Академия наук Республики Таджикистан

Институт математики имени А.Джураева

На правах рукописи

Мамадаёзов Назаралибек Мирзомамадович

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор, академик АН
Республики Таджикистан
М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Теория приближения функций в настоящее время представляет собой весьма обширную ветвь математического анализа, занимающуюся вопросами приближённого представления более сложных объектов с помощью простейших аналитических аппаратов. В настоящее время теория аппроксимации имеет дело главным образом с приближением отдельных функций и классов функций при помощи заданных подпространств, каждое из которых состоит из функций, являющихся в каком-то смысле более простыми, чем аппроксимируемые функции. Чаще всего роль таких подпространств играют множества алгебраических многочленов и (в периодическом случае) тригонометрических полиномов заданного порядка n. На сегодняшний день ведущее место в теории приближения занимают экстремальные задачи: требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший метод приближения. Именно такие задачи решаются в диссертационной работе.

Настоящая диссертационная работа посвящена вопросам приближения периодических суммируемых с квадратом функций тригонометрическими полиномами в метрике пространства $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и вычислению точных значений различных n-поперечников классов функций из L_2, задаваемых модулями непрерывности r-й производной $f^{(r)}$.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы. Во введении приводится краткий обзор результатов, имеющих непосредственное отношение к теме диссертационной работы, и излагаются основные результаты, полученные автором. Необходимые факты, основные обозначения и определения из общей теории аппроксимации в пространстве L_2 излагаются в первом параграфе первой главы.

Переходим к изложению основных результатов диссертационной работы.

Обозначим через $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел; $L_2 := L_2[0,2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Множество всех тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

порядка $n-1$ обозначим через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Если $S_{n-1}(f;x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

то хорошо известно свойство частичной суммы ряда Фурье функции, которое состоит в том, что наилучшее приближение f в метрике пространства L_2 тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ реализуется частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f,x)$:

$$E_{n-1}(f) := \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2(f) + b_k^2(f))\right\}^{1/2} := \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \qquad (0.0.1)$$

где, ради простоты, положено $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \ge n$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$.

Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} = L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Модуль непрерывности m-го порядка произвольной 2π-периодической измеримой и суммируемой с квадратом функции $f \in L_2$ определим равенством

$$\omega_m(f,t) = \sup\Big\{\Big\|\Delta_h^m f(\cdot)\Big\| :\ |h| \le t\Big\}, \tag{0.0.2}$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f\Big(x + (m-k)h\Big)$$

– разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h. Воспользуясь схемой рассуждений, приведённой в монографии [9, с.157-165], легко доказать, что для модуля непрерывности m-го порядка (0.0.2) выполняются все свойства модулей непрерывности высших порядков.

Заметим, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место равенство

$$\omega_m(f^{(r)},t) = \sup\left\{2^m \sum_{k=1}^{\infty} (1-\cos kh)^m k^{2r} \rho_k^2(f) :\ |h| \le t\right\}^{1/2}. \tag{0.0.3}$$

Во втором параграфе первой главы изложены некоторые точные неравенства, содержащие величины $E_{n-1}(f)$ – наилучшее полиномиальное приближение функции $f \in L_2$ и усреднённые значения модулей непрерывности первого порядка.

Л.В.Тайков [25] доказал, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $f \ne const$ и $0 < nh \le \pi/2$ справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)},t)dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - \sin nh}. \tag{0.0.4}$$

В следующей теореме дано своеобразное обобщение равенства (0.0.4).

Теорема 1.2.1. *Для любого* $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u) du \right) dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}, \qquad (0.0.5)$$

где $Si(t) := \int\limits_0^t u^{-1} \sin u du$ *– интегральный синус.*

Отметим, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(r-s)}$, $s = 1, 2, \ldots, r$ принадлежат пространству L_2 и мы можем рассматривать задачу о наилучшем совместном приближении функции f и её промежуточных производных $f^{(r-s)}$ тригонометрическими полиномами в метрике пространства L_2 :

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) = \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \left\| f^{(r-s)} - T_{n-1}(\cdot) \right\|,$$

причём элементарно доказывается, что

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) = \left\| f^{(r-s)} - S_{n-1}(f^{(r-s)}; \cdot) \right\| = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \rho_k^2(f). \qquad (0.0.6)$$

Представляет интерес изучение поведения величин (0.0.6) на классе функций $L_2^{(r)}$. Из доказанной теоремы 1.2.1 вытекает решение сформулированной задачи в виде следующего

Следствие 1.2.1. *Для любого* $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2s} E_{n-1}^2(f^{(r-s)})}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u) du \right) dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}. \qquad (0.0.7)$$

В работе [30] Н.И.Черных отметил, что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)};\pi/n)$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, а усреднённый с весом $\varphi(t)>0$, $0<t\le h$ функционал

$$\Phi_m(f^{(r)};h)=\left\{\int\limits_0^h\omega_m^2(f^{(r)};t)\varphi(t)dt\Bigg/\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right\}^{1/2},$$

поскольку при любом $h\in(0,\pi/n]$, $\Phi_m(f^{(r)};h)\le\omega_m(f^{(r)};h)$. При исследовании некоторых экстремальных задач теории приближения функций в L_2 весовая функция $\varphi(t)$ появляется из содержательного смысла самой постановки задач. Так например, при доказательстве нижеприведённой теоремы 1.2.2 в случае $m=1$ весовая функция $\varphi(t):=\varphi_h(t)=\dfrac{2}{h^2}(h-t)$ появляется естественным образом в ходе доказательство, где установлено точное неравенство между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f^{(r-s)})$ последовательных производных $f^{(r-s)}$ $(s=0,1,2,\ldots,r)$ тригонометрическими полиномами функций $f\in L_2^{(r)}$ и усреднённого с весом $\varphi(t):=\varphi_h(t)=2h^{-2}(h-t)$, $0\le t\le h$ модуля непрерывности первого порядка $\omega^2(f^{(r)},t)$ производной $f^{(r)}\in L_2$. Этот результат интересно сопоставить с результатом Фокарта, Крякина и Шадрина [28], полученным в пространстве $\mathbb{C}:=\mathbb{C}[0,2\pi]$, где, как и в нашем случае, весовая функция $\varphi(t)=2h^{-2}(h-t)$ появляется неизбежно из содержательного смысла постановки задачи естественным образом.

Теорема 1.2.2. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+,n\in\mathbb{N}$, $s=0,1,2,\ldots,r$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne const}}\frac{\sqrt{2}n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}}=$$

$$=\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2},\quad 0<nh\le\pi. \tag{0.0.8}$$

Следствие 1.2.2. *В условиях теоремы 1.2.2 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{s-1}E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-t\right)\omega(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}}.$$

В третьем параграфе получены точные неравенства, содержащие наилучшие полиномиальные приближения и усреднённые значения модулей непрерывности произвольного порядка r-й производной функции из L_2. При этом весьма важным являются неравенства, которые оценивают величины наилучшего приближения через значения модулей непрерывности в некоторой точке $t \in (0,\pi/n]$. Такие неравенства принято называть неравенствами Джексона-Стечкина.

Неравенствами типа Джексона-Стечкина в широком смысле называют соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции в рассматриваемом банаховом пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной. При этом естественным образом возникает экстремальная задача получения точных неравенств, неулучшаемых на рассматриваемых классах функций. При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{t}{n}\right),$$

где

$$t>0,\ f\in L_2^{(r)},\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ f^{(0)}\equiv f,$$

многими математиками в разное время предложены различные методы исследования, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ. Эту задачу в разное время исследовали Н.И.Черных [30, 31], В.И.Бердышев [2], Л.В.Тайков [25, 26], А.А.Лигун [14, 15], А.Г.Бабенко [1], В.И.Иванов и О.И.Смирнов [10], С.Б.Вакарчук [3, 5], М.Ш.Шабозов [32], М.Ш.Шабозов и Г.А.Юсупов [35] и многие другие.

В параграфе 1.2 мы отмечали, что в работе [25] Л.В.Тайков, в частности, доказал, что для любого $h \in (0, \pi/(2n)]$ справедливо соотношение (0.0.4). Обобщая этот результат для произвольных модулей непрерывности m-го порядка, С.Б.Вакарчук [5] доказал, что

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\cdot\left\{\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt\right\}^{-m/2} = \left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}. \quad (0.0.9)$$

Более общий результат в этом направлении получен М.Ш.Шабозовым в работе [32], в которой доказано, что для произвольных $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/2$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\cdot\left\{\int\limits_0^h \omega_m^{p}(f^{(r)};t)dt\right\}^{-1/p} = \left\{\int\limits_0^h \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p},$$

из которого, в частности, при $p = 2/m, m \in \mathbb{N}$ следует результат (0.0.9).

Здесь мы продолжим исследование в этом направление и докажем своеобразный аналог результата (0.0.9) для усреднённых модулей непрерывности m-го порядка.

Теорема 1.3.1. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенство $0 < nh \leq \pi$, справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2},$$

где $Si(h) = \int\limits_0^h t^{-1}\sin t dt$ – интегральный синус.

Следствие 1.3.1. *При выполнении условий теоремы 1.3.1 имеет место следующее неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$E_{n-1}(f) \le \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}\,\omega_m(f^{(r)}, h), \tag{0.0.10}$$

при всех h удовлетворяющих условию $0 < nh \le \pi$.

В частности, при $nh = \pi$ из (0.0.10) имеем

$$E_{n-1}(f) \le \left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}\,\omega_m(f^{(r)}, \pi/n), \quad r \ge m/2,\ m \in \mathbb{N}.$$

В четвёртом параграфе рассматриваются некоторые аппроксимационные величины, характеризующие аппроксимативные свойства класса $\mathfrak{M}$ периодических дифференцируемых функций в метрике L_2, связанные с наилучшим приближением тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, наилучшим линейным приближением этими полиномами, а также с верхними гранями норм функций из $\mathfrak{M}$, ортогональных подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Для некоторых классов функций из L_2, доказаны факты, связанные со случаями совпадения этих характеристик.

Рассмотрим следующие экстремальные величины:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := E(\mathfrak{M}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \tag{0.0.11}$$

– наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$;

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\}, \tag{0.0.12}$$

где $\mathfrak{M}_n^{\perp}$ – множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Помимо величин (0.0.11) и (0.0.12), часто будет полезным отыскание величины

$$\mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A\in\mathscr{L}_n} \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2}, \tag{0.0.13}$$

где $\mathscr{L}_n$ – совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$.

Из приведённых выше определений (0.0.11) – (0.0.13) аппроксимационных величин сразу следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}. \tag{0.0.14}$$

Задача состоит в отыскании значения величин (0.0.11) – (0.0.13) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждения теорем и их следствий, доказанных в параграфах 1.2 и 1.3.

