Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

НАЗРУБЛОЕВ НАСРУЛО НУРУБЛОЕВИЧ

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ ДЛЯ ПЯТЫХ СТЕПЕНЕЙ

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2014

Оглавление

Обозначения 3

Введение **4**

1 Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля в множестве точек первого класса **19**

1.1 Вспомогательные леммы 19

1.2 Поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля, в множестве точек первого класса 21

2 Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля пятой степени **30**

2.1 Известные леммы 30

2.2 Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля, в множестве точек второго класса 31

2.3 Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени 38

3 Асимптотическая формула в проблеме Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми **52**

3.1 Основная теорема 52

3.2 Доказательство основной теоремы 53

Литература 64

Обозначения

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются двумя индексами: номер главы, номер утверждения;

$c, c_1, c_2, \cdots,$ – положительные постоянные, не всегда одни и те же;

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$;

ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001,

$\tau(n)$ – число делителей числа n;

$[x]$ – целая часть числа x;

$\{x\}$ – дробная часть числа x;

$\|x\| = \min\Big(\{x\}, 1 - \{x\}\Big)$ – расстояние до ближайшего целого числа;

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b;

запись $A \ll B$ или $A = O(B)$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|A| \le cB$;

$N > N_0$ – натуральное число, $\mathscr{L} = \ln N$;

$$S(a,q) = \sum_{m=1}^{q} e\left(\frac{am^n}{q}\right);$$

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yu\right)^n\right) du.$$

Введение

Настоящая диссертация является исследованием в аналитической теории чисел, относящимся к области аддитивной теории чисел. Основной задачей аддитивной теории чисел является вопрос о представлении некоторой последовательности натуральных чисел суммой ограниченного количества слагаемых заданного вида. Исторически первыми примерами подобных задач стали:

- тернарная проблема Гольдбаха (1742 г.) о представлении нечетных чисел суммой трех простых слагаемых и проблема Эйлера (1742 г.)(или бинарная проблема Гольдбаха) о представлении четных чисел в виде суммы двух простых;
- теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырех квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом [1] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нем базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

  где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди;
- поставленная в начале 19-го века проблема о том, что фиксированная степень n простых чисел p при любом натуральном n образует базис

конечного порядка $V(n)$ в натуральном ряде. Вновь постановка этой проблемы появилась в работе П. Эрдёша [2], с. 6. Другими словами, предполагалось, что каждое достаточно большое натуральное N может быть представлено в виде

$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n, \tag{2}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и $k \le V(n)$. Данная задача называется проблемой Гольдбаха – Варинга, поскольку обобщает, с одной стороны, проблему Гольдбаха о представлении числа суммой простых чисел, а с другой стороны — проблему Варинга о представлении числа суммой степеней натуральных чисел.

- теорема Эстермана [3] о представлении натурального числа $N > N_0$ виде $p_1 + p_2 + m^2 = N$, p_1 и p_2 — простые числа, m — целое число.

И.М. Виноградов [4, 5, 6, 7] в 1937 году создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. Пользуясь этим методом, он впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами. Полученная оценка в соединении с теоремами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях, позволила вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечетного N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{3}$$

следствием которого является *тернарная проблема Гольдбаха о представлении нечетного натурального числа как суммы трех простых чисел.*

Бинарная проблема Гольдбаха до сих пор не решена. Наилучший современный результат, наиболее близко подходящий к доказательству этой проблемы, принадлежит Чену [8]. В этой знаменитой работе Чен доказал, что каждое четное число N представимо в виде

$$p + P_2 = N,$$

где P_2 – простое число или произведение двух простых чисел. Более простое доказательство теоремы Чена принадлежит Россу [9].

В XIX веке *проблема Варинга* была доказана для отдельных значений n, но реального прогресса на пути к решению проблемы удалось достичь только в XX-ом веке. В 1909 г. эту проблему решил Д.Гильберт [10, 11], тем самым он установил существование функции $G(n)$.

Харди и Литтлвуд [12] в 1920 г. дали новое доказательство проблемы Варинга. Именно, они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h; \ \lim_{n\to\infty} h = 1$$

Самым же важным было то, что Харди и Литтлвуд при

$$r > (n-2)2^{n-1} + 5$$

для числа $J(N)$ представлений числа N в виду (1) нашли асимптотическую формулу вида

$$J(N) = \frac{(\Gamma(1+1/n))^r}{\Gamma(r/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}) \tag{4}$$

где $\mathfrak{S}$– некоторый *особый ряд*, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое число $c_1(n,r)$ и $c_1(n,r) > 0$.

В 1924 г. И.М.Виноградов [5, 13, 14] применил к проблеме Варинга свой метод тригонометрических сумм и доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда имеет место при

$$r \geq 2[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 3)].$$

В 1934 г. он доказывает [15] также, что

$$G(n) < n(6\ln n + 10),$$

затем несколько раз уточняет [16, 17, 18, 19] эту оценку и, наконец, в 1959 г. доказывает [20], что

$$G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13).$$

А.А. Карацуба [21] применил к оценке $G(n)$ свой p – адический метод и получил более точный результат

$$G(n) < n(2\ln n + 2\ln\ln n + 12).$$

Вули [22] доказал, что

$$G(n) < n\ln n + n\ln\ln n + O(1).$$

Величина $G(n)$ известна только для $k = 2$ и $k = 4$, именно $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что соответственно доказали Лагранж и Давенпорт [23]. Ю.В. Линник [24, 25, 26] доказал, что $G(3) \leq 7$, упрощенное доказательство которого дал Watson [27]. Вон [28, 29] доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда (4) имеет место при $r = 8$ и $n = 3$.

В 1938 г. Хуа Ло Ген [30, 31, 32], пользуясь оценкой И.М. Виноградова для тригонометрических сумм с простыми числами, доказал асимптотическую формулу для числа представлений достаточно большого натурального число N в виде суммы пяти квадратов простых чисел и показал, что особый ряд этой формулы больше абсолютной положительной постоянной при $N \equiv 5 (mod 24)$. Тем самым, Хуа Ло Ген доказал, что всякое достаточно большое натуральное число $N \equiv 5 (mod\, 24)$ является суммой пяти простых квадратов.

И.М. Виноградов [33] с помощью своего метода тригонометрических сумм нашел асимптотическую формулу в проблеме Гольдбаха – Варинга. В асимптотической формуле И.М. Виноградова вопрос положительности особого ряда $\sigma = \sigma(k; N)$, то есть вопрос о существовании функции $V(n)$, и ее верхней оценки в зависимости только от значения параметра n до 2009 г. оставался открытим, и, следовательно, проблема Гольдбаха – Варинга в полном объеме до самого последнего времени оставалась нерешенной.

В.Н. Чубариков [34, 35], используя свою теорию кратных тригонометрических сумм с простыми числами [36, 37], являющуюся дальнейшим развитием метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова, полностью решил проблему Гольдбаха – Варинга.

После создания метода тригонометрических сумм и метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова основным аппаратом в аддитивной теории чисел стали оценки тригонометрических сумм.

И.М. Виноградов также первым начал изучать тригонометрические суммы, переменные суммирования которых принимают значение из коротких интервалов, которые возникают при решении аддитивных задач с почти равными слагаемыми. Он [5] впервые для линейной тригонометрической суммы с простыми числами, переменная суммирования которой, принимает значение из коротких интервалов, то есть для суммы вида:

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau.$$

при $k = 1$ используя свой метод оценок сумм с простыми числами, доказал нетривиальную оценку при

$$\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon}.$$

Затем Haselgrove C.B. [38] получил нетривиальную оценку суммы $S(\alpha; x, y)$, $y \geq x^{\theta}$, q – произвольное, и доказал асимптотическую формулу для тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми, то есть для числа решений диофантова уравнения (3) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H = N^{\theta+\varepsilon}, \quad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon. \tag{5}$$

Это стало первой решенной аддитивной задачей с почти равными слагаемыми.

Затем В. Статулявычус [39], Jia Chaohua [40, 41, 43, 44], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [45], Zhan Tao [46] заменили показатель $\theta = 63/64 + \varepsilon$ соответственно на

$$\frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{91}{96} + \varepsilon, \quad \frac{13}{17} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Jia Chao-hua [47]. Он доказал, что диофантово уравнение (3) с условиями (5) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

Jianya Liu и Tao Zhan [48, 49, 50, 51] получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha, x, y)$, доказали теорему Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа N, $N \equiv 5 (mod 24)$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел в случае, когда эти слагаемые почти равны. Они показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5 (mod 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left| p_j - \sqrt{\frac{N}{5}} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{11}{23} + \varepsilon}$$

Рахмонов З.Х. [52] и Шокамолова Дж.А. [53] исследовали уравнение Эстермана

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{6}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число, с более жесткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и вывели асимптотическую формулу для числа решений (6) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H;\ i = 1, 2, \quad \left| m^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H;\ H \geq N^{\frac{3}{4}} \ln^2 N.$$

Рахмонов З.Х. [54] и Фозилова Д.М. [55] нашли асимптотическую формулу для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, когда в уравнении Эстермана квадрат натурального m заменяется на его куб. Они доказали асимптотическую формулу для количества представлений натурального числа N, $N > N_0$ в виде суммы простых чисел p_1, p_2 и куба натурального m с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H;\ i = 1, 2, \quad \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \leq H;\ H \geq N^{\frac{5}{6}} \ln^3 N.$$

В работе [56] исследована проблема Варинга для девяти кубов с почты равными слагаемыми, а именно доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы девяти кубов натуральных чисел x_i, $i = \overline{1, 9}$ с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\right| \leq H, \qquad H \geq N^{\frac{3}{10}+\varepsilon}.$$

В работе [57] подобная асимптотическая формула доказана для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде семнадцати четвертых степеней чисел x_i, $i = \overline{1, 17}$ с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{17}\right)^{\frac{1}{4}}\right| \leq H, \qquad H \geq N^{\frac{13}{54}+\varepsilon}.$$

Диссертационная работа состоит из трёх глав и посвящена

- изучению в множестве точек первого класса поведения коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n);$$

- нахождению нетривиальной оценки короткой тригонометрических сумм Вейля пятой степени в множестве точек второго класса;

- обобщению теоремы Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени, а именно нахождению правильной по порядку оценки интеграла от тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы Г.Вейля пятой степени;

- выводу асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных чисел.

Первый параграф первой главы носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Второй параграф второй главы посвящен коротким тригонометрическим суммам Вейля.

Г.Вейль [58] впервые получил нетривиальную оценку тригонометрических сумм вида

$$T(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_1) = \sum_{n\le x} e\left(f(n)\right),$$
$$f(t) = \alpha_m t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + \ldots + \alpha_1 t,$$

которые в его честь И.М.Виноградов [6] назвал суммами Вейля. Основная идея метода Вейля состоит в сведении суммы $T(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_1)$ степени m к оценке суммы $m-1$ – степени и, в конечном счете, к использованию оценки линейной тригонометрической суммы

$$\sum_{n\le x} e(\alpha n) \le \min\left(x, \|\alpha\|\right).$$

Из оценки Г.Вейля следует закон распределения дробных частей многочлена $f(t)$ на отрезке $[a, b] \subseteq [0, 1)$, следствием которого является их равномерное распределение по модулю 1.

И.М. Виноградов [5] в 1934 г. создал новый метод оценок тригонометрических сумм, несравненно более точный, чем метод Г. Вейля. Этим новым методом И.М.Виноградов получает принципиально более сильные результаты в проблеме распределения дробных долей многочленов, в проблеме Варинга, в проблеме приближения вещественного числа дробной долей целого многочлена и др. В то же самое время, этот метод с успехом был применен в теории дзета-функции Римана (Н. Г. Чудаковым [59]), в проблеме Гильберта – Камке (К. К. Марджанишвили [60]), в разнообразных смешанных аддитивных проблемах.

Метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова опирается на оценку величин типа $|T(\alpha_n, \ldots, \alpha_1, N)|^{2k}$. Позже И.М.Виноградов заменил сложную оценку сумм степеней $|T(\alpha_n, \ldots, \alpha_1, N)|^{2k}$ более простой оценкой интеграла

$$J(N; n, k) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |T(\alpha_n, \ldots, \alpha_1, N)|^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

то есть оценкой этой суммы "в среднем" по всем $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ и поэтому теорема об оценке $J(N; n, k)$ носит название теоремы И.М.Виноградова о среднем значении. В дальнейшем И.М.Виноградов неоднократно улучшал и уточнял эту теорему. Он получил асимптотически точную оценку величины $J(N; n, k)$ вида

$$J(N; n, k) \ll N^{2k - \frac{n(n+1)}{2}}$$

Отметим, что оценками тригонометрических сумм по методу И.М. Виноградова занимался также Хуа Ло-ген[31, 32]. В 1942 году Ю.В.Линником [61] было найдено доказательство теоремы о среднем значении, использующее свойства сравнений по модулю степеней простого числа p.

Другое p – адическое доказательство, то есть использующее свойства сравнений по модулю простого числа p, теоремы о среднем значении было получено А.А.Карацубой на основе разработанного им в шестидесятых годах двадцатого века нового p – адического метода [62]. В дальнейшем его метод, помимо других приложений, позволил не только значительно прояснить и упростить доказательство теоремы о среднем значении, но и получить новые существенные результаты, в частности, вывести нетривиальные оценки величины $J(N; n, k)$ при малых значениях k (см. работы [63], [64], [65], [66], [67], [68], [69], [70]).

Р. Вон [71], изучая суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\le x}e\left(\alpha m^n\right),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\ q\le\tau,\quad (a,q)=1,\ |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

в множестве точек первого класса, воспользовавшись оценкой

$$S_b(a,q)=\sum_{k=1}^{q}e\left(\frac{ak^n+bk}{q}\right)\ll q^{\frac12+\varepsilon}(b,q), \tag{7}$$

принадлежащей Хуа Ло-кену [32], методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{S(a,q)}{q}\int\limits_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac12}\right).$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть при выполнении условия

$$|\lambda|\le\frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{x\ S(a,q)}{q}\int\limits_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\right),$$

Он воспользовался этими оценками для вывода асимптотической формулы в проблеме Варинга для восьми кубов [28].

