Институт математики им. А.Д. Джураева
Академия наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

Нематуллоев Олимджон Акбарович

О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.–мат. наук,
профессор Исхоков С.А.

Душанбе – 2015

Оглавление

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области n-мерного евклидова пространства со степенным вырождением на границе области и изучению некоторых свойств собственных функций и собственных значений таких операторов.

Исследование разрешимости краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений является одним из бурно развивающихся областей теории дифференциальных уравнений. Как отмечено авторами многих обзорных работ, существуют многообразные способы вырождения, которые требуют применение соответствующих разных методов и в настоящее время не существует единой теории, которая охватывала бы все результаты этого направления.

Применяемый нами метод основан на элементах теории весовых функциональных пространств (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, прямые и обратные теоремы о следах, теоремы о плотности гладких функций и т.д.). Первый результат типа теорем вложения для весовых пространств функций многих переменных был получен в 1938 г. в работе В.И. Кондрашова [33]. Систематическое изучение весовых пространств с весом, равным расстоянию до границы области в положительной степени, а так же их приложения к решению краевых задач для вырождающихся на границе ограниченной области эллиптических дифференциальных уравнений, впервые было проведено в монографии Л.Д. Кудрявцева [35].

Обзор работ и подробная библиография по весовым функциональным пространствам содержатся в монографиях С.М. Никольского [52], Х. Трибеля [57, 58] и статьях О.В. Бесова, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, С.М. Никольского [7], Л.Д. Кудрявцева, С.М. Никольского [39].

Достаточно полный обзор полученных результатов в теории краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений содержится в работах В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко [18], С.З. Левендорского, Б.П. Панеях [40], С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [53], О.А. Олейника, Е.В. Радкевича [54], М.М. Смирнова [55], С.А. Терсенова [56], Х. Трибеля [57] и С.В. Успенского, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкина [60]. Наши исследования в основном примыкают к исследованиям, проведенным в работах Б.Л. Байдельдинова [1, 2], К.Х. Бойматова [8] – [13], К.Х. Бойматова, С.А. Исхокова [14, 15], А.А. Вашарина [16], А.А. Вашарина, П.И. Лизоркина [17], С.А. Исхокова [20] – [25], С.А. Исхокова, Г.И. Тарасовой [31], С.А. Исхокова, Г.И. Сивцевой [26], С.А. Исхокова, А.Ё. Куджмуродова [27] – [30], А.Ё. Куджмуродова [34], Л.Д. Кудрявцева [35] – [38], П.И.Лизоркина [41], П.И. Лизоркина, С.М. Никольского [43, 44], П.И.Лизоркина, Н.В.Мирошина [42], Н.В. Мирошина [46] – [50].

В указанных выше работах, в которых рассматривались вырождающиеся эллиптические уравнения в ограниченной области n-мерного евклидова пространства, в основном, коэффициенты дифференциальных операторов имели форму произведения ограниченной функции и степени расстояния до границы области. В отличие от этого, в настоящей диссертационной работе, мы предполагаем, что младшие коэффициенты принадлежат некоторым весовым L_p – пространствам. Разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов с суммируемыми младшими коэффициентами ранее исследовалась в работах С.А.Исхокова, А.Ё.Куджмуродова [27] – [30], А.Ё.Куджмуродова [34]. В этих работах не применялся весовой аналог неравенства Гординга.

В отличие от этого, все результаты настоящей диссертационной работы получены с помощью весового аналога неравенства Гординга и условие эллиптичности нашей работы существенно слабее, чем соответствующие условия в работах [27] – [30], [34].

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [66] – [71].

Перейдем теперь к краткому изложению содержания диссертации. Работа состоит из настоящего введения, трех глав и списка литературы. Используется тройная нумерация теорем, лемм, следствий и формул, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий – на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе. Для удобства чтения в начале каждой главы приводится краткая информация о ее содержание.

Первая глава диссертации имеет вспомогательный характер, в ней, в основном, излагаются известные результаты и результаты, которые в той или иной форме ранее опубликованы. Некоторые результаты приведены с подробными доказательствами с целью полноты изложения материалов диссертации и для удобства чтения. Она состоит из трех параграфов. В первом параграфе введены определения основных нормированных пространств функций и сформулированы их основные свойства.

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ и пусть Ω – ограниченная область в R^n с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Напомним, что запись $\partial\Omega \in C^s$, где s – натуральное число, означает, что локально граница $\partial\Omega$ описывается функциями, которые имеют непрерывные производные до порядка s включительно, а запись $\partial\Omega \in C^{s+\varepsilon}$, где s – натуральное число и $\varepsilon \in (0,1)$, означает, что локально $\partial\Omega$ описывается функциями, производные порядка s которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем ε.

Символом $\rho(x)$ обозначим регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$

до $\partial\Omega$, то есть достаточно гладкую функцию со следующими свойствами

$$c_1 d(x) \le \rho(x) \le c_2 d(x), \quad d(x) = \mathrm{dist}(x,\, \partial\Omega),$$

$$|\rho^{(k)}(x)| \le M_k \rho^{1-|k|}(x),$$

для всех $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k; положительные числа c_1, c_2, M_k не зависят от x. Напоминаем, что мультииндексом называется n-мерный вектор с целыми неотрицательными координатами. Если $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, то $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса и

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}.$$

Пусть r – целое неотрицательное число, α, p – вещественные числа и $1 \le p < +\infty$. Символом $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство всех измеримых в Ω функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих в этой области все обобщенные в смысле С.Л. Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка $\le r$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \|u; L^r_{p;\alpha}(\Omega)\|^p + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \qquad (0.0.1)$$

где

$$\|u; L^r_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha p}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Классы $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами с нормой (0.0.1) и при $\alpha = 0$ совпадают с обычными пространствами С. Л. Соболева $W^r_p(\Omega)$. Если $p = 2$, то класс $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

Символом $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Если B – некоторое нормированное пространство, содержащее $C_0^\infty(\Omega)$, то через $\overset{\circ}{B}$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$

в норме пространства B. Символы $B_p^\nu(\Omega) = B_{pp}^\nu(\Omega)$ и $B_p^\nu(\partial\Omega)$ обозначают классы функций О.В. Бесова, заданные на Ω и $\partial\Omega$ соответственно (определение классов $B_{p;\theta}^\nu(\Omega)$ и $B_p^\nu(\partial\Omega)$ см., например, в [5] или [57]).

Если B_1, B_2 – нормированные пространства с нормами $\|\cdot; B_1\|$, $\|\cdot; B_2\|$ соответственно, то запись $B_1 \to B_2$ означает, что все элементы пространства B_1 можно рассматривать как элементы пространства B_2 и, кроме того $\|u; B_2\| \le C\|u; B_1\|$ для любого $u \in B_1$ с положительной константой C, не зависящей от u.

Первый результат типа теорем вложения для пространств $W_{p;\,\alpha}^r(\Omega)$ был получен В.И. Кондрашовым [33]. Систематическое исследование пространств $W_{p;\,\alpha}^r(\Omega)$ принадлежит Л.Д. Кудрявцеву [35]. Оно развивалось и дополнялось работами многих математиков, среди которых заметим работы С.М. Никольского [51], О.В. Бесова, Я. Кадлеца, А. Куфнера [6], О.В. Бесова [4], Х. Трибеля [57] и др. Более подробную библиографию по этому вопросу можно найти в обзорной работе С.М. Никольского, П.И. Лизоркина,Н.В. Мирошина [53].

Ниже сформулируем некоторые известные результаты о плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{p;\,\alpha}^r(\Omega)$, описание замыкания класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{p;\,\alpha}^r(\Omega)$ (в случае, когда он не плотен в этом пространстве), прямая и обратная теоремы о следах для пространства $W_{p;\,\alpha}^r(\Omega)$.

Теорема 1.1.1. *Множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в пространстве* $W_{p;\,\alpha}^r(\Omega)$ *в том и только в том случае, если* $\alpha \le -1/p$ *или* $\alpha \ge r - 1/p$.

Теорема 1.1.2. *Пусть* m *– целое число;* $0 \le m \le r$, $\alpha_m \ge \alpha - m > -1/p$. *Тогда справедливо вложение*

$$W_{p;\,\alpha}^r(\Omega) \to W_{p;\,\alpha-m}^{r-m}(\Omega) \to W_{p;\,\alpha_m}^{r-m}(\Omega)$$

с соответствующими оценками норм.

Теорема 1.1.3. *Пусть*

$$-\frac{1}{p} < \alpha < r - \frac{1}{p}, \tag{0.0.2}$$

s_0 *– целое число, удовлетворяющее неравенствам*

$$r - \alpha - \frac{1}{p} \leq s_0 < r - \alpha + 1 - \frac{1}{p}, \tag{0.0.3}$$

граница $\partial\Omega$ *принадлежит классу* $C^{s_0+1+\varepsilon}$*, где* $\varepsilon \in (0,1)$*. Тогда справедливо вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to B^{r-\alpha-1/p}_p(\partial\Omega). \tag{0.0.4}$$

Вложение (0.0.4) означает, что любая функция $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ имеет на границе $\partial\Omega$ следы

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s \in B^{r-\alpha-1/p-s}_p(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

и при этом выполняются неравенства

$$\|\varphi_s; B^{r-\alpha-1/p-s}_p(\partial\Omega)\| \leq C\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|,$$

$s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1$. Здесь $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали к поверхности $\partial\Omega$, константа $C > 0$ не зависит от функции u. Класс $C^{s_0+1+\varepsilon}$ состоит из поверхностей локально описывающихся функциями, производные порядка $s_0 + 1$ которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем ε, $\varepsilon \in (0,1)$.

Справедлива также следующая обратная теорема о следах.

Теорема 1.1.4. *Пусть выполняется условие (0.0.2), целое число* s_0 *определено неравенствами (0.0.3),* $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$*. Тогда если заданы функции*

$$\varphi_s \in B^{r-\alpha-1/p-s}_p(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{0.0.5}$$

то существует функция $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$*, для которой выполнены равенства*

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1$$

и справедливы оценки

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| \le C \sum_{s=0}^{s_0-1} \|\varphi_s; B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega)\|,$$

где число $C > 0$ не зависит от набора функций (0.0.5).

Символом $\overset{\circ}{W}\,{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в норме (0.0.1) пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Из теоремы 1.1.1 следует, что

$$\overset{\circ}{W}\,{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega) = W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$$

в том и только в том случае, если $\alpha \le -1/p$ или $\alpha \ge r - 1/p$. Если же $-1/p < \alpha < r - 1/p$, то описание замыкания $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ дается с помощью следующей теоремы

Теорема 1.1.5. *Пусть $-1/p < \alpha < r - 1/p$ и граница $\partial\Omega$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.4. Тогда выполняется равенство*

$$\overset{\circ}{W}\,{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1 \right\}, \quad (0.0.6)$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали, а целое число s_0 определено неравенствами (0.0.3).

Во многих рассмотрениях в спектральной теории дифференциальных операторов, область определения дифференциальных операторов совпадает с функциональным пространством $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ и для доказательства дискретности спектра этих операторов применяется следующая теорема о компактности вложения классов $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 1.1.9. *Пусть $1 \le p < \infty$, а r и m – целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \le m < r$, $\quad -1/p < \alpha \le r$. Тогда вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^m_{p;\,\beta}(\Omega)$$

компактно в том и только том случае, если $r - \alpha > m - \beta$.

Во втором параграфе первой главы доказаны несколько вспомогательных неравенств, которые в последующих параграфах применяются в процессе доказательства основных результатов работы. Основным результатом этого параграфа является следующая лемма:

Лемма 1.2.3. *Пусть* $|k| \le r$, $|l| \le r$ *и* $|k| + |l| \le 2r - 1$. *Определим числа* λ_{kl}, δ_{kl} *посредством следующих соотношений*

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \begin{cases} 1 - \frac{2r-|k|-|l|}{n} + \varepsilon, & n - 2(r-|k|) > 0,\ \ n - 2(r-|l|) > 0; \\ 1 - \frac{r-|k|}{n} + \varepsilon, & n - 2(r-|k|) > 0,\ \ n - 2(r-|l|) \le 0; \\ 1 - \frac{r-|l|}{n} + \varepsilon, & n - 2(r-|k|) \le 0,\ \ n - 2(r-|l|) > 0; \\ \text{\textit{любое число}} \le 1, & n - 2(r-|k|) \le 0,\ \ n - 2(r-|l|) \le 0, \end{cases}$$

$$\delta_{kl} = 2\alpha + n - 2r + |k| + |l| - \frac{n}{\lambda_{kl}}.$$

Тогда для любого τ, $0 < \tau < 1$, *и всех* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{ \int\limits_\Omega \Bigl(\rho^{\delta_{kl}}(x) |v^{(k)}(x) v^{(l)}(x)| \Bigr)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \le$$

$$\le \tau \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\|^2 + C_0 \tau^{-\mu} \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\|^2,$$

где μ *– некоторое положительное число.*

В третьем параграфе первой главы доказывается одно весовое неравенство, которое является аналогом неравенства Гординга для равномерно эллиптических операторов.

Рассматривается следующий дифференциальный оператор

$$(Lu) = \sum_{|k|,|l| \le r} (-1)^{|l|} \bigl(\rho^{2\alpha - 2r + |k| + |l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \bigr)^{(l)}, \tag{0.0.7}$$

где r – натуральное, α – вещественное числа, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – мультииндексы, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ являются комплекснозначными.

С оператором (0.0.7) связана следующая полуторалинейная форма

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \qquad (0.0.8)$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены условия:*

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (0.0.8) при $|k| = |l| = r$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c_0 |\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$; c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ;

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,\, |l| \le r$ и $|k| + |l| \le 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}; -n/p_{kl}}(\Omega)$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \le r-1,\ |l| \le r \\ q_{lk} & \text{при } |k| = r,\ |l| \le r-1 \end{cases}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r - |k| - |l|} < q_{kl} \le \frac{n}{r - |l|}, \text{ если } n > 2(r - |k|),\ n > 2(r - |l|);$$

$$\frac{n}{r - |k| - \varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2} \text{ если } n > 2(r - |k|),\ n \le 2(r - |l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r - |l| + \varepsilon_2 n},\ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2} \text{ если } n \le 2(r - |k|),\ n > 2(r - |l|), \\ \\ \text{любое конечное число >1, если } n \le 2(r - |k|),\ n \le 2(r - |l|). \end{cases}$$

Тогда существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 \ge 0$, что

$$\operatorname{Re} B[u,\, u] \ge C_1 \|u, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 - C_2 \|u, L_{2;\,\alpha - r}(\Omega)\|^2 \qquad (0.0.9)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена приложению весового неравенства Гординга (0.0.9). Она состоит из двух параграфов. В первом параграфе изучается однозначная разрешимость однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе. Во втором параграфе доказана теорема об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области, которые имеют степенное вырождение на границе.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(Lu)(x) \equiv \sum_{|k|,\,|l|\le r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)} = f(x)\ (x\in\Omega), \tag{0.0.10}$$

где $p_k(x)=\rho^{\alpha-r+|k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, на которых ниже накладываются некоторые условия.

Если уравнение (0.0.10) умножаем на $\overline{v(x)}$, где $v\in C_0^\infty(\Omega)$, и интегрируем по $x\in\Omega$, то после интегрирования по частям приходим к равенству

$$B[u,\,v] \overset{def}{=} \sum_{|k|,\,|l|\le r} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx = \int\limits_\Omega f(x)\overline{v(x)}dx \tag{0.0.11}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Любое решение $u(x)$ уравнения (0.0.11) называется обобщенным решением уравнения (0.0.10). Поэтому вопрос о существовании обобщенных решений уравнения (0.0.10) связан с полуторалинейной формой (0.0.8). Забегая вперед, заранее отметим, что в наших условиях форма $B[u,\,v]$ по непрерывности определяется на всех $u,\,v\in\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

В первом параграфе второй главы исследуется разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (0.0.8).

Задача D_λ. Для заданного функционала $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Разрешимость задачи D_λ ранее исследовалась в работах С.М. Никольского, П.И. Лизоркина [43, 44], Н.В. Мирошина [46], Б.Л. Байдельдинова [1, 2], С.А. Исхокова [20, 21, 22], С.А. Исхокова, А.Ё. Куджмуродова [27] и др., в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|,|l|\le r} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \ge c_0 \rho^{2\alpha}(x) \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{0.0.12}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\{\zeta_k\}_{|k|\le r}$. В отличие от этого, здесь мы предполагаем выполнение более слабого чем (0.0.12) условия (см. условие I) теоремы 2.1.1).

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия:*

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (0.0.8) при $|k| = |l| = r$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c_0 |\xi|^{2r} \tag{0.0.13}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$; c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ;

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,\, |l| \le r$ и $|k| + |l| \le 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где p_{kl} – такие же числа как в теореме 1.3.1.

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи D_λ, и при этом выполняется оценка

$$\left\| U;\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\| \le M_0 \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\|$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от выбора функционала F и от λ.

Далее в первом параграфе второй главы доказывается следующая теорема о разрешимости задачи D_λ при $\lambda = 0$.

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1 и пусть кроме того*

III) существует положительное число M_0 такое, что

$$\int\limits_\Omega \rho^{2\alpha-2r}(x)|v(x)|^2 dx \leq M_0 \mathrm{Re} B[v,\, v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи D_λ при $\lambda = 0$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \tag{0.0.14}$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F.

Далее предполагается, что $-1/2 < \alpha < r - 1/2$ и целое число s_0 такое, что

$$r - \alpha - \frac{1}{2} \leq s_0 < r - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Рассматривается следующая вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями:

Задача D'_λ. *Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения*

$$B[U,v] + \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha-2r}(x)U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial^s U}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ \ s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали.

Согласно теореме 1.1.5, если $-1/2 < \alpha < r-1/2$ и граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, где ε – некоторое число из интервала $(0,\, 1)$, то выполняется следующее равенство

$$\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1 \right\}.$$

Следовательно, в этом случае задачи D_λ и D'_λ эквивалентны и поэтому для изучения разрешимости задачи D'_λ можно применить теоремы 2.1.1 и 2.1.3. Полученные результаты сформулируем в виде следующих теорем:

Теорема 2.1.4. *Пусть* $-1/2 < \alpha < r - 1/2$, $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, *и выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда существует число* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *существует единственное решение* $U(x) \in W\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ *задачи* D'_λ *и при этом выполняется оценка (0.0.14), где число* $M > 0$ *не зависит от выбора функционала* F *и от* λ.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $-1/2 < \alpha < r - 1/2$, $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, *и выполнены все условия теоремы 2.1.3. Тогда для любого заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *существует единственное решение* $U(x) \in W\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ *задачи* D'_λ *при* $\lambda = 0$ *и при этом выполняется оценка (0.0.14), в котором число* $M > 0$ *не зависит от выбора функционала* F.

