ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Холмамадовой Шогуны Авобековны

на тему "Неравенства для производных аналитических функций и наилучшее полиномиальное приближение в пространстве Харди"

по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Актуальность избранной темы

Неравенства играют фундаментальную роль почти во всех разделах математики и их количество растет с каждым годом. Детальная библиография о неравенствах типа Ландау и Адамара содержится в монографии

Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. *Неравенства для производных и их приложения.* Киев: Наукова думка, 2003.

Многие работы по этой тематике связаны с задачей С.Б.Стечкина об оптимальной аппроксимации неограниченных операторов ограниченными. Впоследствии эта проблематика была включена в более широкий класс задач оптимального восстановления. В работах В.М. Тихомирова и его соавторов многие неравенства доказаны с помощью обобщенного принципа Лагранжа. Из недавних публикаций о неравенствах для производных можно отметить работу

Babenko V., Babenko Yu., Kovalenko O. *Kolmogorov's problem on the class of multiply monotone functions* // Advances in Mathematics. 2015. V.280. P. 256–281.

Пусть $B^{(r)}$ – класс аналитических в единичном круге функций f, производные порядка r которых удовлетворяют условию $|f^{(r)}(z)| \leq 1$ для всех $|z| < 1$. В 1960 г. В.М. Тихомиров доказал теорему о поперечниках шара, играющую фундаментальную роль в оценках поперечников снизу. С помощью этой теоремы, неравенств Бернштейна и теоремы К.И. Бабенко о наилучшем приближении класса $B^{(r)}$ алгебраическими полиномами В.М. Тихомиров получил точные значения колмогоровских n-поперечников $d_n(B^{(r)}; C(T_\rho))$, где $T_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$, $\rho \leq 1$. В 1967 г. аналогичный результат для класса функций f, производные порядка r которых принадлежат единичному шару пространства Харди H_p, доказал Л.В. Тайков. Продолжая эти исследования, Л.В. Тайков в 1977 г. при некоторых условиях на мажоранту Φ вычислил колмогоровские поперечники класса $W^r H_p \Phi$, состоящего из аналитических в единичном круге функций f, модуль непрерывности второго порядка которых удовлетворяет условию

$$\frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f^{(r)}, 2x)_p \, dx \leq \Phi(\pi/(2k)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Важные результаты о наилучших линейных методах приближения и поперечниках класса $W^r H_p \Phi$ содержатся в работе С. Б. Вакарчука и В. И. Забутной

("Математические заметки", 2009) и в статье С.Б. Вакарчука и М.Ш. Шабозова ("Математический сборник", 2010). Обзор результатов о линейных поперечниках классов аналитических функций приведен в статье

Фарков Ю.А. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций* // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т.19(5). С. 185–212.

Диссертационная работа Ш. А. Холмамадовой посвящена точным неравенствам для производных аналитических в круге функций, связанных с усредненным значением модуля гладкости самой функции и модуля непрерывности второй производной. В диссертации также рассматриваются задачи о наилучших полиномиальных приближениях и о поперечниках классов аналитических функций, определяемых как подмножества классса Харди H_2 при различных условиях на усредненные значения модулей непрерывности высших производных. Диссертационная работа Ш. А. Холмамадовой, несомненно, относится к важному и актуальному направлению теории приближений аналитических функций.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все утверждения и теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и неравенства, полностью обоснованы.

Достоверность и новизна, полученных результатов

Полученные в диссертации результаты достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования Н. Айнуллоева, С.Б. Вакарчука, М.З. Двейрина, Л.В. Тайкова и М.Ш. Шабозова, основные публикации которых по теме диссертации приведены автором в списке литературы. Важно, что результаты автора о поперечниках в пространстве Харди H_2 и применяемые в диссертации методы оценок поперечников сверху не укладываются в известную общую схему вычисления поперечников в гильбертовых пространствах.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов

Основные результаты диссертации имеют существенное значение для развития современной теории приближения аналитических функций и могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, в Институте математики им. А.Д. Джураева АН Республики Таджикистан, в Московском, Новосибирском, Санкт-Петербургском, Воронежском, Казанском, Хорогском и других институтах и университетах.

Оценка содержания диссертации, её завершенность

Во введении приведены применяемые обозначения, формулируется общая постановка задачи, обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные полученные автором результаты.

В § 1.1 даны основные определения и вспомогательные факты, используемые в дальнейшем. В § 1.2 получены точные оценки величины производной аналитической в единичном круге функции через усредненные значения ее модуля непрерывности и модуля непрерывности ее второй производной (теорема 1.2.1) и несколько оценок производных произвольного алгебраического полинома P_n через усредненные значения его модуля непрерывности (теоремы 1.2.2 и 1.2.3). Отмечается, что неравенство (1.2.20) является аналогом неравенства С.М. Никольского для целых функций на случай алгебраических полиномов, принадлежащих пространству Харди H_p.

В § 1.3 доказаны точные неравенства для оценки величины нормы второй производной аналитической в единичном круге функции, принадлежащей пространству Харди H_p, $1 \leq p \leq \infty$, через усреднённое значение модуля гладкости самой функции и через усреднённое значение модуля гладкости её второй производной (теорема 1.3.1). Теоремы 1.2.2 и 1.2.3 дополнены следствием 1.3.1 и теоремой 1.3.3, содержащими оценки норм производных $P_{n,a}^{(r)}$.

В § 1.4 приводятся точные оценки величины нормы второй производной функции, принадлежащей пространству $L_p(\mathbb{R})$ через модуль гладкости самой функции и модуль гладкости её второй производной (теорема 1.4.1). Кроме того, получено обобщение неравенства Н. Айнуллоева, доказанного им в 1991 году.

