На правах рукописи

Назрублоев Насруло Нуpублоевич

# Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для пятых степеней

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

## Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе 2015

Работа выполнена в Институте математики имени А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | Рахмонов Зарулло Хусенович<br>доктор физико–математических наук,<br>член корреспондент АН РТ, профессор |
| Официальные оппоненты: | Королёв Максим Александрович,<br>доктор физико–математических наук,<br>ФГБУН «Математический институт имени<br>В.А. Стеклова Российской академии наук,<br>ведущий научный сотрудник отдела<br>алгебры и теории чисел |
| | Шокамолова Джилва Абдулназаровна,<br>кандидат физико–математических наук,<br>Таджикский государственный университет<br>коммерции, доцент кафедры математики<br>и естественных наук |
| Ведущая организация: | Таджикский национальный университет |

Защита состоится 26 июня 2015 г. в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 Каримов У.Х.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Настоящая диссертация является исследованием в аналитической теории чисел, относящимся к области аддитивной теории чисел. Основной задачей аддитивной теории чисел является вопрос о представлении некоторой последовательности натуральных чисел суммой ограниченного количества слагаемых заданного вида. Исторически первыми примерами подобных задач стали:

- тернарная проблема Гольдбаха (1742 г.) о представлении нечётных чисел суммой трёх простых слагаемых и проблема Эйлера (1742 г.) (или бинарная проблема Гольдбаха) о представлении чётных чисел в виде суммы двух простых;
- теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом[1], которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью $n$ чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число $N$ может быть представлено в виде
$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$
где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых $r$ не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди;
- поставленная в начале 19 – го века проблема о том, что фиксированная степень $n$ простых чисел $p$ при любом натуральном $n$ образует базис конечного порядка $V(n)$ в натуральном ряде. Вновь постановка этой проблемы появилась в работе П. Эрдёша[2], с. 6. Другими словами, предполагалось, что каждое достаточно большое натуральное $N$ может быть представлено в виде
$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n,$$
где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и $k \le V(n)$. Данная задача называется проблемой Гольдбаха – Варинга, поскольку обобщает, с одной стороны, проблему Гольдбаха о представлении числа суммой простых чисел, а с другой стороны — проблему Варинга о представлении числа суммой степеней натуральных чисел.

[1] Waring E. Meditationes algebraicae. Cambridge. 1770.

[2] Erdösh P. On the easier Waring problem for powers of primes. I. // Proc. of the Cambridge Phil. Soc., January 1937, V. XXXIII, Part I, pp. 6 – 12.

- теорема Эстермана[3] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^2 = N$, $p_1$ и $p_2$ – простые числа, $m$ – целое число.

И.М. Виноградов[4,5] в 1937 году создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основой которого составляет решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. Пользуясь этим методом, он впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами. Полученная оценка в соединении с теоремами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях, позволила вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного $N$ в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{2}$$

следствием которого является *тернарная проблема Гольдбаха о представлении нечётного натурального числа как суммы трёх простых чисел.*

Бинарная проблема Гольдбаха до сих пор не решена. Наилучший современный результат, наиболее близко подходящий к доказательству этой проблемы, принадлежит Чену[6]. В этой знаменитой работе Чен доказал, что каждое чётное число $N$ представимо в виде

$$p + P_2 = N,$$

где $P_2$ – простое число или произведение двух простых чисел.

В XIX-ом веке *проблема Варинга* была доказана для отдельных значений $n$, но реального прогресса на пути к решению проблемы удалось достичь только в XX-ом веке. В 1909 г. эту проблему решил Д. Гильберт, тем самым он установил существование функции $G(n)$.

Харди и Литтлвуд[7] в 1920 г. дали новое доказательство проблемы Варинга. Именно они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \le n2^{n-1}h; \qquad \lim_{n\to\infty} h = 1.$$

---

[3] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc., 11(1937), pp. 501 – 516.

[4] Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трёх простых чисел // Доклады АН СССР. 1937. Т. 15. С. 291 – 294.

