\{p_n(z) : \|p_n\|_{H_2} = 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1-\frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2}\right\}$$

и докажем, что $S_{n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(h)$. В работе [41] доказано, что для произвольного полинома $p_n(z)$ имеет место неравенство

$$\omega_m\left(p_n^{(r)};t\right)_{H_2} \le 2^{m/2}\alpha_{n,r}(1-\cos(n-r)t)_*^{m/2}\|p_n\|_{H_2}, \quad (2.2.5)$$

где

$$(1-\cos kt)_* = \{1-\cos kt, \text{ если } 0 < kt \le \pi \ ; \ 2, \text{ если } kt \ge \pi\}. \quad (2.2.6)$$

Из неравенства (2.2.5), для произвольной $p_n \in S_{n+1}$ при условии $(n-r)h \le \pi$ получаем

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)};t)_{H_2}dt \le 2(\alpha_{n,r})^{2/m}\|p_n\|_{H_2}^{2/m}\frac{1}{h}\int_0^h(1-\cos(n-r)t)dt =$$

$$= 2(\alpha_{n,r})^{2/m}2^{-1}(\alpha_{n,r}^{-1})^{2/m}\alpha_{n,r}^{2/m}\left(1-\frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-1}\left(1-\frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right) = 1.$$

Таким образом $S_{n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ и пользуясь определением бернштейновского n-поперечника получаем следующую оценку снизу

$$b_n\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), H_2\right) \ge b_n(S_{n+1}, H_2) = 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(1-\frac{\sin(n-r)h}{(n-r)h}\right)^{-m/2}. \quad (2.2.7)$$

Требуемое равенство (2.2.2) получается из сравнения оценки сверху (2.2.4) и снизу (2.2.7). Теорема 2.2.1 доказана.

Теорема 2.2.2. *При* $m, n, r \in \mathbb{N}$, *соответственно* $0 < h \le \pi/(n-r)$, $n > r,\ 1 \le q \le 2,\ 0 < h \le \pi/n,\ 1/r < q \le 2$ *справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_{m,q}^{(r)}(h), H_2\right) = 2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q}, \tag{2.2.8}$$

$$\delta_n\left(W_{m,q,a}^{(r)}(h), H_2\right) = 2^{-m}n^{-r}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q}, \tag{2.2.9}$$

где $\delta_n(\cdot)-$ *любой из* $n-$*поперечников* $b_n(\cdot),\ d^n(\cdot),\ d_n(\cdot),\ \lambda_n(\cdot),\ \pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Приводим, например, доказательство (2.2.8). Используя неравенство (2.1.4), с учётом определении класса $\left(W_{m,q}^{(r)}(h)\right)$ запишем оценку сверху

$$\delta_n\left(W_{m,q}^{(r)}(h), H_2\right) \le E_{n-1}\left(W_{m,q}^{(r)})_{H_2}\right) \le$$

$$\le 2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q}, \tag{2.2.10}$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, введя в рассмотрение шар

$$\widetilde{S}_{n+1} = \left\{p_n(z) : \|p_n\|_{H_2} = 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq} dt\right)^{-1/q}\right\},$$

покажем, что $\widetilde{S}_{n+1} \subset W_{m,q}^{(r)}(h)$. В самом деле, из равенства (2.2.6) сразу получаем

$$\left(\int_0^h \omega_m^q(p_n^{(r)}, t)dt\right)^{1/q} \le 2^{m/2}\alpha_{n,r}\|p_n\|_{H_2}\left(\int_0^h (1-\cos(n-r)t)^{mq/2}dt\right)^{1/q} =$$

$$= 2^{m/2}\alpha_{n,r}2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin(n-r)t}{2}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin(n-r)t}{2}\right)^{mq}dt\right)^{1/q}=1,$$

и включение $\widetilde{S}_{n+1}\subset W_{m,q}^{(r)}(h)$ доказано, а потому, согласно определению бернштейновского n-поперечника, получаем оценки снизу

$$b_n\left(W_{m,q}^{(r)}(h),H_2\right)\geq b_n\left(\widetilde{S}_{n+1},H_2\right)\geq$$

$$\geq 2^{-m}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.2.11)$$

Требуемое равенство (2.2.8) получаем из сопоставления неравенств (2.2.10) и (2.2.11). Аналогичным образом доказывается равенство (2.2.9), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.2.