Во втором параграфе второй главы изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с **неоднородными граничными условиями** для эллиптических операторов высшего порядка со степенным вырождением.

Рассматривается следующая полуторалинейная интегро-дифференциальная форма

$$\mathbb{B}[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int_\Omega b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{0.0.15}$$

где $b_{kl}(x)$ - комплекснозначние функции, на которых ниже накладываются некоторые условия, при выполнении которых $B[u,\, v]$ принимает конечное значение для всех $u(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, $\quad v(x) \in \overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Исследуется разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (0.0.15).

Задача D**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] = \langle F,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{0.0.16}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega). \tag{0.0.17}$$

Замечание 2.2.1. Если $\Phi(x) \notin \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, то условие (0.0.17) означает, что решение $U(x)$ задачи D и заданная функция $\Phi(x)$ имеют одни и те же ненулевые следы на границе $\partial\Omega$ области Ω.

Разрешимость и свойства гладкости решения задачи D ранее исследовались в работах С.М.Никольского, П.И.Лизоркина [43, 44], Н.В.Мирошина [46], Б.Л.Байдельдинова [1, 2], С.А.Исхокова [20, 21, 22], С.А.Исхокова, А.Ё.Куджмуродова [27], и др. в предположении, что коэффициенты $b_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|,|l|\le r} b_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l} \ge c_0\rho^{2\alpha}(x)\sum_{|k|=r}|\zeta_k|^2 \tag{0.0.18}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\{\zeta_k\}_{|k|\le r}$. В отличие от этого, здесь мы предполагаем выполнение более слабого, чем (0.0.18) условия (см. условие I) теоремы 2.2.1). Здесь также ослаблены и некоторые другие условия на коэффициенты $b_{kl}(x)$, имеющиеся в работах вышеуказанных авторов.

Вводится следующее обозначение:

$$(\mu)_+ = \mu, \quad \text{если} \quad \mu > 0, \quad (\mu)_+ = 0 \quad \text{при} \quad \mu \le 0.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть число* α *такое, что*

$$\alpha \ge 0, \quad \alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \cdots, r\},$$

и пусть выполнены условия:

I) старшие коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, формы (0.0.15) имеют вид

$$b_{kl}(x) = \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x),$$

где функции $a_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \geq c_0 |\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$ (c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ);

II) коэффициенты $b_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \leq r$ и $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{\mu_{kl},\,-\alpha_{kl}}(\Omega)$, где $\mu_{kl} > 1$ и

$$\alpha_{kl} = -1 + \frac{1}{\mu_{kl}} + \varepsilon_0 + \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{2}\right)_+ + \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{2}\right)_+,$$

где ε_0 – достаточно малое положительное число;

III) существует положительное число M_0 такое, что

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) |v(x)|^2 dx \leq M_0 \mathrm{Re}\, \mathbb{B}[v,\, v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ существует единственное решение $U(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи D и при этом выполняется оценка

$$\left\| U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\| \leq M \left\{ \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| + \left\| \Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F и функции Φ.

Доказательство этой теоремы основано на применении теоремы 2.1.3 и следующих двух вспомогательных лемм.

Лемма 2.2.1. *Пусть $p > 1$ и числа λ_{kl} определенные для мультииндексов $k,\, l(|k| \le r, |l| \le r,\, |k| + |l| \le 2r-1)$ такие, что $\lambda_{kl} > 1,\, 1/\lambda_{kl} \le 2/p$. Тогда для всех $u(x),\, v(x) \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl},\,\alpha_{kl}}(\Omega) \right\| \ll \left\| u;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\| \left\| v;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\|,$$

где

$$\alpha_{kl} = -\frac{1}{\lambda_{kl}} + \varepsilon_1 + \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{p} \right)_+ + \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{p} \right)_+,$$

ε_1 - достаточно малое положительное число.

Лемма 2.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда для любой заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ функционал G, определенный равенством*

$$\langle G,\, v \rangle = -\mathbb{B}[\Phi,\, v]$$

принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \right)'$ и при этом

$$\left\| G;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \right)' \right\| \le M \left\| \Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от $\Phi(x)$.

Далее предположим, что $-1/2 < \alpha < r - 1/2$ и целое число s_0 такое, что

$$r - \alpha - \frac{1}{2} \le s_0 < r - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Тогда согласно теореме 1.1.4 при условии $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$ для заданных граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

найдется функция $\Phi \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$\left. \frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s} \right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали, и имеет место следующее неравенство

$$\left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\|.$$

В этом случае задачу D можно сформулировать следующим образом

Задача D'. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{0.0.19}$$

требуется найти решение $U(x)$ уравнения (0.0.16) из пространства $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^s U(x)}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1. \tag{0.0.20}$$

Применяя теорему 2.2.1 получаем следующий результат о разрешимости задачи D'.

Теорема 2.2.2. *Пусть $0 < \alpha < r - 1/2$, граница области $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$, и выполнены все условия теоремы 2.2.1.*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций (0.0.19) существует единственное решение $U(x)$ задачи D' и при этом справедливо неравенство

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\{ \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F и граничных функций (0.0.19).

Далее изучается разрешимость аналога вариационной задачи D_λ с неоднородными граничными условиями.

Задача D^*_λ. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданных граничных функций (0.0.19) требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) U(x)\overline{v(x)} dx = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяющее граничным условиям (0.0.20).

Теорема 2.2.3. *Пусть* $0 < \alpha < r - 1/2 \quad \alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \cdots, r\}$, *граница области* $\partial\Omega$ *принадлежит классу* $C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$, *и пусть выполнены условия I) и II) теоремы 2.2.1.*

Тогда существует неотрицательное число λ_0 *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *и заданного набора граничных функций (0.0.19) существует единственное решение* $U(x)$ *задачи* D^*_λ *и при этом справедливо неравенство*

$$\left\| U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\{ \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| + \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\| \varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\| \right\},$$

где число $M > 0$ *не зависит от* λ *и от выбора функционала* F *и граничных функций (0.0.19).*

В **третьей главе** диссертационной работы изучаются некоторые спектральные свойства эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области со степенным вырождением на границе. Она состоит из трех параграфов. В первом параграфе изучаются разрешимости вариационной задачи на собственные значения и фредгольмовость неоднородной вариационной задачи с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области. Случай неоднородных граничных условий рассматривается во втором параграфе. В третьем параграфе изучается асимптотика распределения собственных значений эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе.

Также как в первом параграфе второй главы, рассматривается вырождающийся дифференциальный оператор

$$(Lu)(x) \equiv \sum_{|k|,\,|l|\le r} (-1)^{|l|} \Big(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \Big)^{(l)} \;\; (x \in \Omega) \qquad (0.0.21)$$

и связанная с ним полуторалинейная интегро-дифференциальная форма

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int\limits_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \qquad (0.0.22)$$

Здесь и далее $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначние функции, на которых ниже накладываются некоторые условия.

Пусть λ – комплексный параметр. В первом параграфе третьей главы рассматривается следующая вариационная задача:

Задача $\mathbb{D}_\lambda$**.** Для заданного функционала $F \in \Big(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \Big)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F,\, v \rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)) \,, \qquad (0.0.23)$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Соответствующая однородная задача формулируется следующим образом:

Задача $\mathbb{D}_\lambda^0$**.** Требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} U(x) \overline{v(x)} dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)) \,, \qquad (0.0.24)$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Значение параметра λ, при котором задача $\mathbb{D}_\lambda^0$ имеет нетривиальное решение, назовем собственным значением вариационной задачи Дирихле для оператора

$$(Lu)(x) \equiv \sum_{|k|,\,|l|\le r} (-1)^{|l|} \Big(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \Big)^{(l)} \;\; (x \in \Omega), \qquad (0.0.25)$$

а соответствующее решение – обобщенной собственной функцией этой задачи.

Наряду с задачами $\mathbb{D}_\lambda$ и $\mathbb{D}_\lambda^0$ рассматриваются отвечающие им сопряженные задачи:

Задача $\mathbb{D}_\lambda^*$. Для заданного функционала $G \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\, v] + \overline{\lambda} \int\limits_{\Omega} \overline{V(x)} v(x) dx = \langle G,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{0.0.26}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Задача $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$. Требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\, v] + \overline{\lambda} \int\limits_{\Omega} \overline{V(x)} v(x) dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{0.0.27}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 3.1.1. *Пусть $r - \alpha > 0$, $\alpha + 1/2 \notin \{1,\, 2,\, \ldots,\, r\}$ и*

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) |v(x)|^2 dx \le M_0 \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad \textit{для всех } v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{0.0.28}$$

Пусть также выполнены условия:

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (0.0.22) при $|k| = |l| = r$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c_0 |\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$ (c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ);

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,\, |l| \le r$ и $|k| + |l| \le 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где числа p_{kl} определяются соотношениями:

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, & |l| = r, \;\; n > 2(r - |k|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, & |k| = r, \;\; n > 2(r - |l|); \end{cases}$$

если $|k| \le r-1$, $|l| \le r-1$, *то*

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon, & n > 2(r-|k|), \ \ n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|l|+\varepsilon}, & n \le 2(r-|k|), \ \ n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|k|+\varepsilon}, & n > 2(r-|k|), \ \ n \le 2(r-|l|); \end{cases}$$

p_{kl} *– любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.*

Здесь ε *– достаточно малое положительное число.*

Тогда задача $\mathbb{D}_\lambda$ *фредгольмова, то есть:*

1) *задача* $\mathbb{D}_\lambda^0$ *имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра* $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ *(собственные значения) и только* ∞ *будет предельной точкой этих значений;*

2) *отвечающее каждому собственному значению* λ_j *подпространство обобщенных собственных функций (собственное подпространство) конечномерно;*

3) *у сопряженной задачи* $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$ *собственные значения равны* $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots;$

4) *собственные подпространства задач* $\mathbb{D}_\lambda^0$ *и* $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$, *отвечающие собственным значениям* λ_j *и* $\overline{\lambda_j}$, *имеют одинаковую размерность;*

5) *для того чтобы задача* $\mathbb{D}_\lambda$ *имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения* $v(x)$ *задачи* $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$ *выполнялось условие* $\langle F, v \rangle \equiv 0$;

6) *для того чтобы задача* $\mathbb{D}_\lambda^*$ *имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения* $u(x)$ *задачи* $\mathbb{D}_\lambda^0$ *выполнялось условие* $\langle G, u \rangle \equiv 0$.

Пусть $\varphi(x)$ – положительная измеримая в области Ω функция.

Положим $\mathcal{H}_+ = \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, $\mathcal{H}_0 = L_{2;\,\varphi}(\Omega)$, где $L_{2;\,\varphi}(\Omega)$ – весовое лебегово пространство измеримых в Ω функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u;\, L_{2;\,\varphi}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \varphi^2(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_-$ – негативное пространство, построенное по пространствам $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_0$.

Далее в первом параграфе третьей главы исследуется фредгольмовость вариационной задачи Дирихле для вырождающегося дифференциального оператора (0.0.25), когда условие $r - \alpha > 0$ теоремы 3.1.1 может не выполняться. В этом случае вместо обобщенных собственных функций изучаются обобщенные собственные функции с весом, и вместо задачи $\mathbb{D}_\lambda$ изучается разрешимость следующей задачи

Задача $\mathbb{D}_{\lambda;\,\varphi}$. Для заданного функционала $F \in \mathcal{H}_-$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \varphi^2(x) U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F,\, v \rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Также как в случае задачи $\mathbb{D}_\lambda$ наряду с задачи $\mathbb{D}_{\lambda;\,\varphi}$ рассматриваются отвечающие ей однородная и сопряженные задачи:

Задача $\mathbb{D}^0_{\lambda;\,\varphi}$. Требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \varphi^2(x) U(x) \overline{v(x)} dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Задача $\mathbb{D}^*_{\lambda;\,\varphi}$. Для заданного функционала $G \in \mathcal{H}_-$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \varphi^2(x)^2 V(x) \overline{v(x)} dx = \langle G,\, v \rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Задача $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\,\varphi}$. Требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\,v]+\lambda\int\limits_{\Omega}\varphi(x)V(x)\overline{v(x)}dx=0\qquad(\forall v\in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\alpha+1/2\notin\{1,\,2,\,\ldots,\,r\}$ и коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (0.0.22) удовлетворяют условиям (0.0.28), I) и II) теоремы 3.1.1. Пусть также функция $\varphi(x)$ непрерывна в Ω и удовлетворяет условию*

$$\lim_{x\in\Omega:\,\rho(x)\to 0}\varphi(x)\rho^{r-\alpha}(x)=0. \qquad (0.0.29)$$

Тогда задача $\mathbb{D}_{\lambda;\,\varphi}$ фредгольмова, то есть:

1) *задача $\mathbb{D}^{0}_{\lambda;\,\varphi}$ имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра $\lambda=\lambda_j,\ j=1,2,\ldots$ и только ∞ будет предельной точкой этих значений;*

2) *отвечающее каждому значению λ_j подпространство решений задачи $\mathbb{D}^{0}_{\lambda;\,\varphi}$ - конечномерно;*

3) *у сопряженной задачи $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\,\varphi}$ собственные значения равны $\overline{\lambda_j},\ j=1,2,\ldots$;*

4) *подпространства решений задач $\mathbb{D}^{0}_{\lambda;\,\varphi}$ и $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\,\varphi}$, отвечающие значениям λ_j и $\overline{\lambda_j}$, имеют одинаковую размерность;*

5) *для того чтобы задача $\mathbb{D}_{\lambda;\,\varphi}$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $v(x)$ задачи $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\,\varphi}$ выполнялось условие $\langle F,\,v\rangle\equiv 0$;*

6) *для того чтобы задача $\mathbb{D}^{*}_{\lambda}$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $u(x)$ задачи $\mathbb{D}^{0}_{\lambda;\,\varphi}$ выполнялось условие $\langle G,\,u\rangle\equiv 0$.*

Пусть $\mathbb{B}[u, v]$ – полуторалинейная форма, определенная равенством (0.0.15). Во втором параграфе третьей главы исследуется разрешимость следующей вариационной задачи с неоднородными граничными условиями:

Задача $\mathscr{D}_\lambda$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Psi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_\Omega U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{0.0.30}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Наряду с этой задачей, также рассматриваются следующие соответствующие однородная и сопряженные задачи:

Задача $\mathscr{D}^0_\lambda$. Требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_\Omega U(x)\overline{v(x)}dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{0.0.31}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Задача $\mathscr{D}^*_\lambda$. Для заданного функционала $G \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Psi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\, v] + \overline{\lambda} \int\limits_\Omega \overline{V(x)}v(x)dx = \langle G,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{0.0.32}$$

удовлетворяющее условию

$$V(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Задача $\mathscr{D}^{0*}_\lambda$. Требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\, v] + \overline{\lambda} \int\limits_\Omega \overline{V(x)}v(x)dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{0.0.33}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Относительно разрешимости этих задач установлен следующий результат.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $r-\alpha>0$, $\alpha+1/2\notin\{1,\,2,\,\ldots,\,r\}$ *и выполнены условия:*

I) старшие коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k|=|l|=r$, *формы (0.0.15) имеют вид*

$$b_{kl}(x)=\rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x),$$

где функции $a_{kl}(x)$ *непрерывны в замкнутой области* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяют условию эллиптичности*

$$\operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\geq c_0|\xi|^{2r} \qquad (0.0.34)$$

для всех $x\in\Omega$, $\xi\in R^n$ (c_0 *– положительная постоянная независящая от* x, ξ *);*

II) коэффициенты $b_{kl}(x)$ *при* $|k|,\,|l|\leq r$ *и* $|k|+|l|\leq 2r-1$ *принадлежат пространству* $L_{\mu_{kl},\,-\alpha_{kl}}(\Omega)$, *где* $\mu_{kl}>1$ *и*

$$\alpha_{kl}=-1+\frac{1}{\mu_{kl}}+\varepsilon_0+\left(\alpha-r+|k|+\frac{1}{2}\right)_+ +\left(\alpha-r+|l|+\frac{1}{2}\right)_+, \qquad (0.0.35)$$

где ε_0 *– достаточно малое положительное число;*

III) существует положительное число M_0 *такое, что*

$$\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2r}(x)|v(x)|^2dx\leq M_0\operatorname{Re}B[v,\,v] \qquad (0.0.36)$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда задача $\mathscr{D}_\lambda$ *фредгольмова, то есть:*

1) *задача* $\mathscr{D}_\lambda^0$ *имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра* $\lambda=\lambda_j$, $j=1,2,\ldots$ *(собственные значения) и только* ∞ *будет предельной точкой этих значений;*

2) отвечающее каждому собственному значению λ_j подпространство обобщенных собственных функций (собственное подпространство) конечномерно;

3) у сопряженной задачи $\mathscr{D}_\lambda^{0*}$ собственные значения равны $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$;

4) собственные подпространства задач $\mathscr{D}_\lambda^0$ и $\mathscr{D}_\lambda^{0*}$, отвечающие собственным значениям λ_j и $\overline{\lambda_j}$, имеют одинаковую размерность;

5) для того чтобы задача $\mathscr{D}_\lambda$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $v(x)$ задачи $\mathscr{D}_\lambda^{0*}$ выполнялось условие $\langle \widetilde{F}, v\rangle \equiv 0$, где $\langle \widetilde{F}, v\rangle = \langle F, v\rangle - B[\Phi, v] - \lambda(\Phi, v)$;

6) для того чтобы задача $\mathscr{D}_\lambda^*$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $u(x)$ задачи $\mathscr{D}_\lambda^0$ выполнялось условие $\langle \widetilde{G}, u\rangle \equiv 0$, где $\langle \widetilde{G}, u\rangle = \langle G, v\rangle - B[\Psi, v] - \lambda(\Psi, v)$.

