«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор Таджикского национального
университета, академик АН РТ
_______________ Имомзода М.С.
30 марта 2016 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Мамадаёзова Назаралибека Мирзомамадовича на тему «Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых функциональных классов в пространстве L_2», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Общеизвестно, что понятие наилучшего приближения вошло в математический анализ благодаря работ П.Л.Чебышёва, который в 50-х годах девятнадцатого века рассмотрел задачу о полиноме, наименее уклоняющемся от заданной на конечном отрезке непрерывной функции. С тех пор развитие основных направлений теории аппроксимации тесно связано с этим понятием в различных нормированных пространствах. При этом, если в начале исследовалась наилучшее приближение индивидуальных функций, то начиная с 30-х годов прошлого столетия усилия математиков направлялся в сторону аппроксимации классов функций, обладающих определёнными дифференциально-разностными свойствами. Исследование этих задач привело к экстремальным задачам, решение которых привело к появлению точных констант. В 1936 г. А.Н.Колмогоров ввёл в теорию приближений понятие поперечника множества, известного теперь как поперечник по Колмогорова. При вычислении колмогоровского поперечника требуется найти наилучшее приближающее подпространства, которое реализует поперечник. К настоящему времени, кроме поперечника по Колмогорова, используются также поперечники по Александрову, по Гельфанду, по Бернштейну, линейные, проекционные, информационные и др.

Отметим, что в решение экстремальных задач теории аппроксимации функций весомый вклад внесли А.Н.Колмогоров, С.М.Никольский, С.Б.Стечкин, В.К.Дзядык, Н.П.Корнейчук, В.М.Тихомиров и их ученики и последователи. Наиболее тщательно и разносторонне экстремальные задачи исследовались для классов периодических функций, где достигнуты значительные успехи. В ряде важных задач решение доведено до точных констант. В этой связи следует указать на работы Н.П.Корнейчука, Н.И.Черныха, Л.В.Тайкова, А.А.Лигуна, А.Г.Бабенко, В.И.Иванова, С.Н.Васильева, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и др.

В диссертационной работе Мамадаёзова Назаралибека Мирзомамадовича получены новые результаты, обобщающие и продолжающие исследование вышеуказанных авторов, а именно рассматривается ряд экстремальных задач наилучших среднеквадратических приближений 2π-периодических функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами, получение точных неравенств типа Джексона – Стечкина, вычисление значений различных n-поперечников классов функций.

Диссертационная работа объёмом 73 страницы состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы из 40 наименований. При характеризации основных результатов будем пользоваться обозначениями, принятыми в диссертационной работе.

Во введении даётся постановка задач, освещается история вопроса, приводятся формулировки основных результатов.

Первая глава посвящена получению точных неравенств типа Джексона – Стечкина, связывающих величину наилучшего приближения дифференцируемых 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами с усреднёнными обобщёнными модулями непрерывности первого и m-го порядка в метрике пространства L_2.

В §1.1 приводятся основные определения, обозначения и вспомогательные факты, используемые в дальнейшем.

В §1.2 изложены точные неравенства, содержащие наилучшее полиномиальное приближение функции $f \in L_2$ с усреднённым с весом значением модулей непрерывности первого порядка, обобщающие ранее известные результаты Л.В.Тайкова. В этом же параграфе доказано точное неравенство между наилучшим приближением функций $f \in L_2$ и усреднённым с весом $\varphi_h := 2h^{-2}(h-t)$, $0 \le t \le h$, значением модуля непрерывности, являющегося своеобразным обобщением результата Фокарта, Крякина и Щадрина (теоремы 1.2.1 и 1.2.2, следствие 1.2.1 и 1.2.2).

В §1.3 получены точные оценки величины наилучшего среднеквадратического приближения функции $f \in L_2$, через усреднённое значение модуля непрерывности m-го порядка. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.3.1. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенству $0 < nh \le \pi$, справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)du\right) dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\}^{m/2}, \tag{1}$$

где $Si(h) = \int\limits_0^h t^{-1}\sin t dt$ – интегральный синус.

Отметим, что равенство (1) при $m = 1$ является обобщением результата Л.В.Тайкова, а при $m \ge 2$ ($m \in \mathbb{N}$) является обобщением результата С.Б.Вакарчука.

Отметим также, что из соотношения (1) при $h = \pi/n$ следует неравенство типа Джексона – Стечкина с явной константой:

$$E_{n-1}(f) \le \left\{\frac{n}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2} n^{-r}\,\omega_m(f^{(r)}, \pi/n).$$

В §1.4 рассматриваются некоторые аппроксимационные величины, характеризующие аппроксимативные свойства классов $W^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$ – периодических дифференцируемых функций $f \in L_2$, определяемых усреднёнными с весами значениями модулей непрерывности m-го порядка, ограниченными заданными мажорантами Φ и Ψ. Доказывается, что для указанных классов функций их наилучшее приближение, наилучшее линейное приближение, а также верхние грани норм функций из этих классов, ортогональных тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, совпадают.