§2.3. Точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi),\ \mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi)$

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная, непрерывная, возрастающая при $u \geq 0$ функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. При любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, соответственно при $0 < h \leq \pi/(n-r),\ r < n,\ 1 \leq q \leq 2$ и $0 < h \leq \pi/n,\ 1/r < q \leq 2$, определим классы функций

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi) = \left\{ f \in H_2^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_{H_2}dt \leq \Phi(h) \right\},$$

$$\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi) = \left\{ f \in H_{2,a}^{(r)} :\ \frac{1}{h}\int_0^h \omega_m^{2/m}(f_a^{(r)};t)_{H_2}dt \leq \Phi(h) \right\}.$$

В этом параграфе для введённых классов функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi)$ и $\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h,\Phi)$ при выполнении некоторых ограничений относительно мажоранты $\Phi(t)$ вычислим точные значения n-поперечников. Для произвольного центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset H_2$ положим также

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{H_2} = \sup\{E_{n-1}(f)_2 :\ f \in \mathfrak{M}\}.$$

В этих обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.3.1. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любом $h \in (0,\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{(n-r)h}\cdot\int_0^{(n-r)h}(1-\cos t)_*dt, \tag{2.3.1}$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\delta_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi),H_2) = E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h,\Phi))_{H_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}^{m/2},$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ *или* $\pi_k(\cdot)$. *Множество мажорант* $\Phi(t)$, *удовлетворяющих условию* (2.3.1), *не пусто.*

Этому условию удовлетворяет, например, функция $\Phi(t) = t^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi - 2)$.

Теорема 2.3.2. *Если мажоранта* $\Phi(t)$ *при любом* $h \in (0, \pi]$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2n)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \frac{1}{nh} \cdot \int_0^{nh} (1 - \cos t)_* dt, \tag{2.3.2}$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место равенства*

$$\delta_n(\mathcal{F}^{(r)}_{m,a}(h, \Phi), H_2) =$$

$$= E_{n-1}(\mathcal{F}^{(r)}_{m,a}(h, \Phi))_{H_2} = n^{-r} \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{m/2}, \tag{2.3.3}$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Так как схема доказательства теорем 2.3.1 и 2.3.2 одинакова, то мы ограничимся доказательством теоремы 2.3.1.

Доказательство теоремы 2.3.1. В неравенстве (2.1.1), полагая $h = \pi/2n$, с учётом определения класса $\mathcal{F}^{(r)}_{m,a}(h, \Phi)$ для верхней грани наилучшего полиномиального приближения этого класса будем иметь

$$E_{n-1}(\mathcal{F}^{(r)}_{m,a}(h, \Phi))_{H_2} = \sup \left\{ E_{n-1}(f) : f \in \mathcal{F}^{(r)}_{m,a}(h, \Phi) \right\} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2} n^{-r} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{-m/2} \cdot \Phi^{m/2}\left(\frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{m/2}.$$

Отсюда для всех n-поперечников получаем оценку сверху

$$\delta_n(\mathcal{F}^{(r)}_{m,a}(h, \Phi), H_2) \geq \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{m/2}. \tag{2.3.4}$$

Для получения соответствующей оценки снизу бернштейновского n-поперечника в $\mathcal{P}_n \cap H_2$ введём в рассмотрение шар

$$\sigma_{n+1} \stackrel{def}{=} \left\{ p_n(x) : \ \|p_n\| \le \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{m/2} \right\},$$

и покажем, что $\sigma_{n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(h, \Phi)$, то есть убедимся, что для произвольного полинома $p_n(z) \in \sigma_{n+1}$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}; t) dt \right)^{m/2} \le \Phi^{m/2}(h).$$

Воспользуясь неравенством (2.2.5) и соотношением (2.2.6) для любого полинома $p_n \in \sigma_{n+1}$ и любого $h \in (0, \pi]$, с учётом условия (2.3.1), получаем

