Худжандский государственный университет
имени академика Б.Гафурова

На правах рукописи
УДК 517.5

МИРПОЧЧОЕВ ФУРКАТ МАРУФДЖОНОВИЧ

Некоторые вопросы приближения кривых и оптимизация приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода

01.01.01. - математический анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик АН РТ,
доктор физ.-мат. наук,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е - 2 0 1 5

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е 4

Глава I. Приближение кривых на классах функций, задаваемых модулями непрерывности

§1.1. Определение классов кривых. Исторический обзор. 27

§1.2. Приближение кривых, заданных параметрическими уравнениями на классе кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ 30

§1.3. Приближение кривых вписанными в них ломаными на классе кривых $W^{(1.1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ 39

§1.4. Приложение оценки приближения кривых ломаными для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода. 44

Глава II. Оптимизация приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций

§2.1. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом в норме пространства L_1 52

§2.2. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом в норме пространства L_2 61

§2.3. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности 67

§2.4. Наилучшие квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов для классов функций $W^{(1,1)}L_p(Q;D)$ и классов кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ 78

Л и т е р а т у р а 82

Введение

Общеизвестно, что при аппроксимации кривых более простыми функциями необходимо иметь их математическое описание. Кривые не всегда могут быть представлены явной функциональной зависимостью, а потому более общим способом аналитического задания кривых является параметрическое их представление в виде функций

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ 0 \leq s \leq L \qquad (0.0.1)$$

некоторого параметра s в координатной системе Oxy. В том случае, когда параметрические уравнения кривых имеют сложный вид, естественно возникает задача гладкого приближения их более простыми кривыми с высокой точностью.

Для параметрически заданных кривых экстремальные задачи аппроксимационного характера изучены намного меньше, чем для явно задаваемых функций. Но все же некоторые вопросы аппроксимации параметрически заданных кривых изучались в работах Н.П.Корнейчука [12,13], В.Т.Мартынюка [20, 21], Б.Сендова и В.А.Попова [38], Н.А.Назаренко [31, 32], С.Б.Вакарчука [2–5], а также в известных монографиях Б.Сендова [37] и Ю.С.Завьялова, Б.И.Квасова, В.Л.Мирошниченко [11], где приведены порядковые оценки погрешности аппроксимации различными сплайнами. Поэтому естественно возникает экстремальная задача нахождения точных оценок аппроксимации параметрически заданных кривых в различных метриках на классах функций. В качестве аппарата приближения нами использованы интерполяционные ломаные. Одним из возможных приложений полученных результатов является отыскание точных оценок погрешности приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классах функций и кривых.

Вопрос оптимизации погрешности приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на заданных классах функций и кривых изучен значительно меньше. Сформулируем соответствующие экстремальные задачи в смысле С.М.Никольского [34] и А.Сарда [40].

Рассмотрим задачу приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{\Gamma} q(M)f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k) + R_N(q; f; \Gamma) \qquad (0.0.2)$$

в виде линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции $f(M_k)$, $M_k \in \Gamma, k = \overline{1, N}$, весовая функция $q(M) \geq 0$, $M \in \Gamma$, A_k – произвольные числовые коэффициенты, $R_N(q; f; \Gamma)$ – погрешность квадратурной формулы. Ясно, что для достижения высокой точности вычислений при заданном N нужно возможно лучшим образом воспользоваться коэффициентами A_k и узлами M_k.

Через $\mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим класс кривых Γ, лежащих в области $Q = \{(x, y) : x^2(s) + y^2(s) \leq L\}$. Хорошо известно, что параметрические уравнения кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, отнесенной к длине дуги s как параметру в прямоугольной системе координат Oxy, имеют вид (0.0.1). Разобьем отрезок $[0, L]$ точками $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \leq L$ на частичные промежутки $[s_{k-1}, s_k]$ $(k = \overline{1, N})$, причем точка $s_k \in [0, L]$ соответствует точке $M_k \in \Gamma$. С учетом параметрических уравнений (0.0.1) кривой Γ квадратурную формулу (0.0.2) запишем в виде

$$\int\limits_{0}^{L} q(x(s), y(s))f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(q; f; \Gamma). \qquad (0.0.3)$$

Если обозначить через $A = \{A_k\}_{k=1}^N$ – вектор коэффициентов, а через $S = \{s_k\}_{k=1}^N$ – вектор узлов формулы (0.0.3), то становиться очевидно что $R_N(q; f; \Gamma) := R_N(q; f; \Gamma; A, S)$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{f(x(s), y(s))\}$ – некоторый класс функций, определенных и интегрируемых на кривой Γ с параметрическими уравнениями (0.0.1). Тогда для функции $f \in \mathfrak{M}$ и каждой кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ остаток формулы (0.0.3) имеет конкретное числовое значение, равное

$$R_N(q; f; \Gamma) = \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s)) ds - \sum_{k=1}^N A_k f(x(s_k), y(s_k)).$$

Всюду далее мы предполагаем, что квадратурная формула (0.0.3) точна на постоянных функций $f(M) = const$, что равносильно выполнению условия

$$\int\limits_\Gamma q(M) = \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) ds = \sum_{k=1}^N A_k.$$

При фиксированном $N \geq 1$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов коэффициентов и узлов (A, S), для которых формула (0.0.3) имеет смысл. Наибольшая погрешность, характеризующая точность приближенного вычисления (0.0.3) для всех функций $f \in \mathfrak{M}$ на заданной кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ при фиксированных векторах коэффициентов и узлов (A, S), равна величине

$$R_N(q; \mathfrak{M}; \Gamma; A, S) = \sup\{|R_N(q; f; \Gamma; A, S)| : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Положим также

$$R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) = \sup\{R_N(q; \mathfrak{M}; \Gamma; A, S) : \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\}.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\{R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) : (A, S) \in \mathcal{A}\} \qquad (0.0.4)$$

и указать вектор $(A^*, S^*) \in \mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань в (0.0.4), то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*, S^*).$$

Квадратурная формула (0.0.3) с векторами коэффициентов и узлов (A^*, S^*) дает наименьшую оценку погрешности и в этом смысле является *наилучшей* в смысле С.М.Никольского на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Аналогичным образом, если при фиксированном векторе узлов $S^* = \{s_k^*\}_{k=1}^N$ существует вектор коэффициентов $A^{**} = \{A_k^{**}\}_{k=1}^N$, который реализует нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L), S^*) = \inf\{R_N(q; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S^*) : A \in \mathcal{A}\}, \qquad (0.0.5)$$

то квадратурная формула (0.0.3) называется *наилучшей по коэффициентам* на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Задачу (0.0.5) обычно называют задачей Сарда. Отметим, что для класса функций с ограниченным по норме пространством L_1 градиентом задача (0.0.4) решена С.Б.Вакарчуком [6]. Для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности, задача Сарда решена Д.С.Сангмамадовым [36]. Другие результаты нам неизвестны.

Диссертационная работа посвящена решению сформулированных выше задач для некоторых классов функций и классов кривых малой гладкости.

Основными целями данной работы является:

1. Найти точную оценку погрешности параметрически заданных кривых от вписанных в них ломаных на классах $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ в различных метриках.

2. Найти точную оценку погрешности некоторых конкретных квадратурных формул приближенного вычисления криволинейного интеграла на

классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и классах кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

3. Найти наилучшие квадратурные формулы с весом для вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом по норме пространства L_1 и L_2.

4. Найти наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

5. Найти наилучшие квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным по норме пространства L_p, $1 \le p \le \infty$ градиентом.

Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быть использованы при оценке приближения поверхностей и приближенном вычислении многомерных криволинейных интегралов первого рода на классах функций малой гладкости.

Основные результаты диссертации обсуждались на ежегодных конференциях математических кафедр вузов Согдийской области (г.Худжанд, 2009 - 2012 гг.), на семинарах по вопросам теории приближения функций в ИМ АН Республики Таджикистан, на международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и их приложений“, (г.Душанбе, 23-24 июня 2010 г.) в ИМ АН Республики Таджикистан, на научной конференции „Актуальные проблемы современной математики“, посвященной 40-летию образования кафедры высшей математики ТНУ (г.Душанбе, 1-2 декабря 2011 г.) в Таджикском национальном университете, на международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций“(г.Душанбе, 29-30 июня 2012 г.) в ИМ АН Республики

Таджикистан, на международной научной конференции „Современные проблемы математики и ее преподавания“ посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (г.Худжанд, 28-29 июня 2014 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в десяти статьях [23–30, 43, 44], из которых две статьи выполнены в соавторстве с научным руководителем М.Ш.Шабозовым, которому принадлежит постановка задач и выбор метода доказательства.

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 45 наименования и занимает 87 страницы машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты диссертационной работы. Приводим краткую характеристику работы с указанием основных результатов.

В первом параграфе первой главы приводятся исторический обзор, основные определения и обозначения общего характера, а также определение классов функций.

Всюду далее рассматриваются плоские кривые Γ с параметрическими уравнениями (0.0.1), через $M(x, y) := M(x(s), y(s))$ будем обозначать точку кривой, соответствующую значению параметра $s \in [0, L]$, координаты которой $(x(s), y(s))$ зависят от выбора прямоугольной системы координат xOy. Хорошо известно, что если в каждой точке $M(x(s), y(s))$ кривой (0.0.1), при любом значении параметра $s \in [0, L]$, существует касательная к кривой, то ее параметрические уравнения можно записать в виде

$$x(s) = \int\limits_0^s \cos\theta(t)dt + x(0),\ y(s) = \int\limits_0^s \sin\theta(t)dt + y(0),\ o \le s \le L,$$

где $\theta(s)$ – угол, образованный этой касательной в точке $(x(s), y(s))$ с положительным направлением оси Ox. Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t' - t''|),\ t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(t)$ – заданный на отрезке $[0, L]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая полуаддитивная на $[0, L]$ функция, $\omega(0) = 0$. Через $W^{(1)}H^\omega := W^{(1)}H^\omega[0, L]$ обозначим множество функций $\varphi(t) \in C^{(1)}[0, L]$, производные которых $\varphi'(t) \in H^\omega[0, L]$. В соответствии с приведенными определениями классов H^ω и $W^{(1)}H^\omega$ дадим определение классов кривых. Всюду далее через $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ обозначим совокупность плоских гладких кривых $\{\Gamma\}$, заданных параметрическими уравнениями (0.0.1), где $x(s) \in H^{\omega_1},\ y(s) \in H^{\omega_2}, \omega_1(t), \omega_2(t)$ – заданные на $[0, L]$ модули непрерывности. Аналогичным образом, через $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ обозначим совокупность кривых $\{\Gamma\}$, параметрические уравнения которых удовлетворяют условиям: $x(s) \in W^{(1)}H^{\omega_1},\ y(s) \in W^{(1)}H^{\omega_2}$.

Для нахождения точной оценки погрешности квадратурной формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода в следующем пункте нам потребуются точные оценки погрешности аппроксимации кривых $\Gamma \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ (или $\Gamma \in W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$) от вписанных в них ломаных Γ_N с вершинами в точках $M_k = M(x(kh), y(kh)) \in \Gamma,\ k = \overline{0, N};\ h = L/N,$

где L – длина кривой Γ. В качестве меры близости кривой Γ от ломаной Γ_N будем рассматривать следующие расстояния между произвольными точками $P = P(x(s'), y(s')) \in \Gamma,\ Q = Q(x(s''), y(s'')) \in \Gamma_N,\ s', s'' \in [0, L]:$

1) расстояние Минковского

$$\rho_1(P, Q) = \max\{|x(s') - x(s'')|, |y(s') - y(s'')|\};$$

2) евклидово расстояние

$$\rho_2(P, Q) = \sqrt{(x(s') - x(s''))^2 + (y(s') - y(s''))^2};$$

3) хэммингово расстояние

$$\rho_3(P, Q) = |x(s') - x(s'')| + |y(s') - y(s'')|.$$

Через $\mathfrak{M}_\rho$ обозначим класс функций $f(x(s), y(s)), 0 \le s \le L$, заданных и определенных на множестве кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ (или $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$) и для любых двух точек $P(x(s'), y(s')), Q(x(s''), y(s'')) \in \Gamma,\ s', s'' \in [0, L]$ удовлетворяющих условию

$$|f(x(s'), y(s')) - f(x(s''), y(s''))| \le \rho(P, Q),$$

где $\rho(P, Q)$ – какое-нибудь расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

Если $\rho(P, Q)$ – некоторое расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^2$, то расстояние между кривыми

$$\Gamma : \begin{cases} x_1 = \varphi_1(s) \\ y_1 = \varphi_2(s) \end{cases} \text{ и } G : \begin{cases} x_2 = \psi_1(s) \\ y_2 = \psi_2(s) \end{cases} \quad (0 \le s \le L),$$

определяем как верхнюю грань

$$\rho(\Gamma, Q) = \sup_{0 \le t \le L} \{\rho(P(\varphi_1(s), \varphi_2(s)),\ Q(\psi_1(s), \psi_2(s))) :\ P \in \Gamma, Q \in G\}, \quad (0.0.6)$$

где точки $P = P(\varphi_1(s), \varphi_2(s)),\ Q = Q(\psi_1(s), \psi_2(s))$ соответствуют одному и тому же значению параметра s. Расстояние (0.0.6) в общем зависит от способа параметризации, но можно и указать расстояние, не зависимое от способа задания кривых. Таковым является, например, хаусдорфово расстояние, которое вводится следующим образом. Если, например, $\rho_2(P, Q)$ – евклидово расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^2$, то под хаусдорфовым расстоянием между кривыми $\Gamma, G \subset \mathbb{R}^2$ понимают величину

$$\rho_{2,H}(\Gamma, G) = \max\{\sup_{P\in\Gamma}\inf_{Q\in G}\rho_2(P, Q), \sup_{Q\in G}\inf_{P\in\Gamma}\rho_2(P, Q)\}.$$

Аналогично вводятся хаусдорфовы расстояния $\rho_{1,H}(\Gamma, G)$ и $\rho_{3,H}(\Gamma, G)$ соответственно для расстояний Минковского и Хэмминга.

Очевидно, что для кривых Γ и G, определенных параметрическими уравнениями в (0.0.1), при любом способе параметризации выполняется неравенство $\rho_{i,H}(\Gamma, G) \leq \rho_i(\Gamma, G),\ i = 1, 2, 3.$

Пусть $\Delta_N = \{s_k : 0 \leq s_1 < s_2 < ...s_N \leq L\}$ – произвольное разбиение отрезка $[0, L]$ и для координатных функций кривых $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ выполнены равенства

$$\varphi_i(s_k) = \psi_i(s_k),\ i = 1, 2;\ k = \overline{1, N}. \qquad (0.0.7)$$

Условие (0.0.7) означает, что кривые $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ пересекаются в N точках s_k разбиения Δ_N отрезка $[0, L]$. Таким образом, если обозначить $P(s) := P(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) \in \Gamma,\ Q(s) := Q(\psi_1(s), \psi_2(s)) \in G$ – точки, определяемые одними и теми же значениями параметра s, то точки

$$P(s_k) := P(\varphi_1(s_k), \varphi_2(s_k)) \ \text{ и } \ Q(s_k) := Q(\psi_1(s_k), \psi_2(s_k)),\ k = \overline{1, N}$$

совпадают. Очевидно, что в этом случае любое из перечисленных выше расстояний между кривыми зависит от разбиения Δ_N. Если $\rho(\Gamma, G; \Delta_N)$ – какое-нибудь расстояние между заданными кривыми $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, для которых выполняются равенства (0.0.7), то требуется найти величину

$$\inf_{\Delta_N} \rho(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \inf_{\Delta_N} \sup\{\rho(\Gamma, G; \Delta_N) : \Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\}.$$

Полагаем также $\overline{\Delta}_N : s_k := s_k^0 = (2k-1)L/(2N),\ k = \overline{1, N}$.

Одним из основных результатов второго параграфа является

Теорема 1.2.1. *Каковы бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i = 1, 2;\ 0 \le t \le L)$, *справедливы равенства*

$$\inf_{\Delta_N} \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$
$$= 2 \cdot \rho_{1,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right), \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\},$$
$$\inf_{\Delta_N} \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$
$$= 2 \cdot \rho_{2,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2^2\left(\frac{L}{2N}\right)},$$
$$\inf_{\Delta_N} \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$
$$= 2 \cdot \rho_{3,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\}.$$

Зафиксируем разбиение отрезка $[0, L]$:

$$\delta_N := \{0 = s_0 < s_1 < ... < s_N = L\},\ h_k = s_k - s_{k-1},\ k = \overline{1, N} \qquad (0.0.8)$$

и обозначим через $l(\Gamma, \delta_N)$ – ломаную, совпадающую с кривой Γ в точках $M_k = M(x(s_k), y(s_k)),\ k = \overline{0, N}$, линейную между точками интерполяции. В случае равномерного разбиения $s_k = kL/N,\ k = \overline{0, N}$ вместо $l(\Gamma, \delta_N)$ будем писать $l_N(\Gamma)$. Очевидно, что разбиением (0.0.8) кривую Γ разобьем на N частей точками $M_k = M(x(s_k), y(s_k))$ и, соединив последовательно точки $M_0, M_1, ..., M_N$ отрезками прямых, получим ломаную $l(\Gamma, \delta_N)$, вписанную в Г. Параметрические звенья ломаной, стягивающей дугу $M_k M_{k+1}$ $(k = \overline{0, N-1})$, имеют вид

$$\tilde{x}(s) = x_k + h_k^{-1}(s - s_k) \cdot (x_{k+1} - x_k),$$

$$\tilde{y}(s) = y_k + h_k^{-1}(s - s_k) \cdot (y_{k+1} - y_k),$$

где $s_k \leq s \leq \ s_{k+1},\ h_k = s_{k+1} - s_k, x_k = x(s_k), y_k = y(s_k)$. При этом предполагается, что точки $P(x(s), y(s)) \in M_k M_{k+1}$ и $Q(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \in \overline{M_k M}_{k+1}$ соответствуют одному и тому же значению параметра $s \in [s_k, s_{k+1}]$.