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<m\le x}e(\alpha m^n),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\ q\le\tau,\quad (a,q)=1,\ |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

получающиеся из $T(\alpha,x)$ заменой условия $m\le x$ на условие $x-y<m\le x$, в множестве точек первого класса при $n=2,3,4$ были исследованы в работах [52, 72, 73, 54, 74] и нашли приложения при выводе асимптотических формул с почти равными слагаемыми в проблеме Варинга (для кубов и четвертых степеней) в [56, 57] и кубической задаче Эстермана в [55, 54]. Затем при

произвольном фиксированном n сумма $T(\alpha, x, y)$ была изучена в работах [75, 76].

Основным результатом второго параграфа первой главы является теорема 1.1, в которой уточненяется и упрощается доказательство основной теоремы работы [76].

Теорема 1.1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ *и* $\lambda \geq 0$, *тогда при* $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$ *имеет место формула*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a,q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ *имеет место оценка*

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leq k\leq n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 1.1.1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, *тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S(a,q)\gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Следствие 1.1.2. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leq k\leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Следствия 1.1.1 и 1.1.2 являются обобщениями вышеуказанных результатов Р.Вона для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha, x, y)$.

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона [77], оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных [78] и оценки полных рациональных сумм (1.1), принадлежащей Хуа Ло-кену [32].

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена изучению коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени.

Первый параграф носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах .

Помимо изучения поведения коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ в множестве точек первого класса, основным моментом в исследовании аддитивных задач с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга и проблема Эстермана, является также оценка этих сумм в множестве точек второго класса.

Во втором параграфе второй главы найдена нетривиальная оценка короткой тригонометрических сумм Вейля $T(\alpha; x, y)$ пятой степени в множестве точек второго класса.

Теорема 2.1. *Пусть $x \geq x_0 > 0$, $y_0 < y \leq 0,01x$, α – вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y^4} + \frac{q}{y^5}\right)^{\frac{1}{16}}.$$

Доказательство теоремы 2.1 опирается на следующую лемму 2.3, доказательство которой, в свою очередь, проводится методом Г.Вейля.

Лемма 2.3. *Пусть x и y – вещественные числа, $1 \leq y < x$,*

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^5).$$

Тогда имеет место соотношение

$$|T(\alpha;x,y)|^{16}\le 2^{27}y^{11}\sum_{0<k\le y}\ \sum_{0<r\le y-k}\ \sum_{0<t<y-k-r}\ \sum_{0<u<y-k-r-t}\times$$
$$\times\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t-u}e(120\alpha krtum)\right|+2^{27}y^{15}.$$

Хуа Ло–кен [79] для средних значений сумм Вейля вида

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\le x}e\left(\alpha m^n\right)$$

получил правильную по порядку оценку

$$\int\limits_0^1\left|T(\alpha;x)\right|^{2^k}d\alpha\ll x^{2^k-k+\varepsilon},\qquad 1\le k\le n.$$

В третьем параграфе второй главы доказана теорема 2.2, в которой оценка Хуа Ло–кена обобщается для коротких тригонометрических сумм Вейля пятой степени вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m<x}e(\alpha m^5),$$

то есть для среднего значения суммы Г.Вейля пятой степени, переменная суммирования которой принимает значения из коротких интервалов, получена правильная по порядку оценка.

Теорема 2.2. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x}<y\le 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int\limits_0^1\left|T(\alpha;x,y)\right|^{2^k}d\alpha\ll y^{2^k-k+\varepsilon},\qquad 1\le k\le 5.$$

Подобная оценка для кубических сумм и сумм четвёртой степени получены в работах [80, 81] и, соответственно, нашли приложения при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми для девяти кубов и семнадцати четвёртых степеней [56, 57].

Основу доказательства этой теоремы 2.2 составляют вышеупомянутый метод Вейля и соображение о том, что интеграл от четной степени модуля короткой суммы Вейля выражается через количество решений диофантова уравнения.

В третьей главе, прилагая результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 1.1 о поведении коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ в множестве точек первого класса;
- теорему 2.1 о нетривиальной оценке коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ пятой степени в множестве точек второго класса;
- теорему 2.2 о правильной по порядку оценке интеграла от тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ пятой степени,

доказываем теорему 3.1 об асимптотической формуле в проблеме Варинга для тридцати трёх пятых степеней при условии, что слагаемые почти равны.

Теорема 3.1. *Для числа $J(N, H)$ представлений N суммою 33 пятых степеней чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, 33$ с условиями $\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \leq H$, при $H \geq N^{\frac{1}{5} - \frac{1}{340} + \varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:*

$$J(N, H) = \frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}} + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторую положительную постоянную, а B – абсолютная положительная постоянная, которая определяется соотношением

$$B = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5 \cdot 32!} \sum_{k=0}^{16} (-1)^k C_{33}^k (33 - 2k)^{32}.$$

Последнее утверждение теоремы о том, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ больше некоторой положительной постоянной, непосредственно следует из теоремы 4.6 монографии [79].

Следствие 3.1.1. *Существует такое N_0, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы 33 пятых степеней почти равных чисел x_i:*

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \le N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 33.$$

Доказательство теоремы 3.1 проводится круговым методом Харди – Литтлвуда – Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова. Его основу, как уже отмечали, составляют следствия 1.1.1 и 1.1.2 теоремы 1.1, теорема 2.1 и теорема 2.2.

В заключение автор выражает благодарность З.Х.Рахмонову за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе.

Глава 1

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля в множестве точек первого класса

1.1 Вспомогательные леммы

Лемма 1.1. *Пусть* $f(u)$ *– действительная функция,* $f''(u) > 0$ *в интервале* $[a, b]$*,* α*,* β*,* ε *произвольные числа с условиями* $\alpha \leq f'(a) \leq f'(b) \leq \beta$ *и* $0 < \varepsilon \leq 1$*. Тогда*

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha-\varepsilon<h\leq\beta+\varepsilon} \int\limits_a^b e(f(u) - hu)du + O(\varepsilon^{-1} + \ln(\beta - \alpha + 2)),$$

где постоянная в знаке O *является абсолютным.*

Доказательство см. [77].

Лемма 1.2. *Пусть* $(a, q) = 1$*,* q *– натуральное число,* b *– произвольное целое число. Тогда имеем*

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right) \ll q^{1/2+\varepsilon}(b, q).$$

Доказательство см. [32].

Лемма 1.3. *Пусть действительная функция $f(u)$ и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geq m > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m}.$$

Доказательство см. [5].

Лемма 1.4. *Пусть при $a \leq u \leq b$ вещественная функция $f(u)$ имеет производную n – го порядка ($n > 1$), причем при некотором $A > 0$ выполняется неравенство $A \leq |f^{(n)}(u)|$. Тогда справедлива оценка*

$$\int_a^b e(f(u))du \leq \min(b-a, 6nA^{-\frac{1}{n}}).$$

Доказательство см. [78].

Лемма 1.5. *Пусть $n \geq 3$ – целое число и $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t$ – многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \ldots, a_1, q) = 1$, q – натуральное число. Тогда имеем*

$$|S(q, f(t))| = \left| \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{f(k)}{q}\right) \right| \leq c(n) q^{1-\frac{1}{n}},$$

где

$$c(n) = \begin{cases} \exp(4n), & \text{\textit{при} } n \geq 10; \\ \exp(n(A(n)), & \text{\textit{при} } 3 \leq n \leq 9. \end{cases}$$

$$A(3) = 6,1, \quad A(4) = 5,5, \quad A(5) = 5, \quad A(6) = 4,7,$$

$$A(7) = 4,4, \quad A(8) = 4.2, \quad A(9) = 4,05.$$

Доказательство см. [78].

1.2 Поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля, в множестве точек первого класса

Р. Вон [71] изучая суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\le x}e\left(\alpha m^n\right),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad q\le\tau,\quad (a,q)=1,\quad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

в множестве точек первого класса воспользовавшись оценкой

$$S_b(a,q)=\sum_{k=1}^{q}e\left(\frac{ak^n+bk}{q}\right)\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(b,q),\tag{1.1}$$

принадлежащей Хуа Ло-кену [32], методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{S(a,q)}{q}\int\limits_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right).\quad S(a,q)=S_0(a,q),$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть при выполнении условия

$$|\lambda|\le\frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{x\ S(a,q)}{q}\int\limits_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

Этими оценками он воспользовался он при асимптотической формуле в проблеме Варинга для восьми кубов [28].

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\le x}e(\alpha m^n),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\ q\le\tau,\quad (a,q)=1,\ |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},\tag{1.2}$$

получающиеся из $T(\alpha,x)$ заменой условия $m\le x$ на условие $x-y<m\le x$, в множестве точек первого класса при $n=2,3,4$ были исследованы в работах

[52, 72, 73, 54, 74] и приложены при выводе асимптотических формул с почти равными слагаемыми в проблеме Варинга (для кубов и четвертых степеней) в [56, 57] и кубической задаче Эстермана в [55, 54]. Затем при произвольном фиксированном n сумма $T(\alpha, x, y)$ была изучена в работах [75, 76].

Теорема 1.1. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda \geq 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$ имеет место формула*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a,q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leq k\leq n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 1.1.1. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S(a,q) \gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int\limits_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt.$$

Следствие 1.1.2. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leq k\leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}}\right).$$

Следствия 1.1.1 и 1.1.2 являются обобщением результатов Р.Вона [71] для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ вида (1.2).

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона [77], оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных [78] и оценки полных рациональных сумм (1.1) принадлежащей Хуа Ло-кену [32].

Доказательство теоремы 1.1. Пользуясь ортогональным свойством полной линейной рациональной тригонометрической суммы, находим

$$
\begin{aligned}
T(\alpha;x,y) &= \sum_{x-y<m\le x} e\left(\frac{ak^n}{q}+\lambda m^n\right)\sum_{\substack{k=1\\ k\equiv m(mod q)}}^{q} 1 = \\
&= \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n}{q}\right)\sum_{\substack{x-y<m\le x\\ m\equiv k(mod q)}} e(\lambda m^n) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n}{q}\right)\sum_{x-y<m\le x} e(\lambda m^n)\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q} e\left(\frac{b(k-m)}{q}\right) = \\
&= \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q} T_b(\lambda;x,y)S_b(a,q). \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

где

$$T_b(\lambda;x,y) = \sum_{x-y<m\le x} e\left(\lambda m^n - \frac{bm}{q}\right), \quad T(\lambda;x,y) = T_0(\lambda;x,y),$$

$$S_b(a,q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n+bk}{q}\right), \quad S(a,q) = S_0(a,q).$$

Через $R(\alpha;x,y)$ обозначим часть суммы $T(\alpha;x,y)$ которая определяется соотношением (1.3), в котором отсутствует слагаемое при $b=0$, то есть

$$R(\alpha;x,y) = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} T_b(\lambda;x,y)S_b(a,q). \qquad (1.4)$$

Имея в виду, что $n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\}$ – целое число, представим $T_b(\lambda;x,y)$ в виде

$$T_b(\lambda;x,y) = \sum_{x-y<m\le x} e\left(f(m,b)\right), \ f(u,b) = \lambda u^n - (n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\})u - \frac{bu}{q}.$$

Находим производную первого и второго порядка функции $f(u,b)$:

$$f'(u,b) = n\lambda(u^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q},$$

$$f''(u,b) = n(n-1)\lambda u^{n-2} \geq 0.$$

Следовательно функция $f'(u,b)$, $u \in (x-y,x]$ является неубывающей, поэтому при всех $u \in [x-y,x)$ и любом b, $b = 1,2,\ldots,q-1$ имеет место неравенство

$$f'(x-y,b) < f'(u,b) \leq f'(x,b). \tag{1.5}$$

Оценивая $f'(x,b)$ сверху, имеем:

$$f'(x,b) = \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < 1 - \frac{b}{q}, \tag{1.6}$$

Для оценки снизу $f'(x-y,b)$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} f'(x-y,b) &= -n\lambda\left(x^{n-1} - (x-y)^{n-1}\right) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} = \\ &= n\lambda\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k}y^k + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} = \\ &= -n(n-1)\lambda x^{n-2}y + n\lambda\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k}y^k + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q}. \end{aligned}$$

Пользуясь монотонностью $f'(u,b)$, условием $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и неравенством

$$W = \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k}y^k \geq 0, \quad n \geq 3, \quad 3x \geq (n-3)y,$$

имеем

$$\begin{aligned} f'(u,b) \leq& f'(x,b) = \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < 1, \\ f'(u,b) \geq& f'(x-y,b) = -n(n-1)\lambda x^{n-2}y + n\lambda W + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} \geq \\ &\geq -n(n-1)\lambda x^{n-2}y - \frac{b}{q} \geq -\frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} - \frac{b}{q} \geq -1 + \frac{1}{2q}. \end{aligned}$$

Поэтому, применяя к сумме $T_b(\lambda; x, y)$ формулу суммирования Пуассона (лемма 1.1) при $\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \varepsilon = 0,5$, получим

$$T_b(\lambda; x, y) = I(-1, b) + I(0, b) + I(1, b) + O(1), \tag{1.7}$$

$$I(h, b) = \int\limits_{x-y}^{x} e(f_h(u, b))du, \quad f_h(u, b) = f(u, b) - hu.$$

Функция $f'_h(u, b) = n\lambda(u^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h$ в отрезке $u \in [x-y, x]$ является неубывающей функцией, поэтому

$$f'_h(x-y, b) \leq f'_h(u, b) \leq f'_h(x, b),$$

что можно представить в виде

$$\{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h - \eta < f'_h(u, b) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h, \tag{1.8}$$

$$\eta = n(n-1)\lambda x^{n-2}y - n\lambda W \leq n(n-1)\lambda x^{n-2}y \leq \frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} \leq \frac{1}{2q}.$$

Далее, подставляя (1.7) в (1.3) и (1.4), найдём

$$T(\alpha; x, y) = T_{-1} + T_0 + T_1 + O\left(\frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}|S_b(a, q)|\right), \tag{1.9}$$

$$R(\alpha; x, y) = R_{-1} + R_0 + R_1 + O\left(\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}|S_b(a, q)|\right), \tag{1.10}$$

$$T_h = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} I(h, b)S_b(a, q), \quad R_h = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} I(h, b)S_b(a, q).$$

Пользуясь оценкой (1.1), оценим остаточный член:

$$\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}|S_b(a, q)| \ll q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}(b, q) = q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{\delta\backslash q}\delta \sum_{\substack{1\leq b\leq q-1\\ (b,q)=\delta}} 1 \leq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\tau(q).$$

Оценим каждую сумму T_h и R_h отдельно.

