На правах рукописи

Мамадаёзов Назаралибек Мирзомамадович

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 6

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Бабенко Александр Григорьевич**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук, заведующий отделом аппроксимации и приложений

Тухлиев Камариддин, кандидат физико-математических наук, доцент, Худжандкский государственный университет им. Б.Гафурова, заведующий кафедрой алгебры и вычислительной математики

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Таджикский национальный университет

Защита состоится *22 апреля 2016 г. в 12:00 часов* на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://www.mitas.tj Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан.

Автореферат разослан "___" ___________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета **У.Х. Каримов**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория приближения функций – одна из центральных ветвей математического анализа. Возникшая в результате развития математической науки и потребностей практики, эта теория продолжает интенсивно развиваться на протяжении многих десятилетий. В ней отражена одна из фундаментальных идей математики – приближение сложных объектов более простыми и более удобными. Эта идея является определяющей в вопросах связи математики с практикой, что стимулировало развитие теории приближения функций в прошлом и обеспечит интерес к ней в будущем.

Настоящая диссертационная работа посвящена вопросам приближения периодических суммируемых с квадратом функций тригонометрическими полиномами в метрике пространства $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и вычислению точных значений различных n-поперечников классов функций из L_2, задаваемых усреднёнными с весом модулями непрерывности r-й производной функции.

Цели и задачи исследования

- Получить точные неравенства типа Джексона-Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами и усреднёнными с весом обобщёнными модулями непрерывности m-го порядка в метрике пространства $L_2[0, 2\pi]$.
- Вычислить точные значения различных n-поперечников классов функций, определяемых обобщёнными модулями непрерывности высших порядков.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются современные методы теории функций и функционального анализа оптимизационного содержания и методы решения экстремальных задач теории приближения функций.

Научная новизна исследований. Основные результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются в следующем:

- найдены точные неравенства типа Джексона-Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами и усреднёнными с весом обобщёнными модулями непрерывности m-го порядка в метрике пространства $L_2[0, 2\pi]$;
- вычислены точные значения различных n-поперечников классов функций, определяемых обобщёнными модулями непрерывности высших порядков.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории приближений при исследовании экстремальных задач для отыскания точных констант в других функциональных пространствах.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах отдела теории функций Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан (Душанбе, 2010-2015 гг.), на семинарах кафедры математического анализа Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева (Душанбе, 2010-2015 гг.), на международной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы математики и ее преподавания» (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах автора, список которых приведён в конце автореферата. Из них 5 статьей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК России, а 3 стати в трудах международных конференций. В совместных работах [3, 4] научному руководителю М.Ш.Шабозову принадлежит постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 40 наименований, занимает 73 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Переходим к изложению основных результатов диссертационной работы.

Обозначим через $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$\mathcal{T}_{2n-1}$ – множество всех тригонометрических полиномов порядка $\le n-1$. Для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right),$$

величина её наилучшего приближения в L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\left\{ \|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $S_{n-1}(f,x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2$, $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f), \ k \ge n$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$. Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+, \ L_2^{(0)} = L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Модуль непрерывности m-го порядка произвольной 2π-периодической измеримой и суммируемой с квадратом функции $f \in L_2$ определим равенством

$$\omega_m(f,t) = \sup\left\{ \left\| \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + (m-k)h) \right\| : \ |h| \le t \right\}. \tag{2}$$

Во втором параграфе первой главы изложены некоторые точные неравенства, содержащие величины $E_{n-1}(f)$ – наилучшее полиномиальное приближение функции $f \in L_2$ и усреднённые значения модулей непрерывности первого порядка.

Одним из основных результатов этого параграфа является

Теорема 1.2.1. *Для любого $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, \pi/n]$ справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)\,du \right) dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}, \tag{3}$$

где $Si(t) := \int_0^t u^{-1} \sin u\,du$ – интегральный синус.

Равенство (3) является своеобразным обобщением результата Л.В.Тайкова[1].