Всюду далее множество всех плоских кривых, параметрические уравнения которых непрерывны или непрерывно дифференцируемы на $[0, L]$, обозначим через $\mathfrak{N}_L$. Если $\rho(\Gamma, l(\Gamma, \delta_N))$ – какое-нибудь расстояние между заданной кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_L$, а $l(\Gamma; \delta_N)$ – вписанная в нее ломаная, то требуется найти величину

$$\inf_{\delta_N} \rho(\mathfrak{N}_L, l(\Gamma; \delta_N)) = \inf_{\delta_N} \sup\{\rho(\Gamma; l(\Gamma; \delta_N)) : \Gamma \in \mathfrak{N}_L\}.$$

В принятых обозначениях имеет место следующая

Теорема 1.2.2. *Справедливы равенства*

$$\inf_{\delta_N} \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma; \delta_N)) = \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l_N(\Gamma)) = \max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right), \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\},$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma; \delta_N)) = \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l_N(\Gamma)) = \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2^2\left(\frac{L}{2N}\right)},$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma; \delta_N)) = \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l_N(\Gamma)) = \omega_1\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right).$$

В третьем параграфе первой главы изучаются приближения кривых вписанных в них ломаными на классе кривых $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.3.1. *Пусть $\omega_i(t)$ $(i=1,2)$ – выпуклые на [0,L] модули непрерывности. Тогда имеют место равенства*

$$\inf_{\delta_N}\rho_1(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{1}{4}\int\limits_0^{L/N}\max\left\{\omega_1\left(t\right),\omega_2\left(t\right)\right\}dt,$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_2(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{1}{4}\left\{\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_1\left(t\right)dt\right)^2+\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_2\left(t\right)dt\right)^2\right\}^{1/2},$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_3(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{1}{4}\int\limits_0^{L/N}\omega_1\left(t\right)dt+\frac{1}{4}\int\limits_0^{L/N}\omega_2\left(t\right)dt.$$

Если же $\omega_i(t)$ $(i=1,2)$ – произвольные модули непрерывности, то имеют место равенства

$$\inf_{\delta_N}\rho_1(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\int\limits_0^{L/N}\max\left\{\omega_1\left(t\right),\omega_2\left(t\right)\right\}dt,$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_2(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\left\{\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_1\left(t\right)dt\right)^2+\left(\int\limits_0^{L/N}\omega_2\left(t\right)dt\right)^2\right\}^{1/2},$$

$$\inf_{\delta_N}\rho_3(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};l(\Gamma,\delta_N))=\frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\int\limits_0^{L/N}(\omega_1\left(t\right)+\omega_2\left(t\right))dt,$$

где $(2/3)\leq\theta_{\omega_1,\omega_2}\leq 1$.

Четвертый параграф первой главы посвящен приложению оценки приближения кривых ломаными для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода, а именно, требуется вычислить верхнюю грань погрешности на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ для квадратурной формулы прямоугольников, имеющей вид

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \tag{0.0.9}$$

Используя технику доказательства теоремы 1.2.2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.4.1. *Для точной оценки погрешности квадратурной формулы прямоугольников* (0.0.3) *с фиксированными векторами коэффициентов* $\mathcal{A}^0 = \{A_k^0 : A_k^0 = L/N\}_{k=1}^N$ *и векторами узлов* $S^0 = \{s_k^0 : s_k^0 = (2k-1)L/(2N)\}_{k=1}^N$ *на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *справедливы равенства*

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^0, S^0) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^0, S^0) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^0, S^0) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} (\omega_1(t) + \omega_2(t))dt.$$

Рассмотрим теперь применение теоремы 1.3.1 к вопросу нахождения точной оценки погрешности квадратурной формулы следующего вида

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \tag{0.0.10}$$

Теорема 1.4.2. *Для оценки погрешности формулы* (0.0.10) *с векторами коэффициентов* $\mathcal{A}^* = \{A_k^* : A_k^* = L/N\}_{k=1}^N$ *и узлов* $S^* = \{s_k^* : s_k^* = kL/N\}_{k=1}^N$

на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *справедливы равенства*

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4}\int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4}\int\limits_0^{L/N} \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)}dt,$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4}\int\limits_0^{L/N} (\omega_1(t) + \omega_2(t))dt,$$

где $\omega_i(t)$ $(i = 1, 2)$ *– произвольные выпуклые на* $[0, L]$ *модули непрерывности.*

Во второй главе диссертации рассматриваются оптимизация приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых малой гладкости.

В первом параграфе второй главы решена задача Колмогорова-Никольского для класса $W_1^{(1,1)} := W^{(1,1)}L_1(Q; D)$ – функций $f(M) = f(x, y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и удовлетворяют условию

$$\|\mathrm{grad}\, f(x, y)\|_{L_1} = \int\limits_0^L \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right| ds \le D.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.3) *наилучшая для классов функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L q(x(s), y(s))f(x(s), y(s))ds = \frac{F(0)}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(q; f; \Gamma), \tag{0.0.11}$$

где $F(0) = \int\limits_0^L q(x(t),y(t))dt$ *и узлы* s_k *определяются из системы уравнений*

$$F(s_k) = \frac{2N-2k+1}{2N}F(0),\ (k=\overline{1,N}).$$

При этом для погрешности формулы (0.0.11) *на классах* $W_1^{(1,1)}$ *и* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N(q;W_1^{(1,1)};\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{D}{2N}F(0) = \frac{D}{2N}\int\limits_0^L q(x(t),y(t))dt.$$

Из общего вида квадратурной формулы (0.0.11) видно, что эта формула с равными коэффициентами, что облегчает ее применение в практических целях. Из доказанной теоремы 2.1.1 вытекает

Следствие 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.11) *с весовой функцией* $q(x(s),y(s)) = s^{-\gamma},\ 0<\gamma<1$ *наилучшей для классов функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \frac{f(x(s),y(s))}{s^\gamma}ds = \frac{L^{1-\gamma}}{(1-\gamma)N}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}L\right),y\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}L\right)\right)+R_N(s^{-\gamma};f;\Gamma).\quad (0.0.12)$$

При этом точная оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы (0.0.12) *на классе функций* $W_1^{(1,1)}$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathcal{E}_N\left(s^{-\gamma};W_1^{(1,1)};\mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{D\,L^{1-\gamma}}{2(1-\gamma)N},\ 0<\gamma<1.$$

Следствие 2.1.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.11) *с весовой функцией* $q(x(s),y(s)) = \sin\frac{\pi s}{L},\ 0\le s\le L$ *наилучшей для классов* *функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \sin\frac{\pi s}{L} f(x(s),y(s))ds = \frac{2L}{\pi N}\sum_{k=1}^{N} f(x(s_k^*),y(s_k^*)) + R_N(\sin\frac{\pi s}{L};f;\Gamma), \quad (0.0.13)$$

где узлы $s_k^* = \dfrac{L}{\pi}\arccos\left(1-\dfrac{2k-1}{N}\right)$, $k=\overline{1,N}$, *а* $x=x(s)$, $y=y(s)$ *– параметрические уравнения кривой* Γ. *При этом для погрешности квадратурной формулы* (0.0.13) *на классах функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\sin\frac{\pi s}{L}; W_1^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{D\,L}{N}.$$

В втором параграфе второй главы найдены наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом по норме пространства L_2.

Пусть задан класс $W^{(1)}L_2(Q;D)$, $D>0$ функции $f(M)=f(x,y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и выполняется неравенство $||\,\mathrm{grad}\, f(x,y)||_{L_2(Q)} \le D$.

Справедлива следующая

Теорема 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.3) *при* $q(x(t),y(t))\equiv 1$ *и фиксированных векторах узлов* $S^* = \left\{s_k^*:\ s_k^* = \frac{(k-1)L}{N-1}\right\}_{k=1}^N$ *наилучшей по коэффициентом в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \frac{L}{N-1}\cdot\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), y\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+\frac{L}{2(N-1)} f(x(L),y(L)) + R_N(f;\Gamma) \quad (0.0.14)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (0.0.14) *на всем классе функций* $W^{(1,1)}L_2(Q;D)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(1;W^{(1,1)}L_2(Q;D);\mathfrak{N}_Q(L),S^*\right)=\frac{DL^2}{2\sqrt{3}(N-1)}.$$

Теорема 2.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.3) *с весовой функцией* $q(x(t),y(t)) \equiv t$ *и фиксированным вектором узлов* $S^*=\left\{s_k^*:\ s_k^*=\frac{(k-1)L}{N-1}\right\}_{k=1}^N$ *наилучшей по коэффициентам в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L s\cdot f(x(s),y(s))ds=\frac{L^2}{N-1}\cdot\sum_{k=1}^{N-1}(k-1)f\left(x\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right),y\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right)+$$

$$+\left(\frac{1-L^2}{2}-\frac{(3N-2)L^2}{6(N-1)^2}\right)\cdot f(x(L),y(L))+R_N(t;f;\Gamma). \qquad (0.0.15)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (0.0.15) *на всем классе функций* $W^{(1,1)}L_2(Q;D)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(t;W^{(1,1)}L_2(Q;D);\mathfrak{N}_Q(L),S^*\right)=\frac{DL^2}{4\sqrt{3}(N-1)}.$$

В третьем параграфе второй главы найдены наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. В предположении, что кривая $\Gamma\in\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, а функция $f\in\mathfrak{M}_{\rho_i}$, где ρ_i – расстояния, определенные в параграфе 1.2, решены задачи Сарда и Никольского для квадратурной формулы (0.0.3) и произвольной интегрируемой весовой функции $q(x(s),y(s))\geq 0$ на отрезке $[0,L]$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\{s_k\}_{k=0}^N$ $(0 \le s_0 < s_1 < \dots < s_N \le L)$ *– произвольная система узлов из промежутка [0,L] и коэффициенты квадратурной формулы* (0.0.3) *имеют вид*

$$A_k^* = \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s))ds, \tag{0.0.16}$$

где $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k = (s_{k-1} + s_k)/2$, $k = \overline{1, N}$, $\sigma_{N+1} = L$. *Тогда справедливы равенства*

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \max\{\omega_1(|s-s_k|), \omega_2(|s-s_k|)\}ds,$$

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|) + \omega_2^2(|s-s_k|)}ds,$$

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \{\omega_1(|s-s_k|) + \omega_2(|s-s_k|)\}ds.$$

Теорема 2.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.3) *с весовой функцией* $q(x(s), y(s)) \ge 0$, *фиксированными узлами* $0 \le s_0 < s_1 < s_2 ... < s_{N-1} < s_N \le L$ *и произвольными коэффициентами* A_k, $k = \overline{0, N}$, *наилучшей квадратурной формулой на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *является формула с коэффициентами*

$$A_k^* = \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s))ds, \ k = \overline{0, N},$$

и наилучшей оценкой остатка, равной

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A^*, S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \max\{\omega_1(|s - s_k|), \omega_2(|s - s_k|)\} ds,$$

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A^*, S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \sqrt{\omega_1^2(|s - s_k|) + \omega_2^2(|s - s_k|)} ds,$$

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A^*, S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \{\omega_1(|s - s_k|) + \omega_2(|s - s_k|)\} ds.$$

Теорема 2.3.3. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.3) *с весовой функцией* $q(x(s), y(s)) \geq 0$ *наилучшими формулами на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *являются формулы, узлы которых* $0 \leq s_0^0 < s_1^0 < ... < s_{N-1}^0 < s_N^0 \leq L$ *обращают в минимум соответственно выражения*

$$\mathcal{J}_1(s_0, s_1, ..., s_N) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \max\{\omega_1(|s - s_k|), \omega_2(|s - s_k|)\} ds,$$

$$\mathcal{J}_2(s_0, s_1, ..., s_N) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ \sqrt{\omega_1^2(|s - s_k|) + \omega_2^2(|s - s_k|)} ds,$$

$$\mathcal{J}_3(s_0, s_1, ..., s_N) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \ (\omega_1(|s - s_k|) + \omega_2(|s - s_k|)) ds$$

с коэффициентами

$$A_k^0 = \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s), y(s)) ds, \ k = \overline{0, N},$$

где $\sigma_0^0 = 0,\ \sigma_k^0 = (s_{k-1}^0 + s_k^0)/2,\ k = \overline{1,N},\ \sigma_{N+1}^0 = L$, *и наилучшие оценки остатка соответственно равны*

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s)) \max\{\omega_1(|s-s_k^0|),\omega_2(|s-s_k^0|)\}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s))\sqrt{\omega_1^2(|s-s_k^0|)+\omega_2^2(|s-s_k^0|)}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s))\ (\omega_1(|s-s_k^0|)+\omega_2(|s-s_k^0|))ds.$$

Теорема 2.3.4. *Пусть* $q(x(s),y(s)) \equiv 1$. *Тогда на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1,2,3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *наилучшая квадратурная формула* (0.0.3) *имеет вид*

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \frac{L}{N+1}\cdot\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k+1)L}{2(N+1)}\right), y\left(\frac{(2k+1)L}{2(N+1)}\right)\right)+R_N(f;\Gamma). \tag{0.0.17}$$

При этом наилучшая оценка остатка формулы (0.0.17) *на указанных классах функций и кривых имеет вид*

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = 2(N+1)\int\limits_0^{L/2(N+1)} \max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = 2(N+1)\int\limits_0^{L/2(N+1)} \sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = 2(N+1)\int\limits_0^{L/2(N+1)} (\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

В конце данного параграфа рассмотрены наиболее часто встречающиеся в приложениях наилучшие квадратурные формулы с равноотстоящими узлами. Имеет место следующая

Теорема 2.3.5. *Пусть $q(x(s), y(s)) \geq 0$ – произвольная интегрируемая функция. Тогда на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и классах кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ наилучшая по коэффициентам при фиксированном векторе узлов $S^* = \{s_k^* : \ s_k^* = kL/N\}_{k=0}^N$ является формула, коэффициенты которой определяются равенствами*

$$A_k^0 = \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s))ds, \quad k = \overline{0, N},$$

где $\sigma_0 = 0, \ \sigma_k = (2k-1)L/2N, \ k = \overline{1, N}, \ \sigma_{N+1} = L.$

При этом точные оценки остаток на указанных классах функций и кривых имеют вид

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; S^*) = \int\limits_0^{L/(2N)} \Bigg\{ q(x(s), y(s)) + q(x(L-s), y(L-s)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[q\left(x\left(s^*\right), y\left(s^*\right)\right) + q\left(x\left(s^{**}\right), y\left(s^{**}\right)\right) \right] \Bigg\} \max\left\{\omega_1(s), \omega_2(s)\right\} ds,$$

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; S^*) = \int\limits_0^{L/(2N)} \Bigg\{ q(x(s), y(s)) + q(x(L-s), y(L-s)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[q\left(x\left(s^*\right), y\left(s^*\right)\right) + q\left(x\left(s^{**}\right), y\left(s^{**}\right)\right) \right] \Bigg\} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds,$$

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; S^*) = \int\limits_0^{L/(2N)} \Bigg\{ q(x(s), y(s)) + q(x(L-s), y(L-s)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left[q\left(x\left(s^*\right),y\left(s^*\right)\right)+q\left(x\left(s^{**}\right),y\left(s^{**}\right)\right)\right]\Bigg\}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

где $s^*=\dfrac{k}{N}+s,\ s^{**}=\dfrac{k}{N}-s$

Из этой теоремы, в частности, при $q(x(s),y(s))\equiv 1$ получаем следующий наилучший вектор коэффициентов

$$A=\left\{A_0^0=A_N^0=\frac{L}{2N};\ A_k^0=\frac{L}{N},\ k=\overline{1,N-1}\right\}$$

и наилучшие остатки, соответственно равные

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

Если же $q(x(s),y(s))=s$, то наилучший вектор коэффициентов имеет вид

$$A=\left\{A_0^0=\frac{1}{8N^2},\ A_k^0=\frac{k}{N^2},\ k=\overline{1,N-1};A_N^0=\frac{4N-1}{8N^2}\right\},$$

а наилучшие остатки, соответственно, равны

$$R_N(s;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=NL\int\limits_0^{L/(2N)}\max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$R_N(s;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=NL\int\limits_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_N(s;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=NL\int\limits_0^{L/(2N)}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

В последнем заключительном параграфе второй главы рассматривается задача отыскания наилучших квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций $W_p^{(1,1)} := W^{(1,1)}L_p(Q;D), 1 \le p \le \infty$ - функций $f(x,y)$, у которых в области Q существует частные производные $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$, и удовлетворяют условию

$$\|\mathrm{grad}\, f(x,y)\|_{L_p(Q)} = \left(\int\limits_0^L \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|^p ds\right)^{1/p} \le D.$$

Приведем основной результат четвертого параграфа.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.3) *с весовой функцией* $q(x(s),y(s)) \equiv 1$ *для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций* $W_p^{(1,1)}, 1 \le p \le \infty$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *наилучшей является квадратурная формула*

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) + R_N(f;\Gamma), \tag{0.0.18}$$

где $x = x(s), y = y(s)$ *- параметрические уравнения кривой* Γ, L *- ее длина. При этом для погрешности формулы* (0.0.18) *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N(W_p^{(1,1)};\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{DL^{1+\frac{1}{q}}}{2N\sqrt[q]{q+1}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Глава I

ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ, НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ЗАДАВАЕМЫХ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

§1.1. Определение классов кривых. Исторический обзор.

