На правах рукописи

Мирпоччоев Фуркат Маруфджонович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ КРИВЫХ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е - 2 0 1 5

Работа выполнена в Худжандском государственном университете имени академика Б.Гафурова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович

Официальные оппоненты: **Кобельков Георгий Михайлович,**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, заведующий кафедрой вычислительной математики

Акобиршоев Мухиддин Отамшоевич,
кандидат физико-математических наук, Технологический университет Таджикистана, доцент кафедры высшей математики и информатики

Ведущая организация: Таджикский национальный университет

Защита состоится *15 мая 2015 г.* в *14*^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 047.007.02, при Институте математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул.Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А.Джураева, Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан "____" ____________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 Карим **У.Х. Каримов**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Общеизвестно, что при аппроксимации кривых более простыми функциями необходимо иметь их математическое описание. Кривые не всегда могут быть представлены явной функциональной зависимостью, а потому более общим способом аналитического задания кривых является параметрическое их представление в виде функций

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ 0 \le s \le L \tag{1}$$

некоторого параметра s в координатной системе Oxy. В том случае, когда параметрические уравнения кривых имеют сложный вид, естественно возникает задача гладкого приближения их более простыми кривыми с высокой точностью.

Для параметрически заданных кривых экстремальные задачи аппроксимационного характера изучены намного меньше, чем для явно задаваемых функций. Но все же некоторые вопросы аппроксимации параметрически заданных кривых изучались в работах Н.П.Корнейчука, В.Т.Мартынюка, Б.Сендова и В.А.Попова, Н.А.Назаренко, С.Б.Вакарчука, а также в известных монографиях Б.Сендова [1] и Ю.С.Завьялова, Б.И.Квасова, В.Л.Мирошниченко[2], где приведены порядковые оценки погрешности аппроксимации различными сплайнами. Поэтому естественно возникает экстремальная задача нахождения точных оценок аппроксимации параметрически заданных кривых в различных метриках на классах функций. В качестве аппарата приближения нами использованы интерполяционные ломаные. Одним из возможных приложений полученных результатов является отыскание точных оценок погрешности приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классах функций и кривых.

Вопрос оптимизации погрешности приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на заданных классах функций и кривых изучен значительно меньше. Сформулируем соответствующие экстремальные задачи в смысле С.М.Никольского[3] и А.Сарда[4].

[1] *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН. 1979. 372 с.
[2] *Завъялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.:Наука. 1980. 352 с.
[3] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука. 1979, 256 с.
[4] *Sard A.* Best approximate integration formulas, best approximate formulas. American J. of Math.- 1949.- LXXI - P. 80-91.

Рассмотрим задачу приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int_{\Gamma} q(M)f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k) + R_N(q; f; \Gamma) \tag{2}$$

в виде линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции $f(M_k)$, где $M_k \in \Gamma, k = \overline{1, N}$, весовой функции $q(M) \geq 0,\ M \in \Gamma,\ A_k$ – произвольные числовые коэффициенты, $R_N(q; f; \Gamma)$ – погрешность квадратурной формулы. Ясно, что для достижения высокой точности вычислений при заданном N нужно возможно лучшим образом воспользоваться коэффициентами A_k и узлами M_k.

Через $\mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим класс кривых Γ, лежащих в области $Q = \{(x, y) : x^2(s) + y^2(s) \leq L^2\}$. Хорошо известно, что параметрическое уравнение кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, отнесенной к длине дуги s как параметру в прямоугольной системе координат Oxy, имеет вид (1). Разобьем отрезок $[0, L]$ точками $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \leq L$ на частичные промежутки $[s_{k-1}, s_k]$ $(k = \overline{1, N})$, причем точка $s_k \in [0, L]$ соответствует точке $M_k \in \Gamma$. С учетом параметрических уравнений (1) кривой Γ квадратурную формулу (2) запишем в виде

$$\int_{0}^{L} q(x(s), y(s))f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(q; f; \Gamma). \tag{3}$$