Пусть $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ $(0 \le t < \infty)$ – непрерывные монотонно возрастающие функции в нуле равные нулю: $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$.

Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного $0 < h \le 2\pi$, исходя из результатов, полученных в теоремах 1.2.2 и 1.3.1, вводим в рассмотрение следующие классы функций в L_2 :

$$W^{(r)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t)dt \right)^{1/2} \le 1 \right\}, \tag{0.0.15}$$

$$W^{(r)}(\Phi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t)dt \right)^{1/2} \le \Phi(h) \right\}, \tag{0.0.16}$$

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)du \right) dt \le 1 \right\}, \tag{0.0.17}$$

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right)^{m/2} dt \le \Psi(h) \right\}. \quad (0.0.18)$$

Сформулируем, например, основной результат этого параграфа для классов функций $W^{(r)}(\Phi, h)$ и $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$.

Теорема 1.4.1 *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при любом $h \in (0, \pi/n]$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, h)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, h)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, h)\right)_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2} \frac{1}{n^r} \Phi(h), \quad (0.0.19)$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)\right)_{L_2} = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi(h). \quad (0.0.20)$$

Из утверждения теоремы 1.4.1 немедленно следует

Следствие 1.4.1. *При выполнении всех условий теоремы 1.4.1 имеют место равенства*

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, \pi/n)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, \pi/n)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, \pi/n)\right)_{L_2} = \left\{ \frac{\pi^2}{2(\pi^2 - 4)} \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (0.0.21)$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, \pi/n)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, \pi/n)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,\pi/n)\right)_{L_2} = \left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\,\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (0.0.22)$$

Напомним, что Лебегом [13] было впервые дано понятие модуля непрерывности ω для функций $f \in \mathbb{C}$. В терминах указанной характеристики гладкости им же были получены оценки коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций рассматривались в работах С.Н.Бернштейна, А.Ф.Тимана, Н.П.Корнейчука, А.В.Ефимова, С.А.Теляковского, А.И.Степанца, С.Милорадовича и многих других математиков (см., например, монографию [24] и приведённую там литературу). Для классов функций, принадлежащих пространству L_2, аналогичные вопросы рассматривались, например, С.Б.Вакарчуком [4, 5], М.Ш.Шабозовым и С.Б.Вакарчуком [37], Г.А.Юсуповым [40]. Для изучаемых в данном параграфе классов функций этот вопрос также представляет определённый интерес. В самом деле, из утверждения теоремы 1.4.1 сразу получаем

Следствие 1.4.2 *Если выполнены все условия теоремы 1.4.1, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f \in W^{(r)}(\Phi,h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)|:\ f \in W^{(r)}(\Phi,h)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h). \qquad (0.0.23)$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)|:\ f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\,\Psi(h). \qquad (0.0.24)$$

Переходим к изложению результатов второй главы. Основной целью второй главы является вычисление точных значений различных поперечников для классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности, возникающих естественным образом из результатов, полученных во втором и третьем параграфах первой главы.

Прежде чем сформулировать результаты о поперечниках, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций из L_2 и пусть $\mathscr{L}_n \subset L_2$ – некоторое подпространство из L_2 размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{N}) := \sup\{E_n(f) : f \in \mathfrak{N}\} = \sup\{\inf\{\|f - g\| : \ g \in \mathscr{L}_n\} : f \in \mathfrak{N}\} \quad (0.0.25)$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{N}$ подпространством $\mathscr{L}_n \subset L_2$, и она характеризует отклонение класса $\mathfrak{N}$ от подпространства $\mathscr{L}_n$ в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A : \ L_2 \to \mathscr{L}_n$, действующих из L_2 в произвольное заданное подпространство $\mathscr{L}_n \in L_2$ размерности n, то возникает задача: найти величину

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| : \ f \in \mathfrak{N}\} : \ A \in \mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)\} \qquad (0.0.26)$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань:

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) = \sup\{\|f - A^* f\| : \ f \in \mathfrak{N}\}.$$

Если в $\mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(L_2, \mathscr{L}_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство $\mathscr{L}_n$, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \mathscr{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathscr{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| : \ f \in \mathfrak{N}\} : \ A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \mathscr{L}_n)\}. \qquad (0.0.27)$$

Напомним определения n-поперечников, значения которых будут вычислены в этой главе для некоторых конкретных классов $\mathfrak{N}$ функций.

Пусть S – единичный шар в L_2. Величина

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \mathscr{L}_{n+1} \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset L_2\} \qquad (0.0.28)$$

называется n-поперечником класса $\mathfrak{N}$ в пространстве L_2 по Бернштейну.

n-поперечником в смысле Колмогорова [11] класса функций $\mathfrak{N}$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{E_n(\mathfrak{N}) : \mathscr{L}_n \subset L_2\}, \qquad (0.0.29)$$

где нижняя грань рассматривается по всем подпространствам $\mathscr{L}_n$ заданной размерности n. Если исходить из определения наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) :\ \mathscr{L}_n \subset L_2\} \qquad (0.0.30)$$

называют линейным n-поперечником. Рассматривают также проекционный n-поперечник, который определяется равенством

$$\Pi_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\mathscr{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) :\ \mathscr{L}_n \subset L_2\}. \qquad (0.0.31)$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\sup\{\|f\| :\ f \in \mathfrak{N} \cap \mathscr{L}^n\} :\ \mathscr{L}^n \subset L_2\}, \qquad (0.0.32)$$

где $\inf$ берется по всем подпространствам $\mathscr{L}^n$ коразмерности n, называется n-поперечником по Гельфанду.

Весьма важным является нахождение соответствующих подпространств, реализующих внешнюю верхнюю грань в поперечнике Бернштейна $b_n(\cdot)$ и внешние нижние грани во всех остальных поперечниках. Такие подпространства называются оптимальными подпространствами.

Так как пространство L_2 является гильбертовым, то между перечисленными выше n-поперечниками имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{N}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{N}; L_2). \qquad (0.0.33)$$

Исходя из результатов, полученных в параграфах 1.2 – 1.4 для классов функций $W^{(r)}(h)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$, определение которых приведено в четвёртом параграфе первой главы, вычислим точные значения всех вышеперечисленных n-поперечников (0.0.28) – (0.0.32) при некоторых естественных ограничениях, налагаемых на мажоранты Φ и Ψ.

Второй параграф второй главы посвящается нахождению точных значений n-поперечников классов функций $W^{(r)}(h)$ и $W^{(r)}(\Phi, h)$. Имеет место

Теорема 2.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и число $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству $nh \leq \pi$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(h), L_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}.$$

В частности, если $nh = \pi$, то

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\pi/n), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\pi/n), L_2\right) = \left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$, $\Pi_k(\cdot)$. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f; x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта Φ при любых $h \in (0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{если } \ 0 < nh \leq \pi, \\ 1 - \dfrac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если } \ nh > \pi. \end{cases} \tag{0.0.34}$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\right) =$$

$$= \left\{ \frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}, \qquad (0.0.35)$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников. Множество мажорантных функций Φ, удовлетворяющих условию (0.0.34), не пусто. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

В этом же параграфе доказано, что условию (0.0.34) удовлетворяет, например, мажорантная функция

$$\Phi_*(h) = h^{\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{8}{\pi^2-4}, \ (1,36 < \alpha < 1,38).$$

Последний завершающий параграф второй главы посвящён вычислению точных значений всех n-поперечников (0.0.28) – (0.0.32) для класса функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ при всех $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < nh \leq \pi$ и для класса функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$ при всех $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi)$ и некоторых ограничениях на мажорантные функции Ψ. Приведём основные результаты этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и для числа $h \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $0 < nh \leq \pi$. Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}, \qquad (0.0.36)$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$, $\Pi_k(\cdot)$. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

Теорема 2.3.2. *Пусть мажоранта Ψ при любом $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Psi^{2/m}(h)}{\Psi^{2/m}(\pi/n)} \geq \frac{1}{\pi - Si(\pi)} \begin{cases} nh - Si(nh), & \text{если} \ \ 0 < h \leq \pi/n, \\ 2nh - \pi - Si(\pi), & \text{если} \ \ h > \pi/n. \end{cases} \qquad (0.0.37)$$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) =$$

$$= n^{-r}\left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{0.0.38}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников (0.0.28) – (0.0.32). Все поперечники в (0.0.38) реализуются частными суммами* $S_{n-1}(f;x)$ *ряда Фурье функции* $f \in L_2^{(r)}$. *Условию (0.0.37) удовлетворяет, например, мажорантная функция*

$$\Psi_*(t) = t^{m\alpha/2}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\pi}{\pi - Si(\pi)}, \ (2,41 < \alpha < 2,42).$$

ГЛАВА I

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2, ЗАДАВАЕМЫХ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

§1.1. Вспомогательные факты

1.1.1. Определения и обозначения

Обозначим через $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Множество всех тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

порядка $n-1$ обозначим через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Если $S_{n-1}(f;x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

то хорошо известно свойство частичной суммы ряда Фурье функции, которое состоит в том, что наилучшее приближение $f(x)$ в метрике пространства L_2 тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ реализуется частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f,x)$, то есть

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f, \mathcal{T}_{2n-1})_{L_2} = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2(f) + b_k^2(f))\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \qquad (1.1.1)$$

где, ради простоты, положено $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \geq n$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$.

Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} = L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Модуль непрерывности m-го порядка произвольной 2π-периодической измеримой и суммируемой с квадратом функции $f(x) \in L_2$ определяем равенством

$$\omega_m(f,t) = \sup\Big\{\Big\|\Delta_h^m f(\cdot)\Big\| :\ |h| \leq t\Big\}, \qquad (1.1.2)$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f\Big(x + (m-k)h\Big)$$

– разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h. Воспользуясь схемой рассуждения, приведённой в монографии [9, с.157-165], легко доказать, что для модуля непрерывности m-го порядка (1.1.2) выполняются все свойства модулей непрерывности высших порядков.

Заметим, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{r\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{r\pi}{2}\right)\right) \qquad (1.1.3)$$

в смысле сходимости ряда в правой части (1.1.3) в пространстве L_2.

Непосредственным вычислением, применяя равенство Парсеваля, получаем соотношение

$$\Big\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\Big\|^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty}(1 - \cos kh)^m k^{2r}\rho_k^2(f), \qquad (1.1.4)$$

откуда, пользуясь равенством (1.1.2), находим

$$\omega_m(f^{(r)},t)=\sup\left\{2^m\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^m k^{2r}\rho_k^2(f):\ |h|\le t\right\}^{1/2}. \qquad (1.1.5)$$

Всюду в дальнейшем функция $f_0(x) := \cos nx \in L_2^{(r)}$ выступает в качестве экстремальной функции при доказательстве основных результатов. Из (1.1.5) для функции $f_0(x) := \cos nx \in L_2^{(r)}$ вытекает равенство

$$\omega_m(f_0^{(r)},h)=\begin{cases} 2^{m/2}(1-\cos nh)^{m/2}n^r, & \text{если} \quad 0<nh<\pi, \\ 2^m n^r, & \text{если} \quad nh\ge\pi, \end{cases} \qquad (1.1.6)$$

которым воспользуемся при установлении неулучшаемых утверждений на протяжении всей диссертационной работы.