В третьем параграфе третьей главы исследуется асимптотика собственных значений вырождающегося эллиптического оператора (0.0.21). Доказывается следующая теорема:

Теорема 3.3.1. *Пусть $0 \le \alpha < r$ и выполнены все условия теоремы 3.1.1. Тогда оператор L имеет дискретный спектр и для собственных значений λ_j оператора L выполняется следующее условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-\gamma/2} < \infty,$$

где γ – любое число, удовлетворяющее неравенству $\gamma > n/(r-\alpha)$.

Из этой теоремы непосредственно можно получить асимптотическую формулу для уточнения роста собственных значений λ_j при $j \to \infty$.

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.1 собственные значения λ_j дифференциального оператора L удовлетворяют неравенству*

$$j^{2/\gamma} < |\lambda_j|$$

при достаточно больших натуральных j. *Здесь* γ – *такое же число, как в теореме 3.3.1.*

Глава 1

Неравенство Гординга для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области

Настоящая глава имеет вспомогательный характер, в ней, в основном, излагаются известные результаты и результаты, которые в той или иной форме ранее опубликованы. Некоторые результаты приведены с подробными доказательствами с целью полноты изложения материалов диссертации и для удобства чтения. Она состоит из трех параграфов. В первом параграфе введены определения основных нормированных пространств функций и сформулированы их основные свойства. Во втором параграфе доказываются вспомогательные интегральные неравенства. В третьем параграфе приводится подробное доказательство весового неравенства Гординга для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе.

1.1 Функциональные пространства

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1,\, x_2,\, \cdots ,\, x_n)$ и пусть Ω – ограниченная область в R^n с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$.

Напомним, что запись $\partial\Omega \in C^s$, где s – натуральное число, означает, что локально граница $\partial\Omega$ описывается функциями, которые имеют непрерывные производные до порядка s включительно, а запись $\partial\Omega \in C^{s+\varepsilon}$, где s – натуральное число и $\varepsilon \in (0,1)$, означает, что локально $\partial\Omega$ описывается функциями, производные порядка s которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем ε.

Символом $\rho(x)$ обозначим регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$, то есть достаточно гладкую функцию со следующими свойствами

$$c_1 d(x) \le \rho(x) \le c_2 d(x), \quad d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega),$$

$$|\rho^{(k)}(x)| \le M_k \rho^{1-|k|}(x),$$

для всех $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k; положительные числа c_1, c_2, M_k не зависят от x. Напоминаем, что мультииндексом называется n-мерный вектор с целыми неотрицательными координатами. Если $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, то $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса и

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}.$$

Пусть r – целое неотрицательное число, α, p – вещественные числа и $1 \le p < +\infty$. Символом $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство всех измеримых в Ω функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих в этой области все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка $\le r$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \|u; L^r_{p;\alpha}(\Omega)\|^p + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \tag{1.1.1}$$

где

$$\|u; L^r_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha p}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Классы $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами с нормой (1.1.1) и при $\alpha = 0$ совпадают с обычными пространствами С. Л. Соболева $W^r_p(\Omega)$. Если $p = 2$, то класс $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

Символом $C^\infty_0(\Omega)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Если B – некоторое нормированное пространство, содержащее $C^\infty_0(\Omega)$, то через $\overset{\circ}{B}$ обозначим замыкание множества $C^\infty_0(\Omega)$ в норме пространства B. Символы $B^\nu_p(\Omega) = B^\nu_{pp}(\Omega)$ и $B^\nu_p(\partial\Omega)$ обозначают классы функций О.В. Бесова, заданные на Ω и $\partial\Omega$ соответственно (определение классов $B^\nu_{p;\theta}(\Omega)$ и $B^\nu_p(\partial\Omega)$ см., например, в [5] или [57]).

Если $B_1,\ B_2$ – нормированные пространства с нормами $\|\cdot; B_1\|,\ \|\cdot; B_2\|$ соответственно, то запись $B_1 \to B_2$ означает, что все элементы пространства B_1 можно рассматривать как элементы пространства B_2 и, кроме того $\|u; B_2\| \le C\|u; B_1\|$ для любого $u \in B_1$ с положительной константой C, не зависящей от u.

Первый результат типа теорем вложения для пространств $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$ был получен В.И. Кондрашовым [33]. Систематическое исследование пространств $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$ принадлежит Л.Д. Кудрявцеву [35]. Оно развивалось и дополнялось работами многих математиков, среди которых заметим работы С.М. Никольского [51], О.В. Бесова, Я. Кадлеца, А. Куфнера [6], О.В. Бесова [4], Х. Трибеля [57] и др. Более подробную библиографию по этому вопросу можно найти в обзорной работе С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [53].

Ниже отдельно сформулируем теорему о плотности класса $C^\infty_0(\Omega)$ в пространстве $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$, теорему вложения для пространств $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$ и теоремы о следах функций из пространств $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$.

Теорема 1.1.1. *Множество* $C^\infty_0(\Omega)$ *плотно в пространстве* $W^r_{p;\alpha}(\Omega)$ *в том и только в том случае, если* $\alpha \le -1/p$ *или* $\alpha \ge r - 1/p$.

Теорема 1.1.2. *Пусть* m *– целое число;* $0 \le m \le r,\quad \alpha_m \ge \alpha - m >$

$-1/p$. *Тогда справедливо вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^{r-m}_{p;\,\alpha-m}(\Omega) \to W^{r-m}_{p;\,\alpha_m}(\Omega) \tag{1.1.2}$$

с соответствующими оценками норм.

Теорема 1.1.3. *Пусть*

$$-\frac{1}{p} < \alpha < r - \frac{1}{p}, \tag{1.1.3}$$

s_0 *– целое число, удовлетворяющее неравенствам*

$$r - \alpha - \frac{1}{p} \le s_0 < r - \alpha + 1 - \frac{1}{p}, \tag{1.1.4}$$

граница $\partial\Omega$ *принадлежит классу* $C^{s_0+1+\varepsilon}$, *где* $\varepsilon \in (0,1)$. *Тогда справедливо вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to B_p^{r-\alpha-1/p}(\partial\Omega). \tag{1.1.5}$$

Вложение (1.1.5) означает, что любая функция $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ имеет на границе $\partial\Omega$ следы

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s \in B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{1.1.6}$$

и при этом выполняются неравенства

$$\|\varphi_s; B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega)\| \le C\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|, \tag{1.1.7}$$

$s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1$. Здесь $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали к поверхности $\partial\Omega$, константа $C > 0$ не зависит от функции u. Класс $C^{s_0+1+\varepsilon}$ состоит из поверхностей локально описывающихся функциями, производные порядка $s_0 + 1$ которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем ε, $\varepsilon \in (0,1)$.

Справедлива также следующая обратная теорема о следах.

Теорема 1.1.4. *Пусть выполняется условие (1.1.3), целое число* s_0 *определено неравенствами (1.1.4),* $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$. *Тогда если заданы функции*

$$\varphi_s \in B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{1.1.8}$$

то существует функция $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$*, для которой выполнены равенства*

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1$$

и справедливы оценки

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| \le C \sum_{s=0}^{s_0-1} \|\varphi_s; B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega)\|,$$

где число $C > 0$ *не зависит от набора функций (2.2).*

Символом $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в норме пространства $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Из теоремы 1.1.1 следует, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\,\alpha}(\Omega) = W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$$

в том и только в том случае, если $\alpha \le -1/p$ или $\alpha \ge r - 1/p$. Если же $-1/p < \alpha < r - 1/p$, то описание замыкания $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ дается с помощью следующей теоремы

Теорема 1.1.5. *Пусть* $-1/p < \alpha < r - 1/p$ *и граница* $\partial\Omega$ *удовлетворяет условиям теоремы 1.1.4. Тогда выполняется равенство*

$$\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1 \right\}, \quad (1.1.9)$$

где $\partial/\partial n$ *– производная по внутренней нормали, а целое число* s_0 *определено неравенствами (1.1.4).*

Для исследования разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями нам понадобится следующая теорема вложения разных метрик для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, доказанная в работе С.А. Исхокова [62].

Теорема 1.1.6. *Пусть граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *принадлежит классу* C^1 *и пусть выполнены условия*

$$0 \le m \le r, \ 1 < p \le q < +\infty, \ \alpha_m > -\frac{1}{q}, \ \alpha - m \le \alpha_m + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}. \quad (1.1.10)$$

Тогда справедливо вложение

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^{r-m}_{q;\,\alpha_m}(\Omega). \tag{1.1.11}$$

В приложениях теории весовых функциональных пространств к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений, наряду с пространством $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, важную роль играет и весовое пространство $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, которое определяется как пространство всех измеримых в Ω функций $u(x)$, имеющих все обобщенные в смысле С.Л. Соболева производные $u^{(k)}(x)$ $(|k| \le r)$ с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{\|u; L^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|^p + \|u; L_{p;\,\alpha-r}(\Omega)\|^p\right\}^{1/p}. \tag{1.1.12}$$

Основные свойства пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ изучены С.М. Никольским, П.И. Лизоркиным и Н.В. Мирошиным в работах [43, 44, 53]. Из результатов этих работ, в частности, следует следующий результат.

Теорема 1.1.7. *1) Для любого натурального числа r и вещественных чисел α, p, причем $1 \le p < \infty$, множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.*

2) Пусть целое число $s \in [0, r]$. Тогда справедливо вложение

$$V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to V^{r-s}_{p;\,\alpha-s}(\Omega).$$

3) Норма (1.1.12) пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ эквивалентна следующей норме

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|_* = \left\{\sum_{|k|\le r} \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha-r+|k|}(x)|u^{(k)}(x)|\right)^p dx\right\}^{1/p} \tag{1.1.13}$$

.

Следующая теорема вложения разных метрик была доказана С.А. Исхоковым и А.Ё. Куджмуродовым в работе [27].

Теорема 1.1.8 *Пусть* r *– натуральное число и целое число* $s \in [0, r]$. *Тогда при выполнении следующих условий*

$$1 \le p \le q < \infty, \; s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \ge 0, \tag{1.1.14}$$

$$\alpha - s + \frac{n}{p} - \frac{n}{q} \le \alpha_s \tag{1.1.15}$$

имеет место вложение

$$V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to V^{r-s}_{q;\,\alpha_s}(\Omega).$$

Во многих рассмотрениях в спектральной теории дифференциальных операторов, область определения дифференциальных операторов совпадает с функциональным пространством $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, и для доказательства дискретности спектра этих операторов применяется следующая теорема о компактности вложения классов $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 1.1.9. *Пусть* $1 \le p < \infty$, *а* r *и* m *– целые числа, удовлетворяющие условию* $0 \le m < r, \quad -1/p < \alpha \le r$. *Тогда вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^m_{p;\,\beta}(\Omega)$$

компактно в том и только том случае, если $r - \alpha > m - \beta$.

По поводу доказательства этой теоремы можно посмотреть работы [57], [45], [47], [48], [53].

Из теоремы 1.1.9, в частности, при $m = \beta = 0$ следует, что вложение $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to L_p(\Omega)$ компактно в том и только том случае, если $r - \alpha > 0$.

1.2 Вспомогательные интегральные неравенства

Пусть число $\varkappa$ такое, что

$$|\nabla \rho(y)| \le \varkappa, \quad \rho(y) \le \varkappa \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \quad (\forall y \in \Omega). \tag{1.2.1}$$

Пусть $y \in R^n, \quad \varepsilon \in (0,1)$ и m-натуральное число. Введем обозначение

$$J_\varepsilon^{(m)}(y) = \left\{ x \in R^n : \, |x-y| < \frac{m\varepsilon}{(m+1)\varkappa}\, \rho(y) \right\}.$$

Из (1.2.1) следует, что $J_\varepsilon^{(m)}(y) \subset \Omega$ при всех $y \in \Omega$, $\varepsilon \in (0,1)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Лемма 1.2.1. *Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, m – натуральное число и $\chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)$ – характеристическая функция шара $J_\varepsilon^{(m)}(y)$. Тогда*

$$\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n \le \rho^{-n}(x)\varkappa_n^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n \int\limits_\Omega \chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)\,dy \le \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n, \qquad (1.2.2)$$

где $\varkappa_n$ – площадь единичной сферы в R^n.

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$(1-\varepsilon)\rho(y) \le \rho(x) \le (1+\varepsilon)\rho(y) \qquad (1.2.3)$$

для всех x, $y \in \Omega$ таких, что

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\, \rho(y). \qquad (1.2.4)$$

Так как $|\nabla\rho(z)| \le \varkappa \quad (\forall z \in \Omega)$, то используя равенство

$$\rho(x) - \rho(y) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\rho(y + t(x-y))dt$$

и условие (1.2.4) имеем $|\rho(x) - \rho(y)| \le \varkappa|x-y| < \varepsilon\rho(y)$. Отсюда следует (1.2.3).

Имеем

$$\int\limits_\Omega \chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)\,dy = \int\limits_{G_\varepsilon^{(m)}(x)} 1 \cdot dy = \left| G_\varepsilon^{(m)}(x) \right|,$$

где

$$G_\varepsilon^{(m)}(x) = \left\{ y \in R^n : |x-y| < \frac{\varepsilon m}{\varkappa(m+1)}\, \rho(y) \right\}.$$

Из (1.2.4) следует, что $\rho(y) \le (1-\varepsilon)^{-1}\rho(x)$ для всех $y \in G_\varepsilon^{(m)}(x)$. Поэтому $|x-y| < \frac{m\varepsilon}{\varkappa(m+1)(1-\varepsilon)}\rho(x)$, и следовательно $G_\varepsilon^{(m)}(x)$ содержится в шаре радиуса $\rho(x)\varepsilon/\varkappa(1-\varepsilon)$, т.е. $\left|G_\varepsilon^{(m)}(x)\right| \leq \varkappa_n(\rho(x)\varepsilon/\varkappa(1-\varepsilon))^n$. Правое неравенство в (1.2.2) доказано.

Рассмотрим множество $Q_\varepsilon^{(m)}(x) = \left\{y \in R^n : |x-y| < \frac{\varepsilon_m}{\varkappa}\,\rho(x)\right\}$, где $\varepsilon_m = \frac{m\varepsilon}{(m+1)(1+\varepsilon)}$. Аналогично (1.2.3) доказывается, что $(1-\varepsilon_m)\rho(x) \leq \rho(y) \leq (1+\varepsilon_m)\rho(x)$ для всех $x \in Q_\varepsilon^{(m)}(x)$. Поэтому $|x-y| < \varepsilon_m\rho(y)/\varkappa(1-\varepsilon_m)$ для всех $x \in Q_\varepsilon^{(m)}(x)$. Отсюда, в силу неравенства $\varepsilon_m/(1-\varepsilon_m) < m\varepsilon/(m+1)$, следует, что $Q_\varepsilon^{(m)}(x) \subset G_\varepsilon^{(m)}(x)$. Так как $\left|Q_\varepsilon^{(m)}(x)\right| = \varkappa_n\rho^n(x)(\varepsilon_m/\varkappa)^n$, то отсюда следует левое неравенство в (1.2.2). Лемма 1.2.1 доказана.

Замечание 1.2.1. Неравенство (1.2.2) остается в силе, если в нем заменим $(1+1/m)$ единицей, а $\chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)$ на $\chi_\varepsilon(x,y)$, где $\chi_\varepsilon(x,y)$ - характеристическая функция шара $J_\varepsilon(y) = \left\{x \in R^n : |x-y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\,\rho(y)\right\}$.

Лемма 1.2.2. *Пусть целое число* $m \in [0,r)$, $p \geq 1$, $1 \leq q_1 \leq q_0$, *а число* q_0 *удовлетворяет условиям:*

$$\frac{1}{p} - \frac{r-m}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \textit{при} \quad n-(r-m)p > 0;$$

q_0 *- любое конечное число, при* $n-(r-m)p \leq 0$.

Тогда для любого $\tau > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left\{\sum_{|k|=m}\int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q_0}-r+m}(x)|v^{(k)}(x)|\right)^{q_0} dx\right\}^{1/q_0} \leq$$

$$\leq \tau\left\{\sum_{|l|=r}\int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha}(x)|v^{(l)}(x)|\right)^{p} dx + \int\limits_\Omega |v(x)|^p dx\right\}^{1/p} +$$

$$+ c_0\tau^{-\mu}\left\{\int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q_1}-r}(x)|v(x)|\right)^{q_1} dx\right\}^{1/q_1} \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \quad (1.2.5)$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + mn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-m)n^{-1}}.$$

Доказательство. Пусть $I(0)$– единичный открытый шар в R^n с центром в начале системы координат. В условиях леммы из интерполяционного неравенства [65] (см. также [61, §4.7]) следует, что

$$\left\| u^{(k)};\, L_{q_0}(I(0)) \right\| \le \tau \sum_{|l|=r} \left\| u^{(l)};\, L_p(I(0)) \right\| \\ + \tau \left\| u;\, L_p(I(0)) \right\| + c_1 \tau^{-\mu} \left\| u;\, L_{q_1}(I(0)) \right\|, \quad (1.2.6)$$

где k – любой мультииндекс длины m.

Пусть v – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, y – произвольная точка из Ω. Отображение $z \to x$, определенное равенством $x = (z-y)2\varkappa/\rho(y)$, отображает шар $J(y) = \left\{ z \in R^n :\, |z-y| < \frac{1}{2\varkappa}\rho(y) \right\}$ в единичный шар $I(0)$. Так как $J(y) \subset \Omega$ для любого $y \in \Omega$, то функция

$$\widehat{v}_y(x) = v\left(\frac{1}{2\varkappa} x\rho(y) + y \right)$$

принадлежит $W_p^r(I(0))$. Записываем неравенство (1.2.6) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$, в интегралах полученного неравенства проведем замену переменных интегрирования $z = y + \frac{1}{2\varkappa} x\rho(y)$, обе стороны неравенства умножим на $\rho^{\alpha - r}(y)$, результат возведем в степень q_0 и проинтегрируем по $y \in \Omega$. В итоге получим неравенство (число $const \cdot \tau$ вновь обозначим через τ)

$$\int_\Omega \rho^{\alpha q_0 - r q_0 + |k| q_0 - n}(y) \left(\int_\Omega \chi(z,y) \left| v^{(k)}(z) \right|^{q_0} dz \right) dy$$

$$\le \tau \sum_{|l|=r} \int_\Omega \sigma^{q_0}(y) \rho^{-nq_0/p}(y) \left(\int_\Omega \chi(z,y) \left| v^{(l)}(z) \right|^p dz \right)^{q_0/p} dy$$

$$+ \tau \int_\Omega \rho^{\alpha q_0 - r q_0 - n q_0/p}(y) \left(\int_\Omega \chi(z,y) |v(z)|^p dz \right)^{q_0/p} dy$$

$$+ c_1 \tau^{-\mu q_0} \int_\Omega \rho^{\alpha q_0 - r q_0 - n q_0/q_1}(y) \left(\int_\Omega \chi(z,y) |v(z)|^{q_1} dz \right)^{q_0/q_1} dy, \quad (1.2.7)$$

где $\chi(z,y)$– характеристическая функция множества $J(y)$.