Если обозначить $A = \{A_k\}_{k=1}^{N}$ – вектор коэффициентов, $S = \{s_k\}_{k=1}^{N}$ – вектор узлов формулы (3), то очевидно $R_N(q; f; \Gamma) := R_N(q; f; \Gamma; A, S)$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{f(x(s), y(s))\}$ – некоторый класс функций, определенных и интегрируемых на кривой Γ. Тогда для функции $f \in \mathfrak{M}$ и каждой кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ остаток формулы (3) имеет конкретное числовое значение, равное

$$R_N(q; f; \Gamma) = \int_{0}^{L} q(x(s), y(s))f(x(s), y(s))ds - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)).$$

Всюду далее, мы предполагаем, что квадратурная формула (3) точна на констант, что равносильно выполнению условия

$$\int_{\Gamma} q(M)ds = \int_{0}^{L} q(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k.$$

При фиксированном $N \geq 1$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество вектор коэффициентов и узлов (A, S), для которых формула (3) имеет смысл. Наибольшая погрешность, характеризующая точность приближенного вычисления (3) для всех функций $f \in \mathfrak{M}$ на заданной кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ при фиксированных векторах коэффициентов и узлов (A, S), равна величине

$$R_N(q; \mathfrak{M}; \Gamma; A, S) = \sup\{|R_N(q; f; \Gamma; A, S)| : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Положим также

$$R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) = \sup\{R_N(q; \mathfrak{M}; \Gamma; A, S) : \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\}.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\{R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) : (A, S) \in \mathcal{A}\} \qquad (4)$$

и указать вектор $(A^*, S^*) \in \mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань в (4), то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*, S^*)$$

Квадратурная формула (3) с векторами коэффициентов и узлов (A^*, S^*) дает наименьшую оценку погрешности и является *наилучшей* в смысле С.М.Никольского на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Аналогичным образом, если при фиксированном векторе узлов $S^* = \{s_k^*\}_{k=1}^N$ существует вектор коэффициентов $A^{**} = \{A_k^{**}\}_{k=1}^N$, который реализует нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L), S^*) = \inf\{R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S^*) : A \in \mathcal{A}\}, \qquad (5)$$

то квадратурная формула (3) называется *наилучшей по коэффициентам* на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Задачу (5) обычно называют задачей Сарда. Отметим, что для класса функций с ограниченным по норме градиентом в пространстве L_1, задача (4) решена С.Б.Вакарчуком [5]. Для некоторых классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности, задача Сарда решена Д.С.Сангмамадовым [6]. Другие результаты нам неизвестны.

[5] *Вакарчук С.Б.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т.38, №5. С.643-645.

[6] *Сангмамадов Д.С.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН РТ. 2011. Т.54, №10. С.801-806.

Диссертационная работа посвящена решению сформулированных выше задач для некоторых классов функций и классов кривых малой гладкости.

Цель работы:

1. Найти точную оценку погрешности параметрически заданных кривых от вписанных в них ломаных на классах $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ в различных метриках.

2. Найти точную оценку погрешности некоторых конкретных квадратурных формул приближенного вычисления криволинейного интеграла на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и классов кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

3. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом в норме пространствах L_1 и L_2.

4. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

5. Найти наилучшие квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным по норме пространства L_p, $1 \leq p \leq \infty$ градиентом

Метод исследования. Методическую основу работы составляют современные методы исследования экстремальных задач нахождения квадратурных формул и известный метод оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований:

1. Найдена точная оценка погрешности отклонения параметрически заданных кривых интерполяционными ломаными на классах кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

2. Найдена точная оценка погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольников и трапеций для приближенного вычисления криволинейных интегралов на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и классов кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

3. Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом в норме пространствах L_1 и L_2.

4. Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

5. Найдены наилучшие квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным по норме пространства L_p, $1 \le p \le \infty$ градиентом

Практическая ценность. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быть использованы при оценке приближения поверхностей и приближенном вычислении многомерных криволинейных интегралов первого рода на классах функций малой гладкости.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на ежегодных конференциях математических кафедр вузов Согдийской области (г.Худжанд, 2009 - 2012 гг.), на семинарах по вопросам теории приближения функций в Институте математики АН Республики Таджикистан (г.Душанбе, 2009-2012 гг.), на международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и их приложений“, (г.Душанбе, 23-24 июня 2010 г.) в Институте математики АН Республики Таджикистан, на республиканской научно-теоретической конференции „Актуальные проблемы современной математики“, посвященной 40-летию образования кафедры высшей математики ТНУ (г.Душанбе, 1-2 декабря 2011 г.), на международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций“ (г.Душанбе, 29-30 июня 2012 г.) в Институте математики АН Республики Таджикистан, на международной научной конференции „Современные проблемы математики и ее преподавания“ посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (г.Худжанд, 28-29 июня 2014 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в десяти статьях [1-10], из которых две статьи выполнены в соавторстве с научным руководителем М.Ш.Шабозовым, которому принадлежат постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 45 наименований и занимает 87 страницы машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты диссертационной работы. Приводим краткое содержание работы с указанием основных результатов.

В первом параграфе первой главы приводятся исторический обзор, основные определения и обозначения общего характера, а также определение классов функций. Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0,L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C[0,L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|),\ t', t'' \in [0,L],$$

где $\omega(t)$ – заданный на отрезке $[0,L]$ модуль непрерывности. Через $W^{(1)}H^\omega := W^{(1)}H^\omega[0,L]$ обозначим множество функций $\varphi(t) \in C^{(1)}[0,L]$, производные которых $\varphi'(t) \in H^\omega[0,L]$. В соответствии с приведенными определениями классов H^ω и $W^{(1)}H^\omega$ дадим определение классов кривых. Всюду далее через $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим класс кривых $\{\Gamma\}$, заданных параметрическими уравнениями (1), где $x(s) \in H^{\omega_1},\ y(s) \in H^{\omega_2}, \omega_1(t), \omega_2(t)$ – заданные на $[0,L]$ модули непрерывности. Аналогичным образом обозначим через $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ совокупность кривых, параметрические уравнения которых удовлетворяют условиям: $x(s) \in W^{(1)}H^{\omega_1},\ y(s) \in W^{(1)}H^{\omega_2}$.

В качестве меры близости кривой Γ от ломаной Γ_N, вписанной в Γ, будем рассматривать следующие расстояния между произвольными точками $P = P(x(s'), y(s')) \in \Gamma,\ Q = Q(x(s''), y(s'')) \in \Gamma_N,\ s', s'' \in [0,L]:$

1) расстояние Минковского

$$\rho_1(P,Q) = \max\{|x(s') - x(s'')|, |y(s') - y(s'')|\};$$

2) евклидово расстояние

$$\rho_2(P,Q) = \sqrt{(x(s') - x(s''))^2 + (y(s') - y(s''))^2};$$

3) хэммингово расстояние

$$\rho_3(P,Q) = |x(s') - x(s'')| + |y(s') - y(s'')|.$$

Через $\mathfrak{M}_\rho$ обозначим класс функций $f(x(s), y(s)), 0 \le s \le L$, заданных и определенных на множестве кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ (или $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$) и для любых двух точек $P(x(s'), y(s')), Q(x(s''), y(s'')) \in \Gamma,\ s', s'' \in [0, L]$ удовлетворяющих условию

$$|f(x(s'), y(s')) - f(x(s''), y(s''))| \le \rho(P,Q),$$

где $\rho(P,Q)$ – какое-нибудь расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

Если $\rho(P,Q)$ – некоторое расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^2$, то расстояние между кривыми

$$\Gamma : \begin{cases} x_1 = \varphi_1(s) \\ y_1 = \varphi_2(s) \end{cases} \text{ и } G : \begin{cases} x_2 = \psi_1(s) \\ y_2 = \psi_2(s) \end{cases} \quad (0 \le s \le L)$$

определяем как верхнюю грань

$$\rho(\Gamma, G) = \sup_{0 \le s \le L} \{\rho(P(\varphi_1(s), \varphi_2(s)),\ Q(\psi_1(s), \psi_2(s))) :\ P \in \Gamma, Q \in G\}, \qquad (6)$$