В этой главе будем изучать вопрос о точной оценке погрешности приближения плоских кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями

$$\Gamma: \ x = \varphi(s), \ y = \psi(s), \ 0 \leq s \leq L, \tag{1.1.1}$$

причем предполагается, что функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ на отрезке $[0, L]$ являются непрерывными, либо непрерывно-дифференцируемыми. Общеизвестно, что при работе с кривыми нужно иметь их математическое описание в виде конкретных формул. Однако кривые не всегда можно задавать в виде явной функциональной зависимости вида $y = f(x)$. Поэтому более общим способом задания кривых является параметрическое задание их координат в виде (1.1.1) некоторого параметра s в координатной системе $0xy$. Когда функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ имеют сложный аналитический вид, возникает задача их гладкого приближения с высокой степенью точности. Аппроксимации параметрически заданных кривых (1.1.1) в различных метриках рассматривались в известных монографиях Бл.Сендова [37], Б.С.Завьялова, Б.И.Квасова, В.Л.Мирошниченко [11], а также в работах В.Т.Мартынюка [20,21], Н.А.Назаренко [31,32], С.Б.Вакарчука [2–5], Бл.Сендова и В.А.Попова [38], В.А.Скороспелова [39], Н.П.Корнейчука [12, 13]. Тем не менее, экстремальные задачи аппроксимационного характера для параметрически заданных кривых и поверхностей исследованы значительно меньше, чем для явно задаваемых функций.

Здесь мы решим экстремальную задачу отклонения параметрически заданных кривых от вписанных в них ломаных на классах кривых, параметрические уравнение которых непрерывны и модуль непрерывности которых мажорируется заданными модулями непрерывности.

Всюду далее будем рассматривать кривые $\{\Gamma\}$ с параметрическими уравнениями (1.1.1), у которых функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ для любых двух точек $s', s'' \in [0, L]$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(s') - \varphi(s'')| \leq \omega_1(|s' - s''|),$$

$$|\psi(s') - \psi(s'')| \leq \omega_2(|s' - s''|),$$

где $\omega_i(\delta)$ $(i = 1, 2)$ – заданные для $0 \leq \delta \leq L$ модули непрерывности, то есть полуаддитивные, монотонно неубывающие функции такие, что $\omega_i(0) = 0$, $(i = 1, 2)$. Класс всех таких кривых в дальнейшем будем обозначать через

$$\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L].$$

Аналогичным образом, через

$$W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$$

обозначим класс кривых $\{\Gamma\}$, параметрические уравнения которых $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ на отрезке $[0, L]$ непрерывно-дифференцируемы и их производные $\varphi'(s)$ и $\psi'(s)$ для любых двух точек $s', s'' \in [0, L]$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi'(s') - \varphi'(s'')| \leq \omega_1(|s' - s''|),$$

$$|\psi'(s') - \psi'(s'')| \leq \omega_2(|s' - s''|).$$

Отметим, что в перечисленных выше работах [2–5], [20, 21], [31, 32] рассматривался вопрос о приближении параметрически заданных кривыми сплайн-кривых. В работах В.Т.Мартынюка [20, 21] и Н.А.Назаренко [31, 32] найдены точные оценки отклонения кривых от параметрических эрмитовых сплайнов в хаусдорфовой метрике. В остальных известных нам работах получены порядковые оценки погрешности приближения. Ряд точных оценок приближения плоских параметрически заданных кривых ломаными, параметрическими эрмитовыми сплайнами нечетных порядков в хаусдорфовой метрике (см., например, [7]), а также полиномиальными параметрическими кривыми найдены в работах [2–5]. Нами в этой главе получены точные оценки приближения параметрически заданных кривых вписанными в них ломаными линиями для классов кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$. Полученные точные оценки погрешности на указанных классах кривых выражаются через мажоранты модулей непрерывности $\omega(\varphi,\delta)$ и $\omega(\psi,\delta)$ параметрически заданных уравнений $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, либо через мажоранты модулей непрерывности $\omega(\varphi',\delta)$, $\omega(\psi',\delta)$ их производных $\varphi'(s)$ и $\psi'(s)$. Последние условия предполагают выполнение условий: $\omega(\varphi',\delta) \leq \omega_1(\delta)$, $\omega(\psi',\delta) \leq \omega_2(\delta)$, где $\omega_i(\delta)(i=1,2)$ – заданные на отрезке $[0,L]$ модули непрерывности. В ряде случаев полученные оценки погрешности отклонения кривых вписанными в них ломаными линиями для классов кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ являются окончательными. Полученные в параграфах 1.1.2 и 1.1.3 точные оценки погрешности на заданных классах кривых в завершающем четвертом параграфе данной главы применяются к экстремальной задаче отыскания точной оценки погрешности квадратурной формулы прямоугольников для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода.

§1.2. Приближение кривых заданных параметрическими уравнениями на классе кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$

В этом параграфе мы решим экстремальную задачу приближения плоских кривых параметрическими интерполяционными ломаными для некоторых классов функций малой гладкости и дадим применение полученных результатов к вопросу приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода. Полученные результаты в ряде случаев являются окончательными.

Всюду далее рассматриваются плоские кривые Γ с параметрическими уравнениями (1.1.1), где s – длина дуги; xOy – прямоугольная система координат на плоскости. Как и в случае явно задаваемых функций, через $M(x,y) := M(x(s), y(s))$ будем обозначать точку кривой, соответствующую значению параметра $s \in [0, L]$, координаты которой $(x(s), y(s))$ зависят от выбора прямоугольной системы координат xOy. Хорошо известно [42], что если в каждой точке $M(x(s), y(s))$ кривой (1.1.1), при любом значении параметра $s \in [0, L]$ существует касательная к кривой, то ее параметрические уравнения можно записать в виде

$$x(s) = \int_0^s \cos\theta(t)dt + x(0),\ \ y(s) = \int_0^s \sin\theta(t)dt + y(0),\ \ o \le s \le L,$$

где $\theta(s)$ угол, образованный этой касательной в точке $(x(s), y(s))$ с положительным направлением оси Ox. Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t' - t''|),\ \ t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(t)$ – заданный на отрезке $[0, L]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая полуаддитивная на $[0, L]$ функция, $\omega(0) = 0$. Через

$W^{(1)}H^\omega := W^{(1)}H^\omega[0,L]$ обозначим множество функций $\varphi(t) \in C^{(1)}[0,L]$, производные которых $\varphi'(t) \in H^\omega[0,L]$. В соответствии с приведенными определениями классов H^ω и $W^{(1)}H^\omega$ дадим определение классов кривых. Всюду далее через $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим совокупность плоских гладких кривых $\{\Gamma\}$, заданных параметрическими уравнениями (1.1.1), где $x(s) \in H^{\omega_1},\ y(s) \in H^{\omega_2}, \omega_1(t), \omega_2(t)$ – заданные на $[0,L]$ модули непрерывности. Аналогичным образом, через $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2} := W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим совокупность кривых $\{\Gamma\}$, параметрические уравнения которых удовлетворяют условиям: $x(s) \in W^{(1)}H^{\omega_1},\ y(s) \in W^{(1)}H^{\omega_2}$.

Для нахождения точной оценки погрешности квадратурной формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода в следующем пункте нам потребуются точные оценки погрешности аппроксимации кривых $\Gamma \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ (или $\Gamma \in W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$) от вписанных в них ломаных Γ_N с вершинами в точках $M_k = M(x(kh), y(kh)) \in \Gamma,\ k = \overline{0,N};\ h = L/N$, где L – длина кривой Γ. В качестве меры близости кривой Γ от ломаной Γ_N будем рассматривать следующие расстояния между произвольными точками $P = P(x(s'), y(s')) \in \Gamma,\ Q = Q(x(s''), y(s'')) \in \Gamma_N,\ s', s'' \in [0,L]:$

1) расстояние Минковского

$$\rho_1(P,Q) = \max\{|x(s') - x(s'')|, |y(s') - y(s'')|\};$$

2) евклидово расстояние

$$\rho_2(P,Q) = \sqrt{(x(s') - x(s''))^2 + (y(s') - y(s''))^2};$$

3) хэммингово расстояние

$$\rho_3(P,Q) = |x(s') - x(s'')| + |y(s') - y(s'')|.$$

Если $\rho(P,Q)$ – некоторое расстояние между точками $P,Q\in\mathbb{R}^2$, то, следуя [12], расстояние между кривыми

$$\Gamma:\begin{cases} x_1=\varphi_1(s)\\ y_1=\varphi_2(s)\end{cases} \text{ и } G:\begin{cases} x_2=\psi_1(s)\\ y_2=\psi_2(s)\end{cases} \quad (0\le s\le L), \qquad (1.2.1)$$

определяем как верхнюю грань

$$\rho(\Gamma,Q)=\sup_{0\le t\le L}\{\rho(P(\varphi_1(s),\varphi_2(s)),\ Q(\psi_1(s),\psi_2(s))):\ P\in\Gamma,Q\in G\}, \quad (1.2.2)$$

где точки $P=P(\varphi_1(s),\varphi_2(s)),\ Q=Q(\psi_1(s),\psi_2(s))$ соответствуют одному и тому же значению параметра s. Расстояние (1.2.2) в общем зависит от способа параметризации, но можно и указать расстояние, не зависимое от способа задания кривых. Таковым является, например, хаусдорфово расстояние [37], которое вводится следующим образом. Если, например, $\rho_2(P,Q)$ – евклидово расстояние между точками $P,Q\in\mathbb{R}^2$, то под хаусдорфовым расстоянием между кривыми $\Gamma,G\subset\mathbb{R}^2$ понимают величину

$$\rho_{2,H}(\Gamma,G)=\max\{\sup_{P\in\Gamma}\inf_{Q\in G}\rho_2(P,Q),\sup_{Q\in G}\inf_{P\in\Gamma}\rho_2(P,Q)\}. \qquad (1.2.3)$$

Аналогично вводятся хаусдорфовы расстояния $\rho_{1,H}(\Gamma,G)$ и $\rho_{3,H}(\Gamma,G)$ соответственно для расстоянии Минковского и Хэмминга.

Очевидно, что для кривых Γ и G, определенных параметрическими уравнениями в (1.2.1), при любом способе параметризации выполняется неравенство $\rho_{i,H}(\Gamma,G)\le\rho_i(\Gamma,G),\ i=1,2,3$.

Пусть $\Delta_N=\{s_k:0\le s_1<s_2<...s_N\le L\}$ – произвольное разбиение отрезка $[0,L]$ и для координатных функций кривых $\Gamma,G\in\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ выполнены равенства

$$\varphi_i(s_k)=\psi_i(s_k),\ i=1,2;\ k=\overline{1,N}. \qquad (1.2.4)$$

Условие (1.2.4) означает, что кривые $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ пересекаются в N точках s_k разбиения Δ_N отрезка $[0, L]$. Таким образом, если обозначить $P(s) := P(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) \in \Gamma$, $Q(s) := Q(\psi_1(s), \psi_2(s)) \in G$ – точки, определяемые одними и теми же значениями параметра s, то точки

$$P(s_k) := P(\varphi_1(s_k), \varphi_2(s_k)) \text{ и } Q(s_k) := Q(\psi_1(s_k), \psi_2(s_k)),\ k = \overline{1, N}$$

совпадают. Очевидно, что в этом случае любое из перечисленных выше расстояний между кривыми зависит от разбиения Δ_N. Если $\rho(\Gamma, G; \Delta_N)$ – какое-нибудь расстояние между заданными кривыми $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, для которых выполняются равенства (1.2.4), то требуется найти величину

$$\inf_{\Delta_N} \rho(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \inf_{\Delta_N} \sup\{\rho(\Gamma, G; \Delta_N) : \Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}\}.$$

Полагаем также $\overline{\Delta}_N : s_k := s_k^0 = (2k-1)L/(2N),\ k = \overline{1, N}$. В принятых обозначениях имеет место следующая

Теорема 1.2.1. *Каковы бы ни были модули непрерывности $\omega_i(t)$ $(i = 1, 2;\ 0 \le t \le L)$, справедливы равенства*

$$\inf_{\Delta_N} \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$

$$= 2 \cdot \rho_{1,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right), \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\},$$

$$\inf_{\Delta_N} \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$

$$= 2 \cdot \rho_{2,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2^2\left(\frac{L}{2N}\right)},$$

$$\inf_{\Delta_N} \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) =$$

$$= 2 \cdot \rho_{3,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2 \cdot \left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\}.$$

Доказательство. Не умаляя общности, докажем, например, утверждение теоремы для хэммингова расстояния ρ_3. В самом деле, если для координатных функций кривых $\Gamma, G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ выполняются равенства (1.2.4), то, пользуясь совпадением точек $P(s_k)$ и $Q(s_k)$, $k = \overline{1,N}$ для любых двух точек $P(s) \in \Gamma$ и $Q(s) \in G$, запишем

$$\rho_3(P(s), Q(s); \Delta_N) \leq \rho_3(P(s), P(s_k); \Delta_N) + \rho_3(Q(s), Q(s_k); \Delta_N) =$$

$$= |\varphi_1(s) - \varphi_1(s_k)| + |\varphi_2(s) - \varphi_2(s_k)| + |\psi_1(s) - \psi_1(s_k)| + |\psi_2(s) - \psi_2(s_k)| \leq$$

$$\leq 2\{\omega_1(|s - s_k|) + \omega_2(|s - s_k|)\}. \tag{1.2.5}$$

Оценка (1.2.5) точна для кривых $\Gamma_0, G_0 \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, координатные функции которых определяются равенствами

$$\varphi_i(s) = -\psi_i(s) = \omega_i(|s - s_k|),\ i = 1,2;\ 0 \leq s \leq L,\ s_k \in (0, L), \tag{1.2.6}$$

а потому из (1.2.5) следует, что

$$\inf_{\Delta_N} \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \inf_{\Delta_N} \rho_3(\Gamma_0, G_0; \Delta_N) =$$

$$= 2 \inf_{\Delta_N} \sup_{0 \leq s \leq L} \{\omega_1(|s - s_k|) + \omega_2(|s - s_k|)\}. \tag{1.2.7}$$

В работе [12] доказано, что стоящая в правой части величина (1.2.7) имеет минимальное значение при узлах $s_k := s_k^0 = (2k-1)L/(2N)$, $k = \overline{1,N}$, равное

$$\inf_{\Delta_N} \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \Delta_N) = \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \overline{\Delta}_N) = 2\{\omega_1(L/(2N)) + \omega_2(L/(2N))\}. \tag{1.2.8}$$

В случае хаусдорфового расстояния оценка (1.2.8) вдвое меньше. Действительно, если для кривых Γ и G из $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ соотношения (1.2.4) выполняются при $s_k = s_k^0$, то для любой точки $P(s_k^0) := P(\varphi_1(s_k^0), \varphi_2(s_k^0))$ будем иметь

$|s-s_k^0| \leq L/(2N)$, а так как $P(s_k^0)$ принадлежит также кривой $G \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, то мы имеем

$$\inf\{\rho_3(P(s),Q(s);\Delta_N) : Q(s)\in G\} \leq \rho_3(P(s),P(s_k);\Delta_N) \leq$$

$$\leq |\varphi_1(s)-\varphi_1(s_k^0)|+|\varphi_2(s)-\varphi_2(s_k^0)| \leq \omega_1(|s-s_k^0|)+\omega_2(|s-s_k^0|) \leq$$

$$\leq \omega_1(L/(2N))+\omega_2(L/(2N)). \tag{1.2.9}$$

Аналогичным образом получим

$$\inf\{\rho_3(P(s),Q(s);\Delta_N) : P(s)\in \Gamma\} \leq \rho_3(Q(s),Q(s_k);\Delta_N) \leq$$

$$\leq |\psi_1(s)-\psi_1(s_k^0)|+|\psi_2(s)-\psi_2(s_k^0)| \leq \omega_1(|s-s_k^0|)+\omega_2(|s-s_k^0|) \leq$$

$$\leq \omega_1(L/(2N))+\omega_2(L/(2N)), \tag{1.2.10}$$

причем знак равенства в неравенствах (1.2.9) и (1.2.10) будет иметь место для тех же кривых $\Gamma_0, G_0 \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ с координатными функциями (1.2.6), а это означает, что

$$\inf_{\Delta_N} \rho_{3,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};\Delta_N) = \rho_{3,H}(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};\overline{\Delta}_N) = \omega_1(L/(2N))+\omega_2(L/(2N)).$$

Этим же методом доказываются два других равенства в утверждении теоремы 1.2.1, чем и завершаем доказательство.

