ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Мамадаёзова Назаралибека Мирзомамадовича

на тему «Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых функциональных классов в пространстве L_2», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность избранной темы

Диссертационная работа Н.М.Мамадаёзова посвящена решению конкретных экстремальных задач, связанных с: а) нахождением точных неравенств типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями дифференцируемых 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами и усреднёнными с весом модулями непрерывности высших порядков в пространстве $L_2[0, 2\pi]$; б) вычислением верхних граней аппроксимационных величин, характеризующих аппроксимативные свойства классов периодических дифференцируемых функций в L_2 и условия их совпадения; в) вычислением значения различных n-поперечников классов функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков.

В этом направлении исследований хорошо известны точные неравенства типа Джексона – Стечкина, доказанные Н.И.Черныхом:

$$E_{n-1}(f)_{L_2} \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\,\omega_m\left(f, \frac{2\pi}{n}\right)_{L_2}, \tag{1}$$

где $\omega_m(f,t)_{L_2}$ – модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$,. Исследования, связанные с точными неравенствами такого вида, развивались в разных направлениях. В частности, рассматривались следующие две задачи: 1) Найти точную константу в неравенстве

$$E_{n-1}(f)_{L_2} \leq \chi\,\omega_m\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{L_2}, \quad m \geq 2;$$

2) Определить наименьшее значение $\delta > 0$, такое, что для любой функции $f \in L_2$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{L_2} \leq \left(\sqrt{C_{2m}^m}\right)^{-1}\omega_m\left(f, \delta\right)_{L_2}, \quad m \geq 2.$$

Относительно первой задачи С.Н.Васильев и независимо от него А.И.Степанец и А.С.Сердюк показали, что для точной константы χ справедлива оценка $\chi \leq (\sqrt{m+1})/2^m$, а что же касается минимальной точки δ в неравенстве (1), то для неё С.Н.Васильев получил оценку $\delta \leq 7\pi/(4n)$. Для сравнения уместно привести неравенство, доказанное Х.Юссефом – учеником Л.В.Тайкова:

$$E_{n-1}(f)_{L_2} \leq \left(C_{2m}^m\right)^{-1/2}\omega_m\left(f, \frac{3\pi}{4n}\right)_{L_2}.$$

Дальнейшее исследование в этом направлении связано с получением точных неравенств типа Джексона – Стечкина для различных обобщённых модулей непрерывности. Здесь следует указать, например, на работы М.К.Потапова и его учеников, Шапиро и Бомана, С.Н.Васильева, А.И.Козко и А.В.Рождественского, В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной, М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова и многих других математиков.

Из недавних публикаций по этой тематике следует отметить работу *S.B. Vakarchuk, M.Sh. Shabozov and V.I. Zabutnaya "Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes" – Journal of Mathematical Sciences, 2015, vol. 206, April, №1, pp.97-114.*

Диссертационная работа Н.М.Мамадаёзова, несомненно, относится к важному и актуальному направлению теории приближения функций.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все утверждения, леммы и теоремы, научные выводы и рекомендации, сформулированные в работе, автором полностью обоснованы.

Достоверность и новизна полученных результатов

Полученные в диссертации научные результаты достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования Н.И.Черных, В.И.Бердышева, Л.В.Тайкова, В.И.Иванова, Н.Айнуллоева, А.Г.Бабенко, С.Б.Вакарчука, С.Н.Васильева, М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова, основные публикации которых приведены автором в списке цитированной литературы.

Следует отметить, что полученные результаты автора о поперечниках в пространстве L_2 и применяемые в диссертации методы оценок сверху отличаются оригинальностью и не укладываются в общепринятую схему отыскания значения поперечников в гильбертовых пространствах, изложенную в монографии А.Пинкуса.

Теоретическая и практическая значимость результатов

Основные результаты диссертации имеют существенное значение для развития современной теории приближения функций и могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, в НАН Украины, в Институте математики и механики УрО РАН, в Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни, в Хорогском и Худжандском госуниверситетах и других институтах и университетах.

Оценка содержания диссертации, её завершённость

Во введении приведены применяемые обозначения, формулируется общая постановка задачи, обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные полученные автором результаты.

В §1.1 приведены основные определения и вспомогательные факты, используемые в дальнейшем. В §1.2 получены точные неравенства, содержащие величины $E_{n-1}(f)$ – наилучшее полиномиальное приближение функции $f \in L_2$ и усреднённые значения модулей непрерывности первого порядка.

Одним из основных результатов этого параграфа является

Теорема 1.2.1. *Для любого $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, \pi/n]$ справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2r}E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du\right)dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{nh - Si(nh)},$$

где $Si(t) := \int\limits_0^t u^{-1}\sin u du$ *– интегральный синус.*

Эта теорема является своеобразным обобщением результата Л.В.Тайкова.

Представляет интерес изучение поведения величины наилучших приближений $E_{n-1}(f^{(r-s)})$ последовательных производных $f^{(r-s)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, r)$ тригонометрическими полиномами функций $f \in L_2^{(r)}$. Решение этой задачи получено в виде следующего утверждения, вытекающего из теоремы 1.2.1.

Следствие 1.2.1. *Для любого* $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *и* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2s} E_{n-1}^2(f^{(r-s)})}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, u) du \right) dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)}.$$

В этом же параграфе аналогичная задача решена в теореме 1.2.2, где весовая функция $\varphi(t) := \varphi_h(t) = 2h^{-2}(h - t)$, $0 \le t \le h$ появляется из содержательного смысла постановки задачи. Следует отметить, что в пространстве $C[0, 2\pi]$ такая задача с весовым функцией $\varphi(t)$ была решена в работе Фокарта, Крякина и Шадрина.