где точки $P = P(\varphi_1(s), \varphi_2(s)),\ Q = Q(\psi_1(s), \psi_2(s))$ соответствуют одному и тому же значению параметра s. Расстояние (6) в общем зависит от способа параметризации, но можно и указать расстояние, не зависимое от способа задания кривых. Таковым является, например, хаусдорфово расстояние, которое вводится следующим образом. Если, например, $\rho_2(P,Q)$ – евклидово расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^2$, то под хаусдорфовым расстоянием между кривыми $\Gamma, G \subset \mathbb{R}^2$ понимают величину

$$\rho_{2,H}(\Gamma, G) = \max\{\sup_{P \in \Gamma} \inf_{Q \in G} \rho_2(P,Q), \sup_{Q \in G} \inf_{P \in \Gamma} \rho_2(P,Q)\}.$$

Аналогично вводятся хаусдорфовы расстояния $\rho_{1,H}(\Gamma, G)$ и $\rho_{3,H}(\Gamma, G)$ соответственно для расстоянии Минковского и Хэмминга.

Пусть $\Delta_N = \{s_k : 0 \le s_1 < s_2 < ... < s_N \le L\}$ – произвольное разбиение отрезка $[0, L]$ и для координатных функций кривых $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ выполнены равенства

$$\varphi_i(s_k) = \psi_i(s_k),\ i = 1, 2;\ k = \overline{1, N}. \qquad (7)$$

Очевидно, что в этом случае любое из перечисленных расстояний между кривыми зависит от разбиения Δ_N. Если $\rho(\Gamma, G; \Delta_N)$ – какое-нибудь расстояние между заданными кривыми $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, для которых выполнено (7), то требуется найти величину

$$\inf_{\Delta_N} \rho(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \inf_{\Delta_N} \sup\{\rho(\Gamma, G; \Delta_N) : \Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\}.$$

Полагаем также $\overline{\Delta}_N : s_k := s_k^0 = (2k-1)L/(2N),\ k = \overline{1,N}$.

Сформулируем один из основных результатов второго параграфа.

Теорема 1.2.1. *Каковы бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i = 1,2;\ 0 \le t \le L)$, *справедливы равенства*

$$\inf_{\Delta_N} \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$

$$= 2 \cdot \rho_{1,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right), \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\},$$

$$\inf_{\Delta_N} \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$

$$= 2 \cdot \rho_{2,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2^2\left(\frac{L}{2N}\right)},$$

$$\inf_{\Delta_N} \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$

$$= 2 \cdot \rho_{3,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\}.$$

Зафиксируем разбиение отрезка $[0, L]$:

$$\delta_N := \{0 = s_0 < s_1 < ... < s_N = L\},\ h_k = s_k - s_{k-1},\ k = \overline{1,N}$$

и обозначим через $l(\Gamma, \delta_N)$– ломаную, совпадающую с кривой Γ в точках $M_k = M(x(s_k), y(s_k)),\ k = \overline{0,N}$, линейную между точками интерполяции. В случае равномерного разбиения $s_k = kL/N,\ k = \overline{0,N}$ вместо $l(\Gamma, \delta_N)$ будем писать $l_N(\Gamma)$. Множество всех плоских кривых, параметрические уравнения которых непрерывны или непрерывно дифференцируемы на $[0, L]$, обозначим через $\mathfrak{N}_L$. Если $\rho(\Gamma, l(\Gamma, \delta_N))$ – какое-нибудь расстояние между заданной кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_L$ и $l(\Gamma; \delta_N)$ – вписанная в нее ломаная, то требуется найти величину

$$\inf_{\delta_N} \rho(\mathfrak{N}_L, l(\Gamma; \delta_N)) = \inf_{\delta_N} \sup\{\rho(\Gamma; l(\Gamma; \delta_N)) : \Gamma \in \mathfrak{N}_L\}.$$