Замечание. Отметим, что значение $\rho_{2,H}(\Gamma,G)$, когда G – есть интерполяционная ломаная интерполирующей кривой Γ в N точках $s_k = kL/N$, ранее было получено в работе В.Т.Мартынюка [20].

Зафиксируем разбиение отрезка $[0,L]$:

$$\delta_N := \{0 = s_0 < s_1 < ... < s_N = L\},\ h_k = s_k - s_{k-1},\ k=\overline{1,N} \tag{1.2.11}$$

и обозначим через $l(\Gamma,\delta_N)$– ломаную, совпадающую с кривой Γ в точках $M_k = M(x(s_k),y(s_k))$, $k=\overline{0,N}$, линейную между точками интерполяции.

В случае равномерного разбиения $s_k = kL/N, \ k = \overline{0,N}$ вместо $l(\Gamma,\delta_N)$ будем писать $l_N(\Gamma)$. Очевидно, что разбиением (1.2.11) кривую Γ разобьем на N частей точками $M_k = M(x(s_k), y(s_k))$ и, соединив последовательно точки $M_0, M_1, ..., M_N$ отрезками прямых, получим ломаную $l(\Gamma,\delta_N)$, вписанную в Γ. Параметрические звенья ломаной, стягивающей дугу M_kM_{k+1} $(k = \overline{0, N-1})$, имеют вид

$$\tilde{x}(s) = x_k + h_k^{-1}(s - s_k) \cdot (x_{k+1} - x_k), \tag{1.2.12}$$

$$\tilde{y}(s) = y_k + h_k^{-1}(s - s_k) \cdot (y_{k+1} - y_k), \tag{1.2.13}$$

где $s_k \le s \le \ s_{k+1}, \ h_k = s_{k+1} - s_k, x_k = x(s_k), y_k = y(s_k)$. При этом предполагается, что точки $P(x(s), y(s)) \in M_kM_{k+1}$ и $Q(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \in \overline{M_kM}_{k+1}$ соответствуют одному и тому же значению параметра $s \in [s_k, s_{k+1}]$.

Всюду далее множество всех плоских кривых, параметрические уравнения которых непрерывны или непрерывно дифференцируемы на $[0, L]$, обозначим через $\mathfrak{N}_L$. Если $\rho(\Gamma, l(\Gamma,\delta_N))$ – какое-нибудь расстояние между заданной кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_L$, а $l(\Gamma;\delta_N)$ – вписанная в нее ломаная, то требуется найти величину

$$\inf_{\delta_N} \rho(\mathfrak{N}_L, l(\Gamma;\delta_N)) = \inf_{\delta_N} \sup\{\rho(\Gamma; l(\Gamma;\delta_N)) : \Gamma \in \mathfrak{N}_L\}. \tag{1.2.14}$$

В принятых обозначениях имеет место следующая

Теорема 1.2.2. *Справедливы равенства*

$$\inf_{\delta_N} \rho_1(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma;\delta_N)) = \max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right), \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\}, \tag{1.2.15}$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_2(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma;\delta_N)) = \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2^2\left(\frac{L}{2N}\right)},$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_3(\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma;\delta_N)) = \omega_1\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в случае приближения ломаными оценку погрешности можно локализовать на частичном промежутке разбиения, что позволяет точно оценить ее для всех вышеназванных расстояний. Не умаляя общности, докажем, например, равенство (1.2.15). Используя параметрическое представление (1.2.12) для значений $s \in [s_k, s_{k+1}]$, запишем

$$x(s) - \tilde{x}(s) = x(s) - x(s_k) - (s - s_k)h_k^{-1} \cdot (x(s_{k+1}) - x(s_k)) =$$

$$= (s_{k+1} - s)h_k^{-1} \cdot [x(s) - x(s_k)] + (s - s_k)h_k^{-1} \cdot [x(s_{k+1}) - x(s_k)],$$

откуда, оценивая по абсолютной величине, находим

$$|x(s) - \tilde{x}(s)| \le (s_{k+1} - s)h_k^{-1}\omega_1(s - s_k) + (s - s_k)h_k^{-1}\omega_1(s_{k+1} - s). \quad (1.2.16)$$

Полагая $s = s_k + th_k,\ 0 \le t \le 1$ и учитывая выпуклость $\omega_1(t)$ из (1.2.16), имеем

$$|x(s) - \tilde{x}(s)| \le \omega_1\left[2(s_{k+1} - s)(s - s_k)h_k^{-1}\right] = \omega_1\left[2t(1-t)h_k\right] \le \omega_1(h_k/2).$$

Точно так же получаем

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \le \omega_2\left[2(s_{k+1} - s)(s - s_k)h_k^{-1}\right] \le \omega_2(h_k/2).$$

Далее, для $s \in [s_k, s_{k+1}],\ k = \overline{0, N-1}$, положим

$$x_o(s) = \begin{cases} \omega_1(s - s_k),\ s_k \le s \le s_k + h_k/2, \\ \omega_1(s_{k+1} - s),\ s_k + h_k/2 \le s \le s_{k+1}; \end{cases} \quad (1.2.17)$$

$$y_o(s) = \begin{cases} \omega_2(s - s_k),\ s_k \le s \le s_k + h_k/2, \\ \omega_2(s_{k+1} - s),\ s_k + h_k/2 \le s \le s_{k+1}. \end{cases} \quad (1.2.18)$$

Очевидно, что $x_0 \in H^{\omega_1}$, $y_0 \in H^{\omega_2}$ и пусть $\Gamma_0 \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ гладкая плоская кривая, параметрические уравнение которой заданы равенствами (1.2.17) и (1.2.18). Для этой кривой имеем

$$\rho_1(\Gamma_0, l(\Gamma_0, \delta_N)) = \max\{\|x_0 - \tilde{x_0}\|_{C[0,L]}, \|y_0 - \tilde{y_0}\|_{C[0,L]}\} =$$

$$= \max\{\|x_0\|_{C[0,L]}, \|y_0\|_{C[0,L]}\} = \max\left\{\omega_1\left(\frac{h_k}{2}\right), \omega_2\left(\frac{h_k}{2}\right)\right\},$$

$$\rho_2(\Gamma_0, l(\Gamma_0, \delta_N)) = \sqrt{\|x_0 - \tilde{x_0}\|^2_{C[0,L]} + \|y_0 - \tilde{y_0}\|^2_{C[0,L]}} = \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{h_k}{2}\right) + \omega_2^2\left(\frac{h_k}{2}\right)},$$

$$\rho_3(\Gamma_0, l(\Gamma_0, \delta_N)) = \|x_0 - \tilde{x_0}\|_{C[0,L]} + \|y_0 - \tilde{y_0}\|_{C[0,L]} = \omega_1\left(\frac{h_k}{2}\right) + \omega_2\left(\frac{h_k}{2}\right).$$

При этом очевидно, что для соответствующих расстояний $\rho_i (i = 1, 2, 3)$ величины (1.2.14) имеем

$$\inf_{\delta_N} \rho_1(\Gamma_0; l(\Gamma_0, \delta_N)) = \inf_{\delta_N} \max\left\{\omega_1\left(\frac{h_k}{2}\right), \omega_2\left(\frac{h_k}{2}\right)\right\} =$$

$$= \max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{2N}\right), \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right)\right\} := \rho_1(\Gamma_0; l_N(\Gamma_0)),$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_2(\Gamma_0; l(\Gamma_0, \delta_N)) = \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2^2\left(\frac{L}{2N}\right)},$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_3(\Gamma_0; l(\Gamma_0, \delta_N)) = \omega_1\left(\frac{L}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{L}{2N}\right),$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

В завершении параграфа 1.2 заметим, что доказанные теоремы 1.2.1 и 1.2.2 являются обобщением некоторых утверждений из работы Н.П.Корнейчука [12, 13], доказанных им для других классов кривых в случае, когда кривая Γ принадлежит некоторому m-мерному области $\mathcal{D} \subset R^m$ $(m \geq 2,\ m \in N)$.

§1.3. Приближение кривых вписанными в них ломаными на классе кривых $W^{(1.1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$

Теорема 1.3.1. *Пусть $\omega_i(t)$ $(i = 1,2)$ – выпуклые на [0,L] модули непрерывности. Тогда имеют место равенства*

$$\inf_{\delta_N} \rho_1(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma,\delta_N)) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{L/N} \max\left\{\omega_1(t), \omega_2(t)\right\} dt,$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_2(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma,\delta_N)) = \frac{1}{4}\left\{\left(\int\limits_0^{L/N} \omega_1(t)\,dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^{L/N} \omega_2(t)\,dt\right)^2\right\}^{1/2},$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_3(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma,\delta_N)) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{L/N} \omega_1(t)\,dt + \frac{1}{4}\int\limits_0^{L/N} \omega_2(t)\,dt.$$

Если же $\omega_i(t)$ $(i = 1,2)$ – произвольные модули непрерывности, то имеют место равенства

$$\inf_{\delta_N} \rho_1(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma,\delta_N)) = \frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\int\limits_0^{L/N} \max\left\{\omega_1(t), \omega_2(t)\right\} dt,$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_2(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma,\delta_N)) = \frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\left\{\left(\int\limits_0^{L/N} \omega_1(t)\,dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^{L/N} \omega_2(t)\,dt\right)^2\right\}^{1/2},$$

$$\inf_{\delta_N} \rho_3(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma,\delta_N)) = \frac{\theta_{\omega_1,\omega_2}}{4}\int\limits_0^{L/N} (\omega_1(t) + \omega_2(t))dt,$$

где $(2/3) \le \theta_{\omega_1,\omega_2} \le 1$.

Доказательство. Если кривая $\Gamma \in W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, то, с учетом равенств (1.2.12) и (1.2.13) и предложения 5.2.13 из монографии [14], для любого разбиения отрезка $[0,L] : 0 = s_0 < s_1 < s_2 < ... < s_N = L,\ h_k = s_{k+1} - s_k$,

$k = \overline{0, N-1}$; запишем

$$|x(s) - \tilde{x}(s)| \leq (s_{k+1} - s)(s - s_k)h_k^{-2} \cdot \int\limits_0^{h_k} \omega_1(t)dt, \tag{1.3.1}$$

$$y(s) - \tilde{y}(s)| \leq (s_{k+1} - s)(s - s_k)h_k^{-2} \cdot \int\limits_0^{h_k} \omega_2(t)dt. \tag{1.3.2}$$

Пользуясь неравенствами (1.3.1) и (1.3.2), для вышеперечисленных расстояний 1) - 3) соответственно получаем оценки сверху:

$$\rho_1(\Gamma, l(\Gamma, \delta_N)) \leq \varphi(s; h_k, \delta_N) \max \left\{ \int\limits_0^{h_k} \omega_1(t)dt, \int\limits_0^{h_k} \omega_2(t)dt \right\}, \tag{1.3.3}$$

$$\rho_2(\Gamma, l(\Gamma, \delta_N)) \leq \varphi(s; h_k, \delta_N) \cdot \left\{ \left(\int\limits_0^{h_k} \omega_1(t)dt \right)^2 + \left(\int\limits_0^{h_k} \omega_2(t)dt \right)^2 \right\}^{1/2}, \tag{1.3.4}$$

$$\rho_3(\Gamma, l(\Gamma, \delta_N)) \leq \varphi(s; h_k, \delta_N) \cdot \left\{ \int\limits_0^{h_k} \omega_1(t)dt + \int\limits_0^{h_k} \omega_2(t)dt \right\}, \tag{1.3.5}$$

где $\varphi(s, h_k; \delta_N) = (s_{k+1} - s)(s - s_k) \cdot h_k^{-2},\ k = \overline{0, N-1}$. Если учесть, что

$$\max\{\varphi(s, h_k; \delta_N) : s_k \leq s \leq s_{k+1}\} = \varphi((s_k + s_{k+1})/2; h_k; \delta_N) = \frac{1}{4},$$

то, положив $|\delta_N| = \max h_k$ из неравенств (1.3.3)-(1.3.5), имеем:

$$\rho_1(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma, \delta_N)) \leq \frac{1}{4} \int\limits_0^{|\delta_N|} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt, \tag{1.3.6}$$

$$\rho_2(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma, \delta_N)) \leq \frac{1}{4} \left\{ \left(\int\limits_0^{|\delta_N|} \omega_1(t)dt \right)^2 + \left(\int\limits_0^{|\delta_N|} \omega_2(t)dt \right)^2 \right\}^{1/2}, \tag{1.3.7}$$

$$\rho_3(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; l(\Gamma,\delta_N)) \le \frac{1}{4}\left\{\int\limits_0^{|\delta_N|}\omega_1(t)dt + \int\limits_0^{|\delta_N|}\omega_2(t)dt\right\}. \qquad (1.3.8)$$

До сих пор мы на модули непрерывности $\omega_i(t)$ $(i=1,2)$ не накладывали никаких ограничений. В случае равномерного разбиения отрезка $[0,L]$, когда $|\delta_N| = L/N$, повторив схему рассуждений работы В.Н.Малоземова [19], легко доказать, что в неравенствах (1.3.6)-(1.3.8) для выпуклых модулей непрерывности имеет место знак равенства. Действительно, считая теперь, что $\omega_i(t)$ – выпуклые модули непрерывности, зададим на отрезке $[0,L/N]$ две функции $\varphi_i(t)$ $(i=1,2)$:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega_i\left(\dfrac{L}{N} - 2t\right),\ 0 \le t \le L/(2N), \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\omega_i\left(2t - \dfrac{L}{N}\right),\ L/(2N) \le t \le L/N, \end{cases} \qquad (1.3.9)$$

и для $t \in [L/N, 2L/N]$ положим $\varphi_i(t) = \varphi_i\left(\dfrac{2L}{N} - t\right)$ и распространим функции $\varphi_i(t)$ периодически с периодом $2L/N$ на всю ось. Для $s \in [0,L]$ определим экстремальную кривую Γ^* следующими параметрическими уравнениями

$$\Gamma^* : \begin{cases} x^*(s) = \displaystyle\int\limits_0^s \varphi_1(t)dt, \\[2ex] y^*(s) = \displaystyle\int\limits_0^s \varphi_2(t)dt, \end{cases} \qquad (1.3.10)$$

где функции $\varphi_i(t)$ определены в (1.3.9).

Легко проверить, что функции $x^*(s) \in W^{(1)}H^{\omega_1}, y^*(s) \in W^{(1)}H^{\omega_2}$, а потому $\Gamma^* \in W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$. Докажем что для Γ^* в неравенствах (1.3.6)-(1.3.8) имеет место знак равенства. Прежде всего покажем, что $x^*(kL/N) = y^*(kL/N) = 0$,

$k = \overline{0, N}$. Очевидно, что достаточно доказать, например, что $x^*(L/N) = y^*(L/N) = 0$. Имеем:

$$x^*(L/N) = \int\limits_0^{L/N} \varphi_1(t)dt = \int\limits_0^{L/(2N)} \varphi_1(t)dt + \int\limits_{L/(2N)}^{L/N} \varphi_1(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_1(\frac{L}{N} - 2t)dt - \frac{1}{2} \int\limits_{L/(2N)}^{L/N} \omega_1(2t - \frac{L}{N})dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \int\limits_{L/N}^{0} \omega_1(t)dt - \frac{1}{4} \int\limits_0^{L/N} \omega_1(t)dt = \frac{1}{4} \int\limits_0^{L/N} \omega_1(t)dt - \frac{1}{4} \int\limits_0^{L/N} \omega_1(t)dt = 0$$

Таким образом,

$$x^*(kL/N) = y^*(kL/N) = 0, \; k = \overline{0, N}, \tag{1.3.11}$$

но из последних равенств и (1.2.12)-(1.2.13) сразу следует, что

$$\|x^*(s) - \tilde{x}(s)\|_{C[o,L]} =$$

$$\left\| x^*(s) - x^*(kL/N) + \frac{N}{4} \cdot \left(s - \frac{kL}{N} \right) \cdot (x^*((k+1)L/N) - x^*(kL/N)) \right\|_{C[o,L]} =$$

$$= \|x^*(s)\|_{C[o,L]} = \left\| \int\limits_0^s \varphi_1(t)dt \right\|_{C[o,L]} = \int\limits_0^{L/(2N)} \varphi_1(t)dt.$$

Аналогичным образом получаем

$$\|y^*(s) - \tilde{y}(s)\|_{C[o,L]} = \int\limits_0^{L/(2N)} \varphi_2(t)dt,$$

а потому, например, для расстояния ρ_1 имеем:

$$\rho_1(\Gamma^*, l_N(\Gamma^*)) = \max\{\|x^* - \tilde{x}\|_{C[0,L]}, \|y^* - \tilde{y}\|_{C[0,L]}\} =$$

$$= \max\{\|x^*\|_{C[0,L]}, \|y^*\|_{C[0,L]}\} = \max \left\{ \left\| \int\limits_0^s \varphi_1(t)dt \right\|_{C[0,L]}, \left\| \int\limits_0^s \varphi_2(t)dt \right\|_{C[0,L]} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \max \left\{ \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_1 \left(\frac{L}{N} - 2t \right) dt, \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_2 \left(\frac{L}{N} - 2t \right) dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\} dt,$$

откуда и следует точность неравенства (1.3.6). Аналогичным образом доказывается точность неравенств (1.3.7) и (1.3.8). Приступая к доказательству второй части теоремы 1.3.1, без умаления общности, докажем утверждение, например, для расстояния ρ_1. Оценка сверху для $\rho_1(\Gamma, l_N(\Gamma))$ следует из неравенства (1.3.6). Для получения оценки снизу полагаем

$$\varphi_i^*(t) = \frac{2}{3} \varphi_i(t), \; i = 1, 2; \; 0 \le t \le L,$$

где $\varphi_i(t)$ определены в равенстве (1.3.9). Тогда легко проверить, что кривая

$$\Gamma^{**} : \begin{cases} x^{**}(s) = \int\limits_0^s \varphi_1^*(t) dt, & \\ & 0 \le s \le L \\ y^{**}(s) = \int\limits_0^s \varphi_2^*(t) dt & \end{cases}$$

принадлежит классу $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}$. Простое вычисление приводит нас к следующему неравенству

$$\rho_1(W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}; l(\Gamma, \delta_N)) \ge \rho_1(\Gamma^{**}, \Gamma_N^{**}) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\} dt = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\} dt \right).$$

Аналогичным образом доказываются два других утверждения второй части теоремы 1.3.1.