Оценка T_1 и R_1. Полагая $h=1$ в (1.8), имеем

$$f_1'(u,b)\le\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}-1\le-\frac{b}{q}<0.$$

Оценивая интеграл по величине первой производной (лемма 1.3), имеем

$$|I(1,b)|=\left|\int\limits_{x-y}^{x}e(f_1(u,b))du\right|\ll\frac{q}{b}.$$

Отсюда и из (1.1), имеем

$$R_1=\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}I(1,b)S_b(a,q)\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

В случае $b=0$, воспользовавшись неравенством

$$f_1^{(k)}(u,q)\ge n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda(x-y)^{n-k}\gg\lambda x^{n-k},\quad k=2,3,\dots,n,$$

оценивая интеграл $I(1,0)$ по величине k – ой производной (лемма 1.4), найдем

$$|I(1,0)|\ll\min_{2\le k\le n}\left(y,\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right).$$

Отсюда и воспользовавшись оценкой $|S(a,q)|\ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 1.2), с учётом оценки R_1 получим

$$T_1\le|R_1|+\frac{|I(1,0)||S(a,q)|}{q}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}+\min_{2\le k\le n}\left(yq^{-\frac{1}{n}},\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Оценка T_{-1} и R_{-1}. Полагая $h=-1$ в (1.8), имеем

$$f_{-1}'(u,b)>\{n\lambda x^{n-1}\}+\frac{q-b}{q}-\eta\ge\frac{q-b}{q}.$$

Интеграл $I(-1,b)$ также оценим по величине первой производной (лемма 1.3). Имеем

$$|I(-1,b)|=\left|\int\limits_{x-y}^{x}e(f_{-1}(u,b))du\right|\ll\frac{q}{q-b}.$$

Поступая аналогично, как случае оценки R_1, получим

$$R_{-1}=\sum_{b=1}^{q-1}\frac{I(-1,b)S_b(a,q)}{q}\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{q-b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

$$T_{-1}\leq|R_{-1}|+\frac{|I(-1,0)||S(a,q)|}{q}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}+\frac{|S_b(a,q)|}{q}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

Оценка R_0. Если $\{n\lambda x^{n-1}\}\leq\frac{1}{2q}$, то, полагая $h=0$ в (1.8), имеем

$$f_0'(u,b)\leq\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}\leq\frac{1-2b}{2q}\leq-\frac{b}{2q}<0.$$

Интеграл $I(0,b)$, также оценивая по величине первой производной, найдем

$$|I(0,b)|=\left|\int\limits_{x-y}^{x}e(f_0(u,b))du\right|\ll\frac{q}{b}.$$

Поступая аналогично как случае оценки R_1, получим

$$R_0=\sum_{b=1}^{q-1}\frac{I(0,b)S_b(a,q)}{q}\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

Отсюда, из оценок R_1 и R_{-1} с учётом (1.10), получим первое утверждение теоремы.

Оценка T_0. При $\{n\lambda x^{n-1}\}\geq\frac{1}{2q}$, определим натуральное число r соотношением

$$\frac{r}{2q}\leq\{n\lambda x^{n-1}\}<\frac{r+1}{2q},\qquad 1\leq r\leq 2q-1.$$

Отсюда, из неравенствах (1.8) при $h=0$ и условия $\eta\leq\frac{1}{2q}$, найдем

$$f_0'(u,b)>\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}-\eta\geq\frac{r-2b-1}{2q},\tag{1.11}$$

$$f_0'(u,b)\leq\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}<\frac{r-2b+1}{2q}.\tag{1.12}$$

Пусть $r=2r_1$ – чётное ($1\leq r_1\leq q-1$). Отрезок суммирования $0\leq b\leq q-1$ в сумме T_0 разобьем на следующие три множества:

$$0\leq b\leq r_1-1,\qquad b=r_1,\qquad r_1+1\leq b\leq q-1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (1.11) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (1.12) меньше нуля, то есть

$$f_0'(u,b) > \frac{2r_1-2b-1}{2q} \geq \frac{r_1-b}{2q}, \qquad 0 \leq b \leq r_1-1,$$
$$f_0'(u,b) < \frac{2r_1-2b+1}{2q} \leq \frac{r_1-b}{2q}, \qquad r_1+1 \leq b \leq q-1.$$

Воспользовавшись этими неравенствами, оценивая интеграл $I(0,b)$ по величине первой производной, найдём

$$I(0,b) = \int\limits_{x-y}^{x} e(f_0(u,b))du \ll \frac{q}{|r_1-b|}, \quad b \neq r_1.$$

В случае $b = r_1$, оценивая аналогично как в случае оценке интеграла $I(1,0)$, найдём

$$|I(0,r_1)| \ll \min_{2\leq k\leq n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right).$$

Воспользовавшись этими оценками и оценкой $|S(a,q)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 1.2), получим

$$T_0 = \sum_{b=0}^{q-1}\frac{I(0,b)S_b(a,q)}{q} \ll q^{-\frac{1}{n}}\left(\sum_{\substack{b=0,\\ b\neq r_1}}^{q-1}\frac{q}{|r_1-b|} + \min_{2\leq k\leq n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right)\right) \ll$$
$$\ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leq k\leq n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Пусть теперь $r = 2r_1+1$ – неч1тное ($0 \leq r_1 \leq q-1$). Отрезок суммирования $0 \leq b \leq q-1$ в сумме R_0 разобьём на следующие три множества:

$$0 \leq b \leq r_1-1, \qquad b = r_1,\, r_1+1, \qquad r_1+2 \leq b \leq q-1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (1.11) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (1.12) меньше нуля, то есть

$$f_0'(u,b) > \frac{2r_1+1-2b-1}{2q} = \frac{r_1-b}{q}, \qquad 0 \leq b \leq r_1-1,$$
$$f_0'(u,b) < \frac{2r_1+1-2b+1}{2q} \leq \frac{r_1-b}{2q}, \qquad r_1+2 \leq b \leq q-1.$$

Следовательно,

$$I(0,b)=\int\limits_{x-y}^{x} e(f_0(u,b))du \ll \frac{q}{|r_1-b|}, \quad b\neq r_1-1,\, r_1.$$

В случае $b=r_1-1, r_1$, поступая аналогично как в предыдущем случае оценки $I(0,r_1)$, найдем

$$|I(0,b)|\ll \min_{2\le k\le n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right), \qquad b=r_1,\ r_1+1.$$

Из этих оценок для $I(0,b)$ получим

$$T_0\le \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}|I(0,b)||S_b(a,q)| \ll q^{-\frac{1}{n}}\left(\sum_{\substack{b=0,\\ b\neq r_1,r_1+1}}^{q-1}\frac{q}{|r_1-b|}+\min_{2\le k\le n}\left(y,\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right)\right)\ll$$
$$\ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q+\min_{2\le k\le n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Подставляя оценки для T_1, T_{-1} и T_0 в (1.9), получим второе утверждение теоремы.

Замечание. Случай $\lambda<0$ сводится к случаю $\lambda\ge 0$, если формуле (1.3) придадим форму

$$\overline{T(\alpha;x,y)}=\frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}T_{q-b}(-\lambda;x,y)S_{q-b}(q-a,q)=\frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}T_b(-\lambda;x,y)S_b(q-a,q).$$

Глава 2

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля пятой степени

2.1 Известные леммы

Лемма 2.1. *Пусть H и y произвольные целые числа, $H \geq 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

Доказательство см. [82].

Лемма 2.2. *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad q \geq 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда при β, $U > 0$, $P > 1$ иммеем

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha x + \beta\|}\right) \leq 6\left(\frac{P}{q} + 1\right)(U + q\ln q).$$

Доказательство см. [82].

2.2 Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля, в множестве точек второго класса

Основным моментом изучения аддитивных задач с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга и проблема Эстермана кроме поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ в множестве точек первого класса является также их оценка в в множестве точек второго класса.

В этом параграфе найдена нетривиальная оценка короткой тригонометрических сумм Вейля пятой степени вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^5).$$

в множестве точек второго класса.

Лемма 2.3. *Пусть x и y – вещественные числа, $1 \le y < x$, α – вещественное. Тогда имеет место соотношение*

$$|T(\alpha; x, y)|^{16} \le 2^{27} y^{11} \sum_{0<k\le y} \sum_{0<r\le y-k} \sum_{0<t<y-k-r} \sum_{0<u<y-k-r-t} \times \\ \times \left| \sum_{x-y<m<x-k-r-t-u} e(120\alpha krtum) \right| + 2^{27} y^{15}.$$

Доказательство. Воспользовавшись тождеством

$$(m+k)^5 - m^5 = kf_1(m) + k^5, \qquad f_1(m) = 5m^4 + 10km^3 + 10k^2m^2 + 5k^3m,$$

имеем

$$
\begin{aligned}
|T(\alpha;x,y)|^2 &= \sum_{x-y<m,n\le x} e(\alpha(m^5-n^5)) = \sum_{x-y<m<n\le x} e(\alpha(m^5-n^5)) + \\
&+ \sum_{x-y<n<m\le x} e(\alpha(m^5-n^5)) + \sum_{x-y<m\le x} 1 \le \\
&\le 2\left|\sum_{x-y<m<x}\ \sum_{m<n\le x} e(\alpha(n^5-m^5))\right| + 2y = \\
&= 2\left|\sum_{x-y<m<x}\ \sum_{0<k\le x-m} e(\alpha((m+k)^5-m^5))\right| + 2y = \\
&= 2\left|\sum_{0<k\le y} e(\alpha k^5) \sum_{x-y<m\le x-k} e(\alpha k f_1(m))\right| + 2y \le \\
&\le 2\sum_{0<k\le y} |W(k)| + 2y, \quad W(k) = \sum_{x-y<m\le x-k} e(\alpha k f_1(m)).
\end{aligned}
$$

Возводя обе части полученного неравенства в восьмой степень, затем трижды последовательно воспользовавшись соотношением $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ и неравенством Коши найдем

$$
\begin{aligned}
&|T(\alpha;x,y)|^{16} \le 2^8 \left(\sum_{0<k\le y} |W(k)| + y\right)^8 \le 2^8 \left(2\left(\sum_{0<k\le y} |W(k)|\right)^2 + 2y^2\right)^4 = \\
&= 2^{12}\left(\left(\sum_{0<k\le y} |W(k)|\right)^2 + y^2\right)^4 \le 2^{12}\left(y\sum_{0<k\le y} |W(k)|^2 + y^2\right)^4 \le \\
&\le 2^{12}\left(\left(2y\sum_{0<k\le y} |W(k)|^2\right)^2 + (2y^2)^2\right)^2 = 2^{16}\left(y^2\left(\sum_{0<k\le y} |W(k)|^2\right)^2 + y^4\right)^2 \le \\
&\le 2^{16}\left(y^3\sum_{0<k\le y} |W(k)|^4 + y^4\right)^2 \le 2^{16}\left(2\left(y^3\sum_{0<k\le y} |W(k)|^4\right)^2 + 2y^8\right) \le \\
&\le 2^{17}y^7 \sum_{0<k\le y} |W(k)|^8 + 2^{17}y^8. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Далее воспользовавшись тождеством

$$
\begin{aligned}
f_1(m+r)-f_1(m) &= 5((m+r)^4-m^4)+10((m+r)^3-m^3)k+\\
&\quad +10((m+r)^2-m^2)k^2+5k^3r=\\
&= 5(4rm^3+6r^2m^2+4mr^3+r^4)+10(3rm^2+3r^2m+r^3)k+\\
&\quad +10(2rm+r^2)k^2+5k^3r=\\
&= 20rm^3+(30r^2+30kr)m^2+(20r^3+30kr^2+20k^2r)m+\\
&\quad +5r^4+10kr^3+10k^2r^2+5k^3r=\\
&= 10r\left(2m^3+(3k+3r)m^2+(2k^2+3kr+2r^2)m\right)+5k^3r+\\
&\quad +10k^2r^2+10kr^3+5r^4=\\
&= 10rf_2(m)+5k^3r+10k^2r^2+10kr^3+5r^4,
\end{aligned}
$$

$$
f_2(m)=2m^3+(3k+3r)m^2+(2k^2+3kr+2r^2)m,
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
|W(k)|^2 &= \sum_{x-y<m,n\le x-k} e(\alpha k(f_1(n)-f_1(m)))\le\\
&\le 2\left|\sum_{x-y<m\le x-k}\ \sum_{m<n\le x-k} e(\alpha k(f_1(n)-f_1(m)))\right|+2y\le\\
&\le 2\left|\sum_{x-y<m<x-k}\ \sum_{0<r\le x-k-m} e(\alpha k(f_1(m+r)-f_1(m)))\right|+2y=\\
&= 2\left|\sum_{0<r\le y-k}\ \sum_{x-y<m<x-k-r} e(\alpha k(f_1(m+r)-f_1(m)))\right|+2y=\\
&= 2\left|\sum_{0<r\le y-k} e(\alpha k(5k^3r+10k^2r^2+10kr^3+5r^4))\times\right.\\
&\quad\left.\times\sum_{x-y<m<x-k-r} e(10\alpha krf_2(m))\right|+2y\le 2\sum_{0<r\le y-k}|W(k,r)|+2y,
\end{aligned}
$$

$$
W(k,r)=\sum_{x-y<m<x-k-r} e(10\alpha krf_2(m)). \tag{2.2}
$$

Далее поступая аналогично воспользовавшись тождеством

$$
\begin{aligned}
&f_2(m+t)-f_2(m)=\\
&=2((m+t)^3-m^3)+(3k+3r)((m+t)^2-m^2)+(2k^2+3kr+2r^2)t=\\
&=6tm^2+(6t^2+2(3k+3r)t)m+2t^3+(3k+3r)t^2+(2k^2+3kr+2r^2)t=\\
&=6tf_3(m)+2t^3+(3k+3r)t^2+(2k^2+3kr+2r^2)t,\\
&f_3(m)=m^2+(k+r+t)m.
\end{aligned}
$$