В принятых обозначениях имеет место следующая

Теорема 1.2.2. *Справедливы равенства*

$$\inf_{\delta_N}\rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma;\delta_N))=\rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l_N(\Gamma))=\max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right),\omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\},$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma;\delta_N))=\rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l_N(\Gamma))=\sqrt{\omega_1^2\left(\frac{L}{2N}\right)+\omega_2^2\left(\frac{L}{2N}\right)},$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma;\delta_N))=\rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l_N(\Gamma))=\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right)+\omega_2\left(\frac{L}{2N}\right).$$

В третьем параграфе первой главы изучается вопрос приближения кривых вписанных в них ломаными на классе кривых $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$. Центральным результатом третьего параграфа является следующая

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\omega_i(t)$ $(i=1,2)$ – *произвольные модули непрерывности на отрезке* $[0,L]$. *Тогда имеют место равенства*

$$\inf_{\delta_N}\rho_1(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\int\limits_0^{L/N}\max\left\{\omega_1\left(t\right),\omega_2\left(t\right)\right\}dt,$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_2(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\left\{\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_1\left(t\right)dt\right)^2+\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_2\left(t\right)dt\right)^2\right\}^{1/2},$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_3(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\int\limits_0^{L/N}\omega_1\left(t\right)dt+\frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\int\limits_0^{L/N}\omega_2\left(t\right)dt.$$

где $(2/3)\le\theta_{\omega_1,\omega_2}\le 1$. *Если* $\omega_i(t)$ $(i=1,2)$ – *выпуклые модули непрерывности, то* $\theta_{\omega_1,\omega_2}=1$.

Четвертый параграф первой главы посвящен приложению оценки приближения кривых ломаными для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода. В этом параграфе, используя теорему 1.2.2, вычислим верхнюю грань погрешности на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(i=1,2,3)$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ квадратурной формулы прямоугольников, имеющей вид

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds=\frac{L}{N}\cdot\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)+R_N(f;\Gamma). \quad (8)$$

Теорема 1.4.1. *Для точной оценки погрешности квадратурной формулы прямоугольников* (8) *с фиксированными векторами коэффициентов* $\mathcal{A}^0 = \{A_k^0 : A_k^0 = L/N\}_{k=1}^N$ *и векторами узлов* $S^0 = \{s_k^0 : s_k^0 = (2k-1)L/(2N)\}_{k=1}^N$ *на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *справедливы равенства*

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^0, S^0) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^0, S^0) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^0, S^0) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} (\omega_1(t) + \omega_2(t))dt.$$

Рассмотрим теперь применение теоремы 1.3.1 к вопросу нахождения точной оценки погрешности квадратурной формулы следующего вида

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + R_N(f; \Gamma). \qquad (9)$$

Теорема 1.4.2. *Для оценки погрешности формулы* (9) *с векторами коэффициентов* $\mathcal{A}^* = \{A_k^* : A_k^* = L/N\}$ *и узлов* $S^* = \{s_k^* : s_k^* = kL/N\}$ *на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *справедливы равенства*

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4} \int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4} \int\limits_0^{L/N} \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4} \int\limits_0^{L/N} (\omega_1(t) + \omega_2(t))dt,$$

где $\omega_i(t)$ $(i = 1, 2)$ *– произвольные выпуклые на* $[0, L]$ *модули непрерывности.*

Во второй главе диссертации рассматривается оптимизация приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых малой гладкости.

В первом параграфе второй главы решена задача Никольского для весовых квадратурных формул для класса $W^{(1,1)}L_1 := W^{(1,1)}L_1(Q; D)$ – функций $f(M) = f(x, y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$ и удовлетворяют условию

$$\|\operatorname{grad} f\|_{L_1(Q)} = \int\limits_0^L \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right| ds \le D.$$

Основным результатом первого параграфа второй главы является

Теорема 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида (3) наилучшей для классов функций $W^{(1,1)}L_1$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ является формула*

$$\int\limits_0^L q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s)) ds = \frac{F(0)}{N}\sum_{k=1}^N f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(q; f; \Gamma), \quad (10)$$

