«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор Таджикского национального
университета, академик АН РТ
Имомзода М.С.
«20» ноября 2015 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Холмамадовой Шогуны Авобековны «Неравенства для производных аналитических функций и наилучшее полиномиальное приближение в пространстве Харди», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В последние десятилетия математики прилагают колоссальные усилия к уточнению и обобщению классических неравенств, открытию новых видов неравенств и их приложений во многих разделах анализа. Наиболее яркие приложения неравенств имеют в теории аппроксимации функций, в которой доминирующую роль играют неравенства, приводящие к точным решениям экстремальных задач.

Большое значение для многих областей математики и её приложений, таких как математический анализ, теория аппроксимации, дифференциальные уравнения, теория некорректных задач, оптимизация алгоритмов и др., имеют неравенства, которые оценивают сверху L_q-норму промежуточной производной функции через L_p-норму самой функции и L_s-норму её старшей производной. Неудивительно, что именно этому разделу исследований экстремальных неравенств посвящена сравнительно недавно вышедшая из печати книга В.Ф.Бабенко, Н.П.Корнейчука, В.А.Кофанова, С.А.Пичугова «Неравенства для производных и их приложения», Киев: Наукова думка, 2003 г. - 590 стр. Необходимо отметить, что все приведённые в этой книге точные неравенства касаются только действительных функций, заданных на всей оси или полуоси. Принципиальное значение в развитии теории аппроксимации аналитических в круге функций и получение точных неравенств имеет работа Л.В.Тайкова «Некоторые точные неравенства в теории приближения функций» (Analysis Mathematica, 2(1976), с.77-85), где была сформулирована и решена задача получения точной оценки нормы первой производной функции в $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ через модуль непрерывности самой функции и модуль непрерывности её второй производной. Отсюда, в качестве следствия, выводятся точные неравенства, которые аналогичны неравенствам Адамара – Ландау и Бернштейна.

Аналогичный результат в метрике $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ для точной оценки величины нормы второй производной через её модуль гладкости производной второго порядка и модуль гладкости самой функции получен в работе Н.Айнуллоева «Точная оценка второй производной в пространстве L_p» (Математические заметки, 1991, т.49, №5, с.3-6). В этой работе в качестве следствия получена оценка нормы производных тригонометрических полиномов через их модули гладкости, аналогичная неравенству Зигмунда.

Что-же касается функций комплексного переменного, даже для круговых областей аналитичности функций, аналоги хорошо известных неравенств типа Харди или Колмогорова получены в редких случаях. Этим объясняется актуальность диссертационной темы Холмамадовой Шогуны Авобековны, посвящённой получению точных неравенств для промежуточных производных аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_p, $1 \leq p \leq \infty$ через усреднённый с весом модуль непрерывности или гладкости самих функций и их старших производных.

Диссертация состоит из двух глав, каждая из которых содержит четыре параграфа, и списка литературы из 57 наименований.

В первой главе диссертации исследуются различные неравенства, содержащие точные оценки первой и второй производной аналитических в круге функций через усреднённый с весом модуль непрерывности самой функции и модуль непрерывности её второй производной (или же через модуль гладкости самой функции и модуль гладкости её второй производной) в пространстве Харди H_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Первый параграф является вспомогательным, в нём приведена постановка задач, определения, нужные для дальнейшего, и предварительные факты.

Во втором параграфе получены точные оценки величины нормы первой производной (обычной и производной по аргументу) аналитических в круге функций через усренённое с положительными весами модуля непрерывности самой функции и модуля непрерывности её второй производной в пространстве H_p, $1 \leq p \leq \infty$ (теорема 1.2.1, следствия 1.2.1). Из полученных результатов в качестве следствия выводятся точные неравенства для величины нормы первой производной (обычной и по аргументу) алгебраического комплексного полинома, через усренённое значение модуля непрерывности самого полинома (теоремы 1.2.2, следствие 1.2.2, 1.2.3). Этот результат, в частности, содержит неравенство типа Бернштейна (теорема 1.2.3).

В конце параграфа полученные результаты применяются в экстремальной задаче нахождения точной оценки наилучших приближений аналитических в круге функций посредством усреднённых значений модулей непрерывности производных $f_a^{(r-1)}$, $f_a^{(r+1)}$ по аргументу и обычных производных $f^{(r-1)}$, $f^{(r+1)}$.