найдём:

$$
\begin{aligned}
|W(k,r)|^2 &\le 2\left|\sum_{x-y<m<x-k-r}\ \sum_{m<n<x-k-r} e(10\alpha kr(f_2(n)-f_2(m)))\right|+2y=\\
&=2\left|\sum_{x-y<m<x-k-r}\ \sum_{0<t<x-k-r-m} e(10\alpha kr(f_2(m+t)-f_2(m)))\right|+2y=\\
&=2\left|\sum_{0<t<y-k-r}\ \sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(10\alpha kr(f_2(m+t)-f_2(m)))\right|+2y=\\
&=2\left|\sum_{0<t<y-k-r} e(10\alpha kr(2t^3+(3k+3r)t^2+(2k^2+3kr+2r^2)t))\times\right.\\
&\qquad\left.\times\sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(60\alpha krf_3(m))\right|+2y\le\\
&\le 2\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)|+2y,\\
&\quad W(k,r,t)=\sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(60\alpha krtf_3(m)).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Воспользовавшись тождеством $f_3(m+u)-f_3(m)=2um+u^2+(k+r+t)u$

получим

$$|W(k,r,t)|^2 \le 2\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t}\ \sum_{m<n<x-k-r-t} e(60\alpha krt(f_3(n)-f_3(m)))\right| + 2y =$$

$$= 2\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t}\ \sum_{0<n-m<x-k-r-t-m} e(60\alpha krt(f_3(n)-f_3(m)))\right| + 2y =$$

$$= 2\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t}\ \sum_{0<u<x-k-r-t-m} e(60\alpha krt(f_3(m+u)-f_3(m)))\right| + 2y =$$

$$= 2\left|\sum_{0<u<y-k-r-t} e(60\alpha krt(k+r+t)u) \sum_{x-y<m<x-k-r-t-u} e(120\alpha krtum)\right| + 2y \le$$

$$\le 2\sum_{0<u<y-k-r-t}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t-u} e(120\alpha krtum)\right| + 2y. \qquad (2.4)$$

Последовательно подставляя в (2.1) значений $W(k)$, $W(k,r)$ и $W(k,r,t)$ соответственно (2.2), (2.3) и (2.4)и каждый раз воспользовавшись соотношением $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ и неравенством Коши, найдем

$$|T(\alpha;x,y)|^{16} \le 2^{17}y^7 \sum_{0<k\le y} |W(k)|^8 + 2^{17}y^8 \le$$

$$\le 2^{17}y^7 \sum_{0<k\le y}\left(2\sum_{0<r\le y-k}|W(k,r)| + 2y\right)^4 + 2^{17}y^8 \le$$

$$\le 2^{17}y^7 \sum_{0<k\le y}\left(8\left(\sum_{0<r\le y-k}|W(k,r)|\right)^2 + 8y^2\right)^2 + 2^{17}y^8 \le$$

$$\le 2^{23}y^7 \sum_{0<k\le y}\left(y\sum_{0<r\le y-k}|W(k,r)|^2 + y^2\right)^2 + 2^{17}y^8 \le$$

$$\le 2^{23}y^9 \sum_{0<k\le y}\left(\sum_{0<r\le y-k}\left(2\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)| + 2y\right) + y\right)^2 + 2^{17}y^8 \le$$

$$\leq 2^{23}y^9\sum_{0<k\leq y}\left(2\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)|+2y(y-k)+y\right)^2+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{25}y^9\sum_{0<k\leq y}\left(\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)|+y^2\right)^2+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{25}y^9\sum_{0<k\leq y}\left(2\left(\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)|\right)^2+2y^4\right)+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{26}y^9\sum_{0<k\leq y}\left((y-k)\sum_{0<r\leq y-k}\left(\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)|\right)^2+y^4\right)+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{26}y^9\sum_{0<k\leq y}\left((y-k)^2\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)|^2+y^4\right)+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{26}y^{11}\sum_{0<k\leq y}\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}|W(k,r,t)|^2+2^{26}y^{14}+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{26}y^{11}\sum_{0<k\leq y}\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\left(2\sum_{0<u<y-k-r-t}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t-u}e(120\alpha krtum)\right|+2y\right)+$$

$$+2^{26}y^{14}+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{27}y^{11}\sum_{0<k\leq y}\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\sum_{0<u<y-k-r-t}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t-u}e(120\alpha krtum)\right|+$$

$$+2^{27}y^{11}(y-1)^4+2^{26}y^{14}+2^{17}y^8\leq$$

$$\leq 2^{27}y^{11}\sum_{0<k\leq y}\sum_{0<r\leq y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\sum_{0<u<y-k-r-t}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t-u}e(120\alpha krtum)\right|+2^{27}y^{15}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть* $x\geq x_0>0$, $y_0<y\leq 0,01x$, α *– вещественное число,*

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{1}{q^2},\qquad (a,q)=1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha;x,y)| \ll y^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y^4}+\frac{q}{y^5}\right)^{\frac{1}{16}}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.3 и 2.1 имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^{16} \le 2^{27}y^{11}\sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\sum_{0<u<y-k-r-t}\times$$
$$\times\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t-u} e(120\alpha krtum)\right| + 2^{27}y^{15} \ll$$
$$\ll 2^{27}y^{11}\sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\sum_{0<u<y-k-r-t}\min\left(y,\frac{1}{\|120\alpha krtu\|}\right)+2^{27}y^{15}=$$
$$=2^{27}y^{11}\sum_{0<n\le y^4}\eta(n)\min\left(y,\frac{1}{\|120\alpha n\|}\right)+2^{27}y^{15},$$
$$\eta(n)=\sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\sum_{\substack{0<u<y-k-r-t\\ n=120krtu}}1\le\tau_4(n),$$

Далее воспользовавшись соотношением $\tau_4(n)\ll n^{\varepsilon}$, затем леммой 2.2, найдём

$$|T(\alpha;x,y)|^{16}\ll y^{11+\varepsilon}\sum_{0<n\le y^4}\min\left(y,\frac{1}{\|120\alpha n\|}\right)+y^{15}<$$
$$< y^{11+\varepsilon}\sum_{0<n\le 120y^4}\min\left(y,\frac{1}{\|\alpha n\|}\right)+y^{15}\ll$$
$$\ll y^{11+\varepsilon}\left(\frac{y^4}{q}+1\right)(y+q\ln q)+y^{15}=$$
$$=y^{16+\varepsilon}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y^4}\right)\left(1+\frac{q}{y}\ln q\right)+y^{15}=$$
$$=y^{16+\varepsilon}\left(\frac{1}{q}+\frac{1+\ln q}{y}+\frac{1}{y^4}+\frac{q\ln q}{y^5}\right)\ll$$
$$\ll y^{16+\varepsilon}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q}{y^5}\right)\ln q.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

2.3 Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени

Хуа Ло–кен [79] для средних значений сумм Вейля вида

$$T(\alpha, x) = \sum_{m\leq x} e\left(\alpha m^n\right)$$

получил правильную по порядку оценку

$$\int\limits_0^1 \left|T(\alpha; x)\right|^{2^k} d\alpha \ll x^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1\leq k\leq n.$$

В этом параграфе эта оценка Хуа Ло–кена обобщается для коротких тригонометрических сумм Вейля пятой степени вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^5),$$

то есть для среднего значения сумм Г.Вейля пятой степени, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получена правильная по порядку оценка.

Теорема 2.2. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leq 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int\limits_0^1 \left|T(\alpha; x, y)\right|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1\leq k\leq 5.$$

Подобная оценка для кубических сумм и сумм четвёртой степени получены в работах [80, 81] и соответственно были приложены при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми для девяти кубов и семнадцати четвёртых степеней [56, 57].

Основу доказательства этой теоремы составляют вышеупомянутый метод Вейля и соображение о том, что интеграл от четной степени модуля короткой суммы Вейля выражается через количество решений диофантового уравнения.

Доказательство. **1.** Имеем

$$
\begin{aligned}
&|T(\alpha,x,y)|^2 = T(\alpha,x,y)\cdot\overline{T(\alpha,x,y)} = \\
&=\sum_{x-y<m_1\le x} e(\alpha m_1^5) \sum_{x-y<m\le x} e(-\alpha m^5) = \sum_{x-y<m\le x}\sum_{x-y<m_1\le x} e(\alpha(m_1^5-m^5)) = \\
&=\sum_{x-y<m\le x}\sum_{x-y<m_1\le x} e(\alpha(m_1-m)(m_1^4+m_1^3m+m_1^2m^2+m_1m^3+m^4)) = \\
&=\sum_{x-y<m\le x}\sum_{x-y-m<m_1-m\le x-m} e(\alpha(m_1-m)(m_1^4+n^3m+m_1^2m^2+m_1m^3+m^4)).
\end{aligned}
$$

Переменную суммирования m_1, обозначая $m_1=m+h_1$ и имея в виду, что

$$
\begin{aligned}
&m_1^4+m_1^3m+m_1^2m^2+m_1m^3+m^4 = \\
=&(m+h_1)^4+(m+h_1)^3m+(m+h_1)^2m^2+(m+h_1)m^3+m^4 = f_1(m,h_1),
\end{aligned}
$$

где

$$
f_1(m,h_1) = h_1^4+5mh_1^3+10m^2h_1^2+10m^3h_1+5m^4,
$$

найдём

$$
\begin{aligned}
|T(\alpha,x,y)|^2 &= \sum_{x-y<m\le x}\sum_{x-y-m<h_1\le x-m} e(\alpha h_1 f_1(m,h_1)) = \\
&= \sum_{-y<h_1<y}\sum_{\substack{x-y<m\le x\\ x-y-h_1<m\le x-h_1}} e(\alpha h_1 f_1(m,h_1)).
\end{aligned}
$$

Обозначая интервал изменения переменного m в последней сумме через I_1, имея в виду, что

$$
I_1 = I_1(h_1) = (x-y,x)\cap(x-y-h_1,x-h_1),
$$

имеем

$$
|T(\alpha,x,y)|^2 = \sum_{|h_1|<y}\sum_{m\in I_1} e(\alpha h_1 f_1(m,h_1)). \tag{2.5}
$$

Обозначая через $r_1(h)$ – число решений диофантова уравнения

$$h_1 f_1(m, h_1) = h, \tag{2.6}$$

относительно переменных m и h_1, $|h_1| < y$, $m \in I_1$, найдем

$$|T(\alpha; x, y)|^2 = \sum_h r_1(h) e(\alpha h), \tag{2.7}$$

Заметим, что если $h \neq 0$, то $r_1(h) \leq 2\tau(h) \ll h^\varepsilon$. Из условий

$$m \in I_1 = (x-y, x) \cap (x-y-h_1, x-h_1), \qquad |h_1| < y$$

следует, что для второго множителя левой части (2.6) выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&f_1(m, h_1) = h_1^4 + 5mh_1^3 + 10m^2h_1^2 + 10m^3h_1 + 5m^4 \geq \\
&\geq -5xy^3 - 10x^3y + 5(x-y)^4 = \\
&= 5(x^3(x-5y) + 6xy^2(x-y) + y^4) \geq \\
&\geq 5(x^3(x-0,5x) + 6x^2(x-0,1x) + x^2) = \\
&= 5(0,5x^4 + 5,4x^3 + x^2) > 0.
\end{aligned}$$

то есть, второй множитель в левой части (2.6) положителен. Поэтому диофантово уравнение

$$h_1 f_1(m, h_1) = 0$$

имеет только решение вида $(0, m)$, $m \in I$, количество которых равно

$$r_1(0) = \#I_1(0) = \#\{(x-y, x)\} < y.$$

С другой стороны

$$|T(\alpha; x, y)|^2 = \sum_{x-y<n\leq x} \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha(n^5 - m^5)) = \sum_h s_1(h) e(-\alpha h), \tag{2.8}$$

где $s_1(h)$– число решений уравнения $m^5 - n^5 = h$ с $x - y < m, n \leq x$. В частности $s_1(0) = y$, так как для положительных m и n уравнения $m^5 = n^5$

и $m=n$ эквивалентны. Далее в (2.8), полагая $\alpha=0$, находим

$$\sum_h s_1(h)=T^2(0;x,y)=y^2. \tag{2.9}$$

Умножая (2.7) и (2.8), интегрируя по α, а затем пользуясь значением $r_1(0)$, $s_1(0)$, оценкой $r_1(h)\ll h^\varepsilon$ и соотношением (2.9), найдём

$$\begin{aligned}
\int_0^1|T(\alpha;x,y)|^4d\alpha&=\int_0^1\sum_h r_1(h)e(\alpha h)\sum_{h'}s_1(h')e(-\alpha h')d\alpha=\\
&=\sum_h r_1(h)\sum_{h'}s_1(h')\int_0^1 e(\alpha(h-h'))d\alpha=\\
&=\sum_h r_1(h)s_1(h)=r_1(0)s_1(0)+\sum_{h\neq0}r_1(h)s_1(h)\le\\
&\le|I_1|y+\sum_{h\neq0}r_1(h)s_1(h)\le y^2+\max_{h\neq0}r_1(h)\sum_h s_1(h)\le y^{2+\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

2. Возводя обе части равенства (2.5) в квадрат, затем применяя к сумме по h_1 неравенство Коши, имеем

$$\begin{aligned}
|T(\alpha;x,y)|^4&=\left(\sum_{|h_1|<y}\sum_{m\in I_1}e(\alpha h_1f_1(m,h_1))\right)^2\le\left(\sum_{|h_1|<y}\left|\sum_{m\in I_1}e(\alpha h_1f_1(m,h_1))\right|\right)^2\le\\
&\le\sum_{|h_1|<y}1\cdot\sum_{|h_1|<y}\left|\sum_{m\in I_1}e(\alpha h_1f_1(m,h_1))\right|^2\le\\
&\le 2y\sum_{|h_1|<y}\sum_{m\in I_1}\sum_{m_1\in I_1}e(\alpha h_1(f_1(m_1,h_1)-f_1(m,h_1)).
\end{aligned}$$