§1.2. Обобщение одной теоремы Л.В.Тайкова

В этом параграфе будем излагать некоторые точные неравенства, содержащие величины $E_{n-1}(f)_2$ – наилучшее полиномиальное приближение функции $f \in L_2$ и усреднённые значения модулей непрерывности первого порядка.

Л.В.Тайков [25] доказал, что для произвольной функции $f(x) \in L_2^{(r)}$, у которой $f(x)$ не эквивалентно константе, при условии $0 < nh \le \pi/2$, справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - \sin nh}. \tag{1.2.1}$$

В следующем утверждении приведено точное равенство, содержащее наилучшие приближения и усредненное значение модуля непрерывности первого порядка функции $f \in L_2^{(r)}$, являющееся своеобразным обобщением и развитием равенства (1.2.1).

Теорема 1.2.1. *Для любого* $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du \right) dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}, \tag{1.2.2}$$

где $Si(t) := \int\limits_0^t u^{-1} \sin u du$ *– интегральный синус.*

Доказательство. Равенство (1.2.2) доказывается по той же схеме рассуждений, которая приведена Л.В.Тайковым в работе [25]. Следуя [25], без ограничения общности можно ограничиться функциями $f(x)$, которые ортогональны всем полиномам $T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$:

$$f(x) \sim \sum_{k=n}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда для разности первого порядка функции $f \in L_2$ имеем:

$$\Delta^2(f,h) = \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|^2 =$$

$$= 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 (1 - \cos kh) = 2E_{n-1}^2(f) - 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cos kh.$$

Интегрируя полученное равенство по h в пределах $h = 0$ до $h = t$, получим

$$2t\, E_{n-1}^2(f) = 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cdot \frac{1}{k} \sin kt + \int\limits_0^t \Delta^2(f,h) dh,$$

откуда, поделив обе части на $2t$ и учитывая неравенство $\Delta^2(f,h) \le \omega^2(f,h)$, запишем

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cdot \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t} \int\limits_0^t \omega^2(f,u) du.$$

Интегрируя последнее неравенство по t в пределах от $t = 0$ до $t = h$ и поделив обе части полученного соотношения на h, будем иметь

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cdot \frac{Si(kh)}{kh} + \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f,u) du \right) dt. \tag{1.2.3}$$

Функция $Si(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin u}{u} du$ при значениях $t \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает от $Si(0) = 0$ до $Si(+\infty) = \pi/2$, а потому функция $Si(kh)/kh$, $(n \le k < +\infty,\ 0 \le h < \infty)$, при $k \to \infty$ монотонно убывает, откуда сразу следует экстремальное равенство

$$\sup \left\{ \frac{Si(kh)}{kh} :\ k \ge n \right\} = \frac{Si(nh)}{nh}. \tag{1.2.4}$$

Пользуясь равенством (1.2.4), из (1.2.3) получаем неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{Si(nh)}{nh} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 + \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f,u)du \right) dt,$$

откуда с учётом равенства (1.1.1) окончательно получаем

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh} \right)^{-1} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f,u)du \right) dt. \qquad (1.2.5)$$

Если учесть, что для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ модуль непрерывности $\omega^2(f,u)$ при всех $0 \leq u \leq t$ удовлетворяет соотношение $\omega^2(f,u) \leq n^{-2r}\omega^2(f^{(r)},u)$, то неравенство (1.2.5) примет вид

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)} \cdot \frac{1}{n^{2r}} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du \right) dt \qquad (1.2.6)$$

или что тоже

$$\frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du \right) dt} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}. \qquad (1.2.7)$$

Так как неравенство (1.2.7) справедливо для любого $f \in L_2^{(r)}$, то, переходя к верхним граням по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, мы получим оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (1.2.2):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du \right) dt} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}. \qquad (1.2.8)$$

Для получения оценки снизу, равной величине в правой части неравенства (1.2.8), рассмотрим экстремальную функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Для этой функции имеем

$$E_{n-1}(f_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2nx)dx = 1$$

и, пользуясь соотношением (1.1.6), запишем

$$\omega^2(f_0^{(r)}, u) = 2n^{2r}(1-\cos nu), \quad 0 < nu \leq \pi.$$

Кроме того, для всех значений $h \in (0, \pi/n]$ получаем

$$\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f_0^{(r)}, u)du\right) dt = \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t 2n^{2r}(1-\cos nu)du\right) dt =$$

$$= 2n^{2r}\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right) dt = 2n^{2r}\left(h - \frac{Si(nh)}{n}\right) = 2n^{2r}\,\frac{nh - Si(nh)}{n}.$$

Используя полученные равенства, получаем оценку снизу:

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2r}E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du\right) dt} \geq \frac{n^{2r}E_{n-1}^2(f_0)}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f_0^{(r)}, u)du\right) dt} =$$

$$= \frac{n^{2r}\cdot 1}{2n^{2r}}\cdot\frac{n}{nh - Si(nh)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{nh - Si(nh)}. \qquad (1.2.9)$$

Требуемые равенства (1.2.2) получим из сопоставления оценки сверху (1.2.8) и оценки снизу (1.2.9), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Из доказанной теоремы вытекает следующее

Следствие 1.2.1. *Для любого* $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2s} E_{n-1}^2(f^{(r-s)})}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u) du \right) dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}. \tag{1.2.10}$$

Доказательство. Заметим, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(r-s)}$, $s = 1, 2, \ldots, r$ принадлежат пространству L_2 и мы можем рассматривать задачу о наилучшем совместном приближении функции f и её промежуточных производных $f^{(r-s)}$ тригонометрическими полиномами в метрике пространства L_2 :

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) = \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \left\| f^{(r-s)} - T_{n-1}(\cdot) \right\|,$$

причём элементарно доказывается, что

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) = \left\| f^{(r-s)} - S_{n-1}(f^{(r-s)}; \cdot) \right\| = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \rho_k^2(f). \tag{1.2.11}$$

Представляет интерес изучение поведения величин (1.2.11) на классе функций $L_2^{(r)}$. Заметим, что если в (1.2.5) функцию f заменим на производную r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$, то получаем

$$E_{n-1}^2(f^{(r)}) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u) du \right) dt. \tag{1.2.12}$$

Теперь воспользуемся точным неравенством между наилучшими приближениями последовательных производных функций $f \in L_2^{(r)}$ тригонометрическими полиномами (см., например, [12, глава 6, § 6.3])

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) \leq \Big(E_{n-1}(f^{(r)})\Big)^{1-s/r} \Big(E_{n-1}(f)\Big)^{s/r}. \tag{1.2.13}$$

Подставляя в правую часть неравенства (1.2.13) вместо величин $E_{n-1}(f)$ и $E_{n-1}(f^{(r)})$ их оценки сверху, приведённые в неравенствах (1.2.5) и (1.2.12) соответственно, для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}^2(f^{(r-s)}) \leq \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{nh - Si(nh)}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du\right) dt\right\}^{1-s/r} \cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{nh - Si(nh)}\cdot\frac{1}{n^{2r}}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du\right) dt\right\}^{s/r} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{nh - Si(nh)}\cdot\frac{1}{n^{2s}}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du\right) dt. \tag{1.2.14}$$

Таким образом, из неравенства (1.2.14) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ запишем оценку сверху

$$\frac{n^{2s}E_{n-1}^2(f^{(r-s)})}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du\right) dt} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{nh - Si(nh)}. \tag{1.2.15}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части равенства (1.2.10), рассмотрим экстремальную функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2$, введённую нами при доказательстве теоремы 1.2.1. Поскольку для этой функции

$$f_0^{(r-s)}(x) = n^{r-s}\cos\left(nx + \frac{(r-s)\pi}{2}\right), \quad E_{n-1}^2(f_0^{(r-s)}) = n^{2(r-s)}, \qquad (1.2.16)$$

$$\omega^2(f_0^{(r)}, u) = 2n^{2r}(1-\cos nu), \quad 0 < nu \le \pi,$$

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f_0^{(r)}, u)du = 2n^{2r}\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right),$$

$$\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f_0^{(r)}, u)du\right)dt = 2n^{2r}\,\frac{nh - Si(nh)}{n},$$

то мы имеем следующую оценку снизу

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2s}E_{n-1}^2(f^{(r-s)})}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u)du\right)dt} \ge \frac{n^{2s}E_{n-1}^2(f_0^{(r-s)})}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f_0^{(r)}, u)du\right)dt} =$$

$$= \frac{n^{2s}\,n^{2r-2s}}{2n^{2r}\left(\frac{nh - Si(nh)}{n}\right)} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))}. \qquad (1.2.17)$$

Доказательство следствия 1.2.1 теперь получаем из сопоставления неравенств (1.2.15) и (1.2.17).

В работе [30] Н.И.Черных отметил, что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)}; \pi/n)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, а усреднённый с весом $\varphi(t) > 0$, $0 < t \le h$ функционал

$$\Phi_m(f^{(r)}; h) = \left\{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)}; t)\varphi(t)dt \Big/ \int\limits_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/2},$$

поскольку при любом $h \in (0,\pi/n]$, $\Phi_m(f^{(r)};h) \le \omega_m(f^{(r)};h)$. При исследовании некоторых экстремальных задач теории приближения функций в L_2 весовая функция $\varphi(t)$ появляется из содержательного смысла самой постановки задач. Так например, при доказательстве приведённой ниже теоремы 1.2.2 в случае $m = 1$ весовая функция $\varphi(t) := \varphi_h(t) = \dfrac{2}{h^2}(h-t)$ появляется естественным образом в ходе доказательство.