Отметим, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(r-s)}$, $s = 1, 2, \ldots, r$ принадлежат пространству L_2 и мы можем рассматривать задачу о наилучшем совместном приближении функции f и её промежуточных производных $f^{(r-s)}$ тригонометрическими полиномами в метрике пространства L_2 :

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) = \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \left\| f^{(r-s)} - T_{n-1}(\cdot) \right\|,$$

причём элементарно доказывается, что

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) = \left\| f^{(r-s)} - S_{n-1}(f^{(r-s)}; \cdot) \right\| = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \rho_k^2(f). \tag{4}$$

Представляет интерес изучение поведения величин (4) на классе функций $L_2^{(r)}$. Из теоремы 1.2.1 вытекает решение сформулированной задачи в виде следующего

Следствие 1.2.1. *Для любого* $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2s} E_{n-1}^2(f^{(r-s)})}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du\right) dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}. \tag{5}$$

В работе[2] Н.И.Черных отметил, что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)}; \pi/n)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, а усреднённый с весом $\varphi(t) > 0$, $0 < t \leq h$ функционал

$$\Phi_m(f^{(r)}; h) = \left\{ \int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)}; t)\varphi(t)dt \Big/ \int\limits_0^h \varphi(t)dt \right\}^{1/2},$$

поскольку при любом $h \in (0, \pi/n]$, $\Phi_m(f^{(r)}; h) \leq \omega_m(f^{(r)}; h)$. При исследовании некоторых экстремальных задач теории приближения функций в L_2

[1]Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

[2]Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

весовая функция $\varphi(t)$ появляется из содержательного смысла самой постановки задач. Так, например, при доказательстве нижеприведённой теоремы 1.2.2 в случае $m = 1$ весовая функция $\varphi(t) := \varphi_h(t) = 2h^{-2}(h-t)$ появляется естественным образом в ходе доказательства, где установлено точное неравенство между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f^{(r-s)})$ последовательных производных $f^{(r-s)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, r)$ тригонометрическими полиномами функций $f \in L_2^{(r)}$ и усреднённого с весом $\varphi(t) := \varphi_h(t) = 2h^{-2}(h-t),\ 0 \le t \le h$ модуля непрерывности первого порядка $\omega^2(f^{(r)}, t)$ производной $f^{(r)} \in L_2$. Этот результат интересно сопоставить с результатом Фокарта, Крякина и Шадрина[3], полученным в пространстве $\mathbb{C} := \mathbb{C}[0, 2\pi]$, где, как и в нашем случае, весовая функция $\varphi(t) = 2h^{-2}(h-t)$ появляется неизбежно из содержательного смысла постановки задачи естественным образом.

Теорема 1.2.2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \le \pi. \tag{6}$$

В третьем параграфе получены точные неравенства, содержащие наилучшие полиномиальные приближения и усреднённые значения модулей непрерывности произвольного порядка r-й производной функции из L_2. При этом весьма важными являются неравенства, которые оценивают величины наилучшего приближения через значения модулей непрерывности в некоторой точке $t \in (0, \pi/n]$. Такие неравенства принято называть неравенствами Джексона-Стечкина.

Неравенствами типа Джексона-Стечкина в широком смысле называют соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции в рассматриваемом банаховом пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной. При этом естественным образом возникает экстремаль-

[3]Foucart S., Kryakin Yu. and Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 1999. Vol.65, №6. P.157-179.

ная задача получения точных неравенств, неулучшаемых на рассматриваемых классах функций. При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{t}{n} \right),$$

где

$$t > 0,\ f \in L_2^{(r)},\ m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(0)} \equiv f,$$

многими математиками в разное время предложены различные методы исследования, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ. Эту задачу в разное время исследовали Н.И.Черных[2,4], В.И.Бердышев[5], Л.В.Тайков[1,6], А.А.Лигун[7,8] А.Г.Бабенко[9], В.И.Иванов и О.И.Смирнов[10], С.Б.Вакарчук[11,12], М.Ш.Шабозов[13], М.Ш.Шабозов и Г.А.Юсупов[14] и многие другие.

Обобщая результат Л.В.Тайкова[1] для произвольных модулей непрерывности m-го порядка, С.Б.Вакарчук[12] доказал, что

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} n^r E_{n-1}(f) \cdot \left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t) dt \right\}^{-m/2} = \left\{ \frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{m/2}. \tag{7}$$

Более общий результат в этом направлении получен М.Ш.Шабозовым[13], в где доказано, что для произвольных $m, n, r \in \mathbb{N},\ 1/r < p \le 2,\ 0 < h \le \pi/2$

[4]Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

[5]Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды Матем. ин-та АН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

[6]Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

[7]Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т.24, №6. С.785-792.