Пользуясь явным значением функции $f_1(m,h_1)$, найдём

$$\begin{aligned}
f_1(m_1,h_1)-f_1(m,h_1)&=h_1^4+5m_1h_1^3+10m_1^2h_1^2+10m_1^3h_1+5m_1^4-\\
&-h_1^4-5mh_1^3-10m^2h_1^2-10m^3h_1-5m^4=\\
&=5h_1^3(m_1-m)+10h_1^2(m_1^2-m^2)+10h_1(m_1^3-m^3)+5(m_1^4-m^4)=\\
&=5(m_1-m)\left(h_1^3+2h_1^2(m_1+m)+2h_1(m_1^2+m_1m+m^2)+\right.\\
&\left.\quad+(m_1^3+m_1^2m+m_1m^2+m^3)\right).
\end{aligned}$$

Переменную суммирования m_1, обозначая $m_1 = h_2 + m$ и имея в виду, что

$$f_1(m+h_2,h_1) - f_1(m,h_1) = 5h_2\left(h_1^3 + 2h_1^2(h_2+2m) + \right.$$
$$\left. +2h_1(h_2^2+3h_2m+3m^2) + (h_2^3+4h_2^2m+6h_2m^2+4m^3)\right) = 5h_2f_2(m,h_1,h_2).$$

имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^4 \ll y\sum_{|h_1|<y}\sum_{m\in I_1}\sum_{m+h_2\in I_1} e(5\alpha h_1h_2f_2(m,h_1,h_2)) =$$
$$= y\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{\substack{m\in I_1\\ m+h_2\in I_1}} e(5\alpha h_1h_2f_2(m,h_1,h_2)).$$

Обозначая в последней сумме интервал изменения переменного m через

$$I_2 = I_1\cap\{m : m+h_2\in I_1\} = (x-y,x)\cap(x-y-h_1,x-h_1)\cap$$
$$\cap(x-y-h_2,x-h_2)\cap(x-y-h_1-h_2,x-h_1-h_2),$$

найдём

$$|T(\alpha;x,y)|^4 \ll y\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{m\in I_2} e(5\alpha h_1h_2f_2(m,h_1,h_2)). \qquad (2.11)$$

Обозначая через $r_2(h)$– число решений диофантового уравнения

$$5h_1h_2f_2(m,h_1,h_2) = h$$

относительно h_1,h_2 и m; $|h_1| < y$, $|h_2| < y$, $m\in I_2$, представим неравенство (2.11) в виде

$$|T(\alpha;x,y)|^4 \ll y\sum_h r_2(h)e(\alpha h). \qquad (2.12)$$

Заметим, что $r_2(h) \ll \tau_3(h) \ll h^\varepsilon$ при $h\neq 0$. Из условий $m\in I_2$, $|h_1| < y$, $|h_2| < y$ следует, что

$$2m + h_2 \geq 2x - 3y > 0,$$
$$h_2^2 + 3h_2m + 3m^2 = \left(h_2 + \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2 > 0,$$
$$h_2^2 + 3h_2m + 3m^2 = \left(h_2 + \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2 < 3x^2 + 3xy + y^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f_2(m,h_1,h_2) = h_1^3 + 2h_1^2(h_2+2m) + 2h_1(h_2^2+3h_2m+3m^2)+ \\ + (h_2^3+4h_2^2m+6h_2m^2+4m^3) > \\ > -y^3 - 2y(3x^2+3xy+y^2) + (-y^3-6yx^2+4x^3) = \\ = 4x^3-6x^2y-6xy^2-4y^3 > 4x^3-0,6x^3-0,06x^3-0,004x^3 > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнение

$$5h_1h_2f_2(m,h_1,h_2) = 0$$

имеет только решение вида $(0,h_2,m)$ и $(h_1,0,m)$. Подсчитав количество таких решений найдём

$$r_2(0) = \sum_{|h_2|<y}\sum_{m\in I_2} 1 + \sum_{|h_1|<y}\sum_{m\in I_2} 1 \le 4y|I_2| \le 4y^2.$$

Также имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^4 = \sum_{x-y<n_1,n_2,m_1,m_2\le x} e(\alpha(n_1^5+n_2^5-m_1^5-m_2^5)) = \sum_h s_2(h)e(-\alpha h), \quad (2.13)$$

где $s_2(h)$ – число решений уравнения

$$m_1^5+m_2^5-n_1^5-n_2^5 = h, \quad x-y<m_1,m_2,n_1,n_2<x.$$

В равенстве (2.13) полагая $\alpha=0$, находим

$$\sum_h s_2(h) = |T(0;x,y)|^4 \le y^4. \quad (2.14)$$

Пользуясь соотношением (2.10), найдём

$$s_2(0) = \int_0^1 |T(\alpha;x,y)|^4 d\alpha \le y^{2+\varepsilon}.$$

Здесь также как в соотношении (2.10), умножая (2.12) и (2.13), интегрируя по α, а затем, воспользовавшись значениями $r_2(0)$, $s_2(0)$, оценкой $r_2(h) \ll h^\varepsilon$ и соотношением (2.14), найдём

$$\int\limits_0^1 |T(\alpha;x,y)|^8 d\alpha \ll \int\limits_0^1 y\sum_h r_2(h)e(\alpha h)\sum_{h'} s_2(h')e(-\alpha h')d\alpha =$$

$$= y\sum_h r_2(h)\sum_{h'} s_2(h')\int\limits_0^1 e(\alpha(h-h'))d\alpha = y\sum_h r_2(h)s_2(h) =$$

$$= y\left(r_2(0)s_2(0)+\sum_{h\neq 0} r_2(h)s_2(h)\right) \ll$$

$$\ll y\left(r_2(0)s_2(0)+\max_{h\neq 0} r_2(h)\sum_{h\neq 0} s_2(h)\right) \ll$$

$$\ll y\left(y^2\cdot y^{2+\varepsilon}+y^{\varepsilon}\cdot y^4\right) \ll y^{5+\varepsilon}. \qquad (2.15)$$

3. Возводя обе части неравенства (2.11) в квадрат, затем применяя дважды неравенство Коши соответственно по суммам h_1 и h_2, имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^8 \ll \left(y\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{m\in I_2} e(5\alpha h_1h_2 f_2(m,h_1,h_2))\right)^2 \ll$$

$$\ll y^2\left(\sum_{|h_1|<y}\left|\sum_{|h_2|<y}\sum_{m\in I_2} e(5\alpha h_1h_2 f_2(m,h_1,h_2))\right|\right)^2 \ll$$

$$\ll y^2\sum_{|h_1|<y}1\cdot\sum_{|h_1|<y}\left|\sum_{|h_2|<y}\sum_{m\in I_2} e(5\alpha h_1h_2 f_2(m,h_1,h_2))\right|^2 \ll$$

$$\ll y^3\sum_{|h_1|<y}\left(\sum_{|h_2|<y}\left|\sum_{m\in I_2} e(5\alpha h_1h_2 f_2(m,h_1,h_2))\right|\right)^2 \ll$$

$$\ll y^4\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\left|\sum_{m\in I_2} e(5\alpha h_1h_2 f_2(m,h_1,h_2))\right|^2 =$$

$$= y^4\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{m\in I_2}\sum_{m_1\in I_2} e(5\alpha h_1h_2(f_2(m_1,h_1,h_2)-f_2(m,h_1,h_2))).$$

Воспользуюсь следующим тождеством

$$f_2(m_1,h_1,h_2)-f_2(m,h_1,h_2)=$$
$$=h_1^3+2h_1^2(h_2+2m_1)+2h_1(h_2^2+3h_2m_1+3m_1^2)+(h_2^3+4h_2^2m_1+6h_2m_1^2+4m_1^3)-$$
$$-\left(h_1^3+2h_1^2(h_2+2m)+2h_1(h_2^2+3h_2m+3m^2)+(h_2^3+4h_2^2m+6h_2m^2+4m^3)\right)=$$
$$=4h_1^2(m_1-m)+6h_1h_2(m_1-m)+6h_1(m_1^2-m^2)+4h_2^2(m_1-m)+$$
$$+6h_2(m_1^2-m^2)+4(m_1^3-m^3)=$$
$$=2(m_1-m)\left(2h_1^2+3h_1h_2+3h_1(m_1+m)+2h_2^2+3h_2(m_1+m)+\right.$$
$$\left.+2(m_1^2+m_1m+m^2)\right),$$

в правую часть последней формулы переменную суммирования m_1, обозначая $m_1=m+h_3$ найдём

$$f_2(m_1,h_1,h_2)-f_2(m,h_1,h_2)=2h_3\left(2h_1^2+3h_1h_2+3h_1(2m+h_3)+2h_2^2+\right.$$
$$\left.+3h_2(2m+h_3)+2(3m^2+3mh_3+h_3^2)\right)=2h_3f_3(m,h_1,h_2,h_3).$$

Поэтому

$$|T(\alpha;x,y)|^8\ll y^4\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{m\in I_2}\sum_{m+h_3\in I_2}e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))=$$
$$=y^4\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\sum_{\substack{m\in I_2\\ m+h_3\in I_2}}e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3)).$$

Как в предыдущем случае обозначая в последней сумме интервал изменения переменного m через

$$I_3=I_2\cap\{m:m+h_3\in I_2\}=(x-y,x)\cap(x-y-h_1,x-h_1)\cap$$
$$\cap(x-y-h_2,x-h_2)\cap(x-y-h_3,x-h_3)\cap$$
$$\cap(x-y-h_1-h_2,x-h_1-h_2)\cap(x-y-h_1-h_3,x-h_1-h_3)\cap$$
$$\cap(x-y-h_2-h_3,x-h_2-h_3)\cap(x-y-h_1-h_2-h_3,x-h_1-h_2-h_3),$$

получим

$$|T(\alpha;x,y)|^8\ll y^4\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3}e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3)).\qquad(2.16)$$

Обозначая через $r_3(h)$– число решений диофантового уравнения

$$10h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3)=h$$

относительно h_1,h_2, h_3 и m; $|h_1|<y$, $|h_2|<y$, $|h_3|<y$, $m\in I_3$, представим неравенство (2.16) в виде

$$|T(\alpha;x,y)|^8\ll y^4\sum_h r_3(h)e(\alpha h).,\tag{2.17}$$

Аналогично, как в случае $r_2(h)$, заметим, что если $h\neq 0$, то $r_3(h)\ll\tau_4(h)\ll h^\varepsilon$. Из неравенства

$$\begin{aligned}f_3(m,h_1,h_2,h_3)&=2h_1^2+3h_1h_2+3h_1(2m+h_3)+2h_2^2+3h_2(2m+h_3)+\\&+2(3m^2+3mh_3+h_3^2)>\\&>-3y^2-3y(2x+y)-3y(2x+y)+2(3(x-y)^2-3xy)=\\&=6x^2-27xy-15y^2\geq 6x^2-2,7x^2-0,15x^2>0.\end{aligned}$$

следует, что уравнение

$$10h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3)=0$$

имеет только решение вида $(0,h_2,h_3,m)$, $(h_1,0,h_3,m)$ и $(h_1,h_2,0,m)$. Подсчитав количество таких решений найдём

$$r_3(0)=3\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3}1\sum_{m\in I_3}1\leq 12y^2|I_3|\leq 12y^3.$$

С другой стороны,

$$|T(\alpha;x,y)|^8=\sum_{\substack{x-y<n_i,m_i\leq x\\ i=1,2,3}}e(\alpha(n_1^5+\ldots+n_4^5-m_1^5-\ldots-m_4^5))=\sum_h s_3(h)(-\alpha h),\tag{2.18}$$

где $s_3(h)$ – число решений уравнения

$$n_1^5+\ldots+n_4^5-m_1^5-\ldots-m_4^5=h,\quad x-y<n_1,m_1,\ldots,n_4,m_4\leq x.$$

В равенстве (2.18) полагая $\alpha = 0$, находим

$$\sum_h s_3(h) = |T(0;x,y)|^8 \leq y^8. \tag{2.19}$$

Пользуясь соотношением (2.15), найдём

$$s_3(0) = \int\limits_0^1 |T(\alpha;x,y)|^8 d\alpha \leq y^{5+\varepsilon}.$$

Здесь также, как в соотношениях (2.10)и (2.15), умножая (2.17) и (2.18), интегрируя по α, а затем воспользовавшись значениями $r_3(0)$, $s_2(0)$, оценкой $r_3(h) \ll h^\varepsilon$ и соотношением (2.24), найдём

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 |T(\alpha;x,y)|^{16} d\alpha &\ll \int\limits_0^1 y^4 \sum_h r_3(h) e(\alpha h) \sum_{h'} s_3(h') e(-\alpha h') d\alpha = \\
&= y^4 \sum_h r_3(h) \sum_{h'} s_3(h') \int\limits_0^1 e(\alpha(h-h')) d\alpha = y^4 \sum_h r_3(h) s_3(h) = \\
&= y^4 \left(r_3(0) s_3(0) + \sum_{h \neq 0} r_3(h) s_3(h) \right) \leq \\
&\leq y^4 \left(r_3(0) s_3(0) + \max_{h \neq 0} r_3(h) \sum_{h \neq 0} s_3(h) \right) \ll \\
&\ll y^4 \left(y^3 \cdot y^{5+\varepsilon} + y^\varepsilon \cdot y^8 \right) \ll y^{12+\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

4. Возводя обе части неравенства (2.16) в квадрат, затем применяя трижды неравенство Коши соответственно по суммам h_1, h_2 и h_3, имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^{16} \ll \left(y^4 \sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))\right)^2 \le$$

$$\le y^8 \left(\sum_{|h_1|<y}\left|\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))\right|\right)^2 \le$$

$$\le y^9 \sum_{|h_1|<y}\left|\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))\right|^2 \le$$

$$\le y^9 \sum_{|h_1|<y}\left(\sum_{|h_2|<y}\left|\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))\right|\right)^2 \le$$

$$\le y^{10} \sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\left|\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))\right|^2 \le$$

$$\le y^{10} \sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\left(\sum_{|h_3|<y}\left|\sum_{m\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))\right|\right)^2 \le$$

$$\le y^{11} \sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\left|\sum_{m\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3f_3(m_1,h_1,h_2,h_3))\right|^2 \le$$

$$\le y^{11}\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\sum_{|h_3|<y}\sum_{m\in I_3}\sum_{m_1\in I_3} e(10\alpha h_1h_2h_3(f_3(m_1,h_1,h_2,h_3)-f_3(m,h_1,h_2,h_3))).$$