§1.4. Приложение оценки приближения кривых ломаными для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода

Пусть для приближенного вычисления криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds,$$

где Γ – некоторая спрямляемая кривая, функция $f(M) = f(x, y)$ определена и непрерывна вдоль кривой Γ, применена квадратурная формула

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=0}^{N} A_k f(M_k) + R_N(f; \Gamma). \tag{1.4.1}$$

Здесь $M_k \in \Gamma$ – произвольные точки-узлы, A_k – произвольные числовые коэффициенты, $R_N(f;\Gamma) := R_N(f;\Gamma, A_k, M_k)$ – погрешность формулы (1.4.1) на функцию $f(M)$. Согласно определению из монографии С.М.Никольского [34], сумму $\sum\limits_{k=0}^{N} A_k f(M_k)$, использующую линейные комбинации $N+1$ значений подынтегральной функции, будем называть квадратурной суммой, а $\{A_k\}$ и $\{M_k\}$ – соответственно коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1.4.1). Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление и положение точки $M(x, y) \in \Gamma$ может быть определено длиной дуги $s = AP$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда, как известно, кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \leq s \leq L,$$

а функция $f(M) = f(x, y)$, заданная в точках кривой Γ, сведется к сложной функции $f(x(s), y(s))$ от переменной s. Разобьем отрезок $[0, L]$ на N частичных отрезков $[s_{k-1}, s_k]$ точками $0 = s_0 < s_1 < ... < s_{N-1} < s_N = L$ и вычислим значения функции $f(x(s),y(s))$ в точках разбиения s_k. Поскольку в этом случае $M_k = M(x(s_k), y(s_k)$, то квадратурная формула (1.4.1) приобретает вид:

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x(s_k),y(s_k)) + R_N(f;\Gamma). \qquad (1.4.2)$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, интегрируемых на отрезке $[0,L]$, то для каждой функции этого класса остаток формулы (1.4.2) имеет вполне определенное значение

$$R_N(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds - \sum_{k=0}^{N} A_k f(x(s_k),y(s_k)).$$

При фиксированных векторах коэффициентов $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=0}^N$ и фиксированных векторах узлов $S = \{s_k : 0 = s_0 < s_1 < ... < s_{N-1} < s_N = L\}$ наилучшей оценкой остатка квадратурной формулы (1.4.2) на классе функций $\mathfrak{M}$ является верхняя грань

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma) = \sup\{|R_N(f;\Gamma)| : f \in \mathfrak{M}\}. \qquad (1.4.3)$$

Очевидно, что верхняя грань (1.4.3) зависит от выбора кривой Γ, от вектора коэффициентов $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=0}^N$ и узлов $S = \{s_k\}_{k=0}^N$, то есть

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma) = R_N(\mathfrak{M};\Gamma;\mathcal{A},S).$$

Далее, если $\mathfrak{N}_L$ означает класс кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, либо класс $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, то, кроме (1.4.3), еще требуется найти величину

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_L;\mathcal{A},S) = \sup\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;\mathcal{A},S) : \Gamma \in \mathfrak{N}_L\}. \qquad (1.4.4)$$

В этой заметке величину (1.4.4) вычислим для усложненной квадратурной формулы прямоугольников. С этой целью сначала конкретизируем класс функций $\mathfrak{M}$.

Через $\mathfrak{M}_\rho$ обозначим класс функций $f(x(s), y(s)), 0 \leq s \leq L$, заданных и определенных на множестве кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ (или $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$) и для любых двух точек $P(x(s'), y(s')), Q(x(s''), y(s'')) \in \Gamma,\ s', s'' \in [0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|f(x(s'), y(s')) - f(x(s''), y(s''))| \leq \rho(P, Q),$$

где $\rho(P, Q)$ – какое-нибудь расстояние между точками $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

Применим полученные в предыдущем пункте результаты к вопросу оценки погрешности приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(i = 1, 2, 3)$ и классах кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, задаваемых модулями непрерывности $\omega(t)$ $(i = 1, 2)$.

Вычислим верхнюю грань погрешности (1.4.4) на указанных классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(i = 1, 2, 3)$ и кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ для квадратурной формулы прямоугольников, имеющей вид

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f; \Gamma). \tag{1.4.5}$$

Теорема 1.4.1. *Для точной оценки погрешности квадратурной формулы прямоугольников* (1.4.5) *с фиксированными векторами коэффициентов* $\mathcal{A}^0 = \{A_k^0 : A_k^0 = L/N\}_{k=1}^N$ *и векторами узлов* $S^0 = \{s_k^0 : s_k^0 = (2k-1)L/(2N)\}_{k=1}^N$ *на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *справедливы равенства*

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^0, S^0) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt, \tag{1.4.6}$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};\mathcal{A}^0,S^0)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(t)+\omega_2^2(t)}dt, \tag{1.4.7}$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};\mathcal{A}^0,S^0)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}(\omega_1(t)+\omega_2(t))dt. \tag{1.4.8}$$

Доказательство. Не умаляя общности, докажем равенство (1.4.6). Ради простоты вычислений, далее обозначим $h=L/N$. Тогда формула (1.4.5) запишется в виде

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds=h\sum_{k=1}^N f\left(x\left(kh-\frac{h}{2}\right),y\left(kh-\frac{h}{2}\right)\right)+R_N(f;\Gamma).$$

Отсюда для погрешности квадратурной формулы получаем

$$R_N(f;\Gamma)=\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds-h\sum_{k=1}^N f\left(x\left(kh-\frac{h}{2}\right),y\left(kh-\frac{h}{2}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^N\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\left[f(x(s),y(s))-f\left(x\left(kh-\frac{h}{2}\right),y\left(kh-\frac{h}{2}\right)\right)\right]ds. \tag{1.4.9}$$

Оценивая правую часть равенства (1.4.9) для произвольной функции $f\in\mathfrak{M}_{\rho_1}$ и кривой $\Gamma\in\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, сразу получаем

$$|R_N(f;\Gamma)|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^N\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\max\left\{\left|x(s)-x\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)\right|,\left|y(s)-y\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)\right|\right\}ds\le$$

$$\le\sum_{k=1}^N\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\max\left\{\omega_1\left(\left|s-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right|\right),\omega_2\left(\left|s-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right|\right)\right\}ds=$$

$$=\sum_{k=1}^N\left(\int\limits_{(k-1)h}^{(k-1)h+\frac{h}{2}}+\int\limits_{(k-1)h+\frac{h}{2}}^{kh}\right)\cdot$$

$$\cdot \max\left\{\omega_1\left(\left|s-(k-1)h-\frac{h}{2}\right|\right), \omega_2\left(\left|s-(k-1)h-\frac{h}{2}\right|\right)\right\} ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(2\int\limits_0^{h/2}\max\{\omega_1(t),\omega_2(t)\}\,dt\right) = 2N\int\limits_0^{L/(2N)}\max\{\omega_1(t),\omega_2(t)\}dt. \quad (1.4.10)$$

Легко проверить, что для кривой $\Gamma_1 \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, определенной параметрическими уравнениями

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = \varphi_1(s), \\ y = \varphi_2(s), \end{cases} \quad 0 \le s \le L,$$

где

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \omega_i\left(kh - \frac{h}{2} - s\right), & (k-1)h \le s \le (k-1)h + h/2, \\ \omega_i\left(s - kh + \frac{h}{2}\right), & (k-1)h + h/2 \le s \le kh,\ k = \overline{1,N};\ i = 1,2; \end{cases}$$

и функция $f_0(x(s),y(s)) = \max\{\varphi_1(s),\varphi_2(s)\} \in \mathfrak{M}_{\rho_1}$, для которой непосредственными вычислениями имеет мнсто соотношение

$$f_0\left(x\left(kh-\frac{h}{2}\right), y\left(kh-\frac{h}{2}\right)\right) = 0,\ k = \overline{1,N},$$

неравенство (1.4.10) обращается в равенство. В самом деле, после простых вычислений мы имеем

$$R_N(f_0) = \int\limits_0^L f_0(x(s),y(s))ds - h\sum_{k=1}^{N} f_0\left(x\left(kh-\frac{h}{2}\right), y\left(kh-\frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$= \int\limits_0^L f_0(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{(k-1)h}^{kh} f_0(x(s),y(s))ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left\{\int\limits_{(k-1)h}^{(k-1)h+h/2} f_0(x(s),y(s))ds + \int\limits_{(k-1)h+h/2}^{kh} f_0(x(s),y(s))ds\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \{ \int\limits_{(k-1)h}^{(k-1)h+h/2} \max \left[\omega_1 \left(kh - \frac{h}{2} - s \right), \omega_2 \left(kh - \frac{h}{2} - s \right) \right] ds +$$

$$+ \int\limits_{(k-1)h+h/2}^{kh} \max \left[\omega_1 \left(s - kh + \frac{h}{2} \right), \omega_2 \left(s - kh + \frac{h}{2} \right) \right] ds \} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left\{ \int\limits_{0}^{h/2} \max \left[\omega_1 (t), \omega_2 (t) \right] dt + \int\limits_{0}^{h/2} \max \left[\omega_1 (t), \omega_2 (t) \right] dt \right\} =$$

$$= 2N \cdot \int\limits_{0}^{h/2} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\} dt = 2N \cdot \int\limits_{0}^{L/(2N)} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\} dt.$$

Аналогичными соображениями получаем равенства (1.4.7) и (1.4.8), откуда и следует утверждение теоремы 1.4.1.

Рассмотрим теперь применение теоремы 1.3.1 к вопросу нахождения точной оценки погрешности следующей квадратурной формулы

$$\int\limits_{0}^{L} f(x(s), y(s)) ds = h \sum_{k=1}^{N} f\left(x(kh), y(kh)\right) + R_N(f; \Gamma), \qquad (1.4.11)$$

где по-прежнему $h = L/N$. С этой целью погрешность формулы (1.4.11) представим в виде

$$R_N(f; \Gamma) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \left[f(x(s), y(s)) - f\left(x(kh), y(kh)\right) \right] ds. \qquad (1.4.12)$$

Теорема 1.4.2. *Для оценки погрешности формулы* (1.4.11) *с векторами коэффициентов* $\mathcal{A}^* = \{A_k^* : A_k^* = L/N\}_{k=1}^{N}$ *и узлов* $S^* = \{s_k^* : s_k^* = kL/N\}_{k=1}^{N}$ *на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}$ *справедливы равенства*

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4} \int\limits_{0}^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\} dt, \qquad (1.4.13)$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4} \int\limits_0^{L/N} \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)}dt, \qquad (1.4.14)$$

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; \mathcal{A}^*, S^*) = \frac{L}{4} \int\limits_0^{L/N} (\omega_1(t) + \omega_2(t))dt, \qquad (1.4.15)$$

где $\omega_i(t)$ $(i = 1, 2)$ *– произвольные выпуклые на* $[0, L]$ *модули непрерывности.*

Доказательство. Поскольку схемы доказательств равенств (1.4.13)-(1.4.15) идентичны, то достаточно привести доказательство (1.4.13). В самом деле, если кривая $\Gamma \in W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, то для произвольной функции $f \in \mathfrak{M}_{\rho_1}$, оценивая по абсолютной величине правую часть (1.4.12) и пользуясь неравенством (1.3.3), получаем

$$|R_N(f;\Gamma)| \le \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \max\{|x(s) - x(kh)|, |y(s) - y(kh)|\}ds \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \left\{ \frac{1}{4} \int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt \right\} ds =$$

$$= (Nh/4) \int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt = \frac{L}{4} \int\limits_0^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt. \qquad (1.4.16)$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что для функции

$$f_1(x^*(s), y^*(s)) = \max\left\{ \int\limits_0^s \varphi_1(t)dt, \int\limits_0^s \varphi_2(t)dt \right\},$$

где функции $\varphi_i(t)$ определены равенствами (1.3.9), а $x^*(s), y^*(s)$ – параметрические уравнения кривой $\Gamma^* \in W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, определенные равенствами (1.3.10), в неравенстве (1.4.16) реализуется знак равенства. В самом деле, согласно равенству (1.3.11), $x^*(kL/N) = y^*(kL/N) = 0$, $k = \overline{0, N}$, а потому мы имеем

$$R_N(f_1) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \max\{|x^*(s) - x^*(kh)|, |y^*(s) - y^*(kh)|\}ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \max\{|x^*(s)|, |y^*(s)|\}ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \max\left\{\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega_1\left(\frac{L}{N} - 2t\right)dt, \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega_2\left(\frac{L}{N} - 2t\right)dt\right\}ds =$$

$$= \frac{1}{2}Nh \cdot \int\limits_{0}^{L/(2N)} \max\left\{\omega_1\left(\frac{L}{N} - 2t\right), \omega_2\left(\frac{L}{N} - 2t\right)\right\}dt =$$

$$= \frac{L}{4} \cdot \int\limits_{0}^{L/N} \max\left\{\omega_1\left(t\right), \omega_2\left(t\right)\right\}dt.$$

Тем самым мы доказали, что

$$R_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; W^{(1,1)}\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = \frac{L}{4} \int\limits_{0}^{L/N} \max\{\omega_1(t), \omega_2(t)\}dt.$$

Повторив вышеприведенные соображения, убедимся в справедливости равенств (1.4.14) и (1.4.15), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.2.

Глава II

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

§2.1. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом в норме пространства L_1.

Одной из наиболее важных задач численного анализа является задача оптимизация численного интегрирования функций на конечном отрезке вещественной оси. Развитие методов приближенного интегрирования привело к известным экстремальным задачам теории квадратур, решение которых приведено Н.П.Корнейчуком в дополнении к монографии С.М.Никольского [34]. В то же время решение аналогичных задач для других типов интегралов, таких как сингулярные интегралы, несобственные интегралы первого рода, криволинейные интегралы, известно в очень редких случаях.

В данной работе рассмотрим вопрос оптимизации приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{\Gamma} q(M)f(M)ds \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k), \tag{2.1.1}$$

где весовая функция $q(M) \geq 0$, $\forall M \in \Gamma$, Γ - произвольная спрямляемая кривая с конечной длиной L, кривизна которой кусочно-непрерывна, а $f(M)$ - произвольная непрерывная на Γ функция. Конечную сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} A_k f(M_k)$, состоящую из линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции, будем называть квадратурной суммой. Для достижения высокой точности при помощи (2.1.1), нужно возможно лучшим образом воспользоваться выбором коэффициентов A_k $(k = \overline{1,N})$ и узлов M_k $(k = \overline{1,N})$ [1,17,34].

Всюду далее, как и в работах [6,43], класс плоских спрямляемых кривых Γ с длиною не более L и кусочно-непрерывной кривизной, расположенных в области $Q = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq L^2\}$, обозначим через $\mathfrak{N}_Q(L)$. Параметрические уравнения кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, отнесенной к длине дуги s как параметру, в декартовой системе координат OXY имеют вид

$$x = \int\limits_0^s \cos\beta(s)ds + x_0, \quad y = \int\limits_0^s \sin\beta(s)ds + y_0, \ 0 \leq s \leq L, \qquad (2.1.2)$$

где (x_0, y_0) - координаты начальной точки кривой Γ, $\beta(s) = \int\limits_0^s k(\Gamma; s)ds + \beta_0$, β_0 - угол, образованный касательной к Γ в точке (x_0, y_0) с положительным направлением оси OX, $k(\Gamma; s)$ - кривизна кривой Γ в точке с координатами $(x(s), y(s))$.

Обозначая через $s_k \in [0, L]$, $k = \overline{1,N}$ значения длины дуги s кривой Γ, которые соответствуют точкам $M_k \in \Gamma$, перепишем формулу (2.1.1) в виде:

$$\mathcal{J}(q; f; \Gamma) = \int\limits_0^L q(x(s), y(s))f(x(s), y(s))ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(q; f; \Gamma) := L_N(f; \Gamma) + R_N(q; f; \Gamma), \qquad (2.1.3)$$

где $x = x(s), y = y(s)$ - параметрические уравнения кривой Γ, представленные в виде (2.1.2), а $q(x(s), y(s)) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0, L]$ весовая функция.