Здесь мы установим точное неравенство между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f^{(r-s)})$ последовательных производных $f^{(r-s)}$ $(s = 0,1,2,\ldots,r)$ тригонометрическими полиномами функций $f \in L_2^{(r)}$ и усреднённой с весом $\varphi(t) := \varphi_h(t) = 2h^{-2}(h-t)$, $0 \le t \le h$ модулем непрерывности первого порядка $\omega^2(f^{(r)},t)$ производной $f^{(r)} \in L_2$. Полученный результат интересно сопоставить с результатом Фокарта, Крякина и Шадрина [28], полученным в пространстве $\mathbb{C} := \mathbb{C}[0,2\pi]$, где, как и в нашем случае, весовая функция $\varphi(t) = 2h^{-2}(h-t)$ появляется неизбежно из содержательного смысла постановки задачи естественным образом.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$, $s = 0,1,2,\ldots,r$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \le \pi. \qquad (1.2.18)$$

Доказательство. Сначала докажем равенство (1.2.18) в случае $s = r$. При доказательстве теоремы 1.2.1 для произвольной $f \in L_2$ мы установили неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t}\int_0^t \omega^2(f,u)du. \qquad (1.2.19)$$

Если предполагать, что функция $f \in L_2^{(r)}$, то из (1.2.19) вследствие неравенства $\omega^2(f,u) \le n^{-2r}\omega^2(f^{(r)},u)$ получаем

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{n^{2r}} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du. \tag{1.2.20}$$

Умножив обе части неравенства (1.2.20) на t и интегрируя по t от $t=0$ до $t=h$, приходим к следующему неравенству

$$\frac{h^2}{2} E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{1-\cos kh}{k^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2r}} \int\limits_0^h \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)dudt. \tag{1.2.21}$$

Умножив обе части (1.2.21) на $\dfrac{2}{h^2}$, приходим к неравенству

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{2(1-\cos kh)}{(kh)^2} + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)dudt. \tag{1.2.22}$$

Далее, интегрированием по частям имеем

$$\int\limits_0^h \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)dudt = \int\limits_0^h \left(\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du \right) dt =$$

$$= t \left(\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du \right) \Bigg|_{t=0}^{t=h} - \int\limits_0^h t\,\omega^2(f^{(r)},t)dt =$$

$$= h \int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)},u)du - \int\limits_0^h t\,\omega^2(f^{(r)},t)dt = \int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt, \tag{1.2.23}$$

Воспользуясь равенством (1.2.23), перепишем неравенство (1.2.22) в следующем виде

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(\frac{2}{kh} \sin \frac{kh}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)\, \omega^2(f^{(r)}, t) dt. \qquad (1.2.24)$$

Поскольку, как легко проверить, для $0 < nh \leq \pi$ имеет место равенство

$$\max_{u \geq nh} \left(\frac{2}{u} \sin \frac{u}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2,$$

то из (1.2.24) получаем

$$E_{n-1}^2(f) \leq \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2 E_{n-1}^2(f) + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)\, \omega^2(f^{(r)}, t) dt,$$

или что то же самое

$$E_{n-1}^2(f) \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\} \leq \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)\, \omega^2(f^{(r)}, t) dt.$$

Полученное неравенство запишем в нужном для дальнейшего нам виде

$$E_{n-1}(f) \leq$$

$$\leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2} \frac{1}{n^r} \left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)\, \omega^2(f^{(r)}, t) dt\right)^{1/2}. \qquad (1.2.25)$$

Из (1.2.25) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ и $0 < nh \leq \pi$ получаем

$$\frac{\sqrt{2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t)\, \omega^2(f^{(r)}, t) dt\right)^{1/2}} \leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (1.2.26)$$

Поскольку для рассмотренной ранее экстремальной функции $f_0(x) = \cos nx$ при $0 < nt \le \pi$ в силу (1.1.1) и (1.1.6) имеют место равенства

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega^2(f_0^{(r)}, t) = 2n^{2r}(1 - \cos nt),$$

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f_0^{(r)}, t)dt = 2n^{2r}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\},$$

то, воспользуясь полученными равенствами, запишем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/2}} \ge \frac{\sqrt{2}n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f_0^{(r)}, t)dt\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}n^r}{\sqrt{2}n^r\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{1/2}} = \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (1.2.27)$$

Сопоставив оценки сверху (1.2.26) и снизу (1.2.27), получим требуемое равенство (1.2.18) при $s = r$. При всех остальных значениях $s = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ доказательство теоремы 1.2.2 завершается точно так же, как мы доказали следствие 1.2.1. В самом деле, полагая в неравенстве (1.2.25) $r = 0$, запишем

$$E_{n-1}(f) \le \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f, t)dt\right)^{1/2}.$$

Заменяя здесь функцию f на производную $f^{(r)}$, получаем неравенство

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \le$$

$$\leq \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}. \qquad (1.2.28)$$

Пользуясь теперь неравенством (1.2.13), с учётом (1.2.25) и (1.2.28), имеем

$$E_{n-1}(f^{(r-s)}) \leq \Big(E_{n-1}(f^{(r)})\Big)^{1-s/r}\Big(E_{n-1}(f)\Big)^{s/r} \leq$$

$$\leq \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{r}\right)}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{r}\right)}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{r}}\left(\frac{1}{n^{2r}}\cdot\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{r}} =$$

$$= \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\cdot\frac{1}{n^s}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2},$$

откуда следует неравенство

$$\frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} \leq \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}.$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то имеет место оценка сверху

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} \leq \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (1.2.29)$$

Для получении оценки снизу рассмотрим ту же функцию $f_0(x) = \cos nx$, для которой, учитывая равенства (1.2.16), а также тот факт, что непосредственным вычислением имеет место равенство

$$\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-t)\,\omega^2(f_0^{(r)},t)dt = 2n^{2r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\},\ 0 < nh \leq \pi,$$

получаем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} \geq \frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f_0^{(r-s)})}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\,\omega^2(f_0^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,n^s\, n^{r-s}}{\sqrt{2}\,n^r\left\{1-\left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2\right\}^{1/2}} = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (1.2.30)$$

Требуемое равенство (1.2.18) получаем из сопоставления оценок сверху (1.2.29) и снизу (1.2.30), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1.2.2. *В условиях теоремы 1.2.2 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{s-1}E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-t\right)\omega(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}}.$$

Доказательство. В самом деле, полагая в обеих частях равенства (1.2.18) $h = \pi/n$, после некоторых упрощений получаем равенства в утверждении следствия 1.2.2.

§1.3. Наилучшее полиномиальное приближение функций из L_2 посредством модулей непрерывности высших порядков

В экстремальных задачах теории аппроксимации весьма важными являются неравенства, которые в различных нормированных пространствах оценивают величины наилучшего приближения через значения модулей непрерывности в некоторой точке $t \in (0, \pi/n]$. Такие неравенства принято называть неравенствами Джексона-Стечкина.

Здесь мы докажем некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина между величинами наилучшего полиномиального приближения и усреднёнными значениями модулей непрерывности высших порядков, принадлежащих гильбертовому пространству L_2.

Неравенствами типа Джексона-Стечкина в широком смысле называют соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции в рассматриваемом банаховом пространстве оценивается через модуль непрерывности заданного порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной. При этом естественным образом возникает экстремальная задача получения точных неравенств, неулучшаемых на рассматриваемых классах функций. При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \chi\, n^{-r} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{t}{n} \right),$$

где

$$t > 0,\ f \in L_2^{(r)},\ m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(0)} \equiv f,$$

многими математиками в разное время предложены различные методы исследования, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ. Эту задачу в разное время исследовали Н.И.Черных [30, 31], В.И.Бердышев [2], Л.В.Тайков [25, 26], А.А.Лигун [14, 15], А.Г.Бабенко [1], В.И.Иванов и

О.И.Смирнов [10], С.Б.Вакарчук [3, 5], М.Ш.Шабозов [32], М.Ш.Шабозов и Г.А.Юсупов [35] и многие другие.

В параграфе 1.2 мы отмечали, что в работе [25] Л.В.Тайков, в частности, доказал, что для любого $h \in [0,\ \pi/n]$ справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\left\{\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)};t)dt\right\}^{-1/2} = \left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{1/2}.$$

Обобщая этот результат для произвольных модулей непрерывности m-го порядка, С.Б.Вакарчук [5] доказал, что

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\cdot\left\{\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)dt\right\}^{-m/2} = \left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}. \quad (1.3.1)$$

Более общий результат в этом направлении получен М.Ш.Шабозовым в работе [32], в которой доказано, что для произвольных $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/2$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f^{(r)}\neq const}} n^r E_{n-1}(f)\cdot\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)dt\right\}^{-1/p} = \left\{\int\limits_0^h\left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

Очевидно, что из последнего равенства, в частности, при $p = 2/m, m \in \mathbb{N}$ следует вышеуказанный результат С.Б.Вакарчука.

В этом параграфе мы продолжим исследование в указанном направлении и докажем своеобразный аналог результата (1.3.1) для усреднённых модулей непрерывности m-го порядка. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $h \in \mathbb{R}_+$, удовлет-*

воряющего неравенству $0 < nh \leq \pi$, *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}, \quad (1.3.2)$$

где $Si(h) = \int\limits_0^h t^{-1}\sin t dt$ – *интегральный синус.*

Доказательство. В силу специфики гильбертова пространства L_2 и свойств ортогональности тригонометрической системы, для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место равенство (1.1.4), из которого вытекает неравенство

$$\left\|\Delta_u^m f^{(r)}(\cdot)\right\|^2 \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos ku)^m. \quad (1.3.3)$$

Используя значение наилучшего приближении функции $f \in L_2$ из равенства (1.1.1) запишем соотношение

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\cos ku = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos ku) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}(\rho_k(f))^{2-2/m}\rho_k^{2/m}(f)(1-\cos ku). \quad (1.3.4)$$

Применив к правой части (1.3.4) схему рассуждений работы [37], а именно воспользуясь неравенством Гёльдера для числовых рядов

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|b_k|^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad 1\leq p\leq\infty, \quad (1.3.5)$$

а также учитывая неравенство (1.3.3) и определение модуля непрерывности m-го порядка (1.1.5), оценим сумму, стоящую в правой части равенства (1.3.4) при помощи неравенства (1.3.5), полагая $p = \dfrac{m}{m-1}$, $q = m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Имеем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos ku \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} (\rho_k(f))^{2(1-\frac{1}{m})\cdot\frac{m}{m-1}}\right)^{1-1/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (\rho_k(f))^{\frac{2}{m}\cdot m}(1-\cos ku)^m\right)^{1/m} =$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right)^{1-1/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)(1-\cos ku)^m\right)^{1/m} =$$

$$= E_{n-1}^{2-2/m}(f) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)(1-\cos ku)^m\right)^{1/m} \leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{2r} \rho_k^2(f)(1-\cos ku)^m\right)^{1/m} =$$

$$= E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)(1-\cos ku)^m\right)^{1/m} \leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)\, \frac{\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)}{2n^{2r/m}}. \tag{1.3.6}$$

Итак, мы доказали, что для произвольного $f \in L_2^{(r)}$ и любого $u \geq 0$ имеет место неравенство (см., также [33, с.127-126]):

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos ku + E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)}{2n^{2r/m}}.$$

Проинтегрировав полученный результат по переменной u в пределах от 0 до t и затем поделив обе части неравенства на t, запишем

$$E_{n-1}^{2}(f)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\frac{\sin kt}{kt}+E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du. \quad (1.3.7)$$