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}; t) dt \le 2n^{2r/m} \cdot \|p_n\|_2^{2/m} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h (1 - \cos nt)_* dt \le$$

$$\le \frac{\pi}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{1}{nh} \int_0^{nh} (1 - \cos t)_* dt \le \Phi(h).$$

Учитывая определение класса функции $\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h, \Phi)$ и последнее неравенство, имеем $\sigma_{n+1} \subset \mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h, \Phi)$. Используя соотношение (2.2.1) и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценки снизу для рассматриваемых n-поперечников

$$\delta_n(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h, \Phi), H_2) \ge b_n(\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h, \Phi), H_2) \ge b_n(\sigma_{n+1}, H_2) \ge$$

$$\ge \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{m/2}. \qquad (2.3.5)$$

Сопоставляя оценки сверху (2.3.4) и оценки снизу (2.3.5), получаем требуемое равенство (2.3.3).

Теперь покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.3.1), не пусто. С этой целью рассмотрим функцию $\Phi_*(h) = h^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi - 2)$ и докажем, что именно эта функция удовлетворяет условию (2.3.1). Заметим, что для границы значений α выполняется неравенство

$$1,7 < \alpha < 1,8. \tag{2.3.6}$$

Подставляя функцию Φ_* в (2.3.1.), получаем неравенство

$$\left(\frac{2nh}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh} (1 - \cos t)_* dt, \tag{2.3.7}$$

которое еще предстоит доказать. Полагая $\mu = 2nh/\pi$, перепишем неравенство (2.3.7) в эквивалентном виде

$$\mu^\alpha \geq \frac{2}{\pi - 2} \cdot \frac{1}{\mu} \int\limits_0^{\mu\pi/2} (1 - \cos t)_* dt,$$

или, что то же

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{2}{\pi - 2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} (1 - \cos t)_* dt, \quad 0 \leq \mu < +\infty. \tag{2.3.8}$$

Исходя из неравенства (2.3.8) при всех $\mu \in [0, +\infty)$, вводим в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{2}{\pi - 2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} (1 - \cos t)_* dt, \quad 0 \leq \mu < +\infty.$$

Учитывая соотношение (2.2.6), функцию φ запишем в виде

$$\varphi(\mu) = \begin{cases} \mu^{\alpha+1} - \dfrac{2}{\pi - 2}\left(\dfrac{\mu\pi}{2} - \sin\dfrac{\mu\pi}{2}\right), & 0 \leq \mu \leq 2, \\ \mu^{\alpha+1} - \dfrac{2\pi}{\pi - 2}(\mu - 1), & 2 \leq \mu < +\infty. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Заметим, что, в силу неравенств (2.3.6), при $\mu \to 0+$ имеем

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1}\left(1 - \frac{\pi^3}{4(\pi-2)}O\left(\mu^{2-\alpha}\right)\right). \tag{2.3.10}$$

Из соотношения (2.3.10) следует, что существует отрезок $[0, b]$, где $0 < b < 2$, на котором функция φ неотрицательна. Покажем, что на всём отрезке $[0, 2]$ функция φ является такой. Для этого применим метод рассуждения от противного, полагая, что на интервале $(0, 2)$ существует некоторая точка $0 < \xi < 2$, в которой функция φ меняет знак. Поскольку, как следует из первой ветви функции (2.3.9), $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то на основании теоремы Ролля производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\mu^{\alpha} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(1 - \cos\frac{\mu\pi}{2}\right) \tag{2.3.11}$$

должна иметь на интервале $(0, 2)$ не менее двух различных нулей, и кроме того, из (2.3.11) и значения α следует, что $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$.