Из леммы 1.2.1 следует (см. замечание 1.2.1)

$$3^{-n}\varkappa_n\varkappa^{-n}\rho^n(z)\le\int\limits_{\Omega}\chi(z,y)dy\le\varkappa_n\varkappa^{-n}\rho^n(z)\quad(\forall z\in\Omega).\tag{1.2.8}$$

Далее используя неравенство (1.2.3) при $\varepsilon=1/2$, а также (1.2.8) оценим интегралы, которые присутствуют в неравенстве (1.2.7)

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha q_0-rq_0+|k|q_0-n}(y)\left(\int\limits_{\Omega}\chi(z,y)\left|v^{(k)}(z)\right|^{q_0}dz\right)dy\\&\qquad\ge M_1\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi(z,y)dy\right)\rho^{\alpha q_0\alpha q_0-rq_0+|k|q_0-n}(z)\left|v^{(k)}(z)\right|^{q_0}dz\\&\qquad\qquad\ge M_1\int\limits_{\Omega}\rho^{\alpha q_0-rq_0+|k|q_0}(z)\left|v^{(k)}(z)\right|^{q_0}dz.\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

Здесь и далее через M_1, M_2, $\ldots$ обозначены различные положительные постоянные, точные значения которых для нас несущественны. Для оценки сверху интегралов, стоящих в правой части (1.2.7) мы также воспользуемся следующим обобщенным неравенством Минковского

$$\int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y}|F(x,y)|^p dy\right)^{q_0/p}dx\le\left\{\int\limits_{y}\left(\int\limits_{X}|F(x,y)|^{q_0}dx\right)^{p/q_0}dy\right\}^{q_0/p},$$

справедливым при $1\le p\le q_0<\infty$.

Имеем

$$\int\limits_\Omega \rho^{\alpha q_0 - nq_0/p}(y)\left(\int\limits_\Omega \chi(z,y)\left|v^{(l)}(z)\right|^p dz\right)^{q_0/p} dy$$
$$= \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \left[\rho^{\alpha-n/p}(y)\chi(z,y)\left|v^{(l)}(z)\right|\right]^p dz\right)^{q_0/p} dy$$
$$\le \left\{\int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \left[\rho^{\alpha-n/p}(y)\chi(z,y)\left|v^{(l)}(z)\right|\right]^{q_0} dy\right)^{p/q_0} dz\right\}^{q_0/p}$$
$$\le M_2\left\{\int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi(z,y)dy\right)^{p/q_0} \rho^{\alpha p-n}(z)\left|v^{(l)}(z)\right|^p dz\right\}^{q_0/p}$$
$$\le M_2\left\{\int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha-\frac{n}{p}+\frac{n}{q_0}}(z)\left|v^{(l)}(z)\right|\right)^p dz\right\}^{q_0/p}. \quad (1.2.10)$$

Аналогично доказываются следующие оценки

$$\int\limits_\Omega \rho^{\alpha q_0 - rq_0 - nq_0/p}(y)\left(\int\limits_\Omega \chi(z,y)|v(z)|^p dz\right)^{q_0/p} dy$$
$$\le M_3\left\{\int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha-r-\frac{n}{p}+\frac{n}{q_0}}(y)|v(y)|\right)^p dy\right\}^{q_0/p}, \quad (1.2.11)$$

$$\int\limits_\Omega \rho^{\alpha q_0 - rq_0 - nq_0/q_1}(y)\left(\int\limits_\Omega \chi(z,y)|v(z)|^{q_1} dz\right)^{q_0/q_1} dy$$
$$\le M_4\left\{\int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha-r-\frac{n}{q_1}+\frac{n}{q_0}}(y)|v(y)|\right)^{q_1} dy\right\}^{q_0/q_1}. \quad (1.2.12)$$

Так как в неравенстве (1.2.7) k – произвольный мультииндекс длины

m, то из (1.2.7), (1.2.9) - (1.2.12) получаем следующее неравенство

$$\left\{\sum_{|k|=m}\int_{\Omega}\left(\rho^{\alpha-r+m}(y)|v^{(k)}(y)|\right)^{q_0}dy\right\}^{1/q_0}\le\tau\left\{\sum_{|l|=r}\int_{\Omega}\left(\rho^{\alpha-\frac{n}{p}+\frac{n}{q_0}}(y)|v^{(l)}(y)|\right)^{p}dy\right\}^{1/p}+$$

$$+\tau\left\{\int_{\Omega}\left(\rho^{\alpha-r-\frac{n}{p}+\frac{n}{q_0}}(y)|v(y)|\right)^{p}dy\right\}^{1/p}+c_1\tau^{-\mu}\left\{\int_{\Omega}\left(\rho^{\alpha-r-\frac{n}{q_1}+\frac{n}{q_0}}(y)|v(y)|\right)^{q_1}dy\right\}^{1/q_1}$$

$$(\forall v\in C_0^{\infty}(\Omega)).$$

Заменяя в этом неравенстве α через $\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q_0}$ получим неравенство (1.2.5). Лемма 1.2.2 доказана.

Лемма 1.2.3. *Пусть* $|k|\le r$, $|l|\le r$ *и* $|k|+|l|\le 2r-1$. *Определим числа* λ_{kl}, δ_{kl} *посредством следующих соотношений*

$$\frac{1}{\lambda_{kl}}=\begin{cases}1-\frac{2r-|k|-|l|}{n}+\varepsilon, & n-2(r-|k|)>0,\ \ n-2(r-|l|)>0;\\ 1-\frac{r-|k|}{n}+\varepsilon, & n-2(r-|k|)>0,\ \ n-2(r-|l|)\le 0;\\ 1-\frac{r-|l|}{n}+\varepsilon, & n-2(r-|k|)\le 0,\ \ n-2(r-|l|)>0;\\ \textit{любое число}\le 1, & n-2(r-|k|)\le 0,\ \ n-2(r-|l|)\le 0,\end{cases}\tag{1.2.13}$$

$$\delta_{kl}=2\alpha+n-2r+|k|+|l|-\frac{n}{\lambda_{kl}}.\tag{1.2.14}$$

Тогда для любого τ, $0<\tau<1$, *и всех* $v\in C_0^{\infty}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{\int_{\Omega}\left(\rho^{\delta_{kl}}(x)|v^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\right)^{\lambda_{kl}}dx\right\}^{1/\lambda_{kl}}\le$$

$$\le\tau\left\|v;\,L_{2;\alpha}^{r}(\Omega)\right\|^2+C_0\tau^{-\mu}\left\|v;\,L_{2;\alpha-r}(\Omega)\right\|^2,\tag{1.2.15}$$

где μ *– некоторое положительное число.*

Доказательство. Рассмотрим случай $|k| \le r-1, \quad |l| \le r-1$. Определим числа q_k, q_l посредством следующих соотношений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{r-|k|}{2} < \dfrac{1}{q_k}, & \text{если} \;\; n - 2(r-|k|) > 0 \\ q_k - \text{любое конечное число} \ge 2, & \text{если} \;\; n - 2(r-|k|) \le 0, \end{cases} \tag{1.2.16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{r-|l|}{2} < \dfrac{1}{q_l}, & \text{если} \;\; n - 2(r-|l|) > 0 \\ q_l - \text{любое конечное число} \ge 2, & \text{если} \;\; n - 2(r-|l|) \le 0. \end{cases} \tag{1.2.17}$$

Тогда применяя лемму 1.2.2 для любого $\tau > 0$ и всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\left\{ \int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{q_k} - r + |k|}(x) |v^{(k)}(x)| \right)^{q_k} dx \right\}^{1/q_k} \le$$
$$\le \tau \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\| + c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\|, \tag{1.2.18}$$

$$\left\{ \int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{q_l} - r + |l|}(x) |v^{(l)}(x)| \right)^{q_l} dx \right\}^{1/q_l} \le$$
$$\le \tau \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\| + c_0 \tau^{-\mu_l} \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\|, \tag{1.2.19}$$

где

$$\mu_k = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_k} + \frac{|k|}{n}}{\frac{1}{q_k} - \frac{1}{2} + \frac{r-|k|}{n}}, \quad \mu_l = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_l} + \frac{|l|}{n}}{\frac{1}{q_l} - \frac{1}{2} + \frac{r-|l|}{n}}.$$

При

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad \alpha + \beta = \gamma$$

справедливо неравенство

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\gamma}(x) \left| U(x) V(x) \right| \right)^{\lambda} dx \right\}^{1/\lambda} \leq$$

$$\leq \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha}(x) \left| U(x) \right| \right)^{p} dx \right\}^{1/p} \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\beta}(x) \left| V(x) \right| \right)^{q} dx \right\}^{1/q} . \quad (1.2.20)$$

для всех функций $U(x)$, $V(x)$, для которых конечна правая часть этого неравенства.

Так как (см. (1.2.13), (1.2.16), (1.2.17))

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_k} + \frac{1}{q_l} \quad \text{и} \quad \delta_{kl} = \alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{q_k} - r + |k| + \alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{q_l} - r + |l|,$$

то

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\delta_{kl}}(x) |v^{(k)}(x) v^{(l)}(x)| \right)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \leq$$

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{q_k} - r + |k|}(x) |v^{(k)}(x)| \right)^{q_k} dx \right\}^{1/q_k} \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{q_l} - r + |l|}(x) |v^{(l)}(x)| \right)^{q_l} dx \right\}^{1/q_l} \leq$$

$$\leq \left\{ \tau \left\| v;\, L^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| + c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\| \right\} \times$$

$$\times \left\{ \tau \left\| v;\, L^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| + c_0 \tau^{-\mu_l} \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\| \right\} \quad (1.2.21)$$

Далее с помощью неравенства

$$A \cdot B \leq \frac{1}{2} \left\{ A^2 + B^2 \right\} \quad (A \geq 0,\, B \geq 0) \qquad (1.2.22)$$

упростим правую часть неравенства (1.2.21)

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\delta_{kl}}(x) |v^{(k)}(x) v^{(l)}(x)| \right)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \leq 2\tau^2 \left\| v;\, L^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\|^2 +$$

$$+ c_0^2 \left(\frac{1}{2} \tau^{-2\mu_k} + \frac{1}{2} \tau^{-2\mu_l} + \tau^{-(\mu_k + \mu_l)} \right) \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\|^2 \quad (1.2.23)$$

Теперь легко можно заметить, что если $\tau \in (0,\,1)$, то при некотором конечном $\mu \geq \max_{|k| \leq r-1} \mu_k$ из (1.2.23) следует неравенство (1.2.15).

Далее рассмотрим случай $|k| \leq r-1$ и $|l| = r$. В этом случае

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha}(x) |v^{(l)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2} \leq \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\|.$$

Учитывая это и применяя неравенства (1.2.18), (1.2.20), (1.2.22) получим

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\delta_{kl}}(x) |v^{(k)}(x) v^{(l)}(x)| \right)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \leq$$

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{q_k} - r + |k|}(x) |v^{(k)}(x)| \right)^{q_k} dx \right\}^{1/q_k} \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha}(x) |v^{(l)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2} \leq$$

$$\left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\| \times \left\{ \tau \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\| + c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\| \right\} \leq$$

$$\leq 2\tau^2 \left\| v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega) \right\|^2 + \, * \, \tau^{-(2\mu_k+1)} \left\| v;\, L_{2;\alpha-r}(\Omega) \right\|^2.$$

Отсюда следует неравенство (1.2.15), если предположить, что $\mu \geq 2\mu_k + 1$ для всех мультииндексов $k:\ |k| \leq r-1$.

Неравенство (1.2.15) в случае $|k| = r$ и $|l| \leq r-1$ доказывается аналогично.

Лемма 1.2.3 доказана.

1.3 Неравенство Гординга для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе

В этом параграфе доказывается одно весовое неравенство, которое является аналогом неравенства Гординга для равномерно эллиптических операторов. Также как в предыдущих параграфах предполагаем, что Ω – ограниченная область в R^n с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ и $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Lu)=\sum_{|k|,|l|\le r}(-1)^{|l|}\big(\rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\big)^{(l)}, \tag{1.3.1}$$

где r – натуральное, α – вещественное числа, $k=(k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_n)$, $l=(l_1,\,l_2,\ldots,\,l_n)$ – мультииндексы, $|k|=k_1+k_2+\cdots+k_n$. Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ являются комплекснозначными.

С оператором (1.3.1) связана следующая полуторалинейная форма

$$B[u,\,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int\limits_{\Omega}p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx. \tag{1.3.2}$$

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены условия:*

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (1.3.2) при $|k|=|l|=r$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\ge c_0|\xi|^{2r} \tag{1.3.3}$$

для всех $x\in\Omega$, $\xi\in R^n$; c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ;

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,\,|l|\le r$ и $|k|+|l|\le 2r-1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где

$$p_{kl}=\begin{cases}q_{kl} & \text{при } |k|\le r-1,\ |l|\le r\\ q_{lk} & \text{при } |k|=r,\ |l|\le r-1\end{cases} \tag{1.3.4}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r-|k|-|l|}<q_{kl}\le\frac{n}{r-|l|},\ \text{если } n>2(r-|k|),\ n>2(r-|l|);$$

$$\frac{n}{r-|k|-\varepsilon_1 n}<q_{kl},\ 0<\varepsilon_1<\frac{1}{2}\ \text{ если } n>2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|);$$

$$q_{kl}=\begin{cases}\dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0<\varepsilon_2<\dfrac{1}{2}\ \text{ если } n\le 2(r-|k|),\ n>2(r-|l|),\\ \\ \text{любое конечное число} >1,\ \text{если }\ n\le 2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|).\end{cases}$$

Тогда существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$, что

$$\operatorname{Re} B[u,\, u] \geq C_1 \|u, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 - C_2 \|u, L_{2;\,\alpha - r}(\Omega)\|^2 \tag{1.3.5}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Неравенство (1.3.5) равносильно следующему неравенству

$$\operatorname{Re} B[u,\, u] \geq C_3 \|u, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 - C_4 \|u, L_{2;\,\alpha - r}(\Omega)\|^2 \tag{1.3.6}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$; C_3, C_4 – положительные постоянные.

В начале рассмотрим случай когда коэффициенты $a_{kl}(x)$ отличны от нуля только для мультииндексов k, l таких, что $|k| = |l| = r$. Пусть y – произвольная фиксированная точка в Ω. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_y[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{R^n} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \qquad (u,\, v \in C_0^\infty(R^n)).$$

Из неравенства Гординга для сильно-эллиптических операторов с постоянными коэффициентами следует, что

$$\sum_{|k|=r} \int\limits_{R^n} |u^{(k)}(x)|^2 dx \leq M \Big\{ \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{R^n} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx + \int\limits_{R^n} |u(x)|^2 dx \Big\} \tag{1.3.7}$$

для всех $u \in C_0^\infty(R^n)$.

Обозначим через $I(0)$, $I_m(0)$, $m = 1, 2, \ldots$ открытые шары пространства R^n с центрами в начале координат и радиусами 1, $\frac{m}{m+1}$, соответственно. Берем функцию φ_m со следующими свойствами:

1) $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ для всех $x \in I(0)$;

2) $\varphi_m(x) = 1$ для всех $x \in I_m(0)$;

3) существует число $C > 0$ такое, что $\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \leq C$ для всех $x \in I(0)$ и всех мультииндексов k таких, что $|k| \leq r$.

Пусть $u(x) \in C^\infty(I(0))$. Тогда, продолжая функцию $v_m(x) = \varphi_m(x)u(x)$ вне $I(0)$ нулем, получаем $v_m \in C_0^\infty(R^n)$. Так как $v_m(x) = u(x)$ для всех $x \in I_m(0)$, то из неравенства (1.3.7) для $v_m(x)$ следует, что

$$\sum_{|k|=r} \int\limits_{I_m(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx \le M_0 \left\{ \operatorname{Re} B_y[v_m,\, v_m] + \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2\, dx \right\}. \qquad (1.3.8)$$

Применяя правило Лейбница дифференцирования произведения функций, представим форму $B_y[v_m,\, v_m]$ в виде

$$B_y[v_m,\, v_m] = B_y^{(1)}[v_m,\, v_m] + B_y^{(2)}[v_m,\, v_m], \qquad (1.3.9)$$

где

$$B_y^{(1)}[v_m,\, v_m] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{I(0)} a_{kl}(y)\varphi_m^2(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_y^{(2)}[v_m,\, v_m] = {\sum}' \int\limits_{I(0)} C_{k,\mu}C_{l,\nu}a_{kl}(y)\varphi_m^{(\mu)}(x)\varphi_m^{(\nu)}(x)u^{(k-\mu)}(x)\overline{u^{(l-\nu)}(x)}dx.$$

Здесь $C_{k,\mu}$, $C_{l,\nu}$ – некоторые константы, и символом $\sum'$ обозначено суммирование по всем мультииндексам k, l, μ, ν таким, что $|k|, |l| \le r$, $|k|+|l| \le 2r-1$, $\mu \le k$, $\nu \le l$, $|\mu+\nu| \ne 0$.