где $F(0) = \int\limits_0^L q(x(t), y(t))dt$ и узлы s_k определяются из системы уравнений

$$F(s_k) = \frac{2N - 2k + 1}{2N}F(0),\ (k = \overline{1, N}).$$

При этом для погрешности формулы (10) *на классах $W^{(1,1)}L_1$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$ справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N(q; W^{(1,1)}L_1; \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{F(0)}{2N} = \frac{1}{2N}\int\limits_0^L q(x(t), y(t))dt.$$

Теорема 2.1.1 является обобщением на случай криволинейных интегралов первого рода одного результата Ю.Г.Гиршовича [7], доказанного для регулярных интегралов. Из общего вида квадратурной формулы (10) видно, что это формула с равными коэффициентами, что облегчает ее применение

[7] *Гиршович Ю.М.* О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале // Изв. АН Эст.ССР, сер.физ.-мат.наук. 1975. Т.24. №1, С.121-123.

в практических целях. Из доказанной теоремы 2.1.1, в частности, вытекает следующее

Следствие 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (10) *с весовой функцией* $q(x(s), y(s)) = s^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$ *наилучшей для классов функций* $W^{(1,1)}L_1$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \frac{f(x(s), y(s))}{s^\gamma} ds = \frac{L^{1-\gamma}}{(1-\gamma)N} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} L\right), y\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} L\right)\right) + R_N(s^{-\gamma}; f; \Gamma), \quad (11)$$

При этом, точная оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы (11) *на классе функций* $W^{(1,1)}L_1$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathcal{E}_N\left(s^{-\gamma}; W^{(1,1)}L_1; \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{L^{1-\gamma}}{2(1-\gamma)N}, \ 0 < \gamma < 1.$$

Во втором параграфе второй главы найдены наилучшие весовые квадратурные формулы в смысле Сарда для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом в норме пространства L_2. Пусть задан класс $W^{(1,1)}L_2 := W^{(1,1)}L_2(Q; D)$, $D > 0$ функций $f(M) = f(x, y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и выполняется неравенство

$$||\operatorname{grad} f(x, y)||_{L_2(Q)} \le D.$$

Одними из основных теорем второго параграфа главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида (3) при* $q(x(t), y(t)) \equiv 1$ *и фиксированных векторах узлов* $S^* = \left\{s_k^* : \ s_k^* = \frac{(k-1)L}{N-1}\right\}_{k=1}^N$ *наилучшей по коэффициентам в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s)) ds = \frac{L}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), y\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+ \frac{L}{2(N-1)} f(x(L), y(L)) + R_N(f; \Gamma). \quad (12)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (12) *на всем классе функций* $W^{(1,1)}L_2$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(1; W^{(1,1)}L_2; \mathfrak{N}_Q(L), S^*\right) = \frac{DL^2}{2\sqrt{3}(N-1)}.$$

Теорема 2.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида (3) с весовой функцией* $q(x(t), y(t)) \equiv t$ *и фиксированных векторах узлов* $S^* = \left\{s_k^* : \ s_k^* = \frac{(k-1)L}{N-1}\right\}_{k=1}^{N}$ *наилучшей по коэффициентам в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L sf(x(s), y(s))ds = \frac{L^2}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}(k-1)f\left(x\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), y\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{1-L^2}{2} - \frac{(3N-2)L^2}{6(N-1)^2}\right)\cdot f(x(L), y(L)) + R_N(t; f; \Gamma). \qquad (13)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (13) *на всем классе функций* $W^{(1,1)}L_2$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(t; W^{(1,1)}L_2; \mathfrak{N}_Q(L), S^*\right) = \frac{DL^2}{4\sqrt{3}(N-1)}.$$

В третьем параграфе второй главы найдены наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. В предположении, что кривая $\Gamma \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, а функция $f \in \mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, решены задачи Сарда и Никольского для квадратурной формулы (3) и произвольной интегрируемой весовой функции $q(x(s), y(s)) \geq 0$ на отрезке $[0, L]$. Одним из основных результатов третьего параграфа второй главы является