Но тогда производная второго порядка

$$\varphi''(\mu) = \alpha(\alpha+1)\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi^2}{2(\pi-2)}\sin\frac{\mu\pi}{2} \tag{2.3.12}$$

должна иметь на интервале $(0, 2)$ не менее трёх различных нулей. Поскольку, как следует из (2.3.12), $\varphi''(0) = 0$, то производная третьего порядка

$$\varphi'''(\mu) = (\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\mu^{\alpha-2} - \frac{\pi^3}{4(\pi-2)}\cos\frac{\mu\pi}{2} \tag{2.3.13}$$

также обязана иметь на $(0, 2)$ не менее трёх различных нулей. Из (2.3.13) получаем, что производная $\varphi'''(\mu)$ на интервале $(0, 2)$ является разностью двух функций, первая из которых принимает лишь положительные значения и является выпуклой вверх, а вторая является выпуклой вниз и положительной на интервале $(0, 1)$ и выпуклой вверх и отрицательной на интервале $(1, 2)$.

Исходя из геометрических соображений очевидно, что функция $\varphi'''(\mu)$ на интервале $(0, 2)$ может иметь не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (2.3.8) для значений $\mu \in [0, 2]$. Исходя из второго соотношения в (2.3.9), учитывая (2.3.6), рассмотрим на множестве $2 \leq \mu < \infty$ функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{2\pi}{\pi - 2}(\mu - 1).$$

Поскольку при $\mu \geq 2$ для её производной первого порядка имеем

$$\varphi'(\mu) = (\alpha + 1)\mu^{\alpha} - \frac{2\pi}{\pi - 2} = \left(\frac{2}{\pi - 2} + 1\right)\mu^{\alpha} - \frac{2\pi}{\pi - 2} =$$

$$= \frac{\pi}{\pi - 2}\mu^{\alpha} - \frac{2\pi}{\pi - 2} = \frac{\pi}{\pi - 2}\Big(\mu^{\alpha} - 2\Big) \geq 0$$

и, кроме того

$$\varphi(2) = 2^{\alpha+1} - \frac{2\pi}{\pi - 2} = 2^{\pi/(\pi-2)} - \frac{2\pi}{\pi - 2} > 0,$$

то функция $\varphi(\mu)$ при $\mu \geq 2$ является положительной монотонно возрастающей. Следовательно, неравенство (2.3.8) на полуинтервале $[2, +\infty)$ тоже имеет место. Теорема 2.3.1 полностью доказана.

§2.4. Точные значения n-поперечников классов функций $W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)$ и $W^{(r)}_{m,q,a}(h,\Phi)$ в H_2

В этом параграфе мы для более общих классов функций $W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)$ и $W^{(r)}_{m,q,a}(h,\Phi)$, при выполнении некоторых ограничений относительно мажоранта $\Phi(u)$, вычислим точные значения всех введённых n-поперечников в гильбертовом пространстве H_2. Указанные классы функции определим следующим образом. При любых $m,n,r \in \mathbb{N}$, соответственно при $r<n$, $0<h\le\pi/(n-r), 1\le q\le 2$ и $0<h\le\pi/n, 1/n<q\le 2$ полагаем

$$W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)=\left\{f\in H^{(r)}_2:\ \int\limits_0^h \omega^q_m(f^{(r)};t)_{H_2}dt\le\Phi(h)\right\},$$

$$W^{(r)}_{m,q,a}(h,\Phi)=\left\{f\in H^{(r)}_{2,a}:\ \int\limits_0^h \omega^q_m(f^{(r)}_a;t)_{H_2}dt\le\Phi(h)\right\}.$$

Положим $(\sin t)^m_*=\{\sin^m t,\ \text{если } 0<t\le\pi/2;\ 1 \text{ если } t>\pi/2\}$.

Теорема 2.4.1. *Пусть функция $\Phi(h)$ при всех $\mu\in\mathbb{R}_+$, $m,n,r\in\mathbb{N}$, соответственно для $1\le q\le 2$, $0<h\le\pi/(n-r)$, $n>r$ и $1/r<q\le 2$, $0<h\le\pi/n$, удовлетворяет условию*

$$\Phi^q(u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mq}_* dv\le\Phi^q(\mu u)\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mq} dv. \tag{2.4.1}$$

Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\gamma_n(W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi),H_2)=2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}(n-r)^{\frac{1}{q}}\alpha^{-1}_{n,r}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{mq}t\,dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \tag{2.4.2}$$

$$\gamma_n(W^{(r)}_{m,q,a}(h,\Phi),H_2)=2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}n^{-\left(r-\frac{1}{q}\right)}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{mq}t\,dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),\quad(2.4.3)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников: колмогоровский* $d_n(\cdot)$*, бернштейновский* $b_n(\cdot)$*, гельфандовский* $d^n(\cdot)$*, линейный* $\lambda_n(\cdot)$*, проекционный* $\pi_n(\cdot)$*.*

