ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

НАЗРУБЛОЕВА НАСРУЛО НУРУБЛОЕВИЧА

«Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для пятых степеней»,

представленной на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Одно из направлений в исследовании аддитивных задач "варинговского типа" связано с доказательством представимости целых чисел суммами n-х степеней, слагаемые которых подчинены каким-либо дополнительным условиям.

Примером служит задача о нахождении числа $J_{n,k}(N;H)$ решений диофантова уравнения

$$x_1^n + \ldots + x_k^n = N, \tag{1}$$

в котором неизвестные $x_1, \ldots, x_k$ "почти равны", или, что то же, удовлетворяют неравенствам

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{k}\right)^{1/n} \right| \leqslant H, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где $H = H(N) = o(N^{1/n})$. Наибольший интерес здесь представляет получение асимптотики величины $J_{n,k}(N;H)$ при возможно меньшем числе слагаемых k и при наименьшем возможном H. В случае $n = 3, 4$ результаты такого типа были получены З.Х.Рахмоновым и его школой. Диссертация Н.Н. Назрублоева посвящена решению этой задачи для случая $n = 5$.

Диссертационная работа состоит из Введения и трёх глав. В первой главе автором исследуются короткие суммы Г. Вейля, т.е. суммы вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e^{2\pi i \alpha m^n},$$

в которых $n \geqslant 2$ - целое число,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad 1 \leqslant a \leqslant q \leqslant \tau, \quad (a,q) = 1, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

В случае, когда дробная доля $\{n|\lambda|x^{n-1}\}$ не очень велика, для $T(\alpha; x, y)$ автором получена формула

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S_n(a,q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{0.5+\varepsilon})$$

(здесь $S_n(a,q)$ - соответствующая полная сумма Гаусса). В подавляющем большинстве случаев первое слагаемое этой формулы является доминирующим.

В случае же, когда величина $\{n|\lambda|x^{n-1}\}$ "отделена" от нуля, для модуля $T(\alpha; x, y)$ автор получает нетривиальную оценку со степенным понижением (теорема 1.1 работы и следствия из неё). Эта оценка имеет вид

$$|T(\alpha; x, y)| \ll \left(q \ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n} \left(yq^{-1/n}, |\lambda|^{-1/k} x^{1-n/k}\right)\right) q^{-1/n}.$$

Наличие минимума по параметру k делает её особенно удобной для использования в приложениях.

В главе 2 автор исследует поведение суммы $T(\alpha; x, y)$ на т.н. "точках второго класса", т.е. в окрестностях точек $\alpha = a/q$ с "большими" знаменателями q. Для таких значений α для модуля суммы получается нетривиальная оценка со степенным понижением (теорема 2.1).

В этой же главе автор даёт оценку момента степени 2^k суммы $T(\alpha; x, y)$, которая имеет вид

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 5$$

(теорема 2.2 работы).

Наконец, в третьей, заключительной главе полученные результаты используются автором для вывода асимптотической формулы для величины $J(N; H) = J_{5,33}(N; H)$ - числа решений задачи (1) с $n = 5, k = 33$ и

$$H = N^{\frac{1}{5} - \frac{1}{340} + \varepsilon}$$

(теорема 3.1). Следствием этой формулы является тот факт, что всякое достаточно большое целое число N представляется суммою 33 "почти равных" пятых степеней натуральных чисел.

В тексте диссертации имеется ряд незначительных неточностей и опечаток, не влияющих на научную значимость полученных результатов. Укажем некоторые из них.

1. Фраза на стр. 7 "Вон [28, 29] доказал, что асимптотическая формула Харди и Литтлвуда (4) имеет место при $r = 8$ и $n = 3$" не вполне точна, поскольку в формуле (4) на стр. 6 в формуле Харди-Литтлвуда для $J(N)$ имеется степенное понижение ($N^{-c(r,n)}$, $c(r, n) > 0$), в то время как в формуле Р. Вона "понижающий множитель" является степенью логарифма числа N.

2. На стр. 23, строка 7 снизу, вместо $b = 0$ должно быть $b = q$.

3. На стр. 50 в уравнении в строке 7 снизу слагаемое $-m_3^4$ является лишним, а вместо ссылки на формулу (2.15) в строке 4 снизу должна быть ссылка на формулу (2.20).

4. На стр. 51, в формуле в строке 3 сверху вместо $r_3(h)$ должно фигурировать $r_4(h)$.

5. В §3.2 не дано определения числа $N_1 = (N/33)^{1/5}$.

6. Сумма по $q \leqslant Q$ на стр. 58 (неравенства (3.8)) оценивается сверху не величиной $Q^{-29/10+\varepsilon}$ (по порядку), а константой (на правильность окончательной оценки R_2 это не влияет).

Результаты, полученные Н.Н. Назрублоевым, являются новыми и значимыми, снабжены подробными доказательствами и были своевременно опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

По актуальности, объёму и научному уровню выполненных исследований диссертация полностью удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физико - математических наук
ведущий научный сотрудник
Отдела алгебры и теории чисел
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова М.А.Королёв
119991, Москва, ул. Губкина, 8
Тел.: 8(495)9848141 (доб. 37-32)
E-mail: korolevma@mi.ras.ru

Подпись ведущего научного сотрудника
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Королёва М.А. заверяю

Доктор физико - математических наук
учёный секретарь
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова А.Н. Печень