Снова, интегрируя неравенство (1.3.7) по t в пределах от 0 до h $(0<h\leq\pi/n)$ и учитывая определение интегрального синуса, получаем

$$hE_{n-1}^{2}(f)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\frac{Si(kh)}{k}+E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2n^{2r/m}}\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt.$$

Из последнего неравенства выводим

$$E_{n-1}^{2}(f)\leq$$

$$\leq\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\frac{Si(kh)}{kh}+E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2h\,n^{2r/m}}\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt. \quad (1.3.8)$$

Воспользуясь равенствами (1.2.4) и (1.1.1), из неравенства (1.3.8) имеем

$$E_{n-1}^{2}(f)\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)\leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2h\,n^{2r/m}}\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f,u)du\right)dt. \quad (1.3.9)$$

Из неравенства (1.3.9) находим

$$E_{n-1}(f)\leq$$

$$\leq\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m/2}\frac{1}{(2h)^{m/2}n^{r}}\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\right)^{m/2}=$$

$$= \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^r} \left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{m/2}. \quad (1.3.10)$$

Так как неравенство (1.3.10) справедливо для любого $f \in L_2^{(r)}$, то мы получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (1.3.2):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{m/2}} \leq \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}. \quad (1.3.11)$$

Для получения оценки снизу указанной величины рассмотрим функцию $f_0(x) := \cos nx \in L_2^{(r)}$. Поскольку

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad (1.3.12)$$

$$\omega_m(f_0^{(r)}, u) = 2^{m/2} n^r (1 - \cos nu)^{m/2}, \quad 0 < nu \leq \pi,$$

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, u) du = 2n^{2r/m} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right),$$

$$\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{m/2} = n^r \left\{ \frac{2(nh - Si(nh))}{n} \right\}^{m/2}, \quad (1.3.13)$$

то, учитывая равенства (1.3.12) и (1.3.13), имеем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{m/2}} \geq$$

$$\geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, u)du\right) dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2}. \qquad (1.3.14)$$

Сопоставив оценки сверху (1.3.11) и снизу (1.3.14), получим требуемое равенство (1.3.2). Теорема 1.3.1 доказана.

Пользуясь тем, что модуль непрерывности $\omega_m(f^{(r)}, t)$ при $t \in (0, h]$ монотонно возрастает, из доказанной теоремы 1.3.1 выводим следующее

Следствие 1.3.1. *При выполнении условий теоремы 1.3.1 имеет место следующее неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}\,\omega_m(f^{(r)}, h), \qquad (1.3.15)$$

при всех h *удовлетворяющих условию* $0 < nh \leq \pi$.

В частности, при $nh = \pi$ *из (1.3.15) имеем*

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}\,\omega_m(f^{(r)}, \pi/n). \qquad (1.3.16)$$

Вопрос о том, что неравенство (1.3.16) при всех $m \in \mathbb{N}$ является точным, остаётся открытым.

§1.4. Верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых экстремальных характеристик в пространстве L_2

В этом параграфе рассматриваются некоторые аппроксимационные величины, характеризующие аппроксимативные свойства класса $\mathfrak{M}$ периодических дифференцируемых функций в метрике L_2, связанные с наилучшим приближением тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, наилучшее линейное приближение этими полиномами, а также с верхними гранями норм функций из $\mathfrak{M}$, ортогональных подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Для различных классов функций из L_2 доказаны некоторые факты, связанные со случаями совпадения этих характеристик.

Рассмотрим следующие экстремальные величины:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := E(\mathfrak{M}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \tag{1.4.1}$$

– наилучшие приближения класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$;

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\}, \tag{1.4.2}$$

где $\mathfrak{M}_n^{\perp}$ – множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Помимо величин (1.4.1) и (1.4.2) часто будет полезным отыскание величины

$$\mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A\in\mathscr{L}_n} \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2}, \tag{1.4.3}$$

где $\mathscr{L}_n$ – совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ порядка $n-1$.

Из приведённых выше определений (1.4.1) – (1.4.3) аппроксимационных величин сразу следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}. \tag{1.4.4}$$

В самом деле, второе неравенство в цепочке (1.4.4) вытекает из того факта, что если $f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}$, то $Af \equiv 0$, и поэтому для любых операторов $A : f \to T_{n-1}$ мы имеем

$$\sup\left\{\|f\|_{L_2} :\ f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\} \le \sup\left\{\|f - Af\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}\right\},$$

а потому

$$\sup\left\{\|f\|_{L_2} :\ f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\} \le \inf_{A\in\mathscr{L}_n} \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2},$$

откуда следует, что

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}.$$

С другой стороны, вследствие равенства Парсеваля очевидно, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \le \sup_{f\in\mathfrak{M}_n^{\perp}} \|f\|_{L_2} = \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}.$$

Из этих двух последних неравенств сразу получаем цепочку неравенств (1.4.4). Далее покажем, что в ряде важных случаев, для конкретных классов функций, введённые выше аппроксимационные характеристики совпадают.

Задача состоит в отыскании значения величин (1.4.1) – (1.4.3) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждения теорем и их следствий, доказанных в предыдущих параграфах 1.2 и 1.3.

Пусть $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ $(0 \le t < \infty)$ – непрерывные монотонно возрастающие функции в нуле равные нулю: $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$.

Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного $0 < h \le 2\pi$, исходя из результатов, полученных в теоремах 1.2.2 и 1.3.1, вводим в рассмотрение следующие классы функций в L_2 :

$$W^{(r)}(h)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}\le 1\right\},\qquad (1.4.5)$$

$$W^{(r)}(\Phi,h)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}\le \Phi(h)\right\},\qquad (1.4.6)$$

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\overset{df}{=}\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)dt\le 1\right\},\qquad (1.4.7)$$

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)^{m/2}dt\le \Psi(h)\right\}.\qquad (1.4.8)$$

Для введённых классов функций (1.4.5) и (1.4.8) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4.1 *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда при любом* $h\in(0,\pi/n]$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(h)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(h)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(h)\right)_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r},\qquad (1.4.9)$$

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h)\right)_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h),\qquad (1.4.10)$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}, \qquad (1.4.11)$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right)_{L_2}=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\,\Psi(h). \qquad (1.4.12)$$

Доказательство. Все равенства (1.4.9) – (1.4.12) доказываются одним и тем же способом и только лишь небольшими вычислениями отличаются в идейном отношении. Поэтому мы докажем только цепочку равенств (1.4.12). Очевидно, для справедливости равенства (1.4.12) достаточно доказать, что для аппроксимационных величин оценка сверху и оценка снизу в точности совпадают. Так как в пространстве L_2 совокупность всех линейных операторов, переводящих любую функцию $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы порядка $n-1$, совпадает с частными суммами $S_{n-1}(f,x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье, то имеет место равенство

$$\mathscr{E}_{n-1}(f)_{L_2}=E_{n-1}(f)_{L_2}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{L_2}.$$

Используя определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)$ из соотношения (1.3.10), для произвольной функции $f\in\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)$ запишем

$$\mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right)_{L_2}=\sup\left\{\|f-S_{n-1}(f)\|_{L_2}:\ f\in\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right\}=$$

$$=\sup_{f\in\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)}\left\{\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_m^{2/m}(f^{(r)},u)du\right)^{m/2}dt\right)\right\}\le$$

$$\leq \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi(h). \tag{1.4.13}$$

Для получения оценки снизу величины $E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)\right)$, равной величине в правой части (1.4.13), введём в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi(h) \cos nx.$$

Очевидно, что $f_0(x) \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$ и так как $S_{n-1}(f_0, x) \equiv 0$, то

$$\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|_{L_2} \equiv \|f_0\|_{L_2} = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi(h). \tag{1.4.14}$$

Таким образом, с учётом равенства (1.4.14) получаем

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)\right) \geq \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\| =$$

$$= \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi(h). \tag{1.4.15}$$

Требуемые равенства (1.4.12) вытекают из сравнения оценки сверху (1.4.13) и оценки снизу (1.4.15), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Из утверждения теоремы 1.4.1 немедленно следует

Следствие 1.4.1. *При выполнении всех условий теоремы 1.4.1 имеют место равенства*

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(\pi/n)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(\pi/n)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(\pi/n)\right)_{L_2} = \left\{ \frac{\pi^2}{2(\pi^2 - 4)} \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}. \tag{1.4.16}$$

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,\pi/n)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,\pi/n)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,\pi/n)\right)_{L_2}=\left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1.4.17)$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\pi/n)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\pi/n)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\pi/n)\right)_{L_2}=\left\{\frac{n}{2(\pi-Si(\pi))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}, \qquad (1.4.18)$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,\pi/n)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,\pi/n)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,\pi/n)\right)_{L_2}=\left\{\frac{n}{2(\pi-Si(\pi))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\,\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1.4.19)$$

Напомним, что Лебегом [13] было впервые дано понятие модуля непрерывности ω для функций $f\in\mathbb{C}$. В терминах указанной характеристики гладкости там же были получены оценки коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций рассматривались в работах С.Н.Бернштейна, А.Ф.Тимана, Н.П.Корнейчука, А.В.Ефимова, С.А.Теляковского, А.И.Степанца, С.Милорадовича и многих других математиков (см., например, монографию [24] и приведённую там литературу). Для классов функций, принадлежащих пространству L_2, аналогичные вопросы рассматривались например, С.Б.Вакарчуком [4, 5] М.Ш.Шабозовым и С.Б.Вакарчуком [37] и Г.А.Юсуповым [40]. Для изучаемых в данном параграфе классов функций данный вопрос также представляет определённый интерес.

В самом деле, из утверждения теоремы 1.4.1 сразу получаем

Следствие 1.4.2 *Если выполнены все условия теоремы 1.4.1, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W^{(r)}(h)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W^{(r)}(h)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}, \tag{1.4.20}$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W^{(r)}(\Phi,h)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W^{(r)}(\Phi,h)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h). \tag{1.4.21}$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:f\in\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:f\in\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right\}=$$

$$=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}, \tag{1.4.22}$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h)\right\}=$$

$$=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{m/2}\frac{1}{n^r}\,\Psi(h). \tag{1.4.23}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, докажем равенство (1.4.21) для косинус-коэффициента $a_n(f)$. Учитывая ортогональность частичной суммы $(n-1)$-го порядка $S_{n-1}(f,x)$ функции $\cos nx$, запишем равенство

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{f(x)-S_{n-1}(f,x)\right\}\cos nxdx. \tag{1.4.24}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского из (1.4.24), благодаря соотношению (1.4.10), получаем оценку сверху

$$\sup\Big\{|a_n(f)|:\ f\in W^{(r)}(\Phi,h)\Big\}\le$$

$$\le\sup\Big\{\|f-S_{n-1}(f)\|:\ f\in W^{(r)}(\Phi,h)\Big\}=$$

$$=E_{n-1}\Big(W^{(r)}(\Phi,h)\Big)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h). \qquad (1.4.25)$$

Введём в рассмотрение функцию

$$g_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h)\cos nx.$$

Элементарным вычислением легко показать, что функция $g_0(x)$ принадлежит классу $W^{(r)}(\Phi,h)$, а потому мы имеем:

$$\sup\Big\{|a_n(f)|: f\in W^{(r)}(\Phi,h)\Big\}\ge|a_n(g_0)|=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}g_0(x)\cos nxdx\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h)\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 nxdx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\,\Phi(h). \qquad (1.4.26)$$

Равенство (1.4.21) для косинус-коэффициента $a_n(f)$ вытекает из сопоставления оценки сверху (1.4.25) и оценки снизу (1.4.26). Аналогичным образом доказываются остальные равенства (1.4.20), (1.4.22) и (1.4.23), чем и завершаем доказательство следствия 1.4.2.