Теорема 2.3.3. *Среди всех квадратурных формул вида (3) с весовой функцией* $q(x(s), y(s)) \geq 0$ *наилучшими формулами на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *являются формулы, узлы которых* $0 \leq s_0^0 < s_1^0 < ... < s_{N-1}^0 < s_N^0 \leq L$ *обращают в минимум соответственно выражения*

$$\mathcal{J}_1(s_0, s_1, ..., s_N) = \sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \max\{\omega_1(|s-s_k|), \omega_2(|s-s_k|)\}ds,$$

$$\mathcal{J}_2(s_0, s_1, ..., s_N) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|) + \omega_2^2(|s-s_k|)} ds,$$

$$\mathcal{J}_3(s_0, s_1, ..., s_N) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ (\omega_1(|s-s_k|) + \omega_2(|s-s_k|)) ds$$

с коэффициентами

$$A_k^0 = \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s), y(s)) ds, \ k = \overline{0, N},$$

где $\sigma_0^0 = 0$, $\sigma_k^0 = (s_{k-1}^0 + s_k^0)/2$, $k = \overline{1, N}$, $\sigma_{N+1}^0 = L$, *и наилучшие оценки остатка соответственно равны*

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s), y(s)) \max\{\omega_1(|s-s_k^0|), \omega_2(|s-s_k^0|)\} ds,$$

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s), y(s)) \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k^0|) + \omega_2^2(|s-s_k^0|)} ds,$$

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s), y(s)) \ (\omega_1(|s-s_k^0|) + \omega_2(|s-s_k^0|)) ds.$$

В частности, из теоремы 2.3.3 вытекает

Следствие 2.3.1. *Пусть* $q(x(s), y(s)) \equiv 1$. *Тогда на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}$ *наилучшая квадратурная формула (3) имеет вид*

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s)) ds = \frac{L}{N+1} \cdot \sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k+1)L}{2(N+1)}\right), y\left(\frac{(2k+1)L}{2(N+1)}\right)\right) + R_N(f; \Gamma). \tag{14}$$

При этом наилучшая оценка остатка формулы (14) *на указанных классах функций и кривых имеет вид*

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2})=2(N+1)\int\limits_0^{L/2(N+1)}\max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2})=2(N+1)\int\limits_0^{L/2(N+1)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2})=2(N+1)\int\limits_0^{L/2(N+1)}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

В конце данного параграфа рассмотрено наиболее часто встречающиеся в приложениях наилучшие квадратурные формулы с равноотстоящими узлами. Имеет место следующая

Теорема 2.3.5. *Пусть* $q(x(s),y(s))\geq 0$ – *произвольная интегрируемая функция. Тогда на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$ *и классах кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *наилучшая по коэффициентам при фиксированном векторе узлах* $S^*=\{s_k^*:\ \ s_k^*=kL/N\}_{k=0}^N$ *является формула, коэффициенты которой определяются равенствами*

$$A_k^0=\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))ds,\quad k=\overline{0,N};$$

где $\sigma_0=0,\ \sigma_k=(2k-1)L/2N,\ k=\overline{1,N},\ \sigma_{N+1}=L.$

При этом точная оценка остатка на указанных классах функций и кривых имеет вид

$$R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=\int\limits_0^{L/(2N)}\Big\{q(x(s),y(s))+q(x(L-s),y(L-s))+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left[q\left(x\left(s^*\right),y\left(s^*\right)\right)+q\left(x\left(s^{**}\right),y\left(s^{**}\right)\right)\right]\Big\}\max\left\{\omega_1(s),\omega_2(s)\right\}ds,$$

$$R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=\int\limits_0^{L/(2N)}\Big\{q(x(s),y(s))+q(x(L-s),y(L-s))+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left[q\left(x\left(s^{*}\right),y\left(s^{*}\right)\right)+q\left(x\left(s^{**}\right),y\left(s^{**}\right)\right)\right]\Big\}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=\int\limits_0^{L/(2N)}\Big\{q(x(s),y(s))+q(x(L-s),y(L-s))+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left[q\left(x\left(s^{*}\right),y\left(s^{*}\right)\right)+q\left(x\left(s^{**}\right),y\left(s^{**}\right)\right)\right]\Big\}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