Воспользуюсь тождеством

$$\begin{aligned}
&f_3(m_1,h_1,h_2,h_3)-f_3(m,h_1,h_2,h_3)=\\
&=2h_1^2+3h_1h_2+3h_1(2m_1+h_3)+2h_2^2+3h_2(2m_1+h_3)+2(3m_1^2+3m_1h_3+h_3^2)-\\
&-\left(2h_1^2+3h_1h_2+3h_1(2m+h_3)+2h_2^2+3h_2(2m+h_3)+2(3m^2+3mh_3+h_3^2))\right)=\\
&=6h_1(m_1-m)+6h_2(m_1-m)+6(m_1^2-m^2)+6h_3(m_1-m)=\\
&=6(m_1-m)\left(h_1+h_2+h_3+m_1+m)\right),
\end{aligned}$$

в правую часть последней формулы переменную суммирования m_1, обозначая $m_1 = m + h_4$ найдём

$$f_3(m_1, h_1, h_2, h_3) - f_3(m, h_1, h_2, h_3) = 6h_4\left(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2m\right)).$$

Поэтому

$$|T(\alpha; x, y)|^{16} \ll y^{11} \sum_{|h_1|<y} \sum_{|h_2|<y} \sum_{|h_3|<y} \sum_{m\in I_3} \sum_{m+h_4\in I_3} e(60\alpha h_1 h_2 h_3 h_4\left(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2m\right))).$$

Как в предыдущем случае обозначая в последней сумме интервал изменения переменного m через

$$\begin{aligned}
I_4 = &I_3 \cap \{m : m + h_4 \in I_3\} = (x - y, x) \cap (x - y - h_1, x - h_1) \cap \\
&\cap (x - y - h_2, x - h_2) \cap (x - y - h_3, x - h_3) \cap (x - y - h_4, x - h_4) \cap \\
&\cap (x - y - h_1 - h_2, x - h_1 - h_2) \cap (x - y - h_1 - h_3, x - h_1 - h_3) \cap \\
&\cap (x - y - h_1 - h_4, x - h_1 - h_4) \cap (x - y - h_2 - h_3, x - h_2 - h_3) \cap \\
&\cap (x - y - h_2 - h_4, x - h_2 - h_4) \cap (x - y - h_3 - h_4, x - h_3 - h_4) \cap \\
&\cap (x - y - h_1 - h_2 - h_3, x - h_1 - h_2 - h_3) \cap \\
&\cap (x - y - h_1 - h_2 - h_4, x - h_1 - h_2 - h_4) \cap \\
&\cap (x - y - h_1 - h_3 - h_4, x - h_1 - h_3 - h_4) \cap \\
&\cap (x - y - h_2 - h_3 - h_4, x - h_2 - h_3 - h_4) \cap \\
&\cap (x - y - h_1 - h_2 - h_3 - h_4, x - h_1 - h_2 - h_3 - h_4),
\end{aligned}$$

получим

$$|T(\alpha; x, y)|^{16} \ll y^{11} \sum_{|h_1|<y} \sum_{|h_2|<y} \sum_{|h_3|<y} \sum_{h_4\in I_4} \sum_{m\in I_4} e(60\alpha h_1 h_2 h_3 h_4\left(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2m\right))). \tag{2.21}$$

Обозначая через $r_4(h)$ – число решений диофантового уравнения

$$60h_1h_2h_3h_4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2m) = h$$

относительно h_1, h_2, h_3, h_4 и m; $|h_1| < y$, $|h_2| < y$, $|h_3| < y$, $|h_4| < y$, $m \in I_3$, представим неравенство (2.21) в виде

$$|T(\alpha; x, y)|^{16} \ll y^{11} \sum_{h} r_4(h) e(\alpha h). \tag{2.22}$$

Аналогично, как в случае $r_2(h)$ и $r_3(h)$, заметим, что если $h \neq 0$, то $r_4(h) \ll \tau_5(h) \ll h^{\varepsilon}$. Из неравенства

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2m > 2x - 6y \geq 2x - 0,6x > 0$$

следует, что уравнение

$$60h_1h_2h_3h_4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2m) = 0$$

имеет только решение вида $(0, h_2, h_3, h_4, m)$, $(h_1, 0, h_3, h_4, m)$, $(h_1, h_2, 0, h_4, m)$ и $(h_1, h_2, h_3, 0, m)$, для количество которых справедлива оценка

$$r_4(0) = 4 \sum_{|h_2|<y} \sum_{|h_3|<y} \sum_{|h_3|<y} \sum_{m \in I_3} 1 \leq 32y^3|I_3| \leq 32y^4.$$

С другой стороны,

$$|T(\alpha; x, y)|^{16} = \sum_{\substack{x-y<n_i,m_i\leq x \\ i=1,\ldots,8}} e(\alpha(n_1^5 + \ldots + n_8^5 - m_1^5 - \ldots - m_8^5)) = \sum_h s_4(h)(-\alpha h), \tag{2.23}$$

где $s_4(h)$ – число решений уравнения

$$n_1^5 + \ldots + n_8^5 - m_1^5 - \ldots - m_8^5 - m_3^4 = h, \quad x - y < n_1, m_1, \ldots, n_8, m_8 \leq x.$$

В равенстве (2.22) полагая $\alpha = 0$, находим

$$\sum_h s_4(h) = |T(0; x, y)|^{16} \leq y^{16}. \tag{2.24}$$

Пользуясь соотношением (2.15), найдём

$$s_4(0) = \int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{16} d\alpha \leq y^{12+\varepsilon}.$$

Здесь также, как в соотношениях (2.10), (2.15) и (2.20), умножая (2.22) и (2.23), интегрируя по α, а затем воспользовавшись значениями $r_4(0)$, $s_4(0)$, оценкой $r_4(h) \ll h^{\varepsilon}$ и соотношением (2.24), найдём

$$\int\limits_0^1 |T(\alpha;x,y)|^{32} d\alpha \leq \int\limits_0^1 y^{11} \sum_h r_4(h) e(\alpha h) \sum_{h'} s_4(h') e(-\alpha h') d\alpha =$$

$$= y^{11} \sum_h r_3(h) \sum_{h'} s_4(h') \int\limits_0^1 e(\alpha(h-h')) d\alpha = y^{11} \sum_h r_4(h) s_4(h) =$$

$$= y^{11} \left(r_4(0) s_4(0) + \sum_{h \neq 0} r_4(h) s_4(h) \right) \leq$$

$$\leq y^{11} \left(r_4(0) s_4(0) + \max_{h \neq 0} r_4(h) \sum_{h \neq 0} s_4(h) \right) \ll$$

$$\ll y^{11} \left(y^4 \cdot y^{12+\varepsilon} + y^{\varepsilon} \cdot y^{16} \right) \ll y^{27+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

Глава 3

Асимптотическая формула в проблеме Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми

3.1 Основная теорема

Во третей главе, прилагая результаты предыдущих глав а именно

- теорему 1.1 о поведении коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ в множестве точек первого класса;
- теорему 2.1 о нетривиальной оценки короткой тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ пятой степени в множестве точек второго класса;
- теорему 2.2 о правильной по порядку оценки интеграла от тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ пятой степени,

доказываем теорему 3.1 об асимптотической формуле в проблеме Варинга для тридцати трёх пятых степеней при условии, что слагаемые почти равны.

Теорема 3.1. *Для числа* $J(N, H)$ *представлений* N *суммою* 33 *пятых степеней чисел* x_i, $i = 1, 2, \ldots, 33$ *с условиями* $\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \leq H$, *при*

$H \geq N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$J(N,H) = \frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}} + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ *– особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а* B *– абсолютная положительная постоянная, которая определяется соотношением*

$$B = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\cdot 32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32}.$$

Последнее утверждение теоремы о том, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ больше некоторого положительного постоянного непосредственно следует из теоремы 4.6 монографии [79].

Следствие 3.1.1. *Существует такое* N_0*, что каждое натуральное число* $N > N_0$ *представимо в виде суммы* 33 *пятых степеней почти равных чисел* x_i*:*

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \leq N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}, \qquad i = 1,2,\ldots,33.$$

Доказательство теоремы 3.1 проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова его основу, как уже отмечали, составляют следствия 1.1.1 и 1.1.2 теорема 1.1, теорема 2.1 и теорема 2.2.

3.2 Доказательство основной теоремы

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$H = N^{\frac{67}{380}+\varepsilon}, \qquad \frac{67}{340} = \frac{1}{5} - \frac{1}{340}.$$

Пусть $Q = 0,5H\mathscr{L}^{-1}$, $\tau = 80(N_1+H)^3H$, $æ\tau = 1$, $E = [-æ, 1-æ]$. При целом x имеем

$$\int\limits_{-æ}^{1-æ} e(\alpha x)d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0, \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$J(N,H) = \sum_{|x_1-N_1|\le H} \sum_{|x_1-N_1|\le H} \dots \sum_{|x_{33}-N_1|\le H} \int\limits_{-æ}^{1-æ} e(\alpha(x_1^5+x_2^5+\ldots+x_{33}^5-N))d\alpha =$$

$$= \int\limits_{-æ}^{1-æ} \left(\sum_{|n-N_1|\le H} e(\alpha n^5) \right)^{33} e(-\alpha N)d\alpha.$$

Воспользуюсь соотношением

$$T(\alpha; N_1+H, 2H) = \sum_{N_1-H<n\le N_1+H} e(\alpha n^5) = \sum_{|n-N_1|\le H} e(\alpha n^5) - \theta,$$

где $|\theta|$ равен 1, если $N_1 - H$ – целое число, и 0 в противном случае, имеем

$$J(N,H) = \int\limits_{-æ}^{1-æ} \left(T(\alpha; N_1+H, 2H)+\theta\right)^{33} e(-\alpha N)d\alpha,$$

Пользуясь соотношением

$$\left(T(\alpha; N_1+H, 2H)+\theta\right)^{33} - T^{33}(\alpha; N_1+H, 2H) \ll |T(\alpha; N_1+H, 2H)|^{32} + 1,$$

и теоремой 2.2, находим

$$\int\limits_{-æ}^{1-æ} |T(\alpha; N_1+H, 2H)|^{32} d\alpha \ll H^{27+\varepsilon} =$$

$$= \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot \frac{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}{H^{5-\varepsilon}} = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot N^{\frac{4}{5}-(5-\varepsilon)\left(\frac{67}{340}+\varepsilon\right)}\mathscr{L} =$$

$$= \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot N^{-\frac{63}{340}-\frac{1633}{340}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L} \ll \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Поэтому

$$J(N,H) = \int\limits_{-æ}^{1-æ} T^{33}(\alpha; N_1+H, 2H)e(-\alpha N)d\alpha + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right),$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \le q \le \tau, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}. \tag{3.1}$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \le a \le q-1$, причем $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых $q \le Q$ в представлении (3.1). Через $\mathfrak{m}$ обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha :\ \alpha \in \mathfrak{M},\ \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \delta\right\}, \quad \delta = \frac{1}{10q(N_1+H)^4};$$
$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha :\ \alpha \in \mathfrak{M},\ \delta < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q\tau}\right\}.$$

Обозначим через $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$J(N,H) = J(\mathfrak{M}_1) + J(\mathfrak{M}_2) + J(\mathfrak{m}) + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right). \tag{3.2}$$

В последней формуле первый член, то есть $J(\mathfrak{M}_1)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $J(N,H)$, а $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

Вычисление интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$, имеем:

$$J(\mathfrak{M}_1) = \sum_{q \le Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \int\limits_{|\lambda| \le \delta} T^{33}\left(\frac{a}{q} + \lambda; N_1 + H, 2H\right) e\left(-\left(\frac{a}{q} + \lambda\right) N\right) d\lambda. \tag{3.3}$$

Для суммы $T\left(\frac{a}{q} + \lambda; N_1 + H, 2H\right)$, $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda \in \mathfrak{M}_1$ при $x = N_1 + H$, $y = 2H$, $n = 5$ выполняется, условия следствие 1.1.1 теоремы 1.1, поэтому

$$T\left(\frac{a}{q} + \lambda, N_1 + H, 2H\right) - \frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_1 + H, 2H) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{3.4}$$

При
$$a=T\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_1+H, 2H\right), \qquad b=\frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_1+H, 2H),$$
из соотношения $a^{33}-b^{33}\le 33|a-b|(|a|^{32}+|b|^{32})$ следует, что
$$T^{33}\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_1+H, 2H\right)=\frac{(2H)^{33}S^{33}(a,q)}{q^{33}}\gamma^{33}(\lambda; N_1+H, 2H)+R, \quad (3.5)$$
$$\begin{aligned} R=&T^{33}\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_1+H, 2H\right)-\left(\frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)\right)^{33}\ll\\ &\ll\left|T\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_1+H, 2H\right)-\frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)\right|\times\\ &\times\left(\left|T\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_1+H, 2H\right)\right|^{32}+\left|\frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)\right|^{32}\right), \end{aligned}$$
Пользуясь оценкой (3.4), находим
$$R\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\left|T\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_1+H, 2H\right)\right|^{32}+\left|\frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)\right|^{32}\right).$$
Подставляя эту оценку для R в (3.5), а затем найденное выражение для $T^{33}(a/q+\lambda; N_1+H, 2H)$ из (3.5) в (3.3), найдем
$$J(\mathfrak{M}_1)=(2H)^{33}\mathfrak{S}(N,Q)\mathscr{A}(N)+R_1+R_2, \quad (3.6)$$
$$\mathfrak{S}(N,Q)=\sum_{q\le Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S^{33}(a,q)}{q^{33}}e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$
$$\mathscr{A}(N)=\int\limits_{|\lambda|\le\delta}\gamma^{33}\left(\lambda; N_1+H, 2H\right)e\left(-\lambda N\right)d\lambda,$$
$$R_1\ll Q^{1/2+\varepsilon}\sum_{q\le Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\int\limits_{|\lambda|\le\delta}\left|T\left(\frac{a}{q}+\lambda; N_1+H, 2H\right)\right|^{32}d\lambda,$$
$$R_2\ll H^{32}\sum_{q\le Q}\mathscr{B}(N,q)\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{|S(a,q)|^{32}}{q^{31{,}5-\varepsilon}},$$
$$\mathscr{B}(N,q)=\int\limits_{|\lambda|\le\delta}\left|\gamma\left(\lambda; N_1+H, 2H\right)\right|^{32}d\lambda.$$