ГЛАВА II

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ N-ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПРОСТРАНСТВУ L_2

§2.1. Определение поперечников

Основной целью исследования настоящей главы являются вычисления точных значений различных поперечников для классов дифференцируемых функций, возникающих естественным образом из результатов, полученных во втором и третьем параграфах первой главы.

Прежде чем сформулировать результаты о поперечниках, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций из L_2 и пусть $\mathscr{L}_n \subset L_2$ – некоторое подпространство из L_2 размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{N}) = \sup\{E_n(f) : \ f \in \mathfrak{N}\} =$$

$$= \sup\{\inf\{\|f-g\| : \ g \in \mathscr{L}_n\} : \ f \in \mathfrak{N}\} \tag{2.1.1}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{N}$ подпространством $\mathscr{L}_n \subset L_2$, и она характеризует отклонение класса $\mathfrak{N}$ от подпространства $\mathscr{L}_n$ в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A : \ L_2 \to \mathscr{L}_n$, действующих из L_2 в произвольное заданное подпространство $\mathscr{L}_n \in L_2$ размерности n, то возникает задача:
найти величину

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| : \ f \in \mathfrak{N}\} : \ A \in \mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)\} \tag{2.1.2}$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань:

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) = \sup\{\|f - A^*f\| : \ f \in \mathfrak{N}\}.$$

Если в $\mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(L_2, \mathscr{L}_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство $\mathscr{L}_n$, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \mathscr{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathscr{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| : \ f \in \mathfrak{N}\} : \ A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \mathscr{L}_n)\}. \tag{2.1.3}$$

Напомним определения n-поперечников, значения которых будут вычислены в этой главе для некоторых конкретных классов $\mathfrak{N}$ функций.

Пусть S – единичный шар в L_2. Величина

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0; \ \varepsilon s \cap \mathscr{L}_{n+1} \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset L_2\} \tag{2.1.4}$$

называется n-поперечником класса $\mathfrak{N}$ в пространстве L_2 по Бернштейну.

n-поперечником в смысле Колмогорова [11] класса функций $\mathfrak{N}$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{E_n(\mathfrak{N}) : \mathscr{L}_n \subset L_2\} =$$

$$= \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\| : \ g \in \mathscr{L}_n\} : \ f \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\}, \tag{2.1.5}$$

где нижняя грань рассматривается сначала по всем элементам g, принадлежащим n-мерному подпространству $\mathscr{L}_n \subset L_2$, а затем по всем подпространством $\mathscr{L}_n$ заданной размерности n.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}) : \ \mathscr{L}_n \subset L_2\} =$$

$$\inf\{\inf\{\sup\{\|f - Af\| : \ f \in \mathfrak{N}\} : \ A \in \mathcal{L}(L_2, \mathscr{L}_n)\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\}. \tag{2.1.6}$$

называют линейным n-поперечником. Рассматривают также проекционный n-поперечник, который определяется равенством

$$\Pi_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\mathscr{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) : \ \mathscr{L}_n \subset L_2\} =$$

$$= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\} : A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \mathscr{L}_n)\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\}. \quad (2.1.7)$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf\{\sup\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap \mathscr{L}^n\} : \mathscr{L}^n \subset L_2\}, \quad (2.1.8)$$

где inf берется по всем подпространством $\mathscr{L}^n$ коразмерности n, называется n-поперечником по Гельфанду.

Весьма важным является нахождение соответствующих подпространств, реализующих внешнюю верхнюю грань в поперечнике Бернштейна $b_n(\cdot)$ и внешние нижние грани во всех остальных поперечниках. Такие подпространства называются оптимальными подпространствами.

Отметим свойства монотонности поперечников, которые сразу вытекают из их определений:

Пусть $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеуказанных поперечников. Тогда имеют место следующие неравенства:

а) $\lambda_n(\mathfrak{N}) \geq \lambda_{n+1}(\mathfrak{N})$ – монотонность по n;

б) $\lambda_n(\mathfrak{M}) \leq \lambda_n(\mathfrak{N})$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Так как пространство L_2 является гильбертовым, то между перечисленными выше n-поперечниками имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{N}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{N}; L_2). \quad (2.1.9)$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{N}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{N}; L_2)$ справедливо для любого банахова пространства и его можно найти в монографии А.Пинкуса [22, с.19], а все остальные в книге В.М.Тихомирова [27, с.239].

В этой главе, исходя из результатов, полученных в параграфах 1.2 – 1.4 для классов функций $W^{(r)}(h)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$, определение которых приведено в четвёртом параграфе первой главы, вычислим точные значения всех вышеперечисленных n-поперечников (2.1.4) – (2.1.8), при некоторых естественных ограничениях, налагаемых на мажорантах Φ и Ψ.

§2.2. Точные значения n-поперечников классов функций $W^{(r)}(h)$ и $W^{(r)}(\Phi, h)$

Этот параграф посвящается нахождению точных значений n-поперечников классов функций $W^{(r)}(h)$ и $W^{(r)}(\Phi, h)$. Для этих классов функций имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и число $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству $nh \le \pi$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(h), L_2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}. \tag{2.2.1}$$

В частности, если $nh = \pi$, то

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\pi/n), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\pi/n), L_2\right) = \left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$, $\Pi_k(\cdot)$. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

Теорема 2.2.1 доказывается буквально по схеме рассуждений доказательства нижеприведённой теоремы 2.2.2, а потому мы его опускаем.

Более общей является следующая

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта Φ при любых $h \in (0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \ge \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{если } \ 0 < nh \le \pi, \\[2ex] 1 - \dfrac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если } \ nh > \pi. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\right)=\lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\right)=$$

$$=\left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}, \tag{2.2.3}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников. Множество мажорантных функций* Φ*, удовлетворяющих условию (2.2.2), не пусто. Все поперечники реализуются частными суммами* $S_{n-1}(f;x)$ *порядка* $n-1$ *ряда Фурье функции* $f\in L_2^{(r)}$.

Доказательство. Для получения оценки сверху всех вышеперечисленных аппроксимационных величин используем вытекающее из (1.2.26) неравенство

$$E_{n-1}(f)\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\frac{1}{n^r}\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}. \tag{2.2.4}$$

Из неравенства (2.2.4) при $h=\pi/n$, учитывая определение класса $W^{(r)}(\Phi,h)$ и соотношение (2.1.9) между n-поперечниками, с учётом равенств (1.4.9) получаем оценки сверху

$$\lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\right)\le\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\right)\le E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi,h))\le$$

$$\le\mathscr{E}_{n-1}(W^{(r)}(\Phi,h))=\left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}. \tag{2.2.5}$$

С целью получения оценки снизу указанных n-поперечников, равной правой части неравенства (2.2.5), введём в рассмотрение $(2n+1)$-мерную сферу тригонометрических полиномов:

$$\sigma_{2n+1}=\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \|T_n\|\le\left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}\right\}$$

и докажем, что σ_{2n+1} принадлежит классу $W^{(r)}(\Phi,h)$. Воспользуемся следующим неравенством, доказанным Л.В.Тайковым в [26]:

$$\omega_m^2(T_n^{(r)},x)\le 2^m(1-\cos nx)_*^m n^{2r}\|T_n\|^2, \tag{2.2.6}$$

где $T_n(x)$ – произвольный тригонометрический полином из $\mathcal{T}_{2n+1}$, а

$$(1-\cos nx)_*^m:=\left\{(1-\cos nx)^m,\ \text{если}\ 0\le nx\le\pi;\quad 2^m,\ \text{если}\ nx\ge\pi\right\} \tag{2.2.7}$$

и первого из неравенств (2.2.2) при любом h, удовлетворяющем неравенству $0<nh\le\pi$, для произвольного полинома $T_n\in\sigma_{2n+1}$ имеем

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\,\omega^2(T_n^{(r)},t)dt\le$$

$$\le 2n^{2r}\|T_n\|^2\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)(1-\cos nt)dt\right)=$$

$$=2n^{2r}\|T_n\|^2\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}\le$$

$$\le 2n^{2r}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\frac{1}{n^{2r}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\le\Phi(h). \tag{2.2.8}$$

Если $nh>\pi$, то, используя второе из неравенство (2.2.2), будем иметь

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(T_n^{(r)},t)dt =$$

$$= 2\left(\frac{n}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^{\pi/n} \left(\frac{\pi}{n}-t\right)\omega^2(T_n^{(r)},t)dt+$$

$$+\frac{2}{h^2}\int\limits_{\pi/n}^h (h-t)\,\omega^2(T_n^{(r)},t)dt \le \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\cdot\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left(1-\frac{\pi}{nh}\right)^2\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left\{1-\frac{4}{\pi^2}+2\left(1-\frac{\pi}{nh}\right)^2\right\}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \Phi(h). \qquad (2.2.9)$$

Из неравенств (2.2.8) и (2.2.9) следует включение $\sigma_{2n+1} \subset W^{(r)}(\Phi, h)$. Поэтому согласно определению бернштейновского n-поперечника получаем оценку снизу

$$b_{2n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h), L_2\right) \ge b_{2n}\left(W^{(r)}(\Phi,h), L_2\right) \ge b_{2n}(\sigma_{2n+1}; L_2) \ge$$

$$\ge \left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}. \qquad (2.2.10)$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.5) и оценку снизу (2.2.10) получаем требуемые равенства (2.2.3). Теперь докажем, что множества мажорант, удовлетворяющих условию (2.2.2), действительно не пусто. В самом деле, покажем, что функция $\Phi_*(h) = h^\alpha$, где

$$\alpha = \frac{8}{\pi^2-4} \quad (1,36 < \alpha < 1,38) \qquad (2.2.11)$$

удовлетворяет условию (2.2.2) теоремы. Конкретизируя с этой целью функцию Φ в (2.2.2), получаем следующее неравенство