Всюду далее полагаем, что формула (2.1.3) является точной для постоянной функции $f(M) = const$, то есть что выполняется условие

$$\int\limits_0^L q(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k. \tag{2.1.4}$$

При выполнении условия (2.1.4) для квадратурной формулы (2.1.3) сформулируем экстремальную задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы в смысле А.Н.Колмогорова – С.М.Никольского и Сарда.

Всякая квадратурная формула вида (2.1.3) задается векторами коэффициентов $A = \{A_k\}_{k=1}^N$ и узлов $S = \{s_k : 0 \leq s_1 < s_2 < ... < s_{N-1} < s_N \leq L\}$, где $A_1, A_2, ..., A_N$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условие (2.1.4). При фиксированной $N \geq 1$ через $\mathcal{A}$ будем обозначать множество векторов коэффициентов $\{A\}$ и векторов узлов $\{S\}$, либо некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на коэффициенты и узлы квадратурной формулы (2.1.3) (например, требования точности формулы на многочлены заданной степени, положительность коэффициентов A_k $(k = \overline{1, N})$, строгое расположение узлов $t_k < t_{k+1}$ $(k = \overline{1, N})$ и др.).

Пусть $\mathfrak{M} = \{f(x(s), y(s))\}$ – некоторой класс функций, определенных вдоль кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$. Для каждой функции $f(x(s), y(s)) \in \mathfrak{M}$ и каждой кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ абсолютная погрешность формулы (2.1.3) имеет вполне определенное значение

$$|R_N(q; f; \Gamma; A, S)| = |\mathcal{J}(q; f; \Gamma) - L_N(f; \Gamma)| =$$

$$= \left| \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) \cdot f(x(s), y(s))ds - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) \right|.$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций $f(x(s), y(s)) \in \mathfrak{M}$ и кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, примем число

$$R_N(q; \mathfrak{M}; \Gamma; A, S) = \sup\{|R_N(q; f; \Gamma; A, S)| : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Наибольшую погрешность квадратурной формулы (2.1.3) для всех функций $f \in \mathfrak{M}$ и кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим

$$R_N(q;\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A,S) = \sup\{R_N(q;\mathfrak{M};\Gamma;A,S) : \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\}.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\{R_N(q;\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A,S) : (A,S) \in \mathcal{A}\} \qquad (2.1.5)$$

по всем векторам коэффициентов и узлов $(A,S) \in \mathcal{A}$, по аналогии с монографией С.М.Никольского [34], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (2.1.3) на рассматриваемых классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Если существует квадратурная формула, для которой

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(q;\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A_0,S_0),$$

то будем ее называть *наилучшей* (или *оптимальной*) на классах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$, а векторы $A_0 = \{A_k^0\}_{k=1}^N$ и $S_0 = \{s_k^0\}_{k=1}^N$ наилучшими векторами коэффициентов и узлов в смысле Колмогорова-Никольского.

Пусть задан вектор узлов $S^* = \{s_k^*\}_{k=1}^N$. Требуется определить величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);S^*) = \inf\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A,S^*) : A \in \mathcal{A}\} \qquad (2.1.6)$$

и если существует вектор коэффициентов $\tilde{A}^0 \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);S^*) = R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\tilde{A}^0,S^*),$$

то квадратурную формулу (2.1.3) будем называть *наилучшей* (или *оптимальной*) по коэффициентам в смысле Сарда.

Если задан вектор коэффициентов $A^* = \{A_k^*\}_{k=1}^N$ и требуется определить величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^*) = \inf\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^*,S) : S \in \mathcal{A}\} \qquad (2.1.7)$$

и существует вектор узлов $\tilde{S}^0 \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*, \tilde{S}^0),$$

то квадратурная формула (2.1.3) с фиксированным вектором коэффициентов A^* и наилучшим вектором узлов $\tilde{S}^0$ называется наилучшей квадратурной формулой по узлам в смысле Сарда.

В этом и последующих параграфах второй главы будем решать сформулированные задачи об отыскании наилучших квадратурных формул в смысле Колмогорова-Никольского (2.1.5) и в смысле Сарда (2.1.6) - (2.1.7).

В этом параграфе будем решать задачу Колмогорова-Никольского (2.1.5) для класса $W_1^{(1,1)} := W^{(1,1)}L_1(Q; D)$ – функций $f(M) = f(x, y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, удовлетворяющие условию

$$\int\limits_0^L |\mathrm{grad}\, f(x, y)|\, ds = \int\limits_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right| ds \le D. \qquad (2.1.8)$$

Записав для произвольной функции $f \in W_1^{(1,1)}$ как сложной функции одной переменной $f(x(s), y(s))$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши

$$f(x(s), y(s)) = f(x(0), y(0)) +$$
$$+ \int\limits_0^L (s-t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right) dt,$$

остаток квадратурной формулы (2.1.3) представим в следующем виде

$$R_N(q; f; \Gamma) = \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s)) ds - \sum_{k=1}^N A_k f(x(s_k), y(s_k)) =$$

$$= \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) \cdot \left\{ f(x(0), y(0)) + \int\limits_0^L (s-t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt \right\} ds - \sum_{k=1}^N A_k \left\{ f(x(0), y(0)) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^L (s_k - t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt \right\} =$$

$$= f(x(0), y(0)) \cdot \left\{ \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) ds - \sum_{k=1}^N A_k \right\} + \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int\limits_0^L (s_k - t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt \right\} ds -$$

$$- \int\limits_0^L \left\{ \sum_{k=1}^N A_k (s_k - t)_+^0 \right\} \cdot \left(\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^L \left\{ \int\limits_s^L q(x(t), y(t)) dt - \sum_{k=1}^N A_k (s_k - s)_+^0 \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right) ds =$$

$$= \int\limits_0^L \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \Phi(s) ds, \qquad (2.1.9)$$

где ядро $\Phi(s)$ определяется равенством

$$\Phi(s) = \int\limits_s^L q(x(t), y(t)) dt - \sum_{k=1}^N A_k (s_k - s)_+^0, \quad u_+^0 = [\max(0, u)]^0.$$

Как известно [34, стр. 14], погрешность квадратурной формулы (2.1.3) на всем классе $W_1^{(1,1)}$ и классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ равна

$$R_N(q; W_1^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)) = \sup\left\{|\Phi(s)| : \ 0 \le s \le L\right\}. \tag{2.1.10}$$

Следуя схеме рассуждений, приведенной в [1, с.144-146] и работах Ю.М.Гиршовича [9] и М.Ш.Шабозова и С.Каландаршоева [45], введем обозначения

$$F(s) = \int\limits_s^L q(x(t), y(t))dt, \ B_i = \sum_{i=j+1}^{N} A_i, (j = \overline{0, N-1}), \ B_N = 0, \ B_0 = F(0). \tag{2.1.11}$$

Очевидно, что

$$\sup_{0\le s\le L} |\Phi(s)| = \sup_{0\le s\le L} \left| F(s) - \sum_{k=1}^{N} A_k (s_k - s)_+^0 \right| \ge$$

$$\ge \max\left\{ \sup_{0\le s\le s_1} |\Phi(s)|, \sup_{\substack{s_k\le s\le s_{k+1}\\ k=\overline{1,N-1}}} |\Phi(s)|, \sup_{s_n\le s\le L} |\Phi(s)| \right\}. \tag{2.1.12}$$

В силу положительности весовой функции $q(x(s), y(s))$ имеем:

$$\sup_{0\le s\le s_1} |\Phi(s)| = \sup_{0\le s\le s_1} \left| \int\limits_0^L q(x(s), y(s))ds - \sum_{k=1}^{N} A_k \right| =$$

$$= \sup_{0\le s\le s_1} |F(s) - F(0)| = F(0) - F(s_1),$$

$$\sup_{s_N\le s\le L} |\Phi(s)| = \sup_{s_N\le s\le L} |F(t)| = F(s_N).$$

$$\sup_{s_k\le s\le s_{k+1}} |\Phi(s)| = \sup_{s_k\le s\le s_{k+1}} |F(t) - B_k| \ge \frac{1}{2} \left| F(s_k) - F(s_{k+1}) \right|, \tag{2.1.13}$$

и равенство в (2.1.13) достигается (см., например, [33, с.58]) только при

$$B_k = \frac{1}{2} \left[F(s_k) + F(s_{k+1}) \right], \ (k = \overline{1, N-1}). \tag{2.1.14}$$

Подставляя полученные значения в (2.1.12), получим

$$\sup_{0\le s\le L}|\Phi(s)|\ge$$

$$\ge\max\left\{F(0)-F(s_1),F(s_N),\ \max_{1\le k\le N-1}[F(s_k)-F(s_{k+1})]/2\right\}. \qquad (2.1.15)$$

Легко заметить, что правая часть неравенства (2.1.15) достигает наименьшего значения тогда и только тогда, когда

$$F(s_k)=\frac{2N-2k+1}{2N}F(0),\ (k=\overline{1,N}). \qquad (2.1.16)$$

Так как при условии (2.1.14) неравенство (2.1.15) обращается в равенство, то этим (2.1.14) и (2.1.16) определяют наилучшую квадратурную формулу вида (2.1.15) с произвольным положительным весом $q(x(s),y(s))$, заданным и определенным для всех кривых класса $\mathfrak{N}_Q(L)$. Из (2.1.14)) и (2.1.11) сразу следует, что

$$A_k=\frac{1}{N}F(0),\ k=\overline{1,N}.$$

Таким образом, доказана следующая общая

Теорема 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.3) *наилучшей для классов функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds=\frac{F(0)}{N}\sum_{k=1}^N f(x(s_k),y(s_k))+R_N(q;f;\Gamma), \qquad (2.1.17)$$

где узлы s_k *определяются из системы уравнений* (2.1.16)*. При этом для погрешности формулы* (2.1.17) *на классах* $W_1^{(1,1)}$ *и* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N(q;W_1^{(1,1)};\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{D}{2N}F(0)=\frac{D}{2N}\int\limits_0^L q(x(t),y(t))dt.$$

Из общего вида квадратурной формулы (2.1.17) видно, что это формула с равными коэффициентами, что облегчает ее применение в практических целях. Из доказанной теоремы 2.1.1 вытекает

Следствие 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.17) *с весовой функцией* $q(x(s), y(s)) = s^{-\gamma},\ 0 < \gamma < 1$ *наилучшей для классов функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \frac{f(x(s), y(s))}{s^\gamma} ds = \frac{L^{1-\gamma}}{(1-\gamma)N}\cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^N f\left(x\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} L\right), y\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} L\right)\right) + R_N(s^{-\gamma}; f; \Gamma). \quad (2.1.18)$$

При этом точная оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы (2.1.18) *на классе функций* $W_1^{(1,1)}$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathcal{E}_N\left(s^{-\gamma}; W_1^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{D\, L^{1-\gamma}}{2(1-\gamma)N},\ 0 < \gamma < 1.$$

Следствие 2.1.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.17) *с весовой функцией* $q(x(s), y(s)) = \sin\dfrac{\pi s}{L},\ 0 \le s \le L$ *наилучшей для классов функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \sin\frac{\pi s}{L} f(x(s), y(s)) ds = \frac{2L}{\pi N}\sum_{k=1}^N f(x(s_k^*), y(s_k^*)) + R_N(\sin\frac{\pi s}{L}; f; \Gamma), \quad (2.1.19)$$

где узлы $s_k^* = \dfrac{L}{\pi}\arccos\left(1 - \dfrac{2k-1}{N}\right),\ k = \overline{1, N}$, *а* $x = x(s),\ y = y(s)$ – *параметрические уравнения кривой* Γ. *При этом для погрешности квадратурной формулы* (2.1.19) *на классах функций* $W_1^{(1,1)}$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\sin\frac{\pi s}{L}; W_1^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{D\, L}{N}.$$

§2.2. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом в норме пространства L_2

Пусть задан класс $W^{(1)}L_2(Q;D)$, $D > 0$ функций $f(M) = f(x,y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и выполняется неравенство

$$||\operatorname{grad} f(x,y)||_{L_2(Q)} \leq D. \tag{2.2.1}$$

В этом параграфе для квадратурной формулы (2.1.3) решаем задачу (2.1.6) Сарда при фиксированных узлах. Итак, требуется при фиксированном векторе узлов $S^* = \{s_k^*\}_{k=1}^N$ определить нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N\left(q; W^{(1)}L_2(Q;D); \mathfrak{N}_Q(L); S^*\right) =$$
$$= \inf_{\mathcal{A}} R_N\left(q; W^{(1)}L_2(Q;D); \mathfrak{N}_Q(L); \mathcal{A}, S^*\right). \tag{2.2.2}$$

Если существует вектор-коэффициентов $\mathcal{A}^0 = \{A_k^0\}_{k=1}^N$, для которого в равенстве (2.2.2) реализуется нижняя грань, то этот вектор определяет оптимальную по коэффициентам квадратурную формулу на классах функций $W^{(1)}L_2(Q;D)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Как мы отметили в предыдущем параграфе, задача (2.2.2) называется задачей Сарда [40]. Записав для произвольной функции $f \in W^{(1)}L_2(Q;D)$, как функции одного переменного $f(x(s),y(s))$, формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, остаток квадратурной формулы (2.1.3) предоставим в виде

$$R_N(q;f;\Gamma;\mathcal{A},S^*) =$$
$$= \int\limits_0^L \left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)\cdot\mathcal{K}(s)ds, \tag{2.2.3}$$

где

$$\mathcal{K}(s) = \int\limits_s^L q(x(t),y(t))dt - \sum_{k=1}^N A_k(s_k^* - s)_+^0, \quad u_+^0 = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u \le 0. \end{cases}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского с учетом (2.2.1) и тождество $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \equiv 1$, из соотношения (2.2.3) получаем

$$|R_N(q; f; \Gamma; \mathcal{A}, S)| \le$$
$$\le \left(\int\limits_0^L |\operatorname{grad} f(x(s),y(s))|^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_0^L |\mathcal{K}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \le$$
$$\le D \cdot \left(\int\limits_0^L |\mathcal{K}(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \tag{2.2.4}$$

Рассмотрим кривую $\Gamma^* \in \mathfrak{N}_Q(L)$, которая задана параметрическими уравнениями

$$x := x(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}, \; y := y(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}, \; 0 \le s \le L,$$

и выберем функцию $f^* \in W^{(1)}L_2(Q; D)$ в виде

$$f^*(x,y) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt + \int\limits_0^y \varphi(t)dt,$$

где

$$\varphi(t) = D \cdot \|\mathcal{K}\|^{-1} \cdot |\mathcal{K}(t)| sign \mathcal{K}(t),$$
$$\mathcal{K}(t) = \int\limits_{\sqrt{2}s}^L q(x(t),y(t))dt - \sum_{k=1}^N A_k(s_k^* - \sqrt{2}s)_+^0.$$

Подставляя f^* и Γ^* в (2.2.3), нетрудно убедиться, что в (2.2.4) имеет место знак равенства. Следовательно, правая часть (2.2.4) будет точной верхней границей на классах функции $W^{(1)}L_2(Q; D)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$R_N\left(q; W^{(1)}L_2(Q; D); \mathfrak{N}_Q(L); \mathcal{A}, S^*\right) = D \left(\int\limits_0^L |\mathcal{K}(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \tag{2.2.5}$$

Таким образом, поставленная выше задача сводится к нахождению минимума интеграла, стоящего в правой части формулы (2.2.5), при фиксированных узлах $S^* = \{s^*\}_{k=1}^N$, если варьировать коэффициентами A_k. Чтобы решить эту задачу, преобразуем выражение, стоящее под знаком исследуемого интеграла. С этой целью заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N} A_k (x_k - s)_+^0 = \begin{cases} c_1, & \textit{для } 0 \le s < s_1^*, \\ c_k, & \textit{для } s_{k-1}^* < s \le s_k^*, \\ 0, & \textit{для } s_n < s \le L, \end{cases}$$

где

$$c_k = \sum_{i=k}^{N} A_i, \;\; k = 1, 2, ..., N. \qquad (2.2.6)$$

Следуя схемам рассуждений в работах [40, 43], введем в рассмотрение систему функций $\{u_k(s)\}_{k=1}^N$, определённых следующим образом

$$u_k(s) = \{1, \textit{для } s \in (s_{k-1}, s_k);\; 0, \textit{для } s \bar{\in} (s_{k-1}, s_k)\}_{k=1}^N,$$

где положено $s_0 = 0$.

