



«Утверждаю»

Ректор Таджикского

национального университета

академик АН РТ, профессор

Имомов М.С.

9 июня 2015 г.

## Отзыв ведущей организации

на диссертацию Назрублоева Насруло Нурублоевича  
«Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для пятых степеней», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

**Актуальность темы.** Диссертационная работа посвящена изучению поведения тригонометрических сумм Г.Вейля, переменное суммирование, которых принимает значения из коротких интервалов, и выводу асимптотической формулы в проблеме Варинга для тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных чисел. Суммам Г.Вейля и проблеме Варинга посвящены фундаментальные работы Г.Вейля, Д.Гильберта, Харди, Литлвуда, И.М.Виноградова, Ю.В.Линника, Хуа Ло-гена, Давенпорта, А.А.Карацубы, Г.И.Архипова, В.Н.Чубарикова, Р.Вона, и других.

И.М. Виноградов первым начал изучать короткие тригонометрические суммы, которые возникают при решении аддитивных задач с почти равными слагаемыми. Хазелгров С. Б. получил нетривиальную оценку короткой линейной тригонометрической суммы с простыми числами и решил тернарную проблему Гольдбаха с почти равными слагаемыми. Теорему Хазелгрова затем улучшили Статулявичус, Пан Чен-донг и Пан Чен-бяо, Зан-Тао и наилучший результат принадлежит Чиа Чао-хуа.

Теорему Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа  $N$ ,  $N \equiv 5 \pmod{24}$  в виде суммы пяти квадратов простых чисел, являющиеся решением проблемы Варинга-Гольдбаха при  $n = 2$  при условии, что слагаемые почти равны, в 1996 г. Дж. Лиу и Зан Тао доказали условно, а затем 2001 г.-безусловно.

З.Х.Рахмонов и его ученики изучили короткие тригонометрические суммы Г.Вейля в множестве точек первого класса и решили тернарную проблему Эстермана с почти равными слагаемыми и проблему Варинга с почти равными слагаемыми для кубов и четвёртых степеней.

**Структура и содержание работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Первый параграф каждой главы носит вспомогательный характер.

Во введении содержится краткий обзор результатов, относящихся к теме диссертации, обосновывается актуальность темы, а также формулируются её основные результаты.

В первой главе доказана теорема 1.1 о поведении коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau},$$

при  $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ , сущность которой заключается:

- если величина  $n\lambda x^{n-1}$  очень близка к целому числу, то есть  $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$ ,  $\lambda \geq 0$ , то найдена асимптотическая формула вида

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{1/2+\epsilon});$$

- если же величина  $n\lambda x^{n-1}$  не очень близка к целому числу, то есть  $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ ,  $\lambda \geq 0$ , то найдена прямая зависимость оценки  $T(\alpha, x, y)$  от величины  $\lambda$ :

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}});$$

В следствиях 1.1.1 и 1.1.2 указано условие, а именно неравенство

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

при выполнении которого правая часть полученной формулы в теореме 1.1 будет асимптотической формулой с главным членом и оценкой в противном случае. Следствия 1.1.1 и 1.1.2 теоремы 1.1 является обобщением теоремы Р.Вона о поведении коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в множестве точек первого класса для соответствующих коротких сумм.

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена коротким тригонометрическим суммам Вейля пятой степени. Во втором параграфе для коротких тригонометрических сумм Вейля  $T(\alpha; x, y)$  пятой степени в множестве точек второго класса найдена нетривиальная оценка со степенным понижением. В третьем параграфе второй главы доказана теорема 2.2, в которой обобщена известная оценка Хуа Ло-кена о правильном порядке

интеграла по периоду от модуля суммы  $T(\alpha; x)$  в степени  $2^k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля  $T(\alpha; x, y)$  при  $n = 5$ , то есть для среднего значения сумм Г. Вейля пятой степени, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получена правильная по порядку оценка.

В третьей главе доказана теорема 3.1 об асимптотической формуле в проблеме Варинга для тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных, в которой для  $J(N, H)$  — число решений в целых числах  $x_1, x_2, \dots, x_{33}$  уравнения

$$x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_{33}^5 = N, \quad \left| x_i - \left( \frac{N}{33} \right)^{\frac{1}{5}} \right| \leq H,$$

при условии  $H \geq N^{\frac{1}{5} - \frac{1}{330} + \varepsilon}$  получена асимптотическая формула. Эта теорема доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова с использованием результатов, полученных в первой и второй главах.

**Степень достоверности результатов проведенных исследований.** Достоверность полученных результатов и выводов обусловлена корректностью математических преобразований, опирающихся на современные методы аналитической теории чисел, а именно:

- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона, оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных, оценки полных рациональных сумм Хуа Ло-кена;
- метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля;
- круговой метод Харди, Литтлвуда и Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

**Новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя.** К новым результатам, полученных в диссертации, относятся следующие:

1. изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в множестве точек первого класса;
2. найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля пятой степени в множестве точек второго класса;
3. обобщена теорема Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени, а именно найдена правильная по порядку оценки интеграла от тридцать второй степени модуля короткой тригонометрической суммы Г. Вейля пятой степени;

4. доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных чисел.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методика их получения могут быть использованы при изучении тригонометрических сумм, аддитивных задач с почти равными слагаемыми, распределения дробных частей значений многочленов. Также их можно рекомендовать при чтении спецкурсов и проведении исследований по теории чисел в МИРАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, в МГПУ и в Таджикском национальном университете.

**Апробация работы и публикации.** Основные положения диссертации Н.Н.Назрублоева в достаточной мере освещены в его 6 публикациях, в том числе 5 статей в журналах из списка ВАК РФ, рекомендуемых для кандидатских диссертаций и прошли апробацию на научно-исследовательских семинарах и международных конференциях.

**Замечания.** В диссертации имеется ряд незначительных неточностей и опечаток, не влияющих на научную значимость полученных результатов, например:

1. в автореферате на стр. 9, строка 12: слово «вида» является лишним;
2. в диссертации на стр. 58 неточная оценка порядка  $Q^{-29/10+\epsilon}$  суммы по  $q$  не влияет на окончательную оценку  $R_2$ ;
3. в диссертации на стр. 23, строка 7: снизу вместо  $b = 0$  должно быть  $b = q$ .

**Закключение.** Диссертация Н.Н.Назрублоева на тему «Проблема Варинга с почти равными слагаемыми для пятых степеней», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой получены результаты, имеющие важное значение для развития аддитивных задач аналитической теории чисел.

Работа выполнена на высоком научном уровне, обладает научной новизной и практической значимостью, соответствует критериям установленным Положением о присуждения учёных степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09 2013 г. №842, а сам

Н.Н.Назрублов заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв составили кандидаты физико – математических наук, доценты Бобоёров Ш.К., Бобоева Р, Собиров А.Ш. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, механико – математического факультета Таджикского национального университета, протокол №9 от 23 мая 2015 года.

Заведующий кафедрой  
алгебры и теории чисел,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент



Бобоёров Ш.К.

Контактная информация ведущей организации  
Таджикский национальный университет.

Адрес: 734025, г.Душанбе, проспект Рудаки, 17

сайт: <http://www.tnu.tj/index.php/ru>, телефон:(992-372) 21-77-11

E-mail:boboyorov72@mail.ru

Подпись кандидата физ.-мат. наук, доцента  
Бобоёрова Шавката Кенджабоевича заверяю  
Начальник отдела кадров ТНУ



Сироджиддини Эмомали