[8]Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

[9]Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, №5. С.651-664.

[10]Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

[11]Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

[12]Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

[13]Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

[14]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\cdot\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)dt\right\}^{-1/p} = \left\{\int\limits_0^h \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p},$$

из которого, в частности, при $p = 2/m, m \in \mathbb{N}$ следует результат (7). Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и докажем своеобразный аналог результата (7) для усреднённых модулей непрерывности m-го порядка.

Теорема 1.3.1. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенство $0 < nh \le \pi$, справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2},$$

где $Si(h) = \int\limits_0^h t^{-1}\sin t dt$ – интегральный синус.

Следствие 1.3.1. *При выполнении условий теоремы 1.3.1 имеет место следующее неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$E_{n-1}(f) \le \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}\,\omega_m(f^{(r)},h), \tag{8}$$

при всех h, удовлетворяющих условию $0 < nh \le \pi$.

В частности, при $nh = \pi$ из (8) имеем

$$E_{n-1}(f) \le \left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}\,\omega_m(f^{(r)},\pi/n), \quad r \ge m/2,\ m\in\mathbb{N}.$$

В четвёртом параграфе рассматриваются некоторые аппроксимационные величины, характеризующие аппроксимативные свойства класса $\mathfrak{M}$ периодических дифференцируемых функций в метрике L_2, связанные с наилучшим приближением тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, наилучшим линейным приближением этими полиномами, а также с верхними гранями норм функций из $\mathfrak{M}$, ортогональных подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Для некоторых классов функций из L_2, доказаны факты, связанные со случаями совпадения этих характеристик.

Рассмотрим следующие экстремальные величины:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := E(\mathfrak{M}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \tag{9}$$

– наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$;

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\}, \tag{10}$$

где $\mathfrak{M}_n^{\perp}$ – множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t) \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Помимо величин (9) и (10), часто будет полезным отыскание величины

$$\mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A\in\mathscr{L}_n} \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2}, \tag{11}$$

где $\mathscr{L}_n$ – совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$.

Из приведённых выше определений (9) – (11) аппроксимационных величин сразу следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}. \tag{12}$$

Задача состоит в отыскании значения величин (9) – (11) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждения теорем и их следствий, доказанных в параграфах 1.2 и 1.3.

Пусть $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ $(0 \le t < \infty)$ – непрерывные монотонно возрастающие функции в нуле равные нулю: $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$.

Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного $0 < h \le 2\pi$, исходя из результатов, полученных в теоремах 1.2.2 и 1.3.1, вводим в рассмотрение следующие классы функций в L_2 :

$$W^{(r)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t)dt \right)^{1/2} \le 1 \right\}, \tag{13}$$

$$W^{(r)}(\Phi,h)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}\le\Phi(h)\right\},\tag{14}$$

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\le 1\right\},\tag{15}$$

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)^{m/2}dt\le\Psi(h)\right\}.\tag{16}$$

Сформулируем основной результат для классов функций $W^{(r)}(\Phi,h)$ и $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)$.

Теорема 1.4.1 *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. Тогда при любом $h\in(0,\pi/n]$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h)\right)_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\Phi(h),\tag{17}$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right)_{L_2}=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\Psi(h).\tag{18}$$

Из утверждения теоремы 1.4.1 немедленно следует

Следствие 1.4.1. *При выполнении всех условий теоремы 1.4.1 имеют место равенства*

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,\pi/n)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,\pi/n)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,\pi/n)\right)_{L_2}=\left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\tag{19}$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,\pi/n)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,\pi/n)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,\pi/n)\right)_{L_2}=\left\{\frac{n}{2(\pi-Si(\pi))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\,\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (20)$$