Исходя из принятых обозначений, интеграл, стоящий в правой части (2.2.5), запишем в виде

$$\int_0^L \mathcal{K}^2(s) ds = \int_0^L \left[\int_s^L q(x(t), y(t)) dt - \sum_{k=1}^{N} c_k u_k(s) \right]^2 ds. \qquad (2.2.7)$$

Заметим при этом, что система функций $\{u_k(s)\}_{k=1}^N$ определяется при помощи фиксированных узлов $0 \le s_1^* < s_2^* < ... < s_N^* \le L$ и ортогональна на отрезке $[0, L]$. Задача сведена к такому выбору коэффициентов c_k, чтобы интеграл (2.2.7) принимал наименьшее значение. Хорошо известно [33, с.304-312], что интеграл (2.2.7) принимает наименьшее значение, если c_k

являются коэффициентами Фурье функции $\int\limits_s^L q(x(t), y(t))dt$ в системе функции $\{u_k(s)\}_{k=1}^N$:

$$c_k = \frac{1}{B_k}\int\limits_0^L \left(\int\limits_s^L q(x(t), y(t))dt\right) u_k(s)ds =$$

$$= \frac{1}{B_k}\int\limits_{s_{k-1}^*}^{s_k^*} \left(\int\limits_s^L q(x(t), y(t))dt\right) ds, \tag{2.2.8}$$

где

$$B_k = \int\limits_0^L u_k^2(s)ds = s_k^* - s_{k-1}^*.$$

Наименьшее значение интеграла (2.2.7), который достигается при c_k, определённых равенством (2.2.8), равно

$$\int\limits_0^L \left(\int\limits_s^L q(x(t), y(t))dt\right)^2 ds - \sum_{k=1}^N B_k c_k^2. \tag{2.2.9}$$

Зная c_k, из формул (2.2.6) легко определить коэффициенты A_k наилучшей квадратурной формулы для класса $W^{(1)}L_2(Q; D)$ с фиксированными узлами $S^* = \{s_k^*\}_{k=1}^N$, а именно

$$A_k = c_k^* - c_{k+1}^*,\ k = 1, 2, ..., N;\ c_{N+1} = 0. \tag{2.2.10}$$

Если учесть (2.2.9), то для этой формулы будем иметь следующую точную оценку

$$\mathcal{E}_N\left(q; W^{(1)}L_2(Q; D); \mathfrak{N}_Q(L), S^*\right) =$$

$$= D\left\{\int\limits_0^L \left(\int\limits_s^L q(x(t), y(t))dt\right)^2 ds - \sum_{k=1}^N B_k c_k^2\right\}. \tag{2.2.11}$$

Приведём примеры.

1. Пусть $q(x(t), y(t)) \equiv 1$. Фиксируем вектор узлов

$$S^* = \left\{ s_k^* : \ s_k^* = \frac{(k-1)L}{N-1} \right\}_{k=1}^{N}.$$

По формулам (2.2.8), (2.2.10) и (2.2.11) легко вычислить значение векторов коэффициентов и погрешность наилучшей квадратурной формулы в смысле Сарда (2.1.6):

$$A_k = \frac{L}{N-1}, \ (k = \overline{1, N-1}), \ A_N = \frac{L}{2(N-1)},$$

$$\mathcal{E}_N \left(1; W^{(1,1)} L_2(Q; D); \mathfrak{N}_Q(L), S^* \right) = \frac{DL^2}{2\sqrt{3}(N-1)}.$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.3) *при* $q(x(t), y(t)) \equiv 1$ *и фиксированных векторах узлов* $S^* = \left\{ s_k^* : \ s_k^* = \frac{(k-1)L}{N-1} \right\}_{k=1}^{N}$ *наилучшей по коэффициентам в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s)) ds = \frac{L}{N-1} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{(k-1)L}{N-1} \right), y\left(\frac{(k-1)L}{N-1} \right) \right) +$$

$$+ \frac{L}{2(N-1)} f(x(L), y(L)) + R_N(f; \Gamma). \qquad (2.2.12)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (2.2.12) *на всем классе функций* $W^{(1,1)} L_2(Q; D)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_N \left(1; W^{(1,1)} L_2(Q; D); \mathfrak{N}_Q(L), S^* \right) = \frac{DL^2}{2\sqrt{3}(N-1)}.$$

2. Пусть $q(x(t), y(t)) = t$. Применяя формулы (2.2.8) и (2.2.10), получаем:

$$A_k = \frac{1}{6}(s_{k+1} - s_{k-1})(s_{k-1} + s_k + s_{k+1}), (k = \overline{1, N-1}),$$

$$A_N = \frac{1}{6}(3 - s_{N-1}^2 - s_{N-1} \cdot s_N - s_N^2).$$

Применяя оценку (2.2.11), будем иметь

$$\mathcal{E}_N\left(t; W^{(1)}L_2(Q;D); \mathfrak{N}_Q(L), S^*\right) =$$

$$= D\left\{\frac{2L^5}{15} - \frac{1}{36}\cdot\sum_{k=1}^{N}(s_k - s_{k-1})\cdot[3 - s_{k-1}^2 - s_{k-1}\cdot s_k - s_k^2]^2\right\}^{1/2}. \qquad (2.2.13)$$

В частном случае, как и в предыдущем случае, полагая

$$s_k := s_k^* = \frac{k-1}{N-1}L \ (k = \overline{1,N}),$$

для оптимальной по коэффициентам

$$A_k = \frac{(k-1)L^2}{N-1}(k = \overline{1, N-1}),\ A_N = \frac{1-L^2}{2} - \frac{3N-2}{6(N-1)^2}L^2$$

из квадратурной формулы (2.2.13) найдём выражение погрешности

$$\mathcal{E}_N\left(t; W^{(1)}L_2(Q;D); \mathfrak{N}_Q(L), S^*\right) = \frac{DL^2}{4\sqrt{3}(N-1)}.$$

Теорема 2.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.3) *с весовой функцией* $q(x(t),y(t)) \equiv t$ *и фиксированных векторах узлов* $S^* = \left\{s_k^* :\ s_k^* = \frac{(k-1)L}{N-1}\right\}_{k=1}^{N}$ *наилучшей по коэффициентам в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L s\cdot f(x(s),y(s))ds = \frac{L^2}{N-1}\cdot\sum_{k=1}^{N-1}(k-1)f\left(x\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), y\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{1-L^2}{2} - \frac{(3N-2)L^2}{6(N-1)^2}\right)\cdot f(x(L),y(L)) + R_N(t;f;\Gamma). \qquad (2.2.14)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (2.2.14) *на всем классе функций* $W^{(1,1)}L_2(Q;D)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(t; W^{(1,1)}L_2(Q;D); \mathfrak{N}_Q(L), S^*\right) = \frac{DL^2}{4\sqrt{3}(N-1)}.$$

§2.3. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности

В этом параграфе в предположении, что кривая $\Gamma \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$, а функция $f \in \mathfrak{M}_{\rho_i}$, где ρ_i – расстояние определенные в параграфе 1.2 для любых $M' = \ (M(x(s'), y(s')),\ M'' = M(x(s''), y(s'')) \in \Gamma$, удовлетворяющих условиям

1) $\rho_1(M', M'') = \max\{|x(s') - x(s'')|, |y(s') - y(s'')|\}$;

2) $\rho_2(M', M'') = \sqrt{(x(s') - x(s''))^2 + (y(s') - y(s''))^2}$;

3) $\rho_3(M', M'') = |x(s') - x(s'')| + |y(s') - y(s'')|$,

будем решать задачи (2.1.5) – (2.1.7) Сарда и Колмогорова-Никольского для квадратурной формулы (2.1.3) и произвольной интегрируемой весовой функцией $q(x(s), y(s)) \geq 0$ на отрезке $[0, L]$. Справедлива следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\{s_k\}_{k=0}^{N}$ $(0 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_N \leq L)$ – *произвольная система узлов из промежутка [0,L] и коэффициенты квадратурной формулы* (2.1.3) *имеют вид*

$$A_k^* = \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s))ds, \tag{2.3.1}$$

где $\sigma_0 = 0,\ \sigma_k = (s_{k-1} + s_k)/2,\ k = \overline{1, N},\ \sigma_{N+1} = L$. *Тогда имеют место равенства*

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s))\ \max\{\omega_1(|s-s_k|), \omega_2(|s-s_k|)\}ds,$$

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; A, S) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s))\ \sqrt{\omega_1^2(|s - s_k|) + \omega_2^2(|s - s_k|)}ds,$$

$$R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S)=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\ \{\omega_1(|s-s_k|)+\omega_2(|s-s_k|)\}ds.$$

Доказательство. В самом деле, если например, $f\in\mathfrak{M}_{\rho_2}$ и $\Gamma\in\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ то из (2.1.3) имеем

$$R_N(q;f;\Gamma)=\int\limits_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\cdot f(x(s_k),y(s_k))ds+$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\left(\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))ds-A_k\right)\cdot f(x(s_k),y(s_k)).\qquad(2.3.2)$$

Из равенство (2.3.2) в связи с равенством (2.3.1) имеем:

$$R_N(q;f;\Gamma;A,S)=\int\limits_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))f(x(s_k),y(s_k))ds=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\left[f(x(s),y(s))-f(x(s_k),y(s_k))\right]ds\qquad(2.3.3)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (2.3.3) для любого $f\in\mathfrak{M}_{\rho_2}$ и любого $\Gamma\in\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ имеем

$$|R_N(q;f;\Gamma;A,S)|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\left|f(x(s),y(s))-f(x(s_k),y(s_k))\right|ds\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\sqrt{(x(s)-x(s_k))^2+(y(s)-y(s_k))^2}ds\le$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|) - \omega_2^2(|s-s_k|)}ds. \qquad (2.3.4)$$

Остается показать, что среди кривых $\Gamma \in \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ и функции $f \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$ существуют кривая Γ_0 и функция f_0, для которых в неравенстве (2.3.4) имеет место знак равенства. В самом деле, определим кривую Γ_0 параметрическими уравнениями

$$x = x(s) = \omega_1(|s-s_k|),\ \sigma_k \leq s \leq \sigma_{k+1},\ k = \overline{0, N},$$

$$y = y(s) = \omega_2(|s-s_k|),\ \sigma_k \leq s \leq \sigma_{k+1},\ k = \overline{0, N},$$

и определим функцию $f_0 \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$ равенством

$$f_0(x(s), y(s)) = \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|) + \omega_2^2(|s-s_k|)},\ \sigma_k \leq s \leq \sigma_{k+1},\ k = \overline{0, N}.$$

То что $f_0 \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$, вытекает из леммы Д.6 монографии [34, с.199-200]. Очевидно, что $f_0(x(s_k), y(s_k)) \equiv 0,\ \sigma_k \leq s \leq \sigma_{k+1},\ k = \overline{0, N}$, а потому для этой функции мы имеем:

$$R_N(q; f_0; \Gamma; A^*, S) = \int\limits_0^L q(x(s), y(s)) f_0(x(s), y(s))ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) f_0(x(s), y(s))ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s)) \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|) + \omega_2^2(|s-s_k|)}ds. \qquad (2.3.5)$$

Аналогичным образом доказываются два других равенства теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.3) *с весовой функцией* $q(x(s), y(s)) \geq 0$, *фиксированными узлами* $0 \leq s_0 < s_1 < s_2 ... <$

$s_{N-1} < s_N \le L$ *и произвольными коэффициентами* $A_k,\ k=\overline{0,N}$, *наилучшей квадратурной формулой на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *является формула с коэффициентами*

$$A_k^* = \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s),y(s))ds,\ k=\overline{0,N},$$

и наилучшей оценкой остатка, равной

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S) = R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A^*,S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s),y(s))\ \max\{\omega_1(|s-s_k|),\omega_2(|s-s_k|)\}ds,$$

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S) = R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A^*,S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s),y(s))\ \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|)+\omega_2^2(|s-s_k|)}ds,$$

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S) = R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A^*,S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s),y(s))\ \{\omega_1(|s-s_k|)+\omega_2(|s-s_k|)\}ds.$$

Доказательство. Докажем утверждение теоремы для класса $\mathfrak{M}_{\rho_1}$, поскольку для классов $\mathfrak{M}_{\rho_2}$ и $\mathfrak{M}_{\rho_3}$ доказательство аналогично. В самом деле, для произвольной вектор коэффициентов имеем:

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S) \le R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A^*,S). \tag{2.3.6}$$

С другой стороны, согласно рассуждениям работы Г.К.Лебедя [18], получаем

$$R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1}^*;\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A^*,S) \le \inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S), \tag{2.3.7}$$

где $\mathfrak{M}^*_{\rho_1}$ – множество функций из $\mathfrak{M}_{\rho_1}$, обращающихся в узлах в нуль, а потому из сравнения неравенств (2.3.6) и (2.3.7) получаем, что

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S)=R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A^*,S),$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.2.

Теорема 2.3.3. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.3) *с весовой функцией* $q(x(s),y(s))\geq 0$ *наилучшими формулами на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *являются формулы, узлы которых* $0\leq s_0^0<s_1^0<...<s_{N-1}^0<s_N^0\leq L$ *обращают в минимум соответственно выражения*

$$\mathcal{J}_1(s_0,s_1,...,s_N)=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\ \max\{\omega_1(|s-s_k|),\omega_2(|s-s_k|)\}ds,$$

$$\mathcal{J}_2(s_0,s_1,...,s_N)=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\ \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|)+\omega_2^2(|s-s_k|)}ds,$$

$$\mathcal{J}_3(s_0,s_1,...,s_N)=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}q(x(s),y(s))\ (\omega_1(|s-s_k|)+\omega_2(|s-s_k|))ds$$

с коэффициентами

$$A_k^0=\int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0}q(x(s),y(s))ds,\ \ k=\overline{0,N},$$

где $\sigma_0^0=0,\ \sigma_k^0=(s_{k-1}^0+s_k^0)/2,\ k=\overline{1,N},\ \sigma_{N+1}^0=L,$ *и наилучшие оценки остатка соответственно равны*

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2})=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0}q(x(s),y(s))\max\{\omega_1(|s-s_k^0|),\omega_2(|s-s_k^0|)\}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s))\sqrt{\omega_1^2(|s-s_k^0|)+\omega_2^2(|s-s_k^0|)}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s))\ (\omega_1(|s-s_k^0|)+\omega_2(|s-s_k^0|))ds.$$

Доказательство. Докажем утверждение теоремы 2.3.3 для класса функций $\mathfrak{M}_{\rho_2}$ и класса кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$. В самом деле, при любых фиксированных векторах узлов $S=\{s_k\}_{k=0}^N$ и векторах коэффициентов $A=\{A_k\}_{k=0}^N$, имеем:

$$R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S) \geq \inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S) \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s),y(s))\ \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|)+\omega_2^2(|s-s_k|)}ds \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s))\ \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k^0|)+\omega_2^2(|s-s_k^0|)}ds. \tag{2.3.8}$$

С другой стороны, по определению нижнюю грань получаем

$$\inf_{\{A_k\}} R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A,S) \leq R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};A^0,S^0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s))\ \sqrt{\omega_1^2(|s-s_k^0|)+\omega_2^2(|s-s_k^0|)}ds. \tag{2.3.9}$$

Из сопоставлении неравенств (2.3.8) и (2.3.9) сразу следует, что

$$\mathcal{E}_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\sigma_k^0}^{\sigma_{k+1}^0} q(x(s),y(s))\sqrt{\omega_1^2(|s-s_k^0|)+\omega_2^2(|s-s_k^0|)}ds.$$

Аналогичным образом доказывается утверждение теоремы 2.4.3 для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_1}$ и $\mathfrak{M}_{\rho_3}$ и класса кривых $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$.