Так как во всех интегралах, составляющих форму $B_y^{(2)}[u,\, v]$ порядок хотя бы одной из производных $u^{(k)}$, $v^{(l)}$ не превосходит $r-1$, то применяя соответствующие теоремы вложения для пространств Соболева, а также неравенство Юнга с малым параметром, получаем: для любого достаточно малого положительного числа τ существует конечное число $M(\tau) > 0$ такое, что

$$\left|B_y^{(2)}[v_m,\, v_m]\right| \le \tau \sum_{|k|=r} \int\limits_{I(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + M(\tau) \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2 dx. \qquad (1.3.10)$$

Принимая во внимание свойство 2) функций $\varphi_m(x)$, представим форму $B_y^{(1)}[v_m,\, v_m]$ в виде

$$B_y^{(1)}[v_m,\, v_m] = B_{y,m}^{(11)}[u,\, u] + B_{y,m}^{(12)}[u,\, u], \qquad (1.3.11)$$

где

$$B_{y,m}^{(11)}[u,\,u]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{I_m(0)} a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_{y,m}^{(12)}[u,\,u]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{I^{(m)}(0)} a_{kl}(y)\varphi_m^2(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$I^{(m)}(0)=I(0)\setminus I_m(0)=\left\{x\in R^n:\,\frac{m}{m+1}<|x|<1\right\}.$$

Согласно условиям теоремы при $|k|=|l|=r$ коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены. Поэтому применяя неравенство Коши-Буняковского и принимая во внимание $|I^{(m)}(0)|\longrightarrow 0$ при $m\longrightarrow\infty$, получаем

$$\left|B_{y,m}^{(12)}[u,\,u]\right|\leq\mu_m\left\|u;\,L_2^r(I(0))\right\|^2, \tag{1.3.12}$$

где

$$\|u;\,L_2^r(I(0))\|=\left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_{I(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2dx\right\}^{1/2}$$

и положительные числа $\mu_m\longrightarrow 0$ при $m\longrightarrow\infty$.

Ввиду представлений (1.3.9), (1.3.11) из (1.3.8) следует, что

$$\|u;\,L_2^r(I_m(0))\|^2-M_0\left|B_y^{(2)}[v_m,\,v_m]\right|-M_0\left|B_{y,m}^{(12)}[u,\,u]\right|\leq M_0\,\mathrm{Re}B_{y,m}^{(11)}[u,\,u].$$

Далее, считая число m достаточно большим и применяя неравенство (1.3.10) при $\tau=1/m$, а также неравенство (1.3.12), приходим к неравенству

$$\|u;\,L_2^r(I_m(0))\|^2-c_m\|u;\,L_2^r(I(0))\|^2-C_m\|u;\,L_2(I(0))\|^2$$
$$\leq M_0\,\mathrm{Re}B_{y,m}^{(11)}[u,\,u]\qquad\left(\forall u\in C^\infty(I(0))\right), \tag{1.3.13}$$

где c_m, C_m– положительные числа и $c_m\longrightarrow 0$ при $m\longrightarrow\infty$.

Пусть v – произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Отображение $z\longrightarrow x$, определенное равенством $x=(z-y)\varkappa/\varepsilon\rho(y)$ отображает шар

$J_\varepsilon(y) = \left\{z \in R^n : |z-y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y)\right\}$ в единичный шар $I(0)$, а $J_\varepsilon^{(m)}(y)$ в $I_m(y)$. Так как $J_\varepsilon(y) \subset \Omega$ при $\varepsilon \in (0,1)$, то функция

$$\widehat{v}_y(x) = v\left(x\,\frac{\varepsilon}{\varkappa}\,\rho(y) + y\right)$$

определена для всех $x \in I(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(I(0))$.

Неравенство (1.3.13) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$ примет вид

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{I_m(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx - c_m\int\limits_{I_m(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx\right\}$$
$$- C_m\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-2r}\rho^{-2r}(y)\int\limits_{I(0)}\left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx$$
$$\le M_0\,\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{I_m(0)}a_{kl}(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x)\overline{\widehat{v}_y^{(l)}(x)}dx.$$

В интегралах этого неравенства проведем замену переменных интегрирования $z = y + x\,\frac{\varepsilon}{\varkappa}\,\rho(y)$, умножим обе части полученного неравенства на $\rho^{2\alpha}(y)\rho^{-n}(y)$ и результат проинтегрируем по $y \in \Omega$. В итоге получим

$$\sum_{|k|=r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha}(y)\rho^{-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right)dy$$
$$- c_m\sum_{|k|=r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha}(y)\rho^{-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right)dy$$
$$- C_m\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^{-2r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha}(y)\rho^{-2r-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}|v(z)|^2\,dz\right)dy \le M_0\,\mathrm{Re}\,B_{\varepsilon,m}[v,v], \tag{1.3.14}$$

где

$$B_{\varepsilon,m}[v,v] = \sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_\Omega\rho^{2\alpha}(y)\delta^{-n}(y)a_{kl}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz\right)dy.$$

Применяя лемму 1.2.1 (см. также замечание 1.2.1) и неравенство (1.2.3) оценим интегралы в левой части (1.3.14).

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(y)\rho^{-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy$$
$$= \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(y)\rho^{-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z,y) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy$$
$$\geq (1-\varepsilon)^{-2\alpha+n} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z)\rho^{-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z,y) dy \right) dz$$
$$\geq (1-\varepsilon)^{-2\alpha+n} \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon m}{(1+\varepsilon)(m+1)} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz,$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(y)\rho^{-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy$$
$$\leq (1+\varepsilon)^{-2\alpha+n} \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon m}{\varkappa(1-\varepsilon)(m+1)} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz,$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(y)\rho^{-2r-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy$$
$$\leq (1+\varepsilon)^{-2\alpha+2r+n} \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa(1-\varepsilon)} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z)\rho^{-2r}(z) |v(z)|^2 dz.$$

С учетом этих неравенств из (1.3.14) следует, что

$$(1-\widehat{c}_m) \left\| v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - \varepsilon^{-2r} \widehat{C}_m \left\| v;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega) \right\|^2$$
$$\leq \varepsilon^{-n} M_1 \operatorname{Re} B_{\varepsilon,m}[v,v], \quad (1.3.15)$$

где $\widehat{c}_m$, $\widehat{C}_m$, M_1– положительные константы и $\widehat{c}_m \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$.

Вводим новую полуторалинейную форму

$$B^{(1)}_{\varepsilon,m}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,y) a_{kl}(y) dy \right) \rho^{2\alpha-n}(z) u^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz$$

$$(u, v \in C^{\infty}_0(\Omega))\,.$$

Учитывая ограниченность коэффициентов $a_{kl}(y)$ $(|k| = |l| = r)$ имеем

$$\left| B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B_{\varepsilon,m}[v,v] \right|$$

$$\leq \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,y) |a_{kl}(y)| \left| \rho^{2\alpha-n}(y) - \rho^{2\alpha-n}(z) \right| dy \right) \times$$

$$\times \left| v^{(k)}(z) \right| \left| v^{(k)}(z) \right| dz$$

$$\leq M \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi^{(m)}_{\varepsilon}(z,y) \left| 1 - \frac{\rho^{2\alpha-n}(y)}{\rho^{2\alpha-n}(z)} \right| dy \right) \times$$

$$\times\, \rho^{2\alpha-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right| \left| v^{(k)}(z) \right| dz. \quad (1.3.16)$$

Из соотношений (1.2.3) (1.2.4) следует, что

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\rho(y)}{\rho(z)} \leq (1-\varepsilon)^{-1}$$

для всех y, $z \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству

$$|z-y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa} \rho(y).$$

Поэтому применяя лемму 1.2.1 и неравенство Коши - Буняковского из (1.3.16) получим

$$\left| B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B_{\varepsilon,m}[v,v] \right| \leq \varepsilon^n \mu_1(\varepsilon) \left\| v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 \quad (\forall v \in C^{\infty}_0(\Omega))\,, \quad (1.3.17)$$

где $\mu_1(\varepsilon) > 0$ и $\mu_1(\varepsilon) \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

В условиях теоремы 1.3.1 коэффициенты a_{kl} при $|k| = |l| = r$ непрерывны в $\overline{\Omega}$. Поэтому для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu \quad (1.3.18)$$

для любого $y \in \Omega$ и любого $z \in J_\varepsilon(y) = \left\{z \in R^n : \, |z-y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho(y)\right\}$.

Пусть

$$B^{(2)}_{\varepsilon,m}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z,y)dy \right) a_{kl}(z)\rho^{2\alpha-n}(z)u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz$$

$$(u, v \in C^\infty_0(\Omega)) \, .$$

Тогда в силу условия (1.3.18), леммы 1.2.1 и неравенства Коши - Буняковского для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует $\varepsilon_\nu > 0$ такое, что

$$\left| B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] \right| \le \varepsilon^n \nu \left\| v; \, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 \qquad (1.3.19)$$

для всех $v \in C^\infty_0(\Omega)$ и любого $\varepsilon \in (0, \, \varepsilon_\nu)$.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $\Phi(z)$ *– произвольная вещественнозначная функция из* $L_1(\Omega)$. *Тогда имеет место следующее неравенство*

$$c_{n,m} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^m_\varepsilon(z,y)dy \right) \rho^{-n}(z)\Phi(z)dz$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n \int\limits_\Omega \Phi(z)dz + \left[\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n \right] \int\limits_\Omega \Phi^-(z)dz, \quad (1.3.20)$$

где $\Phi^-(z) = \left(|\Phi(z)| - \Phi(z)\right)/2, \quad c_{n,m} = \varkappa^n(1+m^{-1})^n/\varkappa_n$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что функции $\Phi^+(z) = \left(|\Phi(z)| + \Phi(z)\right)/2$ и $\Phi^-(z)$ неотрицательны. Поэтому в силу леммы 1.2.1 справедливы следующие неравенства

$$c_{n,m} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^m_\varepsilon(z,y)dy \right) \rho^{-n}(z)\Phi^+(z)dz \le \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n \int\limits_\Omega \Phi^+(z)dz,$$

$$c_{n,m} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^m_\varepsilon(z,y)dy \right) \rho^{-n}(z)\Phi^-(z)dz \ge \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n \int\limits_\Omega \Phi^-(z)dz.$$

Отсюда в силу равенства $\Phi(z) = \Phi^+(z) - \Phi^-(z)$ следует (1.3.20). Лемма 1.3.1 доказана.

Применяя неравенство (1.3.20) при

$$\Phi(z) = \mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(z)\rho^{2\alpha}(z)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)},$$

в силу ограниченности коэффициентов $a_{kl}(z)\,(|k| = |l| = r)$ для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$ получим

$$\mathrm{Re}\, B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] \leq \varepsilon^n\, M\, \left\{\mathrm{Re}\, B[v,v] + \mu_2(\varepsilon)\left\|v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2\right\}, \qquad (1.3.21)$$

где $M > 0$ и $\mu_2(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-n} - (1+\varepsilon)^{-n}$.

Теперь объединяя (1.3.15), (1.3.17), (1.3.19) и (1.3.21) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}(1 - \widehat{c}_m - \mu_1(\varepsilon) - M\mu_2(\varepsilon) - \nu)\left\|v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \\ - \widehat{c}_m\varepsilon^{-2r}\left\|v;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2 \leq M\,\mathrm{Re}\, B[v,v] \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)).\end{aligned} \qquad (1.3.22)$$

Так как $\widehat{c}_m \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$ и $\mu_1(\varepsilon) \longrightarrow 0$, $\mu_2(\varepsilon) \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$, то подбирая число m достаточно большим, а числа ε, ν – достаточно малыми, из (1.3.22) получим (1.3.6).

Таким образом, теорема 1.3.1, в случае, когда коэффициенты $a_{kl}(x)$ отличны от нуля только при $|k| = |l| = r$, доказана.

Теперь перейдем к общему случаю. Положим

$$B_0[u,\,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_1[u,\,v] = B[u,\,v] - B_0[u,\,v] \qquad (u,\,v \in C_0^\infty(\Omega)). \qquad (1.3.23)$$

Согласно вышедоказанного результата для формы $B_0[u,\,v]$ имеет место оценка вида (1.3.6), то есть существуют числа $C_5 > 0$, $C_6 \geq 0$ такие, что

$$\mathrm{Re}\, B_0[u,\,u] \geq C_5\, \left\|u;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 - C_6\, \|v;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 \qquad (1.3.24)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Полуторалинейную форму $B_1[u,\,v]$ представим в виде

$$B_1[u,\,v] = B_{11}[u,\,v] + B_{12}[u,\,v], \qquad (1.3.25)$$

где

$$B_{1i}[u,\,v] = \sum{}^{(i)} \int\limits_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (i = 1,\,2),$$

$\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\,l:\,|k| \le r-1,\,|l| \le r$, а $\sum^{(2)}$ – по мультииндексам $k,\,l:\,|k| = r,\,|l| \le r-1$.

Пусть числа p_{kl} определены соотношениями (1.3.4). Положим $\lambda_{kl} = p_{kl}/(p_{kl}-1)$. Числа $\lambda_{kl}\quad (|k|<r,\,|l|\le r)$ удовлетворяют условиям леммы 1.2.3. Поэтому применяя неравенство Гельдера, и затем лемму 1.2.3, получим

$$\begin{aligned} |B_{11}[u,\,v]| &\le \sum{}^{(1)} \int\limits_{\Omega} a_{kl}(x) \rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x) \left|u^{(k)}(x)\right| \left|v^{(l)}(x)\right| dx \\ &\le \sum{}^{(1)} \left\|a_{kl};\, L_{p_{kl};\,-n/p_{kl}}(\Omega)\right\| \left\|u^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl};\,2\alpha-2r+|k|+|l|+n/p_{kl}}(\Omega)\right\| \\ &\le M \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \left\{\tau \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| + c_0 \tau^{-\mu} \left\|u;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\|\right\}, \quad (1.3.26) \end{aligned}$$

где τ – любое положительное число и $\mu = \max_{|k|\le r-1} \mu_k$. Здесь мы также воспользовались условием $a_{kl} \in L_{p_{kl};\,-n/p_{kl}}(\Omega)$.

Так как $B_{12}[u,\,v]$ содержит $u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}$ при $|l|<r,\,|k|=r$, то меняя ролями $u(x)$ и $v(x)$, и действуя также как в (1.3.26) имеем

$$\begin{aligned} |B_{12}[u,\,v]| \le M \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \times \\ \times \left\{\tau \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| + c_0' \tau^{-\mu} \left\|v;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\|\right\}. \quad (1.3.27) \end{aligned}$$

Неравенства (1.3.26) и (1.3.27) имеют одинаковую правую часть при $u = v$. Поэтому используя неравенство

$$\begin{aligned} &\left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \left\|u;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\| \\ &\qquad \le \nu \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + \frac{1}{4\nu} \left\|u;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\| \end{aligned}$$

где ν – достаточно малое положительное число, из (1.3.25) – (1.3.27) получим

$$|B_1[u,\,u]| \le \tau \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 + c_1 \tau^{-2\mu} \left\|u;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega\right\|^2. \quad (1.3.28)$$

Ввиду равенства $B[u, v] = B_0[u, v] + B_1[u, v]$ из (1.3.24) и (1.3.28) следует неравенство (1.3.5).

Теорема 1.3.1 доказана.

Глава 2

О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области

Эта глава посвящена приложению весового неравенства Гординга для эллиптических операторов, установленного в первой главе. Она состоит из двух параграфов. В первом параграфе изучается однозначная разрешимость однородной вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе. Во втором параграфе доказана теорема об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области, которые имеют степенное вырождение на границе.

2.1 Однородная вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе

Пусть, также как в первой главе, Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ и $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(Lu)(x) \equiv \sum_{|k|,\,|l| \le r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)} = f(x) \ (x \in \Omega), \tag{2.1.1}$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначние функции, на которых ниже накладываются некоторые условия.

Если уравнение (2.1.1) умножаем на $\overline{v(x)}$, где $v \in C_0^\infty(\Omega)$, и интегрируем по $x \in \Omega$, то после интегрирования по частям приходим к равенству

$$\sum_{|k|,\,|l| \le r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx = \int_\Omega f(x) \overline{v(x)} dx \tag{2.1.2}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Любое решение $u(x)$ уравнения (2.1.2) называется обобщенным решением уравнения (2.1.1). Поэтому вопрос о существовании обобщенных решений уравнения (2.1.1) связан со следующей полуторалинейной формой

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{2.1.3}$$

Забегая вперед, отметим, что в наших условиях форма $B[u,\, v]$ по непрерывности определяется на всех $u,\, v \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Далее, в этом параграфе, исследуется разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (2.1.3).

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int_\Omega \rho^{2\alpha - 2r}(x) U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F,\, v \rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{2.1.4}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Разрешимость задачи D_λ ранее исследовалась в работах С.М. Никольского, П.И. Лизоркина [43, 44], Н.В. Мирошина [46], Б.Л. Байдельдинова [1, 2], С.А. Исхокова [20, 21, 22], С.А. Исхокова, А.Ё.Куджмуродова [27], и др. в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|,|l| \le r} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \ge c_0 \rho^{2\alpha}(x) \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{2.1.5}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\{\zeta_k\}_{|k| \le r}$. В отличие от этого, здесь мы предполагаем выполнение более слабого чем (2.1.5) условия (см. условие I) теоремы 2.1.1).

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия:*

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (2.1.3) при $|k| = |l| = r$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c_0 |\xi|^{2r} \tag{2.1.6}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$; c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ;

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|$, $|l| \le r$ и $|k| + |l| \le 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \textit{при } |k| \le r-1, \ |l| \le r \\ q_{lk} & \textit{при } |k| = r, \ |l| \le r-1, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r - |k| - |l|} < q_{kl} \le \frac{n}{r - |l|}, \textit{ если } n > 2(r - |k|), \ n > 2(r - |l|);$$

$$\frac{n}{r - |k| - \varepsilon_1 n} < q_{kl}, \ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2} \ \textit{ если } n > 2(r - |k|), \ n \le 2(r - |l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r - |l| + \varepsilon_2 n}, \ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2} \ \textit{ если } n \le 2(r - |k|), \ n > 2(r - |l|), \\ \\ \textit{любое конечное число} >1\textit{, если } \ n \le 2(r - |k|), \ n \le 2(r - |l|). \end{cases}$$

Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *существует единственное решение* $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ *задачи* D_λ *и при этом выполняется оценка*

$$\left\|U;\, W^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M_0 \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \tag{2.1.8}$$

где число $M_0 > 0$ *не зависит от выбора функционала* F *и от* λ.