Вторая глава диссертации посвящена наилучшей полиномиальной аппроксимации аналитических функций в пространстве Харди и отысканию точных значений n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих H_2. В § 2.1 получены точные оценки для наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{H_p}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, через усредненные значения модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)}; t)$ и $\omega_m(f_a^{(r)}; t)$ (теоремы 2.1.1 – 2.1.4). В заключительных трех параграфах с помощью полученных в главе 1 и § 2.1 результатов вычисляются бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники классов $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h)$, $\mathcal{W}_{m,q}^{(r)}(h)$, $\mathcal{W}_{m,q,a}^{(r)}(h)$ в пространстве Харди H_2 (эти классы определяются указанными в § 2.2 условиями на усреднённые значения модулей непрерывности высших порядков аналитических в единичном круге функций).

Диссертация Ш.А. Холмамадовой является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой.

Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования

Достоинствами диссертации являются следующие полученные в ней результаты:

1. Получены точные оценки величины первой и второй производных функции $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$, через усреднённые значения модулей непрерывности и гладкости самой функции и её второй производной. Даны приложения полученных результатов к оценке промежуточных производных полиномов через усреднённые значения модулей непрерывности самих полиномов.

2. Получена оценка нормы второй производной функции $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$, через усреднённое значение модуля гладкости самой функции и модуля гладкости её второй производной. Получены новые точные неравенства для производных полиномов через модуль гладкости самих полиномов.

3. Получены новые точные неравенства, связывающие наилучшие приближения функции $f \in H_p$, $1 \leq p \leq 2$ с усреднёнными значениями модулей непрерывности высших порядков.

4. Найдены точные значения n-поперечников классов $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_{m,a}^{(r)}(h)$, $\mathcal{W}_{m,q}^{(r)}(h)$, $\mathcal{W}_{m,q,a}^{(r)}(h)$ в пространстве Харди H_2.

Наиболее интересными и важными являются результаты о поперечниках, изложенные в главе 2. При выводе этих результатов используются неравенства, доказанные в главе 1, и результаты о наилучших полиномиальных приближениях из § 2.1. Автор диссертации владеет современными методами математического анализа, теории аналитических функций и методами теории приближений.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако в них имеется несколько пробелов, неточностей и опечаток. Вот некоторые из них:

1. Во введении отмечается, что проведенные в диссертации исследования примыкают к результатам Л.В. Тайкова и Н. Айнуллоева, однако не упоминаются исходные результаты К.И. Бабенко и В.М. Тихомирова, на которые ссылается Л.В. Тайков в первой публикации по этой тематике ("Математические заметки", 1967). Теорема о поперечниках шара автором не упоминается, однако на ней основано многократно примененное в диссертации неравенство $b_n \leq d_n$. Не указана связь оптимальных методов в задачах о линейных поперечниках различных классов аналитических в круге функций с ядром К.И. Бабенко (см., например, указанную выше работу С.Б. Вакарчука и М.Ш Шабозова (2010)).

2. Полученные в статье результаты о поперечниках в пространстве Харди H_2 следовало сравнить с известными результатами о поперечниках в гильбертовых пространствах, изложенным в § 4.4 монографии В.М. Тихомирова "Некоторые вопросы теории приближенииний".

3. При выводе формулы (2.1.7) на стр. 57 следовало от функции натурального аргумента $\varphi(k)$ перейти к функции непрерывного аргумента $\varphi(y)$, и только после этого использовать обозначение для производной $\varphi'(k)$ (сравните с доказательством формулы (2.1.11) на стр. 59). Вывод формулы (2.1.7) должен был быть изложен более подробно.

4. На стр. 21 в определении $\mathcal{P}_n$ следовало исключить условие $|a_n| \neq 0$ (в определении величины наилучших полиномиальных приближений и при вычислении поперечников требуется, чтобы множество $\mathcal{P}_n$ было линейным пространством).

5. Имеются чисто технические неточности в формулах и незначительное количество грамматических ошибок (см., например, стр. 21, 24, 28, 54 и 57).

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации

Автореферат соответствует требованиям ВАК МОН РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011

Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ не в полной мере.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14

Основные результаты получены автором лично и обладают внутренним единством. Результаты, выдвигаемые для публичной защиты, свидетельствуют о личном вкладе автора в теорию приближений классов аналитических функций и могут быть использованы специалистами по теории функций и её применениям. Все утверждения и теоремы полностью обоснованы. Основные результаты диссертации опубликованы в семи научных статьях, пять из которых входят в перечень ВАК МОН РФ, докладывались на научных семинарах по теории приближений в Хорогском государственном университете (г. Хорог, 2010-2015 гг.), на семинарах отдела теории функций Института математики АН РТ им. А.Джураева (г. Душанбе, 2010-2013 гг.) и на нескольких международных научных конференциях. Ссылки на авторов и на использованные в диссертации источники имеются.

Диссертация Холмамадовой Шогуны Авобековны на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории функций и ее применений, что соответствует требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Фарков Юрий Анатольевич,
доктор физико-математических наук,
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.
117437, Российская Федерация, г. Москва,
ул. Академика Волгина, д. 14, корп. 2, кв. 114.
Тел.: +7 903 108 87 79
E-mail: farkov@list.ru
ФГБОУ ВПО "Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ",
Профессор кафедры прикладных информационных технологий

Ю. А. Фарков

13.11.2015

ЗАВЕРЯЮ
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РФ
К.Э.Н К.К. БОНДАРЕВ