Доказательство. Не умаляя общности, докажем, например, соотношение (2.4.2). Используя неравенство (2.1.4), запишем оценку сверху проекционного n-поперечника класса $W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)$, полагая в (2.1.4) $h=\pi/(n-r)$:

$$\pi_n(W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi),H_2)\le\sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f\in W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)\Big\}\le$$

$$\le 2^{-m}\alpha^{-1}_{n,r}\left(\int\limits_0^{\pi/(n-r)}\sin^{mq}\frac{(n-r)t}{2}dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)=$$

$$=2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}(n-r)^{\frac{1}{q}}\alpha^{-1}_{n,r}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{mq}t\,dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right).\quad(2.4.4)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника класса $W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)$ вводим в рассмотрение $(n+1)$–мерную сферу

$$S_{n+1}=\left\{p_n(z):\ \|p_n\|_2=2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}(n-r)^{\frac{1}{q}}\alpha^{-1}_{n,r}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{mq}t\,dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}$$

и укажем, что $S_{n+1}\subset W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi)$. Из (2.2.5) следует, что для произвольного полинома $p_n(z)\in S_{n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_m(p^{(r)}_n;t)_2\le 2^m\alpha_{n,r}\left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)^m_*\|p_n\|_{H_2}.\quad(2.4.5)$$

Обе части неравенства (2.4.5) возведем в степень $q\,(1/r < q \le 2)$ и проинтегрируем полученное соотношение по t в пределах от 0 до μu. Затем в интеграле, расположенном в правой части неравенства, произведём замену переменной $nt = v$, заменим норму полинома $p_n(z) \in S_{n+1}$ радиусом сферы и в итоге получим

$$\int_0^{\mu u} \omega_m^q(p_n^{(r)}; t)_2 dt \le$$

$$\le \Phi^q\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \int_0^{\mu u} \left(\sin\frac{(n-r)t}{2}\right)_*^{mq} dt \left(\int_0^{\pi/(n-r)} \sin^{mq}\frac{(n-r)t}{2} dt\right)^{-1} =$$

$$= \Phi^q\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \int_0^{\mu(n-r)u} \left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mq} dv \left(\int_0^{\pi} \sin^{mq}\frac{v}{2} dv\right)^{-1}. \qquad (2.4.6)$$

В правой части (2.4.6) введём обозначение $\pi/(n-r) = u$ и, используя условие (2.4.1), приходим к неравенству

$$\int_0^{\mu u} \omega_m^q(p_n^{(r)}; t)_2 dt \le \Phi^q(u) \int_0^{\mu\pi} \left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mq} dv \left(\int_0^{\pi} \sin^{mq}\frac{v}{2} dv\right)^{-1} \le \Phi^q(\mu u),$$

которое равносильно включению $S_{n+1} \subset W_{m,q}^{(r)}(h, \Phi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу

$$b_n(W_{m,q}^{(r)}(h, \Phi), H_2) \ge b_n(S_{n+1}, H_2) =$$

$$= 2^{-\left(m+\frac{1}{q}\right)}(n-r)^{\frac{1}{q}} \alpha_{n,r}^{-1} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{mq} t dt\right)^{-1/q} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \qquad (2.4.7)$$

Сравнивая неравенства (2.4.4) и (2.4.7), с учётом (2.2.1), получаем равенство (2.4.2). Аналогичным образом доказывается (2.4.3). Теорема 2.4.1 доказана.

Условие (2.4.1) в формулировке теоремы 2.4.1 выглядит не совсем естественным и кажется труднопроверяемым. Однако, на наш взгляд, это не так. Это следует из утверждения следующей теоремы.