Доказательство. Вводим обозначение

$$B_\lambda[u,\, v] = B[u,\, v] + \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha-2r}(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

В условиях теоремы 2.1.1 выполняются все условия теоремы 1.3.1. Применяя эту теорему для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\operatorname{Re} B[u,\, u] \geq C_3\|u, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 - C_4\|u, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2, \tag{2.1.9}$$

где C_3, C_4 – положительные постоянные. Следовательно, если фиксировать какое-нибудь число $\lambda_0 \geq C_4$, то при $\lambda \geq \lambda_0$ имеет место следующее неравенство

$$\operatorname{Re} B_\lambda[u,\, u] \geq C_5\|u, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \tag{2.1.10}$$

всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Полуторалинейную форму (2.1.3) представим в виде (см. (1.3.23))

$$B[u,\, v] = B^{(0)}[u,\, v] + B^{(1)}[u,\, v] \qquad (u,\, v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{2.1.11}$$

где

$$B^{(0)}[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

и форма $B^{(1)}[u,\, v]$ совпадает с формой $B_1[u,\, v]$, определенной равенством (1.3.23).

По сделанным выше предположениям, коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Следовательно они ограничены в этой области. Поэтому применяя неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\left|B^{(0)}[u,\,v]\right| \le M_1 \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|dx \le$$
$$\le M_2 \left\|u;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \quad (u,\, v \in C^\infty_0(\Omega))\,. \quad (2.1.12)$$

Далее действуем также как при доказательстве неравенства (1.3.28). Полуторалинейную форму $B_1[u,\,v]$ представим в виде

$$B^{(1)}[u,\,v] = B^{(11)}[u,\,v] + B^{(12)}[u,\,v], \qquad (2.1.13)$$

где

$$B^{(1i)}[u,\,v] = \sum{}^{(i)} \int\limits_{\Omega} p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \quad (i = 1,\, 2),$$

$\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l:\, |k| \le r-1,\, |l| \le r$, а $\sum^{(2)}$ – по мультииндексам $k,\, l:\, |k| = r,\, |l| \le r-1$.

Пусть числа p_{kl} определены соотношениями (2.1.7). Положим $\lambda_{kl} = p_{kl}/(p_{kl}-1)$. Числа $\lambda_{kl} \quad (|k| < r,\, |l| \le r)$ удовлетворяют условиям леммы 1.2.3. Поэтому применяя неравенство Гельдера, и затем лемму 1.2.3, получим

$$\left|B^{(11)}[u,\,v]\right| \le \sum{}^{(1)} \int\limits_{\Omega} a_{kl}(x)\rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x) \left|u^{(k)}(x)\right| \left|v^{(l)}(x)\right| dx$$
$$\le \sum{}^{(1)} \left\|a_{kl};\, L_{p_{kl};\,-n/p_{kl}}(\Omega)\right\| \left\|u^{(k)}v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl};\,2\alpha-2r+|k|+|l|+n/p_{kl}}(\Omega)\right\|$$
$$\le M \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \left\{\tau \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| + c_0\tau^{-\mu}\left\|u;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\|\right\},$$

где τ – любое положительное число и $\mu = \max_{|k|\le r-1}\mu_k$. Здесь мы также воспользовались условием $a_{kl} \in L_{p_{kl};\,-n/p_{kl}}(\Omega)$.

Из последнего неравенства при фиксированном значении τ следует, что

$$\left|B^{(11)}[u,\,v]\right| \le M \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|. \qquad (2.1.14)$$

Действуя аналогично для полуторалинейной формы $B^{(12)}[u,\, v]$ доказывается неравенство

$$\left|B^{(12)}[u,\, v]\right| \leq M\, \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|. \tag{2.1.15}$$

В силу равенства (2.1.13) из (2.1.14) и (2.1.15) следует, что

$$\left|B^{(1)}[u,\, v]\right| \leq M\, \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|. \tag{2.1.16}$$

Теперь объединяя неравенства (2.1.12), (2.1.16) имеем

$$|B_\lambda[u,\, v]| \leq (M + |\lambda|)\, \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.1.17}$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Полученные неравенства (2.1.10), (2.1.17) позволяют нам применить обобщенную теорему Лакса-Мильграма о представлении антилинейного непрерывного функционала. Далее, для удобства чтения, приведем эту теорему из [53] (см. теорему 2.1.0).

Пусть H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\, \cdot)_+$ и нормой $\|\cdot\|_+$. Пусть также все элементы пространства H_+ являются элементами пространства H_0 и $\|u\|_0 \leq \|u\|_+$ для всех $u \in H_+$. В пространстве H_0 введем новую норму

$$\|f\|_- = \sup_{u \in H_+} \frac{|(f,\, u)_0|}{\|u\|_+}, \qquad f \in H_+.$$

Обозначим через H_- пополнение пространства H_0 по новой норме. Рассмотрим в пространстве H_0 замкнутую полуторалинейную форму $\mathcal{B}[u,\, v]$ с областью определения $D[\mathcal{B}] = H_+$.

Теорема 2.1.2. *Пусть существуют числа* $\lambda_0 \in R$, C_0, $\delta_0 > 0$ *такие, что*

$$|\mathcal{B}[u,\, v]| \leq C_0 \|u\|_+ \|v\|_+ \quad \forall u,\, v \in H_+,$$

$$\operatorname{Re} \mathcal{B}[u,\, u] + \lambda_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2 \quad \forall u, \in H_+.$$

Тогда существует линейный оператор Λ_0, осуществляющий гомеоморфизм пространств H_+ и H_- и такой, что

$$\mathcal{B}[u,\, v] + \lambda_0(u,\, v)_0 = \langle \Lambda_0 u,\, v\rangle \quad \forall u,\, v \in H_+.$$

При этом любой элемент $F \in H_-$ допускает представление

$$\langle F,\, v\rangle = \mathcal{B}[u,\, v] + \lambda_0(u,\, v)_0 \quad \forall v \in H_+,$$

в котором элемент $u \in H_+$ определяется единственно.

Эта теорема является обобщением известной теоремы Лакса-Мильграма [63].

Далее продолжим доказательство теоремы 2.1.1. Легко можно заметить, что полученные выше неравенства (2.1.10), (2.1.17) позволяют нам применить теорему 2.1.2 в рассматриваемом случае. Поэтому, в силу теоремы 2.1.2, существует оператор Λ, осуществляющий гомеоморфизм пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$. Кроме того, для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственная функция $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$\langle F,\, v\rangle = B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) U(x)\overline{v(x)}dx = \langle \Lambda U,\, v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Здесь и далее λ – произвольное фиксированное число больше λ_0. Так как функция $U(x)$ определяется однозначно, то

$$F = \Lambda U \quad \text{и} \quad U = \Lambda^{-1} F.$$

Следовательно, для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ функция $U = \Lambda^{-1}F$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F,\, v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Другими словами, $U(x)$ является решением задачи D_λ.

Построенный выше оператор Λ является гомеоморфизмом пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$. Поэтому оператор Λ^{-1} является ограниченным и из

$$\left\|U;\, W^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\|\Lambda^{-1}F;\, W^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \le \left\|\Lambda^{-1}\right\| \cdot \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|$$

следует неравенство (2.1.8). Теорема 2.1.1 доказана.

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1 и пусть кроме того*

III) существует положительное число M_0 такое, что

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x)|v(x)|^2dx \le M_0\mathrm{Re}B[v,\, v] \tag{2.1.18}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи D_λ при $\lambda = 0$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \le M_0 \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \tag{2.1.19}$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F.

Доказательство. В условиях теоремы 2.1.3 выполняются все условия вышедоказанной теоремы 2.1.1. Поэтому согласно оценки (2.1.9) существуют положительные числа $M_1,\, M_2$ такие, что

$$\mathrm{Re}\, B[v,\, v] \ge M_1\|v, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 - M_2\|v, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2,$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно,

$$\|v, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \le (M_2/M_1)\|v, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 + (1/M_1)\mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)). \tag{2.1.20}$$

С другой стороны

$$\|v, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 \le M_0\mathrm{Re}B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega))$$

в силу условии (2.1.18).

Далее, используя эти неравенства, имеем

$$\|v, V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 = \|v, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 + \|v, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) \|v, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 + \frac{1}{M_1} \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \leq$$

$$\leq \left[M_0 \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) + \frac{1}{M_1}\right] \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega))\,.$$

Таким образом, существует положительное число δ_0 такое, что

$$\delta_0 \|v, V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \leq \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \tag{2.1.21}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

В силу плотности класса (см. теорему 1.1.7) $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$, неравенство (2.1.18) имеет место для всех функций $v(x)$ из пространства $V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Ранее, при доказательстве теоремы 2.1.1, мы представили форму $B[u,\, v]$ в виде (см. равенство (2.1.11))

$$B[u,\, v] = B^{(0)}[u,\, v] + B^{(1)}[u,\, v] \qquad (u,\, v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

и относительно полуторалинейных форм $B^{(0)}[u,\, v]$, $B^{(1)}[u,\, v]$ доказывали следующие неравенства (см. (2.1.12) и (2.1.16))

$$\left|B^{(0)}[u,\, v]\right| \leq M \left\|u;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|,$$

$$\left|B^{(1)}[u,\, v]\right| \leq M \, \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому относительно полуторалинейной формы $B[u,\, v]$ имеет место следующее неравенство

$$|B[u,\, v]| \leq M \left\|u;\, V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v;\, V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| (u,\, v \in C_0^\infty(\Omega))\,. \tag{2.1.22}$$

Здесь мы также воспользовались следующими очевидными неравенствами

$$\left\|v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq \left\|v;\, V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|,$$

$$\left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \left\|v;\, V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Неравенство (2.1.22) по непрерывности распространяется на все $u,\, v \in V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Полученные выше неравенства (2.1.21), (2.1.22) позволяют нам применить обобщенную теорему Лакса-Мильграма (теорема 2.1.2). В силу этой теоремы, существует оператор Λ, осуществляющий гомеоморфизм пространств $V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и $\left(V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$, и для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственная функция $U(x) \in V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$\langle F,\, v\rangle = B[U,\, v] = \langle \Lambda U,\, v\rangle \quad \forall v \in V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$$

для всех $v \in V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Поэтому для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ однозначно определяется функция $U = \Lambda^{-1}F$, которая является решением уравнения

$$B[U,\, v] = \langle F,\, v\rangle \quad \forall v \in V^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \tag{2.1.23}$$

и принадлежит пространству $v \in V^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Как любой оператор, осуществляющий гомеоморфизм двух банаховых пространств, оператор Λ^{-1} является ограниченным. Поэтому

$$\left\|U;\, V^{\,r}_{\,2;\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\|\Lambda^{-1}F;\, V^{\,r}_{\,2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \le \left\|\Lambda^{-1}\right\| \cdot \left\|F;\, \left(V^{\,r}_{\,2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|. \tag{2.1.24}$$

Теперь, для завершения доказательства теоремы 2.1.3, заметим, что в рассматриваемом случае с точностью до эквивалентности норм выполняются равенства

$$V^{\,r}_{\,2;\,\alpha}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{\,2;\,\alpha}(\Omega),$$
$$\left(V^{\,r}_{\,2;\,\alpha}(\Omega)\right)' = \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{\,2;\,\alpha}(\Omega)\right)'.$$

Поэтому уравнение (2.1.23) совпадает с уравнением (2.1.4) при $\lambda = 0$ и найденное выше решение $U(x)$ уравнения (2.1.23) будет решением задачи D_λ при $\lambda = 0$. Оценка (2.1.19) следует из неравенства (2.1.24).

Теорема 2.1.3 доказана.

Далее предположим, что $-1/2 < \alpha < r - 1/2$ и целое число s_0 такое, что

$$r - \alpha - \frac{1}{2} \le s_0 < r - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу Дирихле с однородными граничными условиями:

Задача D'_λ. *Для заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[U, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha - 2r}(x) U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F, v \rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ *и удовлетворяющее следующим граничным условиям:*

$$\left.\frac{\partial^s U}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали.

Согласно теореме 1.1.5, если $-1/2 < \alpha < r - 1/2$ и граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, где ε – некоторое число из интервала $(0,\, 1)$, то выполняется следующее равенство

$$\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1 \right\}.$$

Следовательно, в этом случае задачи D_λ и D'_λ эквивалентны и поэтому для изучения разрешимости задачи D'_λ можно применить теоремы 2.1.1 и 2.1.3. Полученные результаты сформулируем в виде следующих теорем:

Теорема 2.1.4. *Пусть* $-1/2 < \alpha < r - 1/2$, $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, *и выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда существует число* $\lambda_0 \ge 0$ *такое, что при* $\lambda \ge \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *существует единственное решение* $U(x) \in W^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ *задачи* D'_λ *и при этом выполняется оценка*

$$\left\| U;\, W^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\| \le M_0 \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\|, \tag{2.1.25}$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F и от λ.

Теорема 2.1.5. *Пусть $-1/2 < \alpha < r - 1/2$, $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, и выполнены все условия теоремы 2.1.3. Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи D'_λ при $\lambda = 0$ и при этом выполняется оценка (2.1.25), в котором число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F.*

2.2 Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе

В этом параграфе изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Рассмотрим следующую полуторалинейную интегро-дифференциальную форму

$$\mathbb{B}[u,\, v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int_\Omega b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{2.2.1}$$

где $b_{kl}(x)$ - комплекснозначние функции, на которых ниже накладываются некоторые условия, при выполнении которых $B[u,\, v]$ принимает конечное значение для всех $u(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, $\quad v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Далее мы исследуем разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (2.2.1).

Задача D**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$

уравнения

$$\mathbb{B}[U, v] = \langle F, v \rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{2.2.2}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega). \tag{2.2.3}$$

Замечание 2.2.1. Если $\Phi(x) \notin \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)$, то условие (2.2.3) означает, что решение $U(x)$ задачи D и заданная функция $\Phi(x)$ имеют одни и те же ненулевые следы на границе $\partial\Omega$ области Ω.

Разрешимость и свойства гладкости решения задачи D ранее исследовались в работах С.М. Никольского, П.И. Лизоркина [43, 44], Н.В. Мирошина [46], Б.Л. Байдельдинова [1, 2], С.А. Исхокова [20, 21, 22], С.А. Исхокова, А.Ё.Куджмуродова [27], и др., в предположении, что коэффициенты $b_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|,|l| \le r} b_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \ge c_0 \rho^{2\alpha}(x) \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{2.2.4}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\{\zeta_k\}_{|k| \le r}$. В отличие от этого, здесь мы предполагаем выполнение более слабого, чем (2.2.4) условия (см. условие I теоремы 2.2.1). Здесь также ослаблены и некоторые другие условия на коэффициенты $b_{kl}(x)$, имеющиеся в работах вышеуказанных авторов.

Прежде чем сформулировать основную теорему этого параграфа вводим следующее обозначение:

$$(\mu)_+ = \mu, \quad \text{если} \quad \mu > 0, \quad (\mu)_+ = 0 \quad \text{при} \quad \mu \le 0.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть число α такое, что*

$$\alpha \ge 0, \quad \alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \cdots, r\}, \tag{2.2.5}$$

и пусть выполнены условия:

I) старшие коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k|=|l|=r$, формы (2.2.1) имеют вид

$$b_{kl}(x)=\rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x),$$

где функции $a_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют условию эллиптичности

$$\operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\geq c_0|\xi|^{2r} \tag{2.2.6}$$

для всех $x\in\Omega$, $\xi\in R^n$ (c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ);

II) коэффициенты $b_{kl}(x)$ при $|k|$, $|l|\leq r$ и $|k|+|l|\leq 2r-1$ принадлежат пространству $L_{\mu_{kl},\,-\alpha_{kl}}(\Omega)$, где $\mu_{kl}>1$ и

$$\alpha_{kl}=-1+\frac{1}{\mu_{kl}}+\varepsilon_0+\left(\alpha-r+|k|+\frac{1}{2}\right)_+ +\left(\alpha-r+|l|+\frac{1}{2}\right)_+, \tag{2.2.7}$$

где ε_0 – достаточно малое положительное число;

III) существует положительное число M_0 такое, что

$$\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2r}(x)|v(x)|^2dx\leq M_0\operatorname{Re}\mathbb{B}[v,\,v] \tag{2.2.8}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда для любого заданного функционала $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x)\in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ существует единственное решение $U(x)\in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи D и при этом выполняется оценка

$$\left\|U;\,W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|\leq M\left\{\left\|F;\,\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|+\left\|\Phi;\,W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|\right\}, \tag{2.2.9}$$

где число $M>0$ не зависит от выбора F и Φ.

Доказательство. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству этой теоремы, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 2.2.1. *Пусть $p>1$ и числа λ_{kl}, определенные для мультииндексов k, $l(|k|\leq r,|l|\leq r,\,|k|+|l|\leq 2r-1)$, такие, что $\lambda_{kl}>1$, $1/\lambda_{kl}\leq$*

$2/p$. *Тогда для всех* $u(x),\, v(x) \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl},\,\alpha_{kl}}(\Omega) \right\| \ll \left\| u;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\| \, \left\| v;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\|, \tag{2.2.10}$$

где

$$\alpha_{kl} = -\frac{1}{\lambda_{kl}} + \varepsilon_1 + \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{p} \right)_+ + \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{p} \right)_+ ,$$

ε_1 *- достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Пусть $|k| \le r - 1$. Применяя теорему 1.1.6 при $m = |k|$, $q = p_k$, $\alpha_m = \alpha_k$ для функций $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ получаем неравенство

$$\| u^{(k)};\, L_{p_k;\alpha_k}(\Omega) \| \ll \| u;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \|, \tag{2.2.11}$$

которое имеет место при выполнении следующих условий

$$1 < p \le p_k < \infty, \quad \alpha_k > -1/p_k, \quad \alpha_k \ge \alpha - r + |k| + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}. \tag{2.2.12}$$

Действуя аналогично для функций $v \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ получаем неравенство

$$\| v^{(l)};\, L_{q_l;\beta_l}(\Omega) \| \ll \| v;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \|, \tag{2.2.13}$$

которое выполняется, если

$$1 < p \le q_l < \infty, \quad \beta_l > -1/q_l, \quad \beta_l \ge \alpha - r + |l| + \frac{1}{p} - \frac{1}{q_l}. \tag{2.2.14}$$

Далее положим

$$\alpha_{kl} = \alpha_k + \beta_l, \quad \frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l}.$$

Тогда в силу неравенства Гёльдера из (2.2.11), (2.2.13) следует, что

$$\| u^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl};\alpha_{kl}}(\Omega) \| \ll \| u^{(k)};\, L_{p_k;\alpha_k}(\Omega) \| \cdot \| v^{(l)};\, L_{q_l;\beta_l}(\Omega) \| \ll \| u;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \| \| v;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \|.$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.2.1 в случае $|k| \le r - 1$, $|l| \le r - 1$, если подберем числа α_k, β_l следующим образом

$$\alpha_k = -\frac{1}{p_k} + \frac{\varepsilon_1}{2} + (\alpha - r + |k| + \frac{1}{p})_+, \quad \beta_l = -\frac{1}{q_l} + \frac{\varepsilon_1}{2} + (\alpha - r + |l| + \frac{1}{p})_+$$

Нетрудно проверить, что эти числа удовлетворяют условиям (2.2.12), (2.2.14) соответственно.