[5] Виноградов И.М. Избранные труды – М.: Изд-во АН СССР. 1952.

[6] Chen J.R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes // Kexue Tongbao, 1966, v.17, pp. 385 -— 386.

[7] Hardy G.H., Littlwood J.E. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen Math.-Phys. Kl. 1920. pp. 33 – 54. IV: Math. Z. 1922. Bd. 12. pp. 161 – 168.

Самым же важным было то, что Харди и Литтлвуд при $r > (n-2)2^{n-1}+5$ для числа $J(N)$ представлений числа $N$ в виде (1) нашли асимптотическую формулу вида

$$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O\left(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}\right), \tag{3}$$

где $\mathfrak{S}$ – некоторый *особый ряд*, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое число $c_1(n,r)$ и $c_1(n,r) > 0$.

В 1924 г. И.М. Виноградов[5,] применил к проблеме Варинга свой метод тригонометрических сумм и доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда имеет место при

$$r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)].$$

В 1934 г. он доказывает[8] также, что

$$G(n) < n(6\ln n + 10),$$

затем несколько раз уточняет эту оценку и, наконец, в 1959 г. доказывает[9] что

$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13).$$

А.А. Карацуба[10] применил к оценке $G(n)$ свой $p$ – адический метод и получил более точный результат

$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12).$$

Вули[11] доказал, что

$$G(n) < n\ln n + n\ln\ln n + O(1).$$

Величина $G(n)$ известна только для $k = 2$ и $k = 4$, именно $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что соответственно доказали Лагранж и Давенпорт[12]. Ю.В. Линник[13] доказал, что $G(3) \leq 7$. Р. Вон[14] доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда (3) имеет место при $r = 8$ и $n = 3$.

[8] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // ДАН СССР. 1934. № 2. С. 337 – 341.

[9] Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия АН СССР. Серия математическая. 1959. Т. 23. № 5. С. 637 – 642.

[10] Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга //Известия АН СССР. Серия математическая. 1985, Т. 49, № 5, С. 935 – 947.

[11] Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem // Ann of Math., 1992, (2)135, № 1, pp. 131 – 164.

[12] Davenport H. Ann of Math., 1939, 40, pp. 731 – 747.

[13] Линник Ю В. О разложении больших чисел на семь кубов // ДАН СССР, 1942,№ 35, С. 179 – 180.

[14] Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math., 1986, 365, pp. 122 – 170.

В 1938 г. Хуа Ло Ген[15], пользуясь методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, доказал асимптотическую формулу для числа представлений достаточно большого натурального число $N$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел и показал, что особый ряд этой формулы больше абсолютной положительной постоянной при $N \equiv 5(mod 24)$. Тем самым Хуа Ло Ген доказал, что всякое достаточно большое натуральное число $N \equiv 5(mod\, 24)$ является суммой пяти простых квадратов.

И.М. Виноградов[16] с помощью своего метода тригонометрических сумм нашел асимптотическую формулу в проблеме Гольдбаха – Варинга. В асимптотической формуле И.М. Виноградова вопрос положительности особого ряда $\sigma = \sigma(k; N)$, то есть вопрос о существовании функции $V(n)$ и её верхней оценки в зависимости только от значения параметра $n$ до 2009 г. оставался открытым и, следовательно проблема Гольдбаха – Варинга в полном объёме до самого последнего времени оставалась нерешённой.

В.Н. Чубариков[17], используя свою теорию кратных тригонометрических сумм с простыми числами[18], являющейся дальнейшим развитием метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, полностью решил проблему Гольдбаха – Варинга.

После создания метода тригонометрических сумм и метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова основным аппаратом в аддитивной теории чисел стали оценки тригонометрических сумм.