В третьем параграфе решена аналогичная задача для нахождении точной оценки второй производной аналитической в круге функции через усреднённое значение с положительными весами модуля гладкости самой функции и модуля гладкости второй производной функции (теорема 1.3.1). Как следствие приводится точная оценка нормы второй производной алгебраических комплексных полиномов через усреднённое значение модуля гладкости самих полиномов в пространстве H_p, $1 \leq p \leq \infty$ (теоремы 1.3.2 – 1.3.4).

Отмечается, что из теоремы 1.3.4 вытекают ранее полученные результаты М.Ш.Шабозова и М.М.Миркалоновой.

В четвёртом параграфе приводится обобщение результата Н.Айнуллоева о точной оценке величины нормы второй производной в $L_p(\mathbb{R})\,(1 \leq p \leq \infty)$, через усреднённые значения модулей гладкости самой функции и её второй производной (теорема 1.4.1).

В конце четвёртого параграфа приводится точная оценка $L_p\,(1 \leq p \leq \infty)$-нормы производной r-го порядка тригонометрического полинома через $L_q\,(1 \leq q \leq \infty)$-нормы модуля гладкости самого полинома (теорема 1.4.2).

Вторая глава диссертации посвящена экстремальным задачам нахождения точной оценки величины наилучшей полиномиальной аппроксимации аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди $H_p\,(1 \leq p \leq \infty)$, и отысканию точных значений различных поперечников для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых $L_q\,(1 \leq q \leq 2)$-нормой модулей непрерывности высших порядков r-ых производных.

В первом параграфе второй главы доказано несколько утверждений (теоремы 2.1.1 – 2.1.4) в виде прямых теорем теории приближения аналитических в единичном круге функций, структурные свойства которых характеризуются модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций (как обычных, так и по аргументу). В сущности, полученные результаты являются неравенствами типа Джексона – Стечкина об оценке величины наилучших приближений аналитических в круге функций, посредством усреднённых значений модулей непрерывности граничных значений производных r-ых порядков функций. Указывается экстремальная функция, на которой результаты всех теорем, полученные в виде неравенства, обращаются в равенство.

Во втором параграфе, используя результаты теорем 2.1.1 – 2.1.4, вычислены точные значения бернштейновских, гельфандовских, колмогоровских, линейных и проекционных поперечников классов аналитических функций, естественно вытекающих из результатов указанных теорем.

В третьем параграфе второй главы вычислены точные значения всех перечисленных выше поперечников для классов функций, усреднённые значения модулей непрерывности которых сверху ограничены заданной мажорантой. Из полученных в этом параграфе результатов при частных значениях параметров класса вытекают ранее полученные результаты Г.А.Юсупова.

Наиболее интересные результаты четвёртого параграфа содержатся в теоремах 2.4.1 – 2.4.2, где для класса функций $L_q (1 \leq q \leq 2)$-нормы, модули непрерывности r-ых производных которых ограничены заданной мажорантой, удовлетворяющей на границе некоторым ограничениям, вычислены точные значения всех введённых в работе поперечников. Полученный результат, в частности, содержит результаты С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова.

В диссертации встречаются опечатки как в математических формулах, так и в основном тексте (например, на стр. 21,28,57).

Однако эти замечания и имеющиеся некоторые грамматические и стилистические погрешности не снижают в целом высокой оценки диссертации.

Все полученные в диссертации Ш.А.Холмамадовой результаты являются новыми, все они обоснованы подробными доказательствами.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаем, что диссертация «Неравенства для производных аналитических функций и наилучшее полиномиальное приближение в пространстве Харди», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, является научно-квалиификационной работой, в которой решены важные задачи, вносящие существенный вклад в теорию приближения функций и её приложения, что соответствует п.9 «Положения о присуждении учёных степеней ВАК РФ», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Холмамадова Шогуна Авобековна заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Таджикского национального университета (ТНУ) (протокол №10 от 18.11.2015 г.).

Заведующий кафедрой математического
анализа и теории функций ТНУ,
кандидат физико-математических наук Г.М.Кадыров

Доцент кафедры математического
анализа и теории функций ТНУ,
кандидат физико-математических наук Г.А.Юсупов

Адрес ведущей организации:
Таджикский национальный университет,
735025, Таджикистан, г. Душанбе, проспект, 17,
Сайт: www.tgnu.tj
Тел. рабочий: (+992)372-21-77-11
Тел. моб. (+992)93-500-22-14
E-mail: tgnu@mail.tj

Подписи Кадырова Г.М. и Юсупова Г.А. заверяю:
Начальник ОК ТНУ С.Эмомали