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases} 1-\left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{если } \ 0 < nh \leq \pi, \\ 1-\dfrac{4}{\pi^2}+2\left(1-\dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если } \ nh > \pi. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Полагая снова $nh = \mu\pi$, $0 \leq \mu < \infty$, перепишем (2.2.12) в виде

$$\mu^{\alpha} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases} 1-\left(\dfrac{2}{\mu\pi}\sin\dfrac{\mu\pi}{2}\right)^2, & \text{если } \ 0 < \mu \leq 1, \\ 1-\dfrac{4}{\pi^2}+2\left(1-\dfrac{1}{\mu}\right)^2, & \text{если } \ \mu \geq 1. \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Неравенство (2.2.13) можно также записать в более удобном для исследования форме

$$\mu^{\alpha+2} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases} \mu^2-\left(\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\mu\pi}{2}\right)^2, & \text{если } \ 0 < \mu \leq 1, \\ \left(1-\dfrac{4}{\pi^2}\right)\mu^2+2\left(\mu-1\right)^2, & \text{если } \ 1 \leq \mu \leq \infty. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Исходя из первого неравенства в (2.2.14), рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ вспомогательную функцию

$$\psi(\mu) := \mu^{\alpha+2} - \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left(\mu^2-\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^2\right). \tag{2.2.15}$$

Учитывая в силу (2.2.11), что $1,36 < \alpha < 1,38$ при $\mu \to 0+0$, получаем

$$\psi(\mu) = \mu^{\alpha+2}\left(1+\frac{\pi^4}{144(\pi^2-4)}O(\mu^{4-\alpha})\right). \tag{2.2.16}$$

Из (2.2.16) следует, что в достаточно малой окрестности нуля справа, функция ψ является неотрицательной. Покажем, что на всём отрезке $[0, 1]$

функция ψ является такой. Для этого применим метод рассуждений от противного, полагая, что на интервале $(0,1)$ существует точка ξ, в которой функция ψ меняет свой знак. Поскольку, как следует из (2.2.15) $\psi(0) = \psi(1) = 0$, то на основании теоремы Ролля производная первого порядка

$$\psi'(\mu) = (\alpha+2)\mu^{\alpha+1} - \frac{2\pi^2}{\pi^2-4}\left(\mu - \frac{2}{\pi}\sin\mu\pi\right) \tag{2.2.17}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Из формул (2.2.17) и (2.2.11) следует, что $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, то есть производная $\psi'(\mu)$ на отрезке $[0,1]$ имеет четыре различных нуля. Но тогда производная второго порядка

$$\psi''(\mu) = (\alpha+2)(\alpha+1)\mu^{\alpha} - \frac{2\pi^2}{\pi^2-4}\left(1 - 2\cos\mu\pi\right)$$

$$= (\alpha+2)\Big[(\alpha+1)\mu^{\alpha} - (1 - 2\cos\mu\pi)\Big] \tag{2.2.18}$$

на отрезке $(0,1)$ должна иметь не менее трёх различных нулей. Из формулы (2.2.18) следует, что производная $\psi''(\mu)$ на интервале $(0,1)$ является разностью двух функций, первая из которых принимает лишь положительные значения и является выпуклой вверх, а вторая является выпуклой вниз и отрицательной на интервале $(0,1/2)$ и положительной и выпуклой вверх на интервале $(1/2,1)$. Из геометрических соображений очевидно, что производная $\psi''(\mu)$ на интервале $(0,1)$ может иметь не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость первого неравенства в соотношении (2.2.13).

Исходя из второго неравенства в (2.2.14), рассмотрим, учитывая (2.2.11), на множестве $1 \le \mu < \infty$ вспомогательную функцию

$$\widetilde{\psi}(\mu) := \mu^{\alpha+2} - \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left[\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\mu^2 + 2\left(\mu - 1\right)^2\right] =$$

$$= \mu^{\alpha+2} - \mu^2 - \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}\left(\mu - 1\right)^2 = \mu^{\alpha+2} - \left(\alpha + 2\right)\left(\mu - 1\right)^2 - \mu^2.$$

Поскольку при $\mu \geq 1$ для её производной первого порядка выполняется неравенство

$$\widetilde{\psi}'(\mu) = (\alpha + 2)\mu^{\alpha+1} - 2(\alpha + 2)(\mu - 1) - 2\mu =$$

$$= (\alpha + 2)\mu^{\alpha+1} - 2(\alpha + 3)\mu + 2(\alpha + 2) \geq$$

$$\geq (\alpha + 2)\mu^2 - 2(\alpha + 3)\mu + 2(\alpha + 2) =$$

$$= (\alpha + 2)\left[\mu^2 - 2 \cdot \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2}\mu + 2\right] =$$

$$= (\alpha + 2)\left[\left(\mu - \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2}\right)^2 + 2 - \left(\frac{\alpha + 3}{\alpha + 2}\right)^2\right] > 0, \qquad (2.2.19)$$

то из равенства $\widetilde{\psi}(1) = 0$ следует, что функция $\widetilde{\psi}(\mu)$ является положительной строго возрастающей на множестве точек $1 \leq \mu < \infty$. Следовательно, и второе неравенство в условии (2.2.13) имеет место. Теорема 2.2.2 полностью доказана.

Отметим, что значение α в равенстве (2.2.11) есть результат приравнивания производной от левых и правых частей неравенства (2.2.14).

§2.3. Точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ и $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$

В этом параграфе вычислим точные значения всех вышеперечисленных n-поперечников (2.1.4) – (2.1.8) для класса функций

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h) \overset{df}{=} \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right) dt \le 1 \right\}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < nh \le \pi$ и для класса функций

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right)^{m/2} dt \le \Psi(h) \right\}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi)$ и некоторых естественных ограничениях на мажорантные функции Ψ.

Теорема 2.3.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и для числа $h \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $0 < nh \le \pi$. Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2\right) = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r}, \quad (2.3.1)$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$, $\Pi_k(\cdot)$. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f; x)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функций $f \in L_2^{(r)}$.

Доказательство. Используя определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, а также соотношения (2.1.9) и равенства (1.4.11), будем иметь

$$\delta_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h),\, L_2\right) \le \delta_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h),\, L_2\right) \le d_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h),\, L_2\right) \le$$

$$\le E_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} \le \mathscr{E}_{n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}. \quad (2.3.2)$$

Для получения оценки снизу вышеперечисленных n-поперечников класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ рассмотрим в множестве $\mathcal{T}_{2n-1} \cap L_2$ шар полиномов

$$S_{2n+1} := \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1} : \ \|T_n\| \le n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2} \right\}$$

и докажем, что $S_{2n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(h)$. Воспользовавшись неравенством (2.2.6), для любого $T_n(x) \in S_{2n+1}$, при $0 < nh \le \pi$ имеем

$$\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, u) du \right) dt \le$$

$$\le 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \cos nu) du \right) dt =$$

$$= 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) dt = 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \left(h - \frac{Si(nh)}{n} \right) =$$

$$= n^{2r/m} \frac{2(nh - Si(nh))}{n} \cdot \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \cdot \frac{1}{n^{2r/m}} = 1.$$

Этим включение $S_{2n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ доказано и, согласно определению бернштейновского n-поперечника, будем иметь

$$\delta_{2n} \left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h),\, L_2 \right) \ge b_{2n} \left(\mathcal{F}_m^{(r)}(h),\, L_2 \right) \ge$$

$$\ge b_{2n} \left(S_{2n+1},\, L_2 \right) \ge n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}. \tag{2.3.3}$$

Равенства (2.3.1) следуют из сопоставления между собой неравенств (2.3.2) и (2.3.3), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Пусть мажоранта* Ψ *при любом* $m \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Psi^{2/m}(h)}{\Psi^{2/m}(\pi/n)} \geq \frac{1}{\pi - Si(\pi)} \cdot \begin{cases} nh - Si(nh), & \text{если} \ \ 0 < h \leq \pi/n, \\ 2nh - \pi - Si(\pi), & \text{если} \ \ h > \pi/n. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) =$$

$$= n^{-r}\left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.3.5}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников (2.1.4) – (2.1.8). Множество мажорантных функций* $\Phi(t)$*, удовлетворяющих условию (2.3.4), не пусто. Все поперечники в (2.3.5) реализуются частными суммами* $S_{n-1}(f; x)$ *ряда Фурье функции* $f \in L_2^{(r)}$.

Доказательство. Полагая в неравенстве (1.3.10) $h = \pi/n$, для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$ получим

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\pi - Si(\pi)}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \cdot \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

откуда сразу с учетом соотношения (2.1.9) и равенств (1.4.12) запишем оценку сверху для всех n-поперечников

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) \leq \lambda_{2n-1}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2\right) \leq d_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h), L_2) \leq$$

$$\leq E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h))_{L_2} \leq \mathscr{E}_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h))_{L_2} \leq$$

$$\leq n^{-r}\left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.3.6}$$

Для получения оценки снизу перечисленных выше n-поперечников рассмотрим в $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ шар полиномов

$$\tilde{S}_{2n+1} \overset{df}{=} \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1} : \ \|T_n\| \le n^{-r} \left(\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))} \right)^{m/2} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$.

Пусть сначала $0 < h \le \pi/n$. Используя определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$, неравенство (2.2.6), первое неравенство из ограничения (2.3.4), с учётом (2.2.7) для любого полинома $T_n(x) \in \tilde{S}_{2n+1}$ получим

$$\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, u) du \right) dt \le \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \left[2(1 - \cos nu) n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \right] du \right) dt =$$

$$= 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) dt = 2n^{2r/m} h \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh} \right) \cdot \|T_n\|^{2/m} \le$$

$$\le 2n^{2r/m} \cdot \frac{nh - Si(nh)}{n} \cdot \frac{n}{2(\pi - Si(\pi))} \cdot n^{-2r/m} \cdot \Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{nh - Si(nh)}{\pi - Si(\pi)} \cdot \Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \Psi^{2/m}(h). \qquad (2.3.7)$$

Пусть $h \ge \pi/n$. Применяя аналогичные соображения и второе неравенство из ограничения (2.3.4), для произвольного полинома $T_n(x) \in \tilde{S}_{2n+1}$, с учётом неравенства (2.2.6) запишем

$$\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, u) du \right) dt = \int_0^{\pi/n} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, u) du \right) dt +$$

$$+\int\limits_{\pi/n}^{h}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\omega_m^{2/m}(T_n^{(r)},u)du\right)dt\le\Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)+\int\limits_{\pi/n}^{h}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}4n^{2r/m}\|T_n\|^{2/m}du\right)dt\le$$

$$\le\Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)+4n^{2r/m}\|T_n\|^{2/m}\left(h-\frac{\pi}{n}\right)\le$$

$$\le\Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)+4n^{2r/m}\frac{nh-\pi}{n}n^{-2r/m}\frac{n}{2(\pi-Si(\pi))}\Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)\left\{1+4n^{2r/m}\frac{nh-\pi}{n}n^{-2r/m}\frac{n}{2(\pi-Si(\pi))}\right\}=$$

$$=\left\{1+\frac{2nh-2\pi}{\pi-Si(\pi)}\right\}\Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{2nh-\pi-Si(\pi)}{\pi-Si(\pi)}\Psi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)\le\Psi^{2/m}(h).\tag{2.3.8}$$

Из неравенств (2.3.7) и (2.3.8) следует включение $T_n(x)\in\tilde{S}_{2n+1}$. Используя соотношения между n-поперечниками (2.1.9) и определение бернштейновского n-поперечника, получим оценку снизу всех n-поперечников

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h),L_2\right)\ge b_{2n}\left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi,h),L_2\right)\ge b_{2n}(\tilde{S}_{2n+1},L_2)=$$

$$=n^{-r}\left\{\frac{n}{2(\pi-Si(\pi))}\right\}^{m/2}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right).\tag{2.3.9}$$

Равенства (2.3.5) следуют из сопоставления неравенств (2.3.6) и (2.3.9).