И.М. Виноградов также первым начал изучать корткие тригонометрические суммы, которые возникают при решении аддитивных задач с почти равными слагаемыми. Он[5] впервые для линейной тригонометрической суммы с простыми числами, переменное суммирование которых, принимает значение из коротких интервалов, то есть для сумм вида:

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau,$$

[15]Hua L.K. Some results in the additive prime number theory // Quart J Math (Oxford), 1938, 9: pp. 68 – 80

[16]Виноградов И.М. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел // Труды Тбиллиского математического института. 1938. Т. 3. С. 1 – 67.

[17]Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха // ДАН. 2009. Т. 427, № 1. С. 24 – 27

[18]Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1985. Т. 49.№ 5. С. 1031 – 1067.

при $k=1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, доказал нетривиальную оценку при

$$\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon}.$$

Затем Haselgrove C.B.[19] получил нетривиальную оценку суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geq x^\theta$, $q$ – произвольное, и доказал асимптотическую формулу для тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми, то есть для числа решений диофантова уравнения (2) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad H = N^{\theta+\varepsilon}, \quad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon. \tag{4}$$

Это стало первой решенной аддитивной задачей с почти равными слагаемыми. Наилучший результат в этой задаче принадлежит Jia Chao-hua[20]. Он доказал, что диофантово уравнение (2) с условиями (4) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

Jianya Liu и Tao Zhan[21], получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha, x, y)$, доказали теорему Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа $N$, $N \equiv 5(mod 24)$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел в случае, когда эти слагаемые почти равны. Они показали, что достаточно большое натуральное число $N$, $N \equiv 5(mod 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

В работах[22,23] доказана теорема Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^2 = N$, $p_1$ и $p_2$ – простые числа, $m$ – целое число, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H;\ i = 1, 2, \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H;\ H \geq N^{\frac{3}{4}} \ln^2 N.$$

[19] Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J.London Math.Soc.,26 (1951),pp. 273 – 277.

[20] Jia Chao-hua Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica, New Series 1994. V. 10, № 4, pp. 369 – 387

[21] Liu J., Tao Z. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica, English Series Oct., 2000, Vol.16, No. 4, pp. 669 – 690.

[22] Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 4, С. 564 – 572.

[23] Шокамолова Дж.А. Асимтотическая формула в задаче Эстермана с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010, Т. 53, № 5,

В работе[24] найдена асимптотическая формула для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть доказана асимптотическая формула для количества представлений натурального числа $N$, $N > N_0$ в виде суммы простых чисел $p_1$, $p_2$ и куба натурального $m$ с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H;\ i = 1,2, \quad \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \le H;\ H \ge N^{\frac{5}{6}} \ln^3 N.$$

Проблема Варинга для кубов и четвертых степеней с почты равными слагаемыми соответственно исследованы в работах[25,26], доказано, что натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы девяти кубов чисел $x_i$, $i = \overline{1,9}$ с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{3}{10}+\varepsilon},$$

и в виде суммы семнадцати четвертых степеней чисел $x_i$, $i = \overline{1,17}$ с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{17}\right)^{\frac{1}{4}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{13}{54}+\varepsilon}.$$

**Цель работы.** Целью работы является изучение поведения коротких тригонометрических сумм Вейля в множестве точек первого класса, оценка таких сумм пятого порядка в множестве точек второго класса и оценка интеграла от их модуля, возведенного в тридцать вторую степень, а также их приложения в проблеме Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми.

**Методы исследования**. Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно:

- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона, оценки тригонометрических интегралов по величине модулю производных, оценки полных рациональных сумм Хуа Ло-кена;

[24]Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Мат. заметки. 2014. Т. 95. Вып. 3. С. 445 – 456.

[25]Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // ДАН РТ, 2008, Т.51,№2, с.83–86.

[26]Рахмонов З.Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ, 2011, т.54, №3,с 34–42.

- метод оценок тригонометрических сумм Г.Вейля;
- круговой метод Харди, Литлвуда и Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля, также их применения к асимптотической формуле для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных чисел.

**Научная новизна**. Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида в множестве точек первого класса;
- найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля пятого порядка в множестве точек второго класса;
- обобщена теорема Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени, а именно найдена правильная по порядку оценки интеграла от тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы Г. Вейля пятой степени;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных чисел.