В третьем параграфе получены точные неравенства типа Джексона – Стечкина, содержащие наилучшие полиномиальные приближения и усреднённые значения модулей непрерывности произвольного порядка r-й производной функции из L_2. Основным результатом третьего параграфа является теорема 1.3.1, которая, в качестве следствия, содержит неравенства Джексона – Стечкина с точной константы:

$$E_{n-1}(f) \le \left\{ \frac{n}{2(\pi - Si(\pi))} \right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \omega_m(f^{(r)}, \pi/n), \quad r \ge m/2, \ m \in \mathbb{N}.$$

В четвёртом параграфе рассматриваются некоторые аппроксимационные величины, характеризующие аппроксимативные свойства класса $\mathfrak{M}$ дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}$, связанные с наилучшим приближением класса $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$, с наилучшим линейным приближением $\mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$, с верхними гранями $\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ норм функций из $\mathfrak{M}$, ортогональных $\mathcal{T}_{2n-1}$, для которых устанавливается сначала неравенство

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2},$$

а затем доказываются совпадения всех указанных величин для рассматриваемых классов функций. В качестве следствия из полученных результатов вытекают решения экстремальной задачи вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций.

Вторая глава диссертации посвящена отысканию точных значений n-поперечников классов функций. Исходя из результатов, полученных в параграфах 1.2 – 1.4 для классов функций $W^{(r)}(h)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$, определение которых приведено в четвёртом параграфе первой главы, найдены точные значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного n-поперечников при некоторых естественных ограничениях, налагаемых на мажоранты Φ и Ψ (теоремы 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.3.2). В качестве иллюстрации приводим

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта* Φ *при любых* $h \in (0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \ge \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2}{nh} \sin \dfrac{nh}{2} \right)^2, & \text{если } 0 < nh \le \pi, \\ 1 - \dfrac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если } nh > \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\right)=\lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\right)=$$

$$=\left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2-4)}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников. Множество мажорантных функций* Φ, *удовлетворяющих условию (2), не пусто. Все поперечники реализуются частными суммами* $S_{n-1}(f;x)$ *порядка* $n-1$ *ряда Фурье функции* $f\in L_2^{(r)}$.

Диссертационная работа Н.М.Мамадаёзова является самостоятельной, завершённой научной квалификационной работой.

Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования

Достоинствами диссертации являются следующие полученные в ней результаты:

1. Найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами и усреднёнными с весом модулями непрерывности m-го порядка в метрике пространства $L_2[0,2\pi]$.

2. Вычислены верхние грани аппроксимационных величин, характеризующие аппроксимативные свойства классов периодических дифференцируемых функций в L_2 : наилучшее приближение классов функций, наилучшие линейные приближение классов функций, а также верхние грани норм классов функций, ортогональных многочленами степени не более $n-1$ и условия совпадения всех перечисленных величин.

3. Вычислены точные значения различных n-поперечников классов функций, определяемых усреднёнными с весовыми функциями модулями непрерывности высших порядков.

Наиболее важными являются результаты о поперечниках, изложенные в главе 2. При выводе этих результатов используются неравенства, доказанные в главе 1, и результаты о наилучших полиномиальных приближениях из втором и третьем параграфах. Автор диссертации владеет современными методами теории функций, функционального анализа вариационного содержания и конструктивными методами теории приближений.

Автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеются некоторые замечания. Вот некоторые из них:

1. В 10-й строке сверху (стр. 67) написано „третья производная", а должно быть „производная третьего порядка".

2. В следствии 1.2.2 (стр. 8 и 34) написано „В условиях теоремы 1.2.2 имеет место равенство". Для лучшего восприятия следствия надо было написать „В условиях теоремы 1.2.2 при $h=\pi/n$ имеет место равенство". Аналогичные неточности имеются в следствии 1.4.1 (на стр. 12 и 46).

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней» по пунктам 10, 11 и 14

Основные результаты получены автором лично. Результаты, выдвигаемые для публичной защиты, свидетельствуют о личном вкладе автора в теорию приближений периодических дифференцируемых функций и могут быть использованы специалистами по теории функций и её применениям. Все теоремы и утверждения полностью обоснованы. Основные результаты диссертации опубликованы в восьми научных статьях, пять из которых входят в перечень ВАК МОН РФ, докладывались на научных семинарах по теории приближений в Хорогском госуниверситете (г.Хорог, 2010 -2015 гг.), на семинарах отдела теории функций Института математики АН РТ им. А.Джураева (г.Душанбе, 2010-2015 гг.) и на нескольких международных конференциях. Ссылки на использованные в диссертации источники имеются.

Считаю, что диссертационная работа Н.М.Мамадаёзова «Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых функциональных классов в пространстве L_2» удовлетворяет всем требованиям п.9 „Положения о присуждении учёных степеней", предъявляемым ВАК Российской Федерации к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент

Кандидат физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
заведующий кафедрой алгебры
и вычислительной математики
Худжандского государственного
университета им. Б.Гафурова
доцент

К.Тухлиев
01.04.2016 г.

Место работы: 735700, г. Худжанд,
проезд Мавлонбекова, 1.
Тел. раб.: (8-3422) 6-52-73.
Тел. моб.: (+992) 92-754-95-50.
E-mail: kamaridin.t54@mail.ru

Подпись доцента К.Тухлиева подтверждаю.
Начальник ОК ХГУ им. Б.Гафурова

З.Н. Ашрапова
01.04.2016 г.