Теорема 2.4.2. *Множество функций* Φ, *удовлетворяющих условию* (2.4.1), *не пусто.*

Доказательство. Рассмотрим, например, степенную функцию $\Phi_*(u) = u^\alpha$, где

$$\alpha := \pi \left\{ p \int\limits_0^\pi \Big(\sin \frac{v}{2} \Big)^{mp} dv \right\}^{-1}. \tag{2.4.8}$$

$$\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p}(mp+1). \tag{2.4.9}$$

Условие (2.4.1), выполнение которого предстоит доказать для функции Φ_*, в рассматриваемом случае запишется в виде

$$\mu^{\alpha p} \geqslant \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin \frac{v}{2} \Big)_*^{mp} dv \Big/ \int\limits_0^\pi \Big(\sin \frac{v}{2} \Big)^{mp} dv.$$

С учётом (2.4.8) данное неравенство примет вид

$$\frac{\pi}{\alpha p} \mu^{\alpha p} \geqslant \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin \frac{v}{2} \Big)_*^{mp} dv, \tag{2.4.10}$$

где $0 < \mu < \infty$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(\mu) := \frac{\pi}{\alpha p} \mu^{\alpha p} - \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin \frac{v}{2} \Big)_*^{mp} dv. \tag{2.4.11}$$

В бесконечно малой окрестности нуля с учётом (2.4.11) имеем

$$R(\mu) = \frac{\pi}{\alpha p}\mu^{\alpha p} - \int\limits_0^{\mu\pi} \left(\frac{v}{2}\right)^{mp} dv = \mu^{\alpha p}\left(\frac{\pi}{\alpha p} - \frac{\pi^{mp+1}}{2^{mp}(mp+1)}\ \mu^{mp+1-\alpha p}\right). \quad (2.4.12)$$

Следовательно, при $\mu \to 0+$ из (2.4.12) и (2.4.9) получаем $R(\mu) > 0$. Из (2.4.11) и (2.4.8) имеем $R(0) = R(1) = 0$. Покажем, что на интервале $(0,1)$ функция (2.4.11) является знакопостоянной. Для этого, рассуждая методом от противного, полагаем, что существует некоторая точка $\xi \in (0,1)$, в которой функция R меняет знак. В силу теоремы Ролля производная первого порядка функции R, то есть

$$R'(\mu) = \pi\mu^{\alpha p-1} - \pi\Big(\sin\frac{\mu\pi}{2}\Big)^{mp},$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Столько же различных нулей на $(0,1)$ и в тех же точках, что и R', должна иметь функция

$$R_*(\mu) := \pi^{1/(mp)}\Big(\mu^{(\alpha p-1)/(mp)} - \sin\frac{\mu\pi}{2}\Big). \quad (2.4.13)$$

Так как в силу левой части неравенства (2.4.9) и соотношения (2.4.13) $R_*(0) = R_*(1) = 0$, то функция

$$R_*'(\mu) = \pi^{1/(mp)}\Big(\frac{\alpha p-1}{mp}\mu^{(\alpha p-mp-1)/(mp)} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2}\Big) \quad (2.4.14)$$

на основании теоремы Ролля должна иметь на $(0,1)$ не менее трех различных нулей. Из (2.4.14) и правой части неравенства (2.4.12) следует, что на интервале $(0,1)$ R_*' является разностью двух положительных функций, одна из которых монотонно убывает и выпукла вниз, а другая монотонно убывает и выпукла вверх. Из геометрических соображений очевидно, что R_*' может

иметь на $(0,1)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает, что $R(\mu) > 0$ для любого $\mu \in (0,1)$.

Пусть теперь $1 \leqslant \mu < \infty$. Тогда на основании (2.4.11) и (2.4.8) функция R примет следующий вид

$$R(\mu) = \mu^{\alpha p} - \alpha p(\mu - 1) - 1. \tag{2.4.15}$$

Из (2.4.15) получаем

$$R'(\mu) = \alpha p\Big(\mu^{\alpha p - 1} - 1\Big). \tag{2.4.16}$$

В силу левой части неравенства (2.4.9), то есть когда $\alpha p > 1$, из (2.4.16) получаем, что $R'(\mu) \geqslant 0$ на полусегменте $[1, \infty)$. Поскольку, как следует из (2.4.15), $R(1) = 0$, то $R(\mu) \geqslant 0$ на указанном точечном множестве.