**Теоретическая и практическая ценность**. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались:

- на семинаре отдела алгебры, теории чисел и топологии (2012-2014 гг.) и на общеинститутском семинаре (2014-2015 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- на семинаре кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета

- на международной конференции «Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел», посвященной 85-летию со дня рождения профессора Г.Б. Бабаева, Душанбе, 25-26 октября 2013 г.;

- на международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвященной 85-летию академика Л.Г. Михайлова, Душанбе, 17 июня 2013 г.

**Публикации**. Основные результаты диссертации опубликованы в шести научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежать постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

**Структура и объём работы**. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объем работы 72 страниц. Список цитированной литературы включает 89 наименований.

## Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из трёх глав и посвящена

- изучению в множестве точек первого класса поведения коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида
$$T(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<m\le x}e(\alpha m^n);$$

- нахождению нетривиальной оценки коротких тригонометрических сумм Вейля пятой степени в множестве точек второго класса;

- обобщению теоремы Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени, а именно нахождению правильной по порядку оценки интеграла от тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы Г. Вейля пятой степени;

- выводу асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных чисел.

Во введении к диссертации содержится обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

Первый параграф первой главы носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Р. Вон[27], изучая суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\le x} e\left(\alpha m^n\right), \quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\ q\le\tau, \quad (a,q)=1,\ |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

в множестве точек первого класса методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{S(a,q)}{q}\int\limits_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac12}\right).$$

При условии, что $\alpha$ очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем $q$, то есть при выполнении условия

$$|\lambda|\le\frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{x\ S(a,q)}{q}\int\limits_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\right).$$

Во втором параграфе изучается поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n), \quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\ q\le\tau, \quad (a,q)=1,\ |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

получающиеся из $T(\alpha,x)$ заменой условия $m\le x$ на условие $x-y<m\le x$, в множестве точек первого класса. Суммы $T(\alpha,x,y)$ при $n=3,4$ были исследованы в работах[24, 28] и нашли приложения при выводе асимптотических формул с почти равными слагаемыми в проблеме Варинга (для кубов и четвёртых степеней) в[25, 26] и кубической задаче Эстермана в[24]. Затем при произвольном фиксированном $n$ сумма $T(\alpha,x,y)$ была изучена в работе[29].

Основным результатом второго параграфа первой главы является теорема 1.1, в которой упрощается доказательство и уточняется основная теорема работы[29].

Теорема 1.1. *Пусть $\tau\ge 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda\ge 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\}\le\frac{1}{2q}$, имеет место формула*

$$T(\alpha,x,y)=\frac{S(a,q)}{q}T(\lambda;x,y)+O(q^{\frac12+\varepsilon}),$$

---

[27] Vaughan R.C. Some remarks in Weyl sums // Coll. Math. Soc. Janos. Bolyani, Budapest 1981.

[28] Рахмонов З.Х., Азамов А.З., Мирзоабдугафуров К.И. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // ДАН РТ. 2010. Т. 53. № 10. С. 737 – 744.

[29] Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. С. 194 – 203.

*а при* $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ *имеет место оценка*

$$|T(\alpha,x,y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\le k\le n}(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 1.1.1. *Пусть* $\tau \ge 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \le \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, *тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha,x,y) = \frac{y}{q}S(a,q)\gamma(\lambda;x,y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Следствие 1.1.2. *Пусть* $\tau \ge 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha,x,y) \ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\le k\le n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}}q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}}\right).$$

Следствия 1.1.1 и 1.1.2 являются обобщением вышеуказанных результатов Р. Вона для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha,x,y)$.

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона[30], оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных[31] и оценки полных рациональных сумм принадлежащей Хуа Ло-кену.

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена коротким тригонометрическим суммам Г. Вейля пятой степени. Первый параграф носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Помимо изучения поведения коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha;x,y)$ в множестве точек первого класса, основным моментом в исследовании аддитивных задач с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга и проблема Эстермана, является также оценка этих сумм в множестве точек второго класса.