Во второй части теоремы покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.3.4), не пусто. С этой целью рассмотрим функцию $\Psi_* = h^{m\alpha/2}$, где

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi - Si(\pi)}, \quad (2,41 < \alpha < 2,42) \tag{2.3.10}$$

удовлетворяет условиям (2.3.4) теоремы 2.3.2. Конкретизируя в (2.3.4) функцию Ψ, получаем неравенства

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \frac{1}{\pi - Si(\pi)} \cdot \begin{cases} nh - Si(nh), & \text{если } \ 0 < h \leq \pi/n, \\ 2nh - \pi - Si(\pi), & \text{если } \ h \geq \pi/n, \end{cases} \tag{2.3.11}$$

которые предстоит ещё доказать. Полагая $\mu := nh/\pi$, перепишем неравенство (2.3.11) в эквивалентном виде

$$\mu^{\alpha} \geq \frac{1}{\pi - Si(\pi)} \cdot \begin{cases} \mu\pi - Si(\mu\pi), & \text{если } \ 0 < \mu \leq 1, \\ 2\mu\pi - \pi - Si(\pi), & \text{если } \ \mu \geq 1. \end{cases} \tag{2.3.12}$$

Исходя из первого неравенства в (2.3.12), на отрезке $[0, 1]$ введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi_1(\mu) = \mu^{\alpha} - \frac{1}{\pi - Si(\pi)}\Big(\mu\pi - Si(\mu\pi)\Big) \tag{2.3.13}$$

и покажем, что $\varphi_1(\mu) \geq 0$ на всём отрезке $[0, 1]$. Учитывая, в силу (2.3.10), что $2 < \alpha < 2,5$, при $\mu \to 0 + 0$ получаем

$$\varphi_1(\mu) = \mu^{\alpha} - \frac{1}{\pi - Si(\pi)}\Big(\mu\pi - Si(\mu\pi)\Big) =$$

$$= \mu^{\alpha} - \frac{1}{\pi - Si(\pi)} \left(\mu\pi - \int\limits_0^{\mu\pi} \frac{\sin t}{t} dt\right) =$$

$$= \mu^{\alpha}\left(1 + \frac{\mu^{3-\alpha}\pi^3}{18(\pi - Si(\pi))} + O(\mu^{5-\alpha})\right). \qquad (2.3.14)$$

Из (2.3.14) следует, что существует отрезок $[0, \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 1$, на котором функция $\varphi_1(\mu) \geq 0$. Покажем, что и на всём отрезке $[0, 1]$ функция $\varphi_1(\mu) \geq 0$. Для этого применим метод от противного, полагая, что на интервале $(0, 1)$ существует некоторая точка η $(0 < \eta < 1)$, в которой функция φ_1 меняет знак. Поскольку, как следует из (2.3.13), $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$, то на основании теоремы Ролля производная первого порядка

$$\varphi_1'(\mu) = \alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi}{\pi - Si(\pi)}\left(1 - \frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}\right) \qquad (2.3.15)$$

должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее двух нулей. Из формул (2.3.15) и (2.3.10) следует, что $\varphi_1'(0) = \varphi_1'(1) = 0$. Перепишем (2.3.15) в более удобном для исследования виде

$$\varphi_1'(\mu) = \alpha\mu^{\alpha-1} - \alpha\left(1 - \frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\mu\pi}\Big[\pi\mu^{\alpha} - \mu\pi + \sin\mu\pi\Big] := \frac{\alpha}{\mu\pi}\varphi_2(\mu).$$

В силу (2.3.15), функция

$$\varphi_2(\mu) = \pi\mu^{\alpha} - \mu\pi + \sin\mu\pi$$

на интервале $(0, 1)$ имеет не менее трёх нулей. Но тогда производная

$$\varphi_2'(\mu) = \alpha\pi\mu^{\alpha-1} - \pi + \pi\cos\mu\pi \qquad (2.3.16)$$

на этом же интервале имеет не менее двух нулей и, кроме того, в силу (2.3.10) $\varphi_2'(0) = 0$. Следовательно, производная второго порядка

$$\varphi_2''(\mu) = \pi\alpha(\alpha - 1)\mu^{\alpha-2} - \pi^2 \sin \mu\pi \tag{2.3.17}$$

на интервале $(0, 1)$ должна иметь не менее трёх различных нулей. Поскольку, как следует из (2.3.17), $\varphi_2''(0) = 0$, то производная третьего порядка

$$\varphi_2'''(\mu) = \pi\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\mu^{\alpha-3} - \pi^2 \cos \mu\pi \tag{2.3.18}$$

также обязана иметь на $(0, 1)$ не менее трёх различных нулей. Из формулы (2.3.18) получаем, что производная $\varphi_2'''(\mu)$ на интервале $(0, 1)$ является разностью двух функций, из которых первая принимает лишь положительные значения и является выпуклой вниз, а вторая является выпуклой вверх и положительной на интервале $(0, 1/2)$ и отрицательной и выпуклой вниз на интервале $(1/2, 1)$. Исходя из геометрических соображений, очевидно, что третья производная $\varphi_2'''(\mu)$ на $(0, 1)$ может иметь не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость первого неравенства в соотношении (2.3.12).

Докажем второе из неравенства (2.3.12). Второе из неравенства (2.3.12) перепишем в удобном для исследование виде

$$\mu^\alpha \geq \frac{2\mu\pi - \pi - Si(\pi)}{\pi - Si(\pi)} = \frac{(2\mu\pi - 2\pi) + \pi - Si(\pi)}{\pi - Si(\pi)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{\pi - Si(\pi)}(\mu - 1) + 1 = 2\alpha(\mu - 1) + 1$$

и введём в рассмотрение следующую вспомогательную функцию

$$\varphi_3(\mu) = \mu^\alpha - 2\alpha(\mu - 1) - 1 = \mu^\alpha - 2\mu\alpha + 2\alpha - 1.$$

Так как

$$\varphi_3(\mu) = \mu^{\alpha} - 2\mu^{\alpha/2}\alpha + \alpha^2 + \Big(2\mu^{\alpha/2}\alpha - 2\mu\alpha\Big) + \Big(2\alpha - 1 - \alpha^2\Big) =$$

$$= \Big(\mu^{\alpha/2} - \alpha\Big)^2 + 2\alpha\mu\Big(\mu^{(\alpha/2)-1} - 1\Big) - \Big(1 - \alpha\Big)^2 =$$

$$= \Big\{\Big(\mu^{\alpha/2} - \alpha\Big)^2 - \Big(1 - \alpha\Big)^2\Big\} + 2\alpha\mu\Big(\mu^{(\alpha/2)-1} - 1\Big) > 0$$

при всех $\mu > 1$, поскольку $\alpha > 2$ и, кроме того, $\varphi_3(1) = 0$, то функция $\varphi_3(\mu)$ на всём множестве $1 \le \mu < \infty$ положительна.

Теорема 2.3.2 полностью доказана.

Список литературы

1. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, №5. С.651-664.

2. Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды Матем. ин-та АН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

3. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

4. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

5. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

6. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2009. Т.86, №3. С.328-336.

7. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

8. Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reelen Veränderlichen // Der Sitzungsberichte der Königl. Akademie der Wissennschaften, 1885. S.633-639. P.789-805.

9. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука. 1977. 511 с.

10. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

11. Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math., 1936. V.37. P.107-110.

12. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка. 1982. 252 с.

13. Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchỵee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. de France. 1910. V.38. P.184-210.

14. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т.24, №6. С.785-792.

15. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

16. Мамадаёзов Н.М. Неравенства типа Джексона – Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. 2012. Т.55, №5. С.355-358.

17. Мамадаёзов Н.М. Неравенства типа Джексона – Стечкина и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // ДАН РТ. 2012. Т.55, №10. С.780-784.

18. Мамадаёзов Н.М. О наилучшем приближении дифференцируемых функций в L_2 // «*Современные проблемы математического анализа и теории функций*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 60-летию академика АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозова (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). С.88-89.

19. Мамадаёзов Н.М. Неравенства типа Джексона – Стечкина и значения поперечников некоторых функциональных классов в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2014. №1(154). С.33-42.

20. Мамадаёзов Н.М. Точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014 г. Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. С.52-54.

21. Мамадаёзов Н.М. Верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических функций в L_2 // Материалы международной научной конференции «*Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений*» (Душанбе, 27-28 апреля 2015). С.26-28.

22. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.

23. Рыбасенко В.Д., Рыбасенко И.Д. Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики. – М.: Наука. 1987. 416 с.

24. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка. 1981. 340 с.

25. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

26. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

27. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. 1976. 325 с.

28. Foucart S., Kryakin Yu. and Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 1999. Vol.65, №6. PP.157-179.

29. Чебышёв П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций (1859) // Собр. соч., Т.II. – М.-Л. Изд-во АН СССР. 1947. С.151-235.

30. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

31. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Приближение функций в среднем. Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

32. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

33. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т.43, №1. С.125-129.

34. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 // ДАН России. 2010. Т.435, №2. С.178-181.

35. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

36. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. 2012. V.164. Issue 1. P.869-878.

37. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. Tomus 38, №2. P.154-165.

38. Шабозов М.Ш., Мамадаёзов Н.М. О неравенства типа Джексона – Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций, задаваемых усреднёнными модулями непрерывности в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2012. №1(146). С.7-17.

39. Шабозов М.Ш., Мамадаёзов Н.М. О наилучшем приближении периодических функций и поперечники некоторых классов в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2012. №4(149). С.1-17.

40. Юсупов Г.А. Неравенства типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций из L_2 // Analysis Mathematica. 2014. V.40. Issue 1. P.69-81.