Оценим R_1. Имея в виду, что $\delta < 1/q\tau$, $q \le Q$ и $\mathfrak{M}_1$ состоит из непересекающихся отрезков, а затем пользуясь теоремой 2.2, находим

$$
\begin{aligned}
R_1 \ll & Q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \int\limits_{-æ}^{1-æ} |T(\alpha; N_1+H, 2H)|^{32}\, d\alpha \ll Q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} H^{27+\varepsilon} = \\
& = \left(0,5H\mathscr{L}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} H^{27+\varepsilon} = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot \frac{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}{H^{\frac{9}{2}-2\varepsilon}} = \\
& = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot N^{\frac{4}{5}+\left(\frac{9}{2}-2\varepsilon\right)\left(\frac{67}{340}+\varepsilon\right)} \mathscr{L}^{\frac{3}{2}-\varepsilon} = \\
& = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot N^{-\frac{59}{680}-\frac{349}{85}\varepsilon+2\varepsilon^2} \mathscr{L}^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \ll \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Оценим R_2. Пользуясь леммой 1.3 для оценки интеграла $\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)$, имеем

$$
\gamma(\lambda; N_1+H, 2H) = \int\limits_{-0,5}^{0,5} e(\lambda(N_1+2Hu)^5)du \ll
$$

$$
\ll \min\left(1, \frac{1}{\min\limits_{|u|\le 0.5}\left|\frac{\partial}{\partial u}(\lambda(N_1+2Hu)^5)\right|}\right) = \min\left(1, \frac{|\lambda|^{-1}}{\min\limits_{|u|\le 0.5}(10H(N_1+2Hu)^4)}\right) =
$$

$$
= \min\left(1, \frac{|\lambda|^{-1}}{10H(N_1-H)^4}\right) = \min\left(1, \delta_0|\lambda|^{-1}\right), \quad \delta_0 = \frac{1}{10H(N_1-H)^4}.
$$

Подставляя эту оценку в выражение для $\mathscr{B}(N,q)$ и имея в виду, что $\delta_0 < \delta$ находим

$$
\mathscr{B}(N,q) = \int\limits_{|\lambda|\le\delta} |\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)|^{32}\, d\lambda \ll \int\limits_{|\lambda|\le\delta} \left(\min\left(1, \delta_0|\lambda|^{-1}\right)\right)^{32} d\lambda =
$$

$$
= \int\limits_{|\lambda|\le\delta} \left(\min\left(1, \delta_0^{32}|\lambda|^{-32}\right)\right) d\lambda = \delta_0 + \int\limits_{\delta_0}^{\delta} \delta_0^{32}\lambda^{-32} d\lambda =
$$

$$
= \delta_0 + \frac{\delta_0^{32}}{31}\left(\frac{1}{\delta_0^{31}} - \frac{1}{\delta^{31}}\right) \le \frac{32}{31}\delta_0 \ll \frac{1}{HN_1^4}.
$$

Воспользовавшись этой оценкой и оценкой $S(a,q) \ll q^{\frac{4}{5}}$ (лемма 1.2 при $n = 5$), найдем

$$R_2 \ll H^{32} \sum_{q \le Q} \mathscr{B}(N,q) \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \frac{|S(a,q)|^{32}}{q^{31,5-\varepsilon}} \ll H^{32} \sum_{q \le Q} \frac{1}{HN_1^4} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \frac{q^{\frac{4}{5}\cdot 32}}{q^{31,5-\varepsilon}} =$$
$$= \frac{H^{31}}{N_1^4} \sum_{q \le Q} q^{-\frac{59}{10}+\varepsilon} \varphi(q) \le \frac{H^{31}}{N_1^4} \sum_{q \le Q} q^{-\frac{39}{10}+\varepsilon} \ll \frac{H^{31}}{N_1^4} \cdot Q^{-\frac{29}{10}+\varepsilon} =$$
$$= 5^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{H^{31}}{\sqrt[5]{N^4}} \cdot \left(\frac{H}{2\mathscr{L}}\right)^{-\frac{29}{10}+\varepsilon} = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{2\mathscr{L}}{H}\right)^{\frac{39}{10}-\varepsilon} \ll \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \quad (3.8)$$

Вычислим теперь интеграл $\mathscr{A}(N)$. Пусть

$$\delta_1 = \frac{\mathscr{L}}{10HN_1^4}.$$

Имея в виду, что $\delta_1 < \delta$, представим $\mathscr{A}(N)$ в виде суммы двух интегралов:

$$\mathscr{A}(N) = \mathscr{A}_1(N) + \mathscr{A}_2(N),$$
$$\mathscr{A}_1(N) = \int\limits_{|\lambda| \le \delta_1} \gamma^{33}(\lambda; N_1 + H, 2H)\, e(-\lambda N)\, d\lambda,$$
$$\mathscr{A}_2(N) = \int\limits_{\delta_1 < |\lambda| \le \delta} \gamma^{33}(\lambda; N_1 + H, 2H)\, e(-\lambda N)\, d\lambda.$$

Оценим сверху интеграл $\mathscr{A}_2(N)$. Оценивая интеграл $\gamma(\lambda; N_1 + H, 2H)$ при $\delta_1 < |\lambda| \le \delta$ по величине первой производной (лемма 1.3), найдем

$$\gamma(\lambda; N_1 + H, 2H) \ll \min\left(1, \frac{1}{10|\lambda|H(N_1 - H)^4}\right) \ll$$
$$\ll \min\left(1, \frac{1}{10|\lambda|HN_1^4}\right) \le \frac{1}{|\lambda|HN_1^4}.$$

Подставляя эту оценку в выражение для $\mathscr{A}_2(N)$, имеем

$$|\mathscr{A}_2(N)| \le \int\limits_{\delta_1<|\lambda|\le\delta} |\gamma\left(\lambda; N_1+H, 2H\right)|^{33} d\lambda \ll \frac{1}{(HN_1^4)^{33}} \int\limits_{\delta_1}^{\delta} \lambda^{-33} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(HN_1^4)^{33}} \cdot \frac{1}{32}\left(\frac{1}{\delta_1^{32}} - \frac{1}{\delta^{32}}\right) \le \frac{1}{32\,(HN_1^4)^{33}\delta_1^{32}} =$$

$$= \frac{1}{32\,(HN_1^4)^{33}} \cdot \left(\frac{10HN_1^4}{\mathscr{L}}\right)^{32} \ll \frac{1}{HN_1^4\mathscr{L}^{32}} \ll \frac{1}{H\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}^{32}}$$

Теперь найдем асимптотическое поведение $\mathscr{A}_1(N)$. Имеем

$$\mathscr{A}_1(N) = \int\limits_{|\lambda|\le\delta_1} \left(\int\limits_{-0,5}^{0,5} e(\lambda(N_1+2Hu)^5) du\right)^{33} e\left(-\lambda N\right) d\lambda =$$

$$= \int\limits_{|\lambda|\le\delta_1} \left(\int\limits_{-0,5}^{0,5} e(\lambda((N_1+2Hu)^5 - N_1^5)) du\right)^{33} d\lambda.$$

Воспользовавшись тождеством

$$(N_1+2Hu)^5 - N_1^5 =$$

$$= 10N_1^4Hu + 40N_1^3H^2u^2 + 80N_1^2H^3u^3 + 80N_1H^4u^4 + 32H^5u^5 =$$

$$= 10N_1^4Hu\left(1 + \frac{4H}{N_1}u + \frac{8H^2}{N_1^2}u^2 + \frac{8H^3}{N_1^3}u^3 + \frac{3,2H^4}{N_1^4}u^4\right) =$$

$$= 10N_1^4Hu\left(1 + f(u,H,N_1)\right),$$

$$f(u,H,N_1) = \frac{4H}{N_1}u + \frac{8H^2}{N_1^2}u^2 + \frac{8H^3}{N_1^3}u^3 + \frac{3,2H^4}{N_1^4}u^4,$$

в интеграле по λ, полагая $t = 10N_1^4H\lambda$, сделаем замену переменных

$$\mathscr{A}_1(N) = \int\limits_{|\lambda|\le\delta_1} \left(\int\limits_{-0,5}^{0,5} e\left(10N_1^4Hu\lambda\left(1+f(u,H,N_1)\right)\right) du\right)^{33} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{10N_1^4H} \int\limits_{|t|\le\mathscr{L}} \left(\int\limits_{-0,5}^{0,5} e\left(tu\left(1+f(u,H,N_1)\right)\right) du\right)^{33} dt.$$

Пользуясь соотношением

$$e\left(tu\ f(u,H,N_1)\right)=1+O\left(\frac{H|t|u^2}{N_1}\right)=1+O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N_1}\right),$$

находим

$$\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} e\left(tu\left(1+f(u,H,N_1)\right)\right)du=$$
$$=\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} e\left(tu\right)e\left(tu\ f(u,H,N_1)\right)du=$$
$$=\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} e\left(tu\right)\left(1+O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N_1}\right)\right)du=$$
$$=\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} e\left(tu\right)du+O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N_1}\right)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}+O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N_1}\right).$$

Следовательно

$$\mathscr{A}_1(N)=\frac{1}{10N_1^4H}\int\limits_{|t|\le\mathscr{L}}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}+O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N_1}\right)\right)^{33}dt=$$
$$=\frac{1}{10N_1^4H}\left(\int\limits_{|t|\le\mathscr{L}}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^{33}dt+O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N_1}+\frac{H^{33}\mathscr{L}^{33}}{N_1^{33}}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{5\pi N_1^4H}\left(\int\limits_0^{\pi\mathscr{L}}\frac{\sin^{33}t}{t^{33}}dt+O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N_1}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{5\pi N_1^4H}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^{33}t}{t^{33}}dt+O\left(\mathscr{L}^{-32}\right)\right)=$$
$$=\frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\pi\sqrt[5]{N^4}H}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^{33}t}{t^{33}}dt+O\left(\mathscr{L}^{-32}\right)\right).$$

Воспользовавшись формулой (см. [83] стр. 334)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^n mt}{t^n}dt = \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)!}\left[n^{n-1} - \frac{n}{1!}(n-2)^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-6)^{n-1} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)!}\left[n^{n-1} - C_n^1(n-2)^{n-1} + C_n^2(n-4)^{n-1} - C_n^3(n-6)^{n-1} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^k (n-2k)^{n-1}.$$

при $m = 1$ и $n = 33$, найдем

$$\mathscr{A}_1(N) = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\pi\sqrt[5]{N^4}H}\left(\frac{\pi}{2^{33}32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32} + O\left(\mathscr{L}^{-32}\right)\right) =$$
$$= \frac{B}{2^{33}\sqrt[5]{N^4}H} + O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{N^4}H\mathscr{L}^{32}}\right), \quad B = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\cdot 32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32}.$$

Отсюда с учетом найденной оценки для $\mathscr{A}_2(N)$, находим следующую асимптотическую формулу для особого интеграла $\mathscr{A}(N)$:

$$\mathscr{A}(N) = \frac{B}{2^{33}\sqrt[5]{N^4}H} + O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{N^4}H\mathscr{L}^{32}}\right). \tag{3.9}$$

Вычислим теперь двойную сумму $\mathfrak{S}(N,Q)$. Для этого сумму по q заменим близким к ней бесконечным рядом, независящим от Q. Воспользовавшись оценкой $S(a,q) \ll q^{\frac{4}{5}}$ (лемма 1.2 при $n = 5$), имеем

$$\sum_{q>Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S^{33}(a,q)}{q^{33}}e\left(-\frac{aN}{q}\right) \ll \sum_{q>Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} q^{-\frac{33}{5}} < \sum_{q>Q} q^{-\frac{28}{5}} \ll Q^{-\frac{23}{5}} \ll \frac{\mathscr{L}^4}{H^4}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{S}(N,Q) = \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{\mathscr{L}^4}{H^4}\right), \tag{3.10}$$

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S^{33}(a,q)}{q^{33}}e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

Заметим, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ превосходить некоторого числа $c(N)$ и $c(N)>0$ (см. [79], теоремы 4.6).