В втором параграфе второй главы найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля $T(\alpha;x,y)$ пятой степени в множестве точек второго класса.

---

[30]Карацуба А.А., Королёв М.А. Теорема о замене тригонометрической суммы более короткой // Известия РАН, серия математическая, Т. 71, № 2, С. 123 – 150.

[31]Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — М.: Наука, 1987, 368 с.

Теорема 2.1. *Пусть* $x \geq x_0 > 0$, $y_0 < y \leq 0,01x$, $\alpha$ *– вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1.$$

*Тогда справедлива оценка*

$$|T(\alpha;x,y)| \ll y^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y^4} + \frac{q}{y^5}\right)^{\frac{1}{16}}.$$

Доказательства теоремы 2.1 опирается на следующую лемму 2.3, доказательство которой в свою очередь проводится методом Г. Вейля.

Лемма 2.3. *Пусть* $x$ *и* $y$ *– вещественные числа,* $1 \leq y < x$,

$$T(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^5).$$

*Тогда имеет место соотношение*

$$|T(\alpha;x,y)|^{16} \leq 2^{27}y^{11}\sum_{0<k\leq y}\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\sum_{0<u<y-k-r-t} \times$$
$$\times\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t-u} e(120\alpha krtum)\right| + 2^{27}y^{15}.$$

Хуа Ло–кен[32] для средних значений сумм Вейля получил правильную по порядку оценку

$$\int\limits_0^1 |T(\alpha;x)|^{2^k}\,d\alpha \ll x^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

В третьем параграфе второй главы доказана теорема 2.2, в которой оценка Хуа Ло–кена обобщается для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha;x,y)$ при $n=5$, то есть для среднего значения сумм Г. Вейля пятой степени, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получена правильная по порядку оценка.

Теорема 2.2. *Пусть* $x$ *и* $y$ *— натуральные числа,* $\sqrt{x} < y \leq 0,01x$, *тогда имеет место оценка*

$$\int\limits_0^1 |T(\alpha;x,y)|^{2^k}\,d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \leq k \leq 5.$$

[32] Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда —М.: Мир, 1985, 184 с.

Подобная оценка для кубических сумм и сумм четвёртой степени были получены в работах[33,34].

Основу доказательства этой теоремы 2.2 составляют вышеупомянутый метод Вейля и соображение о том, что интеграл от чётной степени модуля короткой суммы Вейля выражается через количество решений диофантового уравнения.

В третей главе, прилагая результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha; x, y)$ в множестве точек первого класса;
- теорему 2.1 о нетривиальной оценке коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha; x, y)$ пятой степени в множестве точек второго класса;
- теорему 2.2 о правильной по порядку оценки интеграла от тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы Г. Вейля $T(\alpha; x, y)$ пятой степени,

доказываем теорему 3.1 об асимптотической формуле в проблеме Варинга для тридцати трёх пятых степеней при условии, что слагаемые почти равны.

Теорема 3.1. *Для числа $J(N, H)$ представлений $N$ суммою 33 пятых степеней чисел $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 33$ с условиями $\left| x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}} \right| \leq H$, при*
*$H \geq N^{\frac{1}{5} - \frac{1}{340} + \varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:*

$$J(N, H) = \frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}} + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right),$$

*где $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а $B$ – абсолютная положительная постоянная, которая определяется соотношением*

$$B = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5 \cdot 32!} \sum_{k=0}^{16} (-1)^k C_{33}^k (33 - 2k)^{32}.$$

[33] Мирзоабдугафуров К.И. О среднем значении коротких сумм Вейля // ДАН РТ. 2008. Т. 51. № 4. С. 245 – 247.

[34] Азамов А.З. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // ДАН РТ. 2011. Т. 54. № 1. С. 13 – 17.

Последнее утверждение теоремы о том, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ больше некоторого положительного постоянного непосредственно следует из теоремы 4.6 монографии[33].