где $s^*=\dfrac{k}{N}+s,\ \ s^{**}=\dfrac{k}{N}-s$

Из теоремы 2.3.5, в частности, при $q(x(s),y(s))\equiv 1$ получаем следующий наилучший вектор коэффициентов

$$A=\left\{A_0^0=A_N^0=\frac{L}{2N};\ A_k^0=\frac{L}{N},\ k=\overline{1,N-1}\right\}$$

и наилучшие остатки, соответственно, равные

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

Если же $q(x(s),y(s))=s$, то наилучший вектор коэффициентов имеет вид

$$A=\left\{A_0^0=\frac{L}{8N^2},\ A_k^0=\frac{L}{N^2},\ k=\overline{1,N-1};A_N^0=\frac{4N-1}{8N^2}L\right\}$$

и наилучшие остатки, соответственно, равны

$$R_N(s;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=N\int\limits_0^{L/(2N)}\max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$R_N(s;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=N\int\limits_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_N(s;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*) = N\int\limits_0^{L/(2N)}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

В последнем заключительном параграфе второй главы рассматривается задача отыскания наилучших квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов $W^{(1,1)}L_p := W^{(1,1)}L_p(Q;D), 1 \le p \le \infty$ - функций $f(x,y)$, у которых в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$, и удовлетворяют условию

$$\|\mathrm{grad}\, f(x,y)\|_{L_p(Q)} = \left(\int\limits_0^L \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|^p ds\right)^{1/p} \le D.$$

Приведем основной результат четвертого параграфа.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида (3) с весовой функцией* $q(x(s),y(s)) \equiv 1$ *для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций* $W^{(1,1)}L_p, 1 \le p \le \infty$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *наилучшей является квадратурная формула*

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) + R_N(f;\Gamma), \quad (15)$$

где $x = x(s), y = y(s)$ *- параметрические уравнения кривой* Γ, L *- ее длина. При этом для погрешности формулы* (15) *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N(W^{(1,1)}L_p;\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{DL^{1+\frac{1}{q}}}{2N\sqrt[q]{q+1}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Следует отметить, что утверждение теоремы 2.4.1 при $p = 1$ ранее было доказано С.Б.Вакарчуком [8]

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН Республики Таджикистан профессору М.Ш.Шабозову за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

[8] *Вакарчук С.Б.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т.38, №5. С.643-645.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

В изданиях из перечня ВАК:

1. *Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М.* Оптимизация приближенного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. 2010. Т.53, №6. С.415-419.

2. *Мирпоччоев Ф.М.* Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2010, №3(140), с.7-12.

3. *Мирпоччоев Ф.М.* О приближении гладких параметрически заданных кривых ломаными // ДАН РТ. 2011. Т.54, №12. С.963-968.

4. *Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М.* О приближении кривых и их применении в задаче численного интегрирования криволинейных интегралов первого рода // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2011, №4(141), с.7-12.

5. *Мирпоччоев Ф.М.* О приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №5. С.359-365.

6. *Мирпоччоев Ф.М.* К вопросу об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности // ДАН РТ. 2012. Т.55, №6. С.448-454.

7. *Мирпоччоев Ф.М.* Приближение гладких плоских кривых и их применение в задаче приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода // Известия ТулГУ. Естественные науки 2013 год, №1. С.13-27.

И других изданиях

8. *Мирпоччоев Ф.М.* Об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода. Материалы республиканской научно-теоритической конференции „Актуальные проблемы современной математики“ посвященной 40-летию образования кафедры высшей математики ТНУ (г.Душанбе, 1-2 декабря 2011 г.), С.52-56.

9. *Мирпоччоев Ф.М.* Приближение кривых и их применение в задаче приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода. Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций“ посвященной 60-летию академика Шабозова М.Ш. (г.Душанбе, 29-30 июня 2012г.), С.187-193.

10. *Мирпоччоев Ф.М.* Наилучшие квадратурные формулы с весом для криволинейных интегралов на некоторых классов функций и кривых. Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и ее преподавания“ посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (г.Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), С.75-78.