Теперь рассмотрим случай $|k| = r$, $|l| \le r - 1$. Так как $|k| = r$, то

$$\|u^{(k)};\, L_{p;\alpha}(\Omega)\| \le \|u;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|, \tag{2.2.15}$$

т.е. имеет место неравенство (2.2.11) при $\alpha_k = \alpha$, $p_k = p$. Далее, поступая также как и выше, на основе неравенств (2.2.13) и (2.2.15) доказывается неравенство (2.2.10).

Случай $|k| \le r - 1$, $|l| = r - 1$ рассматривается аналогично.

Лемма 2.2.1 доказана.

Лемма 2.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда для любой заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ функционал G, определенный равенством*

$$\langle G,\, v\rangle = -\mathbb{B}[\Phi,\, v], \tag{2.2.16}$$

принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и при этом

$$\left\|G;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \le M\left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|, \tag{2.2.17}$$

где число $M > 0$ не зависит от $\Phi(x)$.

Доказательство. Функционал (2.2.16) представим в виде

$$\langle G,\, v\rangle = -\mathbb{B}_1[\Phi,\, v] - \mathbb{B}_2[\Phi,\, v], \tag{2.2.18}$$

где

$$\mathbb{B}_1[\Phi,\, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

$$\mathbb{B}_2[\Phi,\, v] = \sum_{|k|+|l|\le 2r-1} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx.$$

Так как коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, имеют форму $b_{kl}(x) = \rho^{2\alpha}a_{kl}(x)$ и функции $a_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, ограничены, то с помощью неравенства Коши-Буняковского доказывается, что

$$|\mathbb{B}_1[\Phi,\, v]| \le \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \left|\rho^{2\alpha}a_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\right| \left|v^{(l)}(x)\right| dx \ll$$

$$\ll \sum_{|k|=|l|=r} \left\|\rho^{\alpha}\Phi^{(k)};\, L_2(\Omega)\right\| \left\|\rho^{\alpha}v^{(l)};\, L_2(\Omega)\right\| \ll \left\|\Phi;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Следовательно

$$|\mathbb{B}_1[\Phi,\, v]| \ll \left\|\Phi;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.2.19}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Далее оценим форму $\mathbb{B}_2[\Phi,\, v]$. Заметим, что числа $\lambda_{kl} = \mu_{kl}/(\mu_{kl}-1)$, где числа μ_{kl} такие же как в условии II) теоремы 2.2.1, удовлетворяют условиям леммы 2.2.1. Поэтому применяя неравенство Гёльдера и лемму 2.2.1, получим

$$|\mathbb{B}_2[\Phi,\, v]| \le \sum_{|k|+|l|\le 2r-1} \int\limits_{\Omega} \left|b_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\right| \left|v^{(l)}(x)\right| dx \le$$

$$\le \sum_{|k|+|l|\le 2r-1} \|b_{kl};\, L_{\mu_{kl};-\alpha_{kl}}(\Omega)\| \cdot \left\|\Phi^{(k)}v^{(l)}; L_{\lambda_{kl};\alpha_{kl}}(\Omega)\right\| \ll$$

$$\ll \left\|\Phi;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Следовательно

$$|\mathbb{B}_2[\Phi,\, v]| \ll \left\|\Phi;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.2.20}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

На основе полученных неравенств (2.2.19), (2.2.20) из (2.2.18) следует, что

$$|\langle G,\, v\rangle| \ll \left\|\Phi;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Это неравенство означает, что функционал G, определенный равенством (2.2.16), принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и имеет место неравенство (2.2.17).

Лемма 2.2.2 доказана.

Теперь переходим к непосредственному доказательству теоремы 2.2.1. Пусть заданы элементы $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$, $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и пусть $U(x)$

– какое нибудь решение задачи D. Рассмотрим функцию $U^*(x) = U(x) - \Phi(x)$. Так как

$$\mathbb{B}[U,\, v] = \langle F,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

и

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega),$$

то $U^*(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{B}[U^*,\, v] = \langle F,\, v\rangle + \langle G,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{2.2.21}$$

где функционал G определяется равенством (2.2.16).

Таким образом, вспомогательная функция $U^*(x)$ является решением следующей задачи:

Задача D^*. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U^*(x)$ уравнения (2.2.21) принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Обратно, легко можно проверить, что, если $U^*(x)$ является решением задачи D^*, то функция

$$U(x) = U^*(x) + \Phi(x) \tag{2.2.22}$$

будет решением задачи D.

Согласно лемме 2.2.2 функционал G принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$. Поэтому по теореме 2.1.3 задача D^* имеет единственное решение и выполняется следующее неравенство

$$\left\|U^*;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|G;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|.$$

Отсюда и из оценки (2.2.17) леммы 2.2.2 следует, что

$$\left\|U^*;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Поэтому для функции $U(x)$ – решения задачи D (см. (2.2.22)) имеет место неравенство

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|,$$

т.е. выполняется оценка (2.2.9) теоремы 2.2.1.

Из единственности решения задачи D^* и равенства (2.2.22) следует единственность решения задачи D.

Теорема 2.2.1 доказана.

Далее предположим, что $-1/2 < \alpha < r - 1/2$ и целое число s_0 такое, что

$$r - \alpha - \frac{1}{2} \leq s_0 < r - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Тогда, согласно теореме 1.1.4 при условии $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$ для заданных граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

найдется функция $\Phi \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$\left.\frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали, и имеет место следующее неравенство

$$\left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\|.$$

В этом случае задачу D можно сформулировать следующим образом

Задача D'. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{2.2.23}$$

требуется найти решение $U(x)$ уравнения (2.2.2) из пространство $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^s U(x)}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1. \tag{2.2.24}$$

Применяя теорему 2.2.1 получаем следующий результат о разрешимости задачи D'.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $0 < \alpha < r - 1/2$*, граница области* $\partial\Omega$ *принадлежит классу* $C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$, *и выполнены все условия теоремы 2.2.1.*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *и заданного набора граничных функций (2.2.23) существует единственное решение* $U(x)$ *задачи* D' *и при этом справедливо неравенство*

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \le M \left\{ \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| + \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\| \varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega) \right\| \right\},$$

где число $M > 0$ *не зависит от выбора функционала* F *и граничных функций (2.2.23).*

Далее нетрудно заметить, что по приведенной выше схеме можно исследовать разрешимость аналога вариационной задачи D_λ с неоднородными граничными условиями. Ниже сформулируем этот результат без доказательства.

Задача D^*_λ**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданных граничных функций (2.2.23) требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяющее граничным условиям (2.2.24).

Теорема 2.2.3. *Пусть* $0 < \alpha < r - 1/2, \quad \alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \cdots, r\}$, *граница области* $\partial\Omega$ *принадлежит классу* $C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$, *и пусть выполнены условия I) и II) теоремы 2.2.1.*

Тогда существует неотрицательное число λ_0 *такое, что при* $\lambda \ge \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *и заданного набора граничных функций (2.2.23) существует единственное решение* $U(x)$

задачи D_λ^* и при этом справедливо неравенство

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M\left\{\left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \sum_{s=0}^{s_0-1}\left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\|\right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от λ и от выбора функционала F и граничных функций (2.2.23).

Глава 3

О некоторых спектральных свойствах вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области

В этой главе изучаются некоторые спектральные свойства эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области со степенным вырождением на границе. Она состоит из трех параграфов. В первом параграфе изучаются разрешимости вариационной задачи на собственные значения и фредгольмовость неоднородной вариационной задачи с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области. Случай неоднородных граничных условий рассматривается во втором параграфе. В третьем параграфе изучается асимптотика распределения собственных значений эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе.

3.1 О фредгольмовости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе

Пусть, также как в первой главе, Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ и $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$.

Также как в первом параграфе второй главы, рассмотрим вырождающийся дифференциальный оператор

$$(Lu)(x) \equiv \sum_{|k|,\,|l| \le r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)} \quad (x \in \Omega) \tag{3.1.1}$$

и связанную с ним полуторалинейную интегро-дифференциальную форму

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{3.1.2}$$

Здесь и далее $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначние функции, на которых ниже накладываются некоторые условия.

Заметим, что для заданной функции $F(x) \in L_2(\Omega)$ любое решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] = \int\limits_{\Omega} F(x) \overline{v(x)} dx, \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

называется обобщенным решением дифференциального уравнения

$$(LU)(x) = F(x),\, x \in \Omega.$$

Поэтому любое нетривиальное решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] = \lambda \int\limits_{\Omega} U(x) \overline{v(x)} dx, \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

назовем обобщенной собственной функцией оператора L, а соответствующее значение параметра λ – собственным значением оператора L.

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле с параметром λ.

Задача $\mathbb{D}_\lambda$**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F,\, v \rangle \qquad (\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)), \tag{3.1.3}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Соответствующая однородная задача формулируется следующим образом:

Задача $\mathbb{D}^0_\lambda$. Требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} U(x)\overline{v(x)}dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.1.4}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

По аналогии с вышесказанным, значение параметра λ, при котором задача $\mathbb{D}^0_\lambda$ имеет нетривиальное решение, назовем собственным значением вариационной задачи Дирихле для оператора (3.1.1), а соответствующее решение – обобщенной собственной функцией этой задачи.

Наряду с задачами $\mathbb{D}_\lambda$ и $\mathbb{D}^0_\lambda$ рассмотрим отвечающие им сопряженные задачи:

Задача $\mathbb{D}^*_\lambda$. Для заданного функционала $G \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} V(x)\overline{v(x)}dx = \langle G,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.1.5}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Задача $\mathbb{D}^{0*}_\lambda$. Требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} V(x)\overline{v(x)}dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.1.6}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Здесь и далее $B^+[u,\, v] = \overline{B[v,\, u]}$.

Теорема 3.1.1. *Пусть $r - \alpha > 0$, $\alpha + 1/2 \notin \{1,\, 2,\, \ldots,\, r\}$ и*

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x)|v(x)|^2 dx \le M_0 \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad \textit{для всех } v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.1.7}$$

Пусть также выполнены условия:

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (3.1.2) при $|k| = |l| = r$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k \xi^l \geq c_0|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$ (c_0 – положительная постоянная независящая от x, ξ);

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \leq r$ и $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где числа p_{kl} определяются соотношениями:

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, & |l| = r, \ n > 2(r - |k|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, & |k| = r, \ n > 2(r - |l|); \end{cases}$$

если $|k| \leq r - 1$, $|l| \leq r - 1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon, & n > 2(r - |k|), \ n > 2(r - |l|), \\ \frac{n}{r-|l|+\varepsilon}, & n \leq 2(r - |k|), \ n > 2(r - |l|), \\ \frac{n}{r-|k|+\varepsilon}, & n > 2(r - |k|), \ n \leq 2(r - |l|); \end{cases}$$

p_{kl} – любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.

Здесь ε – достаточно малое положительное число.

Тогда задача $\mathbb{D}_\lambda$ фредгольмова, то есть:

1) *задача $\mathbb{D}_\lambda^0$ имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$ (собственные значения) и только ∞ будет предельной точкой этих значений;*

2) *отвечающее каждому собственному значению λ_j подпространство обобщенных собственных функций (собственное подпространство) - конечномерно;*

3) *у сопряженной задачи $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$ собственные значения равны $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \dots;$*

4) собственные подпространства задач $\mathbb{D}_\lambda^0$ и $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$, отвечающие собственным значениям λ_j и $\overline{\lambda_j}$, имеют одинаковую размерность;

5) для того чтобы задача $\mathbb{D}_\lambda$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $v(x)$ задачи $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$ выполнялось условие $\langle F,\, v\rangle \equiv 0$;

6) для того чтобы задача $\mathbb{D}_\lambda^*$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $u(x)$ задачи $\mathbb{D}_\lambda^0$ выполнялось условие $\langle G,\, u\rangle \equiv 0$.

Доказательство. В условиях теоремы 3.1.1 выполняются все условия теоремы 2.1.1, и в процессе доказательства теоремы 2.1.1 мы доказывали неравенство

$$|B[u,\, v]| \leq M \, \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{3.1.8}$$

для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Согласно оценке (2.1.20) из первого параграфа второй главы существуют положительные числа $M_1,\, M_2$ такие, что

$$\|v, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \leq (M_2/M_1)\|v, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 + (1/M_1)\mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega))\,.$$

Отсюда в силу условия (3.1.7) следует, что

$$\|v, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \leq M_3 \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.1.9}$$

где M_3 – некоторая положительная константа.

Так как Ω – ограниченная область и $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до границы области, в силу условия $r-\alpha > 0$ существует положительное число C_1 такое, что

$$C_1 \leq \rho^{\alpha-r}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{3.1.10}$$

Следовательно

$$C_1\|v, L_2(\Omega)\|^2 \leq \|v, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2.$$

Далее применяя условию (3.1.7), имеем

$$\|v, L_2(\Omega)\|^2 \le M_4 \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.1.11}$$

где M_4 – некоторая положительная константа.

Так как

$$\|v, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 = \|v, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 + \|v, L_2(\Omega)\|^2,$$

то из полученных неравенств (3.1.9) и (3.1.11) следует, что

$$\|v, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \le M_5 \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.1.12}$$

где M_5 – некоторая положительная константа.

В силу плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$ неравенства (3.1.8) и (3.1.12) имеют место при всех $u,\, v \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$. Эти неравенства позволяют нам применить обобщенную теорему Лакса-Мильграма (см. теорему 2.1.2). В силу этой теоремы для любого заданного элемента $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ обобщенной задачи Дирихле

$$B[U, v] = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)) \tag{3.1.13}$$

из пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и при этом справедливо неравенство

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \le M_0 \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \tag{3.1.14}$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от выбора функционала F.

Таким образом, однозначно определяется ограниченно обратимый оператор

$$\mathbb{L} : \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega) \longrightarrow \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)',$$

такой, что

$$B[U,\, v] = \langle \mathbb{L}U,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,. \tag{3.1.15}$$

Обратный оператор $\Lambda = \mathbb{L}^{-1}$ действует следующим образом:

$$\Lambda :\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)' \longrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega),$$

$$B[\Lambda F,\, v] = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,.$$

Из неравенства (3.1.14) следует ограниченность оператора Λ.

Далее заметим, что при $\alpha < r$, в силу ограниченности области Ω, существует положительное число μ_0 такое, что

$$\mu_0 \le \rho^{2\alpha-2r}(x) \quad (\forall x \in \Omega).$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega |v(x)|^2 dx \ll \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha-2r}(x)|v(x)|^2 dx \ll \left\|v;\, W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

то есть пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$ вложено в пространстве $L_2(\Omega)$. Отсюда следует вложение пространства $L_2(\Omega)$ в пространстве $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$. Следовательно, любой элемент $F \in L_2(\Omega)$ можно рассмотреть как элемент из пространства $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$. При этом $\langle F, v\rangle = (F,\, v)$, где $(\cdot,\, \cdot)$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$. Поэтому уравнение (3.1.3) для заданного элемента $F \in L_2(\Omega)$ записывается в виде

$$B[U,\, v] = (F - \lambda U,\, v) \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,.$$

В силу равенства (3.1.15) это уравнение с помощью оператора $\mathbb{L}$ пишется в виде

$$\mathbb{L}U = F - \lambda U.$$

Так как оператор $\mathbb{L}$ непрерывно обратим, то из последнего равенства находим

$$U = F_1 - \lambda\Lambda U,$$

где

$$F_1 = \mathbb{L}^{-1}F = \Lambda F.$$

Следовательно,

$$U + \lambda\Lambda U = F_1, \tag{3.1.16}$$

где

$$\Lambda = \mathbb{L}^{-1}, \qquad F_1 = \mathbb{L}^{-1}F.$$

Таким образом, мы показали, что уравнение (3.1.3) эквивалентно операторному уравнению (3.1.16).

Аналогичными рассуждениями доказывается эквивалентность уравнения (3.1.4) со следующем уравнением

$$U + \lambda\Lambda U = 0. \tag{3.1.17}$$

Это уравнение записывается в виде

$$\Lambda U = -\frac{1}{\lambda}U.$$

Следовательно, уравнение (3.1.17) имеет нетривиальное решение, если число $-1/\lambda$ является собственным значением оператора Λ. Поэтому уравнение (3.1.17), следовательно и эквивалентное ему уравнение (3.1.4), имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\lambda = -\frac{1}{\mu}, \tag{3.1.18}$$

где μ – собственное значение оператора Λ.

Далее докажем вполне непрерывность оператора Λ. Это означает, что оператор Λ переводит ограниченное множество в компактное множество. Так как $\Lambda = \mathbb{L}^{-1}$ и оператор $\mathbb{L}$ действует из $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ в $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$, то оператор Λ действует из $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ в $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$. Так как оператор Λ ограничен, то он переводит ограниченное множество пространства $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ в ограниченное множество пространства $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$. С другой стороны из утверждения теоремы 1.1.9 при $p = 2$, $m = 0$, $\beta = 0$ следует компактность вложения

$$W^r_{2;\alpha}(\Omega) \to L_2(\Omega),$$

если $r - \alpha > 0$. Это означает, что любое ограниченное множество пространства $W^r_{2;\alpha}(\Omega)$ будет компактным в $L_2(\Omega)$, если рассмотреть элементы этого множества как элементы пространства $L_2(\Omega)$. Поэтому если рассмотреть оператор Λ, как оператор действующий из $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ в $L_2(\Omega)$, то он будет компактным оператором.