Полученное означает, что неравенство (2.4.10), а значит и условие (2.4.1), справедливы для функции Φ_* при любом $\mu \in (0, \infty)$. Теорема 2.4.2 доказана. Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 2.4.1. *Для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, соответственно при $1 < q \leq 2$ и $1/r < q \leq 2$, справедливы равенства*

$$\gamma_n(W_{m,q}^{(r)}(h, \Phi_*), H_2) = 2^{-m}\, \pi^{\alpha - 1/q}\, (\alpha q)^{1/q}\, \alpha_{n,r}^{-1}\, (n - r)^{1/q},\ n > r;$$

$$\gamma_n(W_{m,q,a}^{(r)}(h, \Phi_*), H_2) = 2^{-m}\, \pi^{\alpha - 1/q}\, (\alpha q)^{1/q}\, n^{-r + 1/q},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

В завершении этого параграфа заметим, что поскольку

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{mq} t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{mq+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mq}{2} + 1\right)},$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция Эйлера, то при выполнении условий теоремы 2.4.1 равенства (2.4.2) и (2.4.3) можно записать в виде

$$\gamma_n(W^{(r)}_{m,q}(h,\Phi),H_2)=\frac{1}{2^m\sqrt[q]{\pi}}\left\{\frac{\Gamma\left(\dfrac{mq+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mq}{2}+1\right)}\right\}^{1/q}\cdot\frac{\sqrt[q]{n-r}}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

$$\gamma_n(W^{(r)}_{m,q,a}(h,\Phi),H_2)=\frac{1}{2^m\sqrt[q]{\pi}}\left\{\frac{\Gamma\left(\dfrac{mq+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mq}{2}+1\right)}\right\}^{1/q}\cdot\frac{1}{n^{r-1/q}}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Список литературы

1. Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет, 1986, с.91-101.

2. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки, 1986, Т.40, №3, с.341-351.

3. Айнуллоев Н. Точная оценка второй производной в пространстве L_p // Матем. заметки, 1991, Т.49, вып.5, с.3-6.

4. Бабенко В.Ф., Н.П.Корнейчук, В.А.Кофанов, С.А.Пичугов. Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.

5. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Укр. матем. журнал, 1989, Т.41, №26, с.799-802.

6. Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении аналитических в единичном круге функций // Укр. матем. журнал, 1990, Т.42, №6, с.838-843.

7. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. матем. журнал, 1990, Т.42, №7, с.873-881.

8. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки, 1995, Т.57, №1, с.30-39.

9. Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки, 1999, Т.65, №2, с.186-193.

10. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки, 2002, Т.72, №5, с.665-669.

11. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки, 2009, Т.85, №3, с.323-329.

12. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник, 2010, Т.201, №8, с.3-22.

13. Владимиров В.С. - Уравнения математической физики. - М.:Наука, 1981.

14. Двейрин М.З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1975, вып.23, с.32-46.

15. Двейрин М.З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений, вып.6, Киев: Наукова думка, 1975, с.41-54.

16. Двейрин М.З. Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге // Теория приближения функций. М.: Наука, 1977, с.129-132.

17. Джурахонов О.А. О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве Харди // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2007, Т.50, №9-10, с.727-732.

18. Джурахонов О.А. Об одной экстремальной задаче для наилучшего полиномиального приближения некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2009, Т.52, №10, с.759-764.

19. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. - М., 1965, Т.2.

20. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. - М.:Наука, 1987, 424 с.

21. Кусис П. Введение в теорию пространств H_p. - М.:Мир, 1984, 256 с.

22. Миркалонова М.М. Наилучшее полиномиальные приближение аналитических функций в пространстве Харди H_q, $1 \leq q \leq \infty$ // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2009, Т.52, №11, с.825-829.

23. Миркалонова М.М. Верхние грани наилучших полиномиальных приближений на некоторых классах аналитических функций в пространстве Харди // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010, Т.53, №5, с.338-345.

24. Миркалонова М.М. Значение n-поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве H_2 // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010, Т.53, №8, с.595-600 .