Рассмотрим частные квадратурные формулы. Положим $q(x(s), y(s)) \equiv 1$. Тогда, например, для класса $\mathfrak{M}_{\rho_2}$ имеем систему уравнений

$$\sqrt{\omega_1^2(s_0) + \omega_2^2(s_0)} - \sqrt{\omega_1^2((s_1 - s_0)/2) + \omega_2^2((s_1 - s_0)/2)} = 0$$

$$\sqrt{\omega_1^2((s_k - s_{k-1})/2) + \omega_2^2((s_k - s_{k-1})/2)} -$$

$$-\sqrt{\omega_1^2((s_{k+1} - s_k)/2) + \omega_2^2((s_{k+1} - s_k)/2)} = 0 \quad k = \overline{1, N-1}$$

$$\sqrt{\omega_1^2(1 - s_N) + \omega_2^2(1 - s_N)} - \sqrt{\omega_1^2((s_N - s_{N-1})/2) + \omega_2^2((s_N - s_{N-1})/2)} = 0,$$

откуда сразу заключаем, что

$$2s_0 = s_1 - s_0 = \cdots = s_N - s_{N-1} = 2(1 - s_N) = h.$$

Далее, так как

$$L = s_0 + \sum_{k=1}^{N-1}(s_k - s_{k-1}) + L - s_N = 2h + 2Nh = 2(N+1)h,$$

то

$$h = \frac{L}{2(N+1)},\ s_0 = \frac{L}{2(N+1)},\ s_N = L - \frac{L}{2(N+1)} = \frac{(2N+1)L}{2(N+1)L}$$

$$s_k = s_0 + \sum_{i=1}^{k}(s_i - s_{i-1}) = (2k+1)h = \frac{(2k+1)L}{2(N+1)},\ k = \overline{1, N-1}.$$

Таким образом, наилучший вектор узлов имеет вид:

$$S^0 = \left\{ s_k^0 : s_k^0 = \frac{(2k+1)L}{2(N+1)} \right\}_{k=0}^{N} \tag{2.3.10}$$

Вычислим значения соответствующих наилучших коэффициентов $\{A_k^0\}_{k=0}^N$. Имеем

$$A_0^0 = \sigma_1^0 - \sigma_0^0 = (s_0^0 + s_1^0)/2 = L/(N+1),$$

$$A_k^0 = \sigma_{k+1}^0 - \sigma_k^0 = (s_{k+1}^0 + s_k^0)/2 - (s_k^0 + s_{k-1}^0)/2 = (s_{k+1}^0 + s_{k-1}^0)/2 = L/(N+1),$$

$$(k = \overline{1, N-1})$$

$$A_N^0 = 1 - \sigma_N^0 = 1 - (s_{N-1}^0 + s_N^0)/2 = L/(N+1).$$

Таким образом, наилучший вектор коэффициентов имеет вид:

$$A^0 = \left\{ A_k^0 : A_k^0 = L/(N+1) \right\}_{k=0}^{N}. \qquad (2.3.11)$$

Таким же образом доказывается, что для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_1}$ и $\mathfrak{M}_{\rho_3}$ наилучшие векторы коэффициентов и узлов имеют вид (2.3.11) и (2.3.10). Таким образом, в качестве следствия, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3.4. *Пусть* $q(x(s), y(s)) \equiv 1$. *Тогда на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и классе кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *наилучшая квадратурная формула* (2.1.3) *имеет вид*

$$\int_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N+1} \cdot \sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k+1)L}{2(N+1)} \right), y\left(\frac{(2k+1)L}{2(N+1)} \right) \right) + R_N(f; \Gamma). \qquad (2.3.12)$$

При этом наилучшая оценка остатка формулы (2.3.12) *на указанных классах функций и кривых имеет вид*

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = 2(N+1) \int_0^{L/2(N+1)} \max\{\omega_1(s), \omega_2(s)\}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = 2(N+1) \int_0^{L/2(N+1)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds,$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}) = 2(N+1) \int_0^{L/2(N+1)} (\omega_1(s) + \omega_2(s))ds.$$

В заключение данного параграфа рассмотрим наиболее часто встречающиеся в приложениях наилучшие квадратурные формулы с равноотстоящими узлами. Имеет место следующая

Теорема 2.3.5. *Пусть* $q(x(s), y(s)) \geq 0$ *– произвольная интегрируемая функция. Тогда на классах функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и классах кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}$ *наилучшей по коэффициентам при фиксированном векторе узлов* $S^* = \{s_k^* :\ s_k^* = kL/N\}_{k=0}^{N}$ *является формула, коэффициенты которой определяются равенствами*

$$A_k^0 = \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q(x(s), y(s))ds, \quad k = \overline{0, N},$$

где $\sigma_0 = 0,\ \sigma_k = (2k-1)L/2N,\ k = \overline{1, N},\ \sigma_{N+1} = L.$

При этом точная оценка остатка на указанных классах функций и кривых имеет вид

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; S^*) = \int\limits_0^{L/(2N)} \Bigg\{ q(x(s), y(s)) + q(x(L-s), y(L-s)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[q\left(x\left(\frac{k}{N} + s\right), y\left(\frac{k}{N} + s\right)\right) + q\left(x\left(\frac{k}{N} - s\right), y\left(\frac{k}{N} - s\right)\right)\right] \Bigg\} \cdot$$

$$\cdot \max\left\{\omega_1(s), \omega_2(s)\right\} ds,$$

$$R_N(q; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; S^*) = \int\limits_0^{L/(2N)} \Bigg\{ q(x(s), y(s)) + q(x(L-s), y(L-s)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[q\left(x\left(\frac{k}{N} + s\right), y\left(\frac{k}{N} + s\right)\right) + q\left(x\left(\frac{k}{N} - s\right), y\left(\frac{k}{N} - s\right)\right)\right] \Bigg\} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds,$$

$$R_N(q;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=\int\limits_0^{L/(2N)}\Bigg\{q(x(s),y(s))+q(x(L-s),y(L-s))+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left[q\left(x\left(\frac{k}{N}+s\right),y\left(\frac{k}{N}+s\right)\right)+q\left(x\left(\frac{k}{N}-s\right),y\left(\frac{k}{N}-s\right)\right)\right]\Bigg\}\cdot$$

$$\cdot(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

В частности при $q(x(s),y(s))\equiv 1$ получаем следующий наилучший вектор коэффициентов

$$A=\left\{A_0^0=A_N^0=\frac{L}{2N};\ A_k^0=\frac{L}{N},\ k=\overline{1,N-1}\right\}$$

и наилучшие остатки, соответственно равные

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_2};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_N(1;\mathfrak{M}_{\rho_3};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=2N\int\limits_0^{L/(2N)}(\omega_1(s)+\omega_2(s))ds.$$

Если же $q(x(s),y(s))=s$, то наилучший вектор коэффициентов имеет вид

$$A=\left\{A_0^0=\frac{1}{8N^2},\ A_k^0=\frac{k}{N^2},\ k=\overline{1,N-1};A_N^0=\frac{4N-1}{8N^2}\right\}$$

и наилучшие остатки, соответственно, равные

$$R_N(s;\mathfrak{M}_{\rho_1};\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2};S^*)=NL\int\limits_0^{L/(2N)}\max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}ds,$$

$$R_N(s; \mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; S^*) = NL \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds,$$

$$R_N(s; \mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}; S^*) = NL \int\limits_0^{L/(2N)} (\omega_1(s) + \omega_2(s)) ds.$$

§2.4. Наилучшие квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов для классов функций $W^{(1,1)}L_p(Q;D)$ и классов кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$

В параграфе 2.1.1 мы сформулировали общую постановку экстремальной задачи отыскания наилучших квадратурных формул вида (2.1.3) для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода с положительным весом $q(x(s),y(s))$.

В формуле (2.1.3), полагая $q(x(s),y(s))\equiv 1$, перепишем (2.1.3) в виде

$$\int_0^L f(x(s),y(s))ds=\sum_{k=1}^{N}A_kf(x(s_k),y(s_k))+R_N(f;\Gamma), \qquad (2.4.1)$$

где $x=x(s), y=y(s)$ - параметрические уравнения кривой Γ.

Пусть $W_p^{(1,1)} := W^{(1,1)}L_p(Q;D), 1\le p\le\infty$ - класс функций $f(x,y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$ и выполняется условие

$$\|\operatorname{grad} f\|_p=\left(\int_0^L |\operatorname{grad} f(x(s),y(s))|^p\,ds\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int_0^L\left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|^p ds\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int_0^L\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\right)^p ds\right)^{1/p}\le D. \qquad (2.4.2)$$

Как и в параграфе 2.1.1 при решении экстремальной задачи (2.1.5) для получения приемлемой формулы, которую можно было бы считать оптимальной для класса функций $W^{(1,1)}L_p(Q;D)$ на множестве кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, нужно потребовать, чтобы формула (2.4.1) была точной для функций

$f(x, y) = const$, то есть, потребуем выполнение равенства

$$\int\limits_{\Gamma} ds = \sum_{k=1}^{N} A_k = L.$$

Таким образом, требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(W_p^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)) =$$

$$= \inf \left\{ R_N(W_p^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)) : \ \{s_k\}_{k=1}^{N}, \ 0 \le s \le L; \ \{A_k\}_{k=1}^{N}, \sum_{k=1}^{N} A_k = L \right\} \tag{2.4.3}$$

Если существует квадратурная формула вида (2.4.1), для которой выполняется равенство

$$\mathcal{E}_N(W_p^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(W_p^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L), A^*, S^*),$$

то вектор коэффициентов $A^* = \{A^*\}_{k=1}^{N}$ и узлов $S^* = \{s^*\}_{k=1}^{N}$ определяет наилучшую квадратурную формулу на классе функций $W_p^{(1,1)}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Для произвольной функции $f \in W_p^{(1,1)}$ как функции $f(x(s), y(s))$ одного переменного запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши и подставим в квадратурную формулу (2.4.1). Тогда погрешность квадратурной формулы (2.4.1) представится в виде (см. формулу (2.1.9))

$$R_N(f; \Gamma) = \int\limits_0^L \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \mathcal{K}(s) ds, \tag{2.4.4}$$

где ядро $\mathcal{K}(s)$ определяется соотношением

$$\mathcal{K}(s) = L - s - \sum_{k=1}^{N} A_k (s_k - s)_+^0, \quad (s_k - s)_+^0 = [\max(0, s_k - s)]^0.$$

Оценивая правую часть (2.4.4), согласно неравенству Гельдера, и учитывая тождество $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 \equiv 1$, для произвольной функции $f \in W_p^{(1,1)}$, получаем оценку сверху

$$|R_N(f;\Gamma)| \le D\left(\int_0^L |\mathcal{K}(s)|^q ds\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \qquad (2.4.5)$$

Рассмотрим кривую $\Gamma^* \in \mathfrak{N}_Q(L)$, которая задана параметрическими уравнениями

$$\Gamma^* := \begin{cases} x = s/\sqrt{2} \\ y = s/\sqrt{2} \end{cases} \quad (0 \le s \le L),$$

и образуем функцию $f^* \in W_p^{(1,1)}$ в виде

$$f^*(x,y) = \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^y \varphi(t)dt,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{D}{\sqrt{2}}\left(\int_0^L |\mathcal{K}(s)|^q ds\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot |\mathcal{K}_1(t)|^{q-1} \cdot sgn\mathcal{K}_1(t),$$

$$\mathcal{K}_1(t) := \mathcal{K}(\sqrt{2}t) = L - \sqrt{2}t - \sum_{k=1}^N A_k(s_k - \sqrt{2}t)_+^0.$$

Подставляя функцию $f^*(x,y)$ и параметрические уравнения $x = s/\sqrt{2}$, $y = s/\sqrt{2}$ кривой Γ^* в равенство (2.4.4), убедимся, что в неравенстве (2.4.5) имеет место знак равенства. Этим доказано, что правая часть неравенства (2.4.5) является точной верхней границей на множествах функций $W_p^{(1,1)}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$R_N(W_p^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) = D\left(\int_0^L |\mathcal{K}(s)|^q ds\right)^{1/q}. \qquad (2.4.6)$$

Обозначим $\sigma_k = s_k/L,\ \alpha_k = A_k/L$. Тогда имеем

$$\mathcal{K}(t) = L\left[1 - \frac{s}{L} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(\sigma_k - \frac{s}{L}\right)_+^0\right] = L\widetilde{\mathcal{K}}\left(\frac{s}{L}\right).$$

Производя в правой части равенства (2.4.6) замену переменной $\tau = s/L$ и учитывая, что точную нижнюю грань в выражении

$$\widetilde{R} := \inf\left\{\left(\int_0^L |\widetilde{\mathcal{K}}(\tau)|^q d\tau\right)^{1/q} :\ \{\sigma_k\}_{k=1}^N, 0 \le \sigma_k \le 1,\ \{\alpha_k\}_{k=1}^N,\ \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1\right\}$$

реализуют числа $\alpha_k = \dfrac{1}{N}, \sigma_k = \dfrac{(2k-1)}{2N}, k = \overline{1,N}$ и $\widetilde{R} = D(2N\sqrt[q]{q+1})^{-1}$ (см., например, [17, стр.140]), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.4.1) *для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций* $W_p^{(1,1)}, 1 \le p \le \infty$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *наилучшей является квадратурная формула*

$$\int_\Gamma f(x,y)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) + R_N(f;\Gamma), \quad (2.4.7)$$

где $x = x(s), y = y(s)$ *- параметрические уравнения кривой* Γ, L *- ее длина. При этом для погрешности формулы* (2.4.7) *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N(W_p^{(1,1)}; \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{DL^{1+\frac{1}{q}}}{2N\sqrt[q]{q+1}},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Замечание. Из теоремы 2.4.1 при $p = 1$ следует ранее доказанный результат С.Б.Вакарчука [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. - М.:Наука, 1975, 632 с.

2. *Вакарчук С.Б.* О приближении гладких кривых ломаными // Геометрическая теория функций и топология. Киев:Ин-т математики АН УССР. 1981. С.15-19.

3. *Вакарчук С.Б.* О приближении плоских параметрически заданных кривых ломаными // В кн.: Моногенные функции и отображения. Киев:Ин-т математики АН УССР. 1982. С.107-113.

4. *Вакарчук С.Б.* О приближении кривых, заданных в параметрическом виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. матем. журнал. 1983. Т.35, №3. С.352-355.

5. *Вакарчук С.Б.* Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Известия вузов. Математика. 1988. №2. С.14-19.

6. *Вакарчук С.Б.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т.38, №5. С.643-645.

7. *Великин В.Л.* Точные приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер.матем.1973.37.№1, С.165-185.

8. *Вороновская Е.В.* Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н. Бренштейна // ДАН СССР. Сер. А. 1932.

С.79-85.

9. *Гиршович Ю.М.* О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале // Изв. АН Эст.ССР, сер.физ.-мат.наук. 1975. Т.24. №1, С.121-123.

10. *Завьялов Ю.С.* Применение вычислительных систем для решения сложных задач проектирования в машиностроении // Вычисл. системы (Новосибирск). 1970. №38, С.3-22.

11. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.:Наука. 1980. 352 с.

12. *Корнейчук Н.П.* Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. матем. журнал. 1988. Т.40, №6. С.737-743.

13. *Корнейчук Н.П.* Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. матем. журнал. 1989. Т.41, №4. С.492-499.

14. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. М.:Наука. 1984. 352 с.

15. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. М.:Наука. 1987. 424 с.

16. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. М.:Наука. 1976. 320 с.

17. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967, 500 с.

18. *Лебедь Г.К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Матем. заметки, 1968, т.3, в.5,

с.577-586.

19. *Малоземов В.Н.* Об отклонении ломаных // Вестник ЛГУ, серия матем. и мех., 1966. №7. в.2. с.150-153

20. *Мартынюк В.Т.* О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике // Укр. матем. журнал. 1976. Т.28, №1. С.87-92.

21. *Мартынюк В.Т.* Некоторые вопросы приближения линий и поверхностей // Теория приближения функций. М:Наука. 1987. С.282-283

22. *Микеладзе Ш.Е.* Численные методы математического анализа. М.:Гостехиздат. 1953. 527 с.

23. *Мирпоччоев Ф.М.* Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2010, №3(140), с.7-12.

24. *Мирпоччоев Ф.М.* О приближении гладких параметрически заданных кривых ломаными // ДАН РТ. 2011. Т.54, №12. С.963-968.

25. *Мирпоччоев Ф.М.* О приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №5. С.359-365.

26. *Мирпоччоев Ф.М.* К вопросу об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности // ДАН РТ. 2012. Т.55, №6. С.448-454.

27. *Мирпоччоев Ф.М.* Приближение гладких плоских кривых и их применение в задаче приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода // Известия ТулГУ. Естественные науки 2013 год, №1. С.13-27.

28. *Мирпоччоев Ф.М.* Об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода. Материалы республиканской научно-теоритической конференции „Актуальные проблемы современной математики“ посвященной 40-летию образования кафедры высшей математики ТНУ (г.Душанбе, 1-2 декабря 2011 г.), С.52-56.

29. *Мирпоччоев Ф.М.* Наилучшие квадратурные формулы с весом для криволинейных интегралов на некоторых классов функций и кривых. Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и ее преподавания“ посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (г.Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), С.75-78.

30. *Мирпоччоев Ф.М.* Приближение кривых и их применение в задаче приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода. Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций“ посвященной 60-летию академика Шабозова М.Ш. (г.Душанбе, 29-30 июня 2012г.), С.187-193.

31. *Назаренко Н.А.* О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Укр. мат. журнал. 1979, Т.31, №2, С.201-205.

32. *Назаренко Н.А.* О локальном восстановлении кривых с помощью пара-

метрических сплайнов // Геометрическая теория функций и топология. Киев:Ин-т математики АН УССР. 1981. С.55-62.

33. *Натансон И.Б.* Конструктивная теория функций. - М.-Л., 1949

34. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979, 256 с.

35. *Пинскер И.Ш., Трунов В.Г., Шакин В.В.* Опознавание параметризуемых рукописных знаков // Опознавание и описание линий. М.:Наука. 1972. С.101-107.

36. *Сангмамадов Д.С.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН РТ. 2011. Т.54, №10. С.801-806.

37. *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН. 1979. 372 С.

38. *Сендов Бл., Попов В.А.* Аппроксимация кривых в плоскости полиномиальными кривыми // Докл. Болгарской АН. 1970. Т.23 №6, С.639-642.

39. *Скороспелов В.А.* Кубическая сплайн-интерполяция как средство приближения пространственных кривых // Вычисл. системы (Новосибирск). 1978. №75, С.36-44.

40. *Sard A.* Best approximate integration formulas, best approximate formulas // American J. of Math.- 1949.- LXXI - P. 80-91

41. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.:Изд-во Моск. ун-та, 1976, 304 с.

42. *Фиников С.П.* Курс дифференциальной геометрии. М.:Гостехиздат. 1952. 343 с.

43. *Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М.* Оптимизация приближенного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. 2010. Т.53, №6. С.415-419.

44. *Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М.* О приближении кривых и их применении в задаче численного интегрирования криволинейных интегралов первого рода // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2011, №4(145), с.7-16.

45. *Шабозов М.Ш., Каландаршоев С.С.* Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости // ДАН РТ, 1998, т.41, N10, с.69-75.