Вторая глава посвящена вычислению точных значений бернштейновских, гельфандовских, колмогоровских, линейных и проекционных n-поперечников классов функций, введённых в четвёртом параграфе первой главы. В первом параграфе второй главы приводится определение всех рассматриваемых n-поперечников и связанные с поперечниками определения некоторых аппроксимационных характеристик.

При вычислении точных значений n-поперечников классов функций $W^{(r)}(h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$ используются полученные в четвёртом параграфе значения наилучших приближений, наилучших линейных приближений и верхних граней норм функций указанных классов. Эти значения дают верхние оценки соответствующих n-поперечников. При получении оценки снизу бернштейновского n-поперечника, равной оценке сверху, используется известная теорема В.М.Тихомирова. Следует отметить, что наиболее интересными результатами второй главы являются теоремы 2.2.2 и 2.3.2, в которых найдены точные значения n-поперечников классов $W^{(r)}(\Phi, h)$, $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Psi, h)$.

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта Φ при любых $h \in (0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2}{nh} \sin \dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{если } \ 0 < nh \leq \pi, \\ 1 - \dfrac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если } \ nh > \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_{2n-1}\left(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\right) = \left\{\frac{\pi^2}{2(\pi^2 - 4)} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2} \frac{1}{n^r},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников. Множество мажорантных функций Φ, удовлетворяющих условию (2), не пусто. Все поперечники реализуются частными суммами $S_{n-1}(f; x)$ порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

Диссертационная работа Н.М.Мамадаёзова является самостоятельной, завершённой научной квалификационной работой. Все утверждения, теоремы, леммы и следствия, сформулированные в работе, полностью обоснованы.

Приводимые в диссертации результаты, достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования Н.И.Черныха, Л.В.Тайкова, С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова, основные публикации которых по теме диссертации приведены автором в списке литературы. Результаты, полученные в диссертационной работе имеют существенное значение для развития современной теории приближения периодических функций и могут быть использованы специалистами, работающими в МИАН России, в Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан, в Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Воронежском, Хорогском и других институтах и университетах.

К числу достоинств диссертационной работы отнесём полученные в ней результаты, отмеченные нами выше. Наиболее интересными и важными являются результаты о поперечниках, изложенные во второй главе. Автор диссертации владеет современными методами функционального анализа и теории функций.

В целом автореферат и диссертация оформлены хорошо, однако в них имеется незначительное число пробелов, неточностей и опечаток:

1. В стр. 19, 20 диссертации в некоторых местах написано „$f(x) \in L_2$", а в других „$f \in L_2$". Следовало бы всюду написать единое обозначение „$f \in L_2$".

2. В стр. 9 автореферата, 7-я строка снизу вместо „$r \geq m/2$, $m \in \mathbb{N}$" следовало бы написать „$r \geq m/2$, $r, m \in \mathbb{N}$".

Отмеченные недостатки не снижают общую высокую оценку работы.

Автореферат соответствует требованиям ВАК МОН РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Результаты, выдвигаемые для публичной защиты, свидетельствуют о личном вкладе автора в теорию полиномиального приближения периодических функций и могут быть использованы специалистами по теории функций и её приложений.

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах, 5 из которых входят в перечень ВАК МОН РФ, докладывались на научных семинарах по экстремальным задачам теории приближений в Хорогском госуниверситете (2010-2015 гг.), на семинарах отдела теории функций ИМ АН РТ им. Д.Джураева (2010-2015 гг.) и на нескольких международных научных конференциях. Ссылки на авторов и на использованные в работе источники имеются.

Диссертация Мамадаёзова Назаралибека Мирзомамадовича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории функций и её применений, что соответствует требованиям п.9 Положения о присуждении учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв составил:
кандидат физико-математических наук,
специалист по 01.01.01. – Вещественный,
комплексный функциональный анализ, доцент
(e-mail: G_7777@mail.ru) Г.А.Юсупов

Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Таджикского национального университета (ТНУ) (протокол №3 от 25.03.2016 г.).

Заведующий кафедрой математического
анализа и теории функций ТНУ,
кандидат физико-математических наук
(e-mail: kadirov@mail.ru) Г.М.Кадыров

Подписи Г.А.Юсупова и Г.М.Кадырова заверяю.
Начальник ОК ТНУ С.Эмомали

Адрес ведущей организации:
Таджикский национальный университет,
734025, Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17.
Сайт: www.tgnu.tj; e-mail: tgnu@mail.tj
Тел. рабочий: (+992)372-21-77-11; Тел. моб. (+992)93-500-22-14