Следствие 3.1.1. *Существует такое $N_0$, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы $33$ пятых степеней почти равных чисел $x_i$:*

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \leq N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 33.$$

Доказательство теоремы 3.1 проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова его основу, как уже отмечали, составляют следствия 1.1.1 и 1.1.2, теорема 1.1, теорема 2.1 и теорема 2.2. Основные этапы доказательства теоремы:

Будем считать, что $H = N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}$, $N_1 = \sqrt[5]{N/33}$, $Q = 0,5H\mathscr{L}^{-1}$, $\tau = 80(N_1+H)^3H$, $æ\tau = 1$. Поэтому

$$J(N,H) = \int\limits_{-æ}^{1-æ}\left(\sum_{|n-N_1|\leq H} e(\alpha n^5)\right)^{33} e(-\alpha N)d\alpha.$$

Воспользуюсь соотношением

$$T(\alpha; N_1+H, 2H) = \sum_{N_1-H<n\leq N_1+H} e(\alpha n^5) = \sum_{|n-N_1|\leq H} e(\alpha n^5) - \theta,$$

где $|\theta|$ равен $1$, если $N_1 - H$ – целое число, и $0$ в противном случае, легко можно показать, что

$$J(N,H) = \int\limits_{-æ}^{1-æ} T^{33}(\alpha; N_1+H, 2H)e(-\alpha N)d\alpha + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right),$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое $\alpha$ из промежутка $[-æ, 1-æ]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \tag{5}$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \leq a \leq q-1$, причем $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те $\alpha$, для которых $q \leq Q$ в представлении (5). Через $\mathfrak{m}$ обозначим оставшиеся $\alpha$. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha: \ \alpha \in \mathfrak{M}, \ \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \delta\right\}, \quad \delta = \frac{1}{10q(N_1+H)^4};$$
$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha: \ \alpha \in \mathfrak{M}, \ \delta < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q\tau}\right\}.$$

Обозначим через $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$J(N,H) = J(\mathfrak{M}_1) + J(\mathfrak{M}_2) + J(\mathfrak{m}) + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right).$$

В последней формуле первый член, то есть $J(\mathfrak{M}_1)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $J(N,H)$, а $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

Для получения асимптотической формулы для $J(\mathfrak{M}_1)$ используем следствие 1.1.1 теорему 1.1 (асимптотическая формула с главным членом для короткой тригонометрической суммы $T(\alpha,x,y)$ в случае $\alpha$ *"близких"* к рациональному числу с малыми знаменателями $a/q$) и теорему 2.2. об оценке среднего значения тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы $T(\alpha,x,y)$ пятого порядка.

Оценка интеграла $J(\mathfrak{M}_2)$ проводится тернарным методом с применением следствия 1.1.2 теоремы 1.1 (оценка $T(\alpha;x,y)$ в множестве $\mathfrak{M}_2$) и теоремы 2.2.

Оценка интеграла $\mathfrak{m}$ также проводится тернарным методом с использованием теоремы 2.1 о нетривиальной оценке коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha;x,y)$ пятой степени в множестве точек второго класса и теоремы 2.2.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, члену–корреспонденту Академии наук Республики Таджикистан, профессору З.Х. Рахмонову за постановку задач и внимание к работе.

## Публикации по теме диссертации

1. Назрублоев Н.Н. О средней значение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени // Доклады АН РТ. 2014. Т. 57. № 7. С. 531 – 537.

2. Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в множестве точек первого класса // Доклады АН РТ. 2014. Т. 57. № 8. С. 621 – 628.

3. Назрублоев Н.Н. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени в множестве точек второго класса // Доклады АН РТ. 2014. Т. 57. № 9 – 10. С. 720 – 724.

4. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады АН РТ. 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.

5. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г. Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

6. Назрублоев Н.Н. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени // Вестник Таджикского национального универститета. Серия естественных наук. 2015. № 1/2. С. 21 – 25.