Подставляя найденные оценки для R_1, R_2 из (3.7), (3.8) и значение $\mathscr{A}(N)$, $\mathfrak{S}(N,Q)$ из (3.9), (3.10) в соотношение (3.6), найдем

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{M}_1) &= (2H)^{33}\mathfrak{S}(N,Q)\mathscr{A}(N)+R_1+R_2= \\ &= (2H)^{33}\left(\mathfrak{S}(N)+O\left(\frac{\mathscr{L}^4}{H^4}\right)\right)\left(\frac{\sqrt[5]{33^4}\cdot B}{2^{33}\sqrt[5]{N^4}H}+O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{N^4}H\mathscr{L}^{32}}\right)\right)+ \\ &+O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right)=\frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{33^4}}+O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{33^4}\mathscr{L}}\right), \end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$B=\frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\cdot 32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32}.$$

Оценка интеграла $J(\mathfrak{M}_2)$. Имеем

$$J(\mathfrak{M}_2)\le\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T(\alpha;N_1+H,2H)|\int\limits_{-æ}^{1-æ}|T(\alpha;N_1+H,2H)|^{32}\,d\alpha. \tag{3.12}$$

Оценим $T(\alpha;N_1+H,2H)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad \delta<|\lambda|\le\frac{1}{q\tau},\quad 1\le q\le 0,5HL^{-1}.$$

Согласно следствию 1.1.2 теоремы 1.1, при $n=5$ имеем

$$\begin{aligned} T(\alpha,&N_1+H,2H)\ll q^{\frac45}\ln q+\min_{2\le k\le 5}\left(Hq^{-\frac15},N_1^{1-\frac1k}q^{\frac1k-\frac15}\right)= \\ &=q^{\frac45}\ln q+\min\left(Hq^{-\frac15},N_1^{\frac12}q^{\frac{3}{10}}\right)\ll(H\mathscr{L})^{\frac45}\mathscr{L}+N^{\frac{1}{10}}(H\mathscr{L})^{\frac{3}{10}}= \\ &=\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\left(\frac{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}^{\frac{14}{5}}}{H^{\frac{21}{5}-\varepsilon}}+\frac{N^{\frac{9}{10}}\mathscr{L}^{\frac{13}{10}}}{H^{\frac{47}{10}-\varepsilon}}\right)= \\ &=\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\left(N^{\frac45-\left(\frac{21}{5}-\varepsilon\right)\left(\frac{67}{340}+\varepsilon\right)}\mathscr{L}^{\frac{14}{5}}+N^{\frac{9}{10}-\left(\frac{47}{10}-\varepsilon\right)\left(\frac{67}{340}+\varepsilon\right)}\mathscr{L}^{\frac{13}{10}}\right)= \\ &=\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\left(N^{-\frac{47}{1700}-\frac{29}{34}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^{\frac{14}{5}}+N^{-\frac{89}{3400}-\frac{1531}{340}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^{\frac{13}{10}}\right)\ll\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (3.12), а затем пользуясь теоремой 2.2, находим

$$J(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \int\limits_{-æ}^{1-æ} |T(\alpha; N_1 + H, 2H)|^{32} \, d\alpha \ll$$

$$\ll \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot H^{27+\varepsilon} = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}. \tag{3.13}$$

Оценка интеграла $J(\mathfrak{m})$. Имеем

$$J(\mathfrak{m}) \le \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |T(\alpha; N_1 + H, 2H)| \int\limits_{E} |T(\alpha; N_1 + H, 2H)|^{32} \, d\alpha. \tag{3.14}$$

Оценим $T(\alpha; N_1 + H, 2H)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 0,5H\mathscr{L}^{-1} \le q \le \tau = 80(N_1 + H)^3 H, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Согласно теореме 2.1, имеем

$$T(\alpha; N_1 + H, 2H) \ll H^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{H} + \frac{q}{H^5}\right)^{\frac{1}{16}} \ll$$

$$\ll H^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{H} + \frac{\tau}{H^5}\right)^{\frac{1}{16}} \ll H^{1+\varepsilon} \left(\frac{\mathscr{L}}{H} + \frac{1}{H} + \frac{N_1^3}{H^4}\right)^{\frac{1}{16}} \ll$$

$$\ll H^{\frac{15}{16}+\varepsilon}\mathscr{L} + N^{\frac{3}{80}} H^{\frac{3}{4}+\varepsilon} = \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \left(\frac{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}^2}{H^{65/16-2\varepsilon}} + \frac{N^{67/80}\mathscr{L}}{H^{17/4-2\varepsilon}}\right) =$$

$$= \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \left(N^{\frac{4}{5}-\left(\frac{65}{16}-2\varepsilon\right)\left(\frac{67}{340}+\varepsilon\right)}\mathscr{L}^2 + N^{\frac{67}{80}-\left(\frac{17}{4}-2\varepsilon\right)\left(\frac{67}{340}+\varepsilon\right)}\mathscr{L}\right) =$$

$$= \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \left(N^{-\frac{3}{5440}-\frac{1663}{460}\varepsilon+2\varepsilon^2}\mathscr{L}^2 + N^{-\frac{1311}{340}\varepsilon+2\varepsilon^2}\mathscr{L}\right) \ll \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Подставляя эту оценку в (3.14), а затем пользуясь теоремой 2.2, находим

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \int\limits_{-æ}^{1-æ} |T(\alpha; N_1 + H, 2H)|^{32} \, d\alpha \ll$$

$$\ll \frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot H^{27+\varepsilon} = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}. \tag{3.15}$$

Подставляя найденные оценки для $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно из (3.11), (3.13) и (3.15) в (3.2) получим утверждение теоремы.

Литература

[1] Waring E. Meditationes algebraicae — Cambridge. 1770.

[2] Erdösh P. On the easier Waring problem for powers of primes. I // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. January 1937. V. XXXIII. Part I, pp. 6 – 12.

[3] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc., 11(1937), pp. 501 – 516.

[4] Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 15. С. 291 – 294.

[5] Виноградов И.М. Избранные труды — М.: Изд-во АН СССР. 1952.

[6] Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел — М.: Наука. 1980. 144 с.

[7] Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм — М.: Наука. 1976.

[8] Chen J.R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes // Kexue Tongbao, 1966, v. 17, pp. 385 – 386.

[9] Ross P.M. On Chen's theorem that each large even number has the form p_1+p_2 or $p_1+p_2p_3$ // London Math. Soc, (2). 1975. V. 10. pp. 500 – 506.

[10] Hilbert D. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsche Problem). Nachrichten von der Königlichen

Gesellchaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch- physikalische Klasse aus den Jahren 1909, s. 17 – 36; Math. Annalen, 67, s. 281-300.

[11] Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики — М.: Издательство «Факториал», 1998. 575 с.

[12] Hardy G.H., Littlwood J.E. Nachr. Acad. Wiss. Gettingen Math.-Phys. Kl. 1920. pp. 33 – 54. IV: Math. Z. 1922. Bd. 12. pp. 161 – 168.

[13] Виноградов И.М. Об одной общей теореме Варинга // Математический сборник. 1924. Т. 31. № 3 – 4. С. 490 – 507.

[14] Виноградов И.М. О теореме Варинга // Известия Академии наук СССР, VII серия. Отделение физико-математических наук. 1928. Вып. 4. С. 393 – 400.

[15] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. 1934. № 2. С. 337 – 341.

[16] Виноградов И.М. О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга // Известия Академии наук СССР. Отделение физико-математических наук. 1934. № 10. С. 1455 – 1469.

[17] Виноградов И.М. Новый вариант вывода теоремы Варинга // Труды Математического института им. В.А.Стеклова. 1935. № 9. С. 5 – 16.

[18] Виноградов И.М. Виноградов И.М. Новый метод в аналитической теории чисел // Труды Математического института им. В.А./ Стеклова. 1937. Т. 10. С. 5 – 122.

[19] Виноградов И.М. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1951. Т. 15. № 2. С. 109 – 130.

[20] Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1959. Т. 23. № 5. С. 637 – 642.

[21] Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга //Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1985, Т. 49, № 5, С. 935 – 947.

[22] Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem // Ann of Math., 1992, (2)135, № 1, pp. 131 – 164.

[23] Davenport H. Ann of Math., 1939, 40, pp. 731 – 747.

[24] Линник Ю В. О разложении больших чисел на семь кубов // Доклады Академии наук СССР, 1942,№ 35, С. 179 – 180.

[25] Линник Ю В. О разложение больших чисел на семь кубов // Математический сборник. 1943. Т. 12(54). № 2, С. 218 – 224.

[26] Линник Ю В. Элементарное решение проблемы Варинга по методу Шнирельмана // Математический сборник. 1943. Т. 12(54). № 2. С. 225 – 230.

[27] Watson G.L. A proof of the seven cube theorem // J. London math. Soc. 1951. Vol. 26, pp. 153 – 156.

[28] Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math., 1986, 365, pp. 122 – 170.

[29] Vaughan R.C. Sur le probl'eme de Waring pour les cubes // C. R. Acad. Sci. Paris, S'erie I 301(1985), pp. 253 – 255.

[30] Hua L.K. Some results in the additive prime number theory // Quart J Math (Oxford), 1938, 9: pp. 68 – 80

[31] Хуа Ло-Кен Аддитивная теория простых чисел // Труды МИАН СССР. 1947. Т. 22. С. 1 – 179.

[32] Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и её применения в теории чисел — М.: Мир, 1964, 190 с.

[33] Виноградов И.,М. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел // Труды Тбиллиского математического института. 1938. Т. 3. С. 1 – 67.

[34] Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427, № 1. С. 24 – 27

[35] Чубариков В.Н., Архипов Г.И., Авдеев Ф.С. О проблеме Варинга-Гольдбаха // Современные проблемы математики. 2009. Т. 3. Выпуск 1. С. 13 – 31.

[36] Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Доклады Академии наук СССР. 1984. Т. 278. № 2. С. 302 – 304.

[37] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1985. Т. 49.№ 5. С. 1031 – 1067.

[38] Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J.London Math.Soc.,26 (1951),pp. 273 – 277.

[39] Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс, Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н.,3 (1955), С. 5 – 23.

[40] Jia Chaohua, Three primes theorem in a short interval (II) // International symposium in memory of Hua Loo Keng, Science Press and Springer-Verlag, Berlin, 1991, pp. 103 – 115.

[41] Jia Chaohua Three primes theorem in a short interval (V) // Acta Math. Sin., New Series, 2(1991), pp. 135 – 170.

[42] Zhan Tao, On the mean square of Dirichlet L-functions // Acta Math Sinica, 8(1992), No 2, pp. 204 – 224.

[43] JIA CHAOHUA Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Math. Sin., New Series, 10(1994), pp. 369 – 387.

[44] JIA CHAOHUA Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Math. Sinica 4(1994), pp. 464 – 473, Chinese.

[45] PAN CHENG-DONG, PAN CHENG-BIAO On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math., 2(1990), pp. 138 – 147.

[46] ZHAN TAO On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica, new ser., 7 (1991), No 3, pp. 135 – 170.

[47] JIA CHAO-HUA Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica, New Series 1994. V. 10, № 4, pp. 369 – 387.

[48] J Y LIU, T ZHAN. On sums of five almost equal prime squares // Acta Arithmetica, 1996, 77: pp. 369 – 383

[49] J Y LIU, T ZHAN. On sums of five almost equal prime squares (II) // Sci China, 1998, 41: pp. 710 – 722

[50] J Y LIU, T ZHAN. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Mh Math, 1999, 127: pp. 27 – 41

[51] J Y LIU, T ZHAN. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica, English Series Oct., 2000, Vol.16, No. 4, pp. 669 – 690.

[52] РАХМОНОВ З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 4, С. 564 – 572.

[53] ШОКАМОЛОВА ДЖ.А. Асимтотическая формула в задаче Эстермана с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010, Т. 53, № 5, с. 325-332.

[54] Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Мат.заметки. 2014. Т. 95. Вып. 3. С. 445 – 456.

[55] Рахмонов З.Х., Фозилова Д.М. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. № 6. С. 433 – 440.

[56] Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

[57] Рахмонов З.Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

[58] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann, 1916, 77, s. 313 – 352.

[59] Чудаков Н.Г. О функциях $\zeta(s)$ и $\pi(x)$ // Доклады Академии наук СССР. 1938. Т. 21. С. 425 – 426.

[60] Марджанишвили К.К. Об одновременном представлении n чисел суммами полных первых, вторых,... , n – х степеней // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1937. Т. 1. С. 609 – 631.

[61] Линник Ю В. Оценки сумм Вейля // Доклады Академии наук СССР.1942. Т. 34. № 7. С. 201 – 203.

[62] Карацуба А.А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ. 1962. Сер. 1. № 1. С. 28 – 38.

[63] Карацуба А.А. Средние значения модуля тригонометрической суммы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1973. Т. 36. № 6. С. 1203 – 1227.

[64] Архипов Г.И. О среднем значении сумм Г. Вейля // Математические заметки. 1978. Т. 23. № 6. С. 785 – 788.

[65] Архипов Г.И., Карацуба А.А. Новая оценка интеграла И.М.Виноградова // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1978. Т. 42. № 4. С. 751 – 762.

[66] Стечкин С.Б. О средних значениях модуля тригонометрический суммы // Труды МИАН им. В.А.Стеклова Академии наук СССР. 1975. Т. 134. С. 283 – 309.

[67] Коробов Н.М. О тригонометрических суммах // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 245, № 1. С. 14 – 17.

[68] Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения — М: Наука. 1989. 240 с.

[69] Соколинский В.З. О теореме о среднем при малом числе переменных // Известия ВГПИ. 1979. Т. 201. С. 45 – 55.

[70] Тырина О. В. Новая оценка тригонометрического интеграла И.М. Виноградова // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1987. 51. № 2. С. 363 – 378.

[71] Vaughan R.C. Some remarks in Weyl sums // Coll. Math. Soc. Janos. Bolyani, Budapest 1981.

[72] Рахмонов З.Х., Шокамолова Дж.А. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2009. № 2(135). С. 7 – 18.

[73] Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Об оценках коротких кубических сумм Г.Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. Т. 51.№ 1. С. 5 – 15.

[74] Рахмонов З.Х., Азамов А.З., Мирзоабдугафуров К.И. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010. Т. 53. № 10. С. 737 – 744.

[75] Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 4. С. 257 – 264.

[76] Rakhmonov Z.Kh. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. С. 194 – 203.

[77] Карацуба А.А., Королёв М.А. Теорема о замене тригонометрической суммы более короткой // Известия РАН, серия математическая, Т. 71, № 2, С. 123 – 150.

[78] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — М.: Наука, 1987, 368 с.

[79] Р. Вон Метод Харди–Литтлвуда —М.: Мир, 1985, 184 с.

[80] Мирзоабдугафуров К.И. О среднем значении коротких сумм Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. Т. 51. № 4. С. 245 – 247.

[81] Азамов А.З. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 1. С. 13 – 17.

[82] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

[83] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н., Курс современного анализа, ч. 1. Основные операции анализа, Изд. 2–е. Перев. с англ., Физматгиз, М., 1963.

[84] Назрублоев Н.Н. О средней значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 7. С. 531 – 537.

[85] Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля в множестве точек первого класса // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 8. С. 621 – 628.

[86] Назрублоев Н.Н. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени в множестве точек второго класса // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 9 – 10. С. 720 – 724.

[87] Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. №11 – 12. С. 823 – 830.

[88] Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

[89] Назрублоев Н.Н. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени // Вестник Таджикского национального университета. 2015. № 2. С. 21 – 30.