Отметим следующие свойства собственных значений вполне непрерывного оператора (см., например, [32], [59]):

Лемма 3.1.1. *Пусть A – вполне непрерывный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве X. Тогда:*

1) *собственное подпространство X_μ оператора A, отвечающее собственному значению $\mu \neq 0$ этого оператора, конечномерно.*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ вне круга $|\mu| \leq \varepsilon$ комплексной плоскости может содержаться лишь конечное число собственных значений оператора A.*

3) *если пространство X – бесконечномерно, то оператор A имеет бесконечное множество собственных значений.*

В силу леммы 3.3.1 и равенства (3.1.18), из приведенных выше рассуждений следует, что уравнение (3.1.17), следовательно и эквивалентное ему уравнение (3.1.4), имеет нетривиальное решение только для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ (собственные значения) и только ∞ будет предельной точкой этих значений; отвечающее каждому собственному значению λ_j подпространство обобщенных собственных функций (собственное подпространство) - конечномерно.

Теперь приведем аналогичные рассуждения для полуторалинейной формы

$$B^+[u, v] = \overline{B[v, u]} = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) \overline{a_{lk}(x)} u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx.$$

Так как теорема 2.1.1 справедлива и для этой формы, то аналогично оператору $\mathbb{L}$ строится оператор

$$\mathbb{K} : \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega) \longrightarrow \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$$

такой, что

$$B^+[u, v] = \langle \mathbb{K}u, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{3.1.19}$$

а аналогично оператору Λ строится оператор $\mathbb{S}$ – обратный по отношению к оператору $\mathbb{K}$.

$$\mathbb{S} = \mathbb{K}^{-1} : \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)' \longrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\alpha}(\Omega),$$

$$B^+[\mathbb{S}G, v] = \langle G, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Далее докажем, что

$$\mathbb{S} = \Lambda^*. \tag{3.1.20}$$

Отметим следующие свойства операторов $\mathbb{L}$ и $\mathbb{K}$:

$$B[\mathbb{L}^{-1}F, v] = (F, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

$$B^+[\mathbb{K}^{-1}G, v] = \langle G, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

где F, G – произвольные элементы из $L_2(\Omega)$,

$$B^+[u, v] = \overline{B[v, u]}$$

и форма $B[u, v]$ определена равенством (3.1.2).

Так как

$$\Lambda = \mathbb{L}^{-1}, \qquad \mathbb{S} = \mathbb{K}^{-1},$$

то в силу приведенных выше равенств имеем

$$B[\Lambda F, v] = (F, v), \quad B^+[\mathbb{S}G, v] = (G, v). \tag{3.1.21}$$

Пусть h – произвольный элемент из $L_2(\Omega)$. Положим $w_1 = \mathbb{S}h$, $w = \Lambda^* h$. Тогда

$$\overline{B[v, w_1]} = B^+[w_1, v] = B^+[\mathbb{S}h, v] = (h, v). \tag{3.1.22}$$

По определению сопряженного оператора имеем

$$(\Lambda^* u, v) = (u, \Lambda v) \quad \text{для всех} \quad u, v \in L_2(\Omega).$$

Поэтому при $v = \Lambda G$ из равенства (3.1.21) следует, что

$$\overline{B[v,\, w]} = \overline{B[\Lambda G,\, w]} = \overline{(G, w)} = \overline{(G, \Lambda^* h)} =$$

$$\overline{(\Lambda G, h)} = \overline{(v, h)} = (h, v).$$

Отсюда и из (3.1.22) имеем

$$B[v,\, w - w_1] = 0 \quad \text{при всех} \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega).$$

Взяв $v = w - w_1$ из этого равенства получим $w = w_1$, то есть $\mathbb{S}h = \Lambda^* h$, что и доказывает равенство (3.1.20).

Учитывая равенство (3.1.19) записываем уравнение (3.1.5) в следующем виде

$$\langle \mathbb{K}V, v\rangle + \lambda(V,\, v) = \langle G,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,.$$

Следовательно,

$$\mathbb{K}V + \lambda V = G.$$

Так как $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{S}$, то

$$V + \lambda \mathbb{S} V = G_1,$$

где $G_1 = \mathbb{S}G$.

С учетом доказанного равенства (3.1.20), это операторное уравнение принимает следующий вид

$$V + \lambda \Lambda^* V = G_1. \tag{3.1.23}$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что уравнение (3.1.6) эквивалентно операторному уравнению

$$V + \lambda \Lambda^* V = 0,$$

или

$$\Lambda^* V = -\frac{1}{\lambda} V.$$

Таким образом, мы показали, что уравнение (3.1.6) имеет нетривиальное решение только тогда, когда число $-1/\lambda$ является собственным значением оператора Λ^*. Заметим, что если число μ_0 является собственным значением оператора Λ, то число $\overline{\mu_0}$ будет собственным значением оператора Λ^*.

Из вполне непрерывности оператора Λ следует вполне непрерывность оператора Λ^*. Поэтому применяя лемму 3.1.1 в силу приведенных выше рассуждений получаем, что сопряженная задача $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$ имеет счетное число собственных значений с единственно возможной предельной точкой на бесконечности, если λ_j – собственное значение задачи $\mathbb{D}_\lambda$, то число $\overline{\lambda_j}$ будет собственным значением сопряженной задачи $\mathbb{D}_\lambda^{0*}$.

Доказательство теоремы 3.1.1 завершается, если применить следующие утверждения о свойствах сопряженного оператора (см., например, [59, пар.21]).

Лемма 3.1.2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, A – линейный оператор, действующий из X в Y, A^* – оператор сопряженный к оператору A. Пусть оператор A плотно определен в пространстве X. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *множество нулей оператора A^* равно ортогональному дополнению области значения оператора A;*

2) *замыкание области значения оператора A равно ортогональному дополнению множества нулей оператора A^*.*

Пусть $\varphi(x)$ – положительная измеримая в области Ω функция.

Положим $\mathcal{H}_+ = \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)$, $\mathcal{H}_0 = L_{2;\varphi}(\Omega)$, где $L_{2;\varphi}(\Omega)$ – весовое лебегово пространство измеримых в Ω функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u;\, L_{2;\varphi}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_\Omega \varphi^2(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_-$ – негативное пространство, построенное по пространствам $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_0$.

Далее исследуем фредгольмовость вариационной задачи Дирихле для вырождающегося дифференциального оператора (3.1.1), когда условие $r - \alpha > 0$ теоремы 3.1.1 может не выполняться. В этом случае вместо обобщенных собственных функций изучаются обобщенные собственные функции с весом и вместо задачи $\mathbb{D}_\lambda$ изучается разрешимость следующей задачи

Задача $\mathbb{D}_{\lambda;\varphi}$. Для заданного функционала $F \in \mathcal{H}_-$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U, v] + \lambda \int\limits_\Omega \varphi^2(x)U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Также как в случае задачи $\mathbb{D}_\lambda$ наряду с задачей $\mathbb{D}_{\lambda;\varphi}$ рассматриваются отвечающие ей однородная и сопряженные задачи:

Задача $\mathbb{D}^0_{\lambda;\varphi}$. Требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U, v] + \lambda \int\limits_\Omega \varphi^2(x)U(x)\overline{v(x)}dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Задача $\mathbb{D}^*_{\lambda;\varphi}$. Для заданного функционала $G \in \mathcal{H}_-$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V, v] + \lambda \int\limits_\Omega \varphi^2(x)^2V(x)\overline{v(x)}dx = \langle G, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Задача $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\varphi}$. Требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$B^+[V, v] + \lambda \int\limits_\Omega \varphi(x)V(x)\overline{v(x)}dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $\mathcal{H}_+$.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\alpha + 1/2 \notin \{1, 2, \ldots, r\}$ и коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (3.1.2) удовлетворяют условиям (3.1.7), I) и II) теоремы 3.1.1.*

Пусть также функция $\varphi(x)$ непрерывна в Ω и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\in\Omega:\,\rho(x)\to 0} \varphi(x)\rho^{r-\alpha}(x) = 0. \tag{3.1.24}$$

Тогда задача $\mathbb{D}_{\lambda;\,\varphi}$ фредгольмова, то есть:

1) *задача $\mathbb{D}^0_{\lambda;\,\varphi}$ имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ и только ∞ будет предельной точкой этих значений;*

2) *отвечающее каждому значению λ_j подпространство решений задачи $\mathbb{D}^0_{\lambda;\,\varphi}$ - конечномерно;*

3) *у сопряженной задачи $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\,\varphi}$ собственные значения равны $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$;*

4) *подпространства решений задач $\mathbb{D}^0_{\lambda;\,\varphi}$ и $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\,\varphi}$, отвечающие значениям λ_j и $\overline{\lambda_j}$, имеют одинаковую размерность;*

5) *для того чтобы задача $\mathbb{D}_{\lambda;\,\varphi}$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $v(x)$ задачи $\mathbb{D}^{0*}_{\lambda;\,\varphi}$ выполнялось условие $\langle F,\, v\rangle \equiv 0$;*

6) *для того чтобы задача $\mathbb{D}^*_\lambda$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $u(x)$ задачи $\mathbb{D}^0_{\lambda;\,\varphi}$ выполнялось условие $\langle G,\, u\rangle \equiv 0$.*

Доказательство этой теоремы несущественно отличается от доказательства теоремы 3.1.1. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1.1, и при этом учитывается, что условие (3.1.24) обеспечивает компактность вложения $\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_0$. В условиях теоремы 3.1.2 выполняются следующие неравенства, которые используются в процессе доказательства этой теоремы:

$$\int\limits_\Omega \left(\varphi(x)|v(x)|\right)^2 dx \le M_1 \int\limits_\Omega \left(\rho^{\alpha-r}(x)|v(x)|\right)^2 dx \le M_2 \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

$$|B[u,\, v]| \leq M_3 \left\|v;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|u;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \quad (u,\, v \in C_0^\infty(\Omega))\,,$$

$$\|v, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 \leq M_4 \mathrm{Re}\, B[v,\, v] \quad (v \in C_0^\infty(\Omega))$$

В этих неравенствах M_j, $j = \overline{1,\, 4}$, – некоторые постоянные положительные числа.

3.2 О фредгольмовости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе

В этом параграфе изучается фредгольмовость вариационной задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области, которые имеют степенное вырождение на всей границе.

Пусть, также как в предыдущих параграфах, Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$, $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$ и r – натуральное число.

Рассмотрим вырождающийся дифференциальный оператор

$$(Lu)(x) \equiv \sum_{|k|,\,|l| \leq r} (-1)^{|l|} \left(b_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)} \;\; (x \in \Omega) \tag{3.2.1}$$

и связанную с ним полуторалинейную интегро-дифференциальную форму

$$\mathbb{B}[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int\limits_\Omega b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{3.2.2}$$

Здесь и далее $b_{kl}(x)$ – комплекснозначние функции, на которых ниже накладываются некоторые условия, при выполнении которых $\mathbb{B}[u,\, v]$ принимает конечное значение для всех $u(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$, $\quad v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Также как в §2.2 считаем, что

$$(\mu)_+ = \mu, \quad \text{если} \quad \mu > 0, \quad (\mu)_+ = 0 \quad \text{при} \quad \mu \leq 0.$$

Основным объектом исследования настоящего параграфа является следующая задача:

Задача $\mathscr{D}_\lambda$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Psi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.2.3}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega). \tag{3.2.4}$$

Вместе с этой задачей также рассмотрим соответствующие однородную и сопряженные задачи.

Задача $\mathscr{D}^0_\lambda$. Требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} U(x)\overline{v(x)}dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.2.5}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Задача $\mathscr{D}^*_\lambda$. Для заданного функционала $G \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Psi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$\mathbb{B}^+[V,\, v] + \overline{\lambda} \int\limits_{\Omega} \overline{V(x)}v(x)dx = \langle G,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.2.6}$$

удовлетворяющее условию

$$V(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega). \tag{3.2.7}$$

Задача $\mathscr{D}^{0*}_\lambda$. Требуется найти решение $V(x)$ уравнения

$$\mathbb{B}^+[V,\, v] + \overline{\lambda} \int\limits_{\Omega} \overline{V(x)}v(x)dx = 0 \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{3.2.8}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $r-\alpha>0$, $\alpha+1/2\notin\{1,\,2,\,\ldots,\,r\}$ *и выполнены условия:*

I) старшие коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k|=|l|=r$, *формы (3.2.4) имеют вид*

$$b_{kl}(x)=\rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x),$$

где функции $a_{kl}(x)$ *непрерывны в замкнутой области* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяют условию эллиптичности*

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\geq c_0|\xi|^{2r} \tag{3.2.9}$$

для всех $x\in\Omega$, $\xi\in R^n$ (c_0 – *положительная постоянная независящая от* x, ξ *);*

II) коэффициенты $b_{kl}(x)$ *при* $|k|,\,|l|\leq r$ *и* $|k|+|l|\leq 2r-1$ *принадлежат пространству* $L_{\mu_{kl},\,-\alpha_{kl}}(\Omega)$, *где* $\mu_{kl}>1$ *и*

$$\alpha_{kl}=-1+\frac{1}{\mu_{kl}}+\varepsilon_0+\left(\alpha-r+|k|+\frac{1}{2}\right)_+ +\left(\alpha-r+|l|+\frac{1}{2}\right)_+, \tag{3.2.10}$$

где ε_0 – *достаточно малое положительное число;*

III) существует положительное число M_0 *такое, что*

$$\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2r}(x)|v(x)|^2dx\leq M_0\mathrm{Re}\,\mathbb{B}[v,\,v] \tag{3.2.11}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда задача $\mathscr{D}_\lambda$ *фредгольмова, то есть:*

1) *задача* $\mathscr{D}_\lambda^0$ *имеет отличные от нуля решения (обобщенные собственные функции) только для счетного числа значений параметра* $\lambda=\lambda_j$, $j=1,2,\ldots$ *(собственные значения) и только* ∞ *будет предельной точкой этих значений;*

2) *отвечающее каждому собственному значению* λ_j *подпространство обобщенных собственных функций - собственное подпространство - конечномерно;*

3) у сопряженной задачи $\mathscr{D}_\lambda^{0*}$ собственные значения равны $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \ldots$;

4) собственные подпространства задач $\mathscr{D}_\lambda^0$ и $\mathscr{D}_\lambda^{0*}$, отвечающие собственным значениям λ_j и $\overline{\lambda_j}$, имеют одинаковую размерность;

5) для того чтобы задача $\mathscr{D}_\lambda$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $v(x)$ задачи $\mathscr{D}_\lambda^{0*}$ выполнялось условие $\langle \widetilde{F}, v\rangle \equiv 0$, где $\langle \widetilde{F}, v\rangle = \langle F, v\rangle - \mathbb{B}[\Phi, v] - \lambda(\Phi, v)$;

6) для того чтобы задача $\mathscr{D}_\lambda^*$ имела хоть одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $u(x)$ задачи $\mathscr{D}_\lambda^0$ выполнялось условие $\langle \widetilde{G}, u\rangle \equiv 0$, где $\langle \widetilde{G}, u\rangle = \langle G, v\rangle - \mathbb{B}[\Psi, v] - \lambda(\Psi, v)$.

Доказательство. Поступая также как в §2.2, с помощью леммы 2.2.2 можно свести вариационные задачи $\mathscr{D}_\lambda$ и $\mathscr{D}_\lambda^*$ с неоднородными условиями (3.2.4) и (3.2.7), соответственно, к соответствующим задачам с однородными условиями. Затем, применяя теорему 3.1.1 к полученным однородным задам, получаем утверждения теоремы 3.2.1.

3.3 Об асимптотике спектра эллиптического оператора в ограниченной области со степенным вырождением на границе

Пусть L – вырождающийся эллиптический оператор, определенный равенством (3.1.1).

Теорема 3.3.1. *Пусть $0 \le \alpha < r$, старшие коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности*

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \ge c_0|\xi|^{2r} \tag{3.3.1}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$ *(* c_0 *– положительная постоянная независящая от* x, ξ *).*

Пусть младшие коэффициенты $a_{kl}(x)$ *при* $|k|$, $|l| \le r$ *и* $|k|+|l| \le 2r-1$ *принадлежат пространству* $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$*, где числа* p_{kl} *определяются соотношениями:*

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, \;\; |l| = r, \;\; n > 2(r-|k|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, \;\; |k| = r, \;\; n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

если $|k| \le r-1$, $|l| \le r-1$*, то*

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon, \;\; n > 2(r-|k|), \;\; n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|l|+\varepsilon}, \;\; n \le 2(r-|k|), \;\; n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|k|+\varepsilon}, \;\; n > 2(r-|k|), \;\; n \le 2(r-|l|); \end{cases}$$

p_{kl} *– любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.*

Здесь ε *– достаточно малое положительное число.*

Тогда оператор L *имеет дискретный спектр и для собственных значений* λ_j *оператора* L *выполняется следующее условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-\gamma/2} < \infty, \tag{3.3.2}$$

где γ *– любое число, удовлетворяющее неравенству* $\gamma > n/(r-\alpha)$*.*

Доказательство. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству этой теоремы, сформулируем некоторые известные результаты о свойствах собственных значений и s-чисел операторов компактного вложения функциональных пространств.

Напомним, что (см., например, [19]) для оператора A, действующего из некоторого гильбертова пространство X в другое гильбертово пространство Y, сопряженный оператор A^* действует из Y в X. Следовательно, оператор A^*A действует из X в X и является неотрицательным оператором:

$$(A^*Au,\, u) = (Au,\, Au) = \|Au; X\|^2 \ge 0.$$

Если оператор A – вполне непрерывный, то оператор A^*A будет вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве X и его спектр образует счетное множество неотрицательных чисел с единственной предельной точкой $\lambda = 0$. Занумеруем их в порядке убывания с учетом кратностей и обозначим через $\lambda_j(A^*A)$. Неотрицательные числа

$$s_j(A) = (\lambda_j(A^*A)), \quad j = 1, 2, \ldots$$

называются s-числами оператора A.

Пусть $1 \le p < \infty$. Символом $\mathfrak{G}_p(X, Y)$ обозначим пространство всех вполне непрерывных операторов A, действующих из пространства X в пространство Y со следующей нормой

$$\|A; \mathfrak{G}_p(X, Y)\| = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right\}^{1/p} < \infty.$$

Со свойствами этих пространств можно ознакомиться в монографии И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна [19].