25. Миркалонова М.М., Холмамадова Ш.А. О неравенствах для производных полиномов в пространстве Харди H_p // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т.56, №10. с.767-771.

26. Pinkus A. n-Width in Approximation Theory - Berlin: Springer - Verlag, 1985, 292 p.

27. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. - М.: Гостехиздат, 1950, 350 с.

28. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки, 1967, Т.1, №2, с.155-162.

29. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica, 1976, Т.2, с.77-85.

30. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки, 1977, Т.22, №2, с.285-295.

31. Тайков Л.В. Уточнение неравенства Харди, содержащего оценку величины промежуточной производной функции // Матем. заметки, 1991, Т.50, №4, с.114-122.

32. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук, 1960, Т.1, №3, с.81-120.

33. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений.- М.:Издательство МГУ, 1976, 304 с.

34. Тихомиров В.М. Теория приближений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления / ВИНТИ. -1987, Т.11, с.103-260.

35. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из C^n, Успехи. мат. наук, 1990, Т.45, №25, с.197-198.

36. Fisher S.D., Micchelli C.A. The n-Widths of sets analytic function. Duke Math. J., 1980, T.47, p.789-801

37. Hardy G.G., Littlewood J.E. and Polya G. Inequality. Cambridge University Press. 2nd ed. 1952. 346 p.

38. Шабозов М.Ш. О поперечниках в пространстве Харди H_2 классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 1998, Т.41, №9, с.48-53.

39. Шабозов М.Ш. Значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди //Вестник ХоГУ, 1999, №1, серия 1, с.35-44.

40. Шабозов М.Ш., Джурахонов О.А. О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве Харди // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 1999, Т.42, №3, с.29-35.

41. Шабозов М.Ш., Пиров Х.Х. О наилучших приближениях аналитических функций и значениях поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 1999, Т.42, №4, с.19-24.

42. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки, 2000, Т.68, №5, с.796-800.

43. Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // ДАН России, 2002, Т.383, №2, с. 171-174.

44. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций, // ДАН России, 2002, Т.382, №6, с.747-749.

45. Шабозов М.Ш., Пиров Х.Х. Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из $H_p^r,\ 1 \le p \le 2$. // ДАН России, 2003, Т.394, №4, с.399-401.

46. Шабозов М.Ш., Умеди Гулходжа. Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве Харди $H_p, 1 \le p \le 2$ // ДАН России, 2005, Т.403, №5, с.610-613.

47. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_p,\ 1 \le p \le \infty$ // ДАН России, 2006, Т.410, №4, с.461-464.

48. Шабозов М.Ш., Джурахонов О.А. О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве Харди // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2006, Т.49, №9, с.787-797.

49. Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // ДАН России, 2007. Т.412, №4. с. 466-469.

50. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2009, №3(136), с.7-23.

51. Шабозов М.Ш., Миркалонова М.М. Наилучшее полиномиальные приближение функций в пространстве Харди H_p, $1 \leq p \leq \infty$. // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2009, №2(135), с.19-31.

52. Шабозов М.Ш., Холмамадова Ш.А. Некоторые точные неравенства теории приближения аналитических в круге функций // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010, Т.53, №8, с.581-588.

53. Шабозов М.Ш., Холмамадова Ш.А. О поперечниках некоторых классов аналитических в круге функций // Известия Тульского государственного университета, серия естественные науки, 2012, вып.3, с.48-59.

54. Холмамадова Ш.А. Об оценке производных аналитических в круге функций // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2011, Т.54, №4, с.265-269.

55. Холмамадова Ш.А. О точных оценках нормы второй производной функции в пространстве $L_p(R)$ // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2011, Т.54, №6, с.431-435.

56. Холмамадова Ш.А. О наилучшей полиномиальной аппроксимации аналитических функций в пространстве Харди // Материалы междуна-

родной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", 29-30 июня 2012. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2012. – С.179-182.

57. Холмамадова Ш.А. О точных неравенствах для производных полиномов в пространствах H_p, $1 \leq p \leq \infty$ // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (г.Душанбе, 27-28 апреля 2015). – С.30-32.