Напомним, что Лебегом[15] было впервые дано понятие модуля непрерывности ω для функций $f\in\mathbb{C}$. В терминах указанной характеристики гладкости им же были получены оценки коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций рассматривались в работах С.Н.Бернштейна, А.Ф.Тимана, Н.П.Корнейчука, А.В.Ефимова, С.А.Теляковского, А.И.Степанца, С.Милорадовича и многих других математиков (см., например, монографию[16] и приведённую там литературу). Для классов функций, принадлежащих пространству L_2, аналогичные вопросы рассматривались, например, С.Б.Вакарчуком[12,17], М.Ш.Шабозовым и С.Б.Вакарчуком[18], Г.А.Юсуповым[19]. Для изучаемых в данном параграфе классов функций этот вопрос также представляет определённый интерес. В самом деле, из утверждения теоремы 1.4.1 сразу получаем

Следствие 1.4.2 *Если выполнены все условия теоремы 1.4.1, то для любого $n\in\mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W^{(r)}(\Phi,h)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W^{(r)}(\Phi,h)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h), \qquad (21)$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right\}=$$

[15] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchҷee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. de France. 1910. V.38. P.184-210.

[16] Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка. 1981. 340 с.

[17] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

[18] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. Tomus 38, №2. P.154-165.

[19] Юсупов Г.А. Неравенства типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций из L_2 // Analysis Mathematica. 2014. V.40. Issue 1. P.69-81.

$$= \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi(h). \tag{22}$$

Переходим к изложению результатов второй главы. Основной целью второй главы является вычисление точных значений различных поперечников для классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности, возникающих естественным образом из результатов, полученных во втором и третьем параграфах первой главы.

Прежде чем сформулировать результаты о поперечниках, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций из L_2 и пусть $\mathscr{L}_n \subset L_2$ – некоторое подпространство из L_2 размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{N}) := \sup\{E_n(f) : f \in \mathfrak{N}\} = \sup\{\inf\{\|f - g\| : \ g \in \mathscr{L}_n\} : f \in \mathfrak{N}\} \tag{23}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{N}$ подпространством $\mathscr{L}_n \subset L_2$, и она характеризует отклонение класса $\mathfrak{N}$ от подпространства $\mathscr{L}_n$ в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A : \ L_2 \to \mathscr{L}_n$, действующих из L_2 в произвольное заданное подпространство $\mathscr{L}_n \in L_2$ размерности n, то возникает задача: найти величину

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| : \ f \in \mathfrak{N}\} : \ A \in \mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)\} \tag{24}$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань:

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) = \sup\{\|f - A^* f\| : \ f \in \mathfrak{N}\}.$$

Если в $\mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(L_2, \mathscr{L}_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство $\mathscr{L}_n$, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \mathscr{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathscr{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| : \ f \in \mathfrak{N}\} : \ A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \mathscr{L}_n)\}. \tag{25}$$

Напомним определения n-поперечников, значения которых будут вычислены в этой главе для некоторых конкретных классов $\mathfrak{N}$ функций.

Пусть S – единичный шар в L_2. Величина

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0; \ \varepsilon S \cap \mathscr{L}_{n+1} \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset L_2\} \tag{26}$$

называется n-поперечником класса $\mathfrak{N}$ в пространстве L_2 по Бернштейну.

n-поперечником в смысле Колмогорова[20] класса функций $\mathfrak{N}$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{E_n(\mathfrak{N}) : \mathscr{L}_n \subset L_2\}, \tag{27}$$

где нижняя грань рассматривается по всем подпространствам $\mathscr{L}_n$ заданной размерности n. Если исходить из определения наилучшего линейного приближения $\mathscr{E}_n(\mathfrak{N})$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) : \mathscr{L}_n \subset L_2\} \tag{28}$$

называют линейным n-поперечником. Рассматривают также проекционный n-поперечник, который определяется равенством

$$\Pi_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\mathscr{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) : \mathscr{L}_n \subset L_2\}. \tag{29}$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\sup\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap \mathscr{L}^n\} : \mathscr{L}^n \subset L_2\}, \tag{30}$$

где inf берется по всем подпространствам $\mathscr{L}^n$ коразмерности n, называется n-поперечником по Гельфанду.

Весьма важным является нахождение соответствующих подпространств, реализующих внешнюю верхнюю грань в поперечнике Бернштейна $b_n(\cdot)$ и внешние нижние грани во всех остальных поперечниках. Такие подпространства называются оптимальными подпространствами.

Так как пространство L_2 является гильбертовым, то между перечисленными выше n-поперечниками имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) \le d^n(\mathfrak{N}; L_2) \le d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{N}; L_2). \tag{31}$$

Исходя из результатов, полученных в параграфах 1.2 – 1.4 для классов функций $W^{(r)}(h)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$, $\mathscr{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathscr{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$, определение которых приведено в четвёртом параграфе первой главы, вычислим точные значения всех вышеперечисленных n-поперечников (26) – (30) при некоторых естественных ограничениях, налагаемых на мажоранты Φ и Ψ.

Второй параграф второй главы посвящается нахождению точных значений n-поперечников классов функций $W^{(r)}(h)$ и $W^{(r)}(\Phi, h)$. Имеет место

[20]Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math., 1936. V.37. P.107-110.

Теорема 2.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и число $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству $nh \le \pi$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(h), L_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}.$$

В частности, если $nh = \pi$, то

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\pi/n), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\pi/n), L_2\right) = \left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$, $\Pi_k(\cdot)$. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта Φ при любых $h \in (0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \ge \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{если } \ 0 < nh \le \pi, \\ 1 - \dfrac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если } \ nh > \pi. \end{cases} \tag{32}$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\Phi,h), L_2\right) =$$

$$= \left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}, \tag{33}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников. Множество мажорантных функций Φ, удовлетворяющих условию (32), не пусто. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

В этом же параграфе доказано, что условию (32) удовлетворяет, например, мажорантная функция

$$\Phi_*(h) = h^\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{8}{\pi^2-4}, \ (1,36 < \alpha < 1,38).$$

Последний завершающий параграф второй главы посвящён вычислению точных значений всех n-поперечников (26) – (30) для класса функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ при всех $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < nh \le \pi$ и для класса функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$ при всех $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi)$ и некоторых ограничениях на мажорантные функции Ψ. Приведём основные результаты этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и для числа $h \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $0 < nh \le \pi$. Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}, \qquad (34)$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$, $\Pi_k(\cdot)$. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f; x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

Теорема 2.3.2. *Пусть мажоранта Ψ при любом $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Psi^{2/m}(h)}{\Psi^{2/m}(\pi/n)} \ge \frac{1}{\pi - Si(\pi)}\begin{cases} nh - Si(nh), & \text{если } \ 0 < h \le \pi/n, \\ 2nh - \pi - Si(\pi), & \text{если } \ h > \pi/n. \end{cases} \qquad (35)$$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) =$$

$$= n^{-r}\left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (36)$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников (26) – (30). Все поперечники в (36) реализуются частными суммами $S_{n-1}(f; x)$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$. Условию (35) удовлетворяет, например, мажорантная функция

$$\Psi_*(t) = t^{m\alpha/2}, \quad \text{где } \ \alpha = \frac{\pi}{\pi - Si(\pi)}, \ (2,41 < \alpha < 2,42).$$

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Мамадаёзов Н.М. Неравенства типа Джексона – Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. 2012. Т.55, №5. С.355-358.
2. Мамадаёзов Н.М. Неравенства типа Джексона – Стечкина и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // ДАН РТ. 2012. Т.55, №10. С.780-784.
3. Шабозов М.Ш., Мамадаёзов Н.М. О неравенства типа Джексона – Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций, задаваемых усреднёнными модулями непрерывности в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2012. №1(146). С.7-17.
4. Шабозов М.Ш., Мамадаёзов Н.М. О наилучшем приближении периодических функций и поперечники некоторых классов в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2012. №4(149). С.1-17.
5. Мамадаёзов Н.М. Неравенства типа Джексона – Стечкина и значения поперечников некоторых функциональных классов в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2014. №1(154). С.33-42.

В других изданиях:

6. Мамадаёзов Н.М. О наилучшем приближении дифференцируемых функций в L_2 // «*Современные проблемы математического анализа и теории функций*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 60-летию академика АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозова (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). С.88-89.
7. Мамадаёзов Н.М. Точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014 г. Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. С.52-54.
8. Мамадаёзов Н.М. Верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических функций в L_2 // Материалы международной научной конференции «*Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений*» (Душанбе, 27-28 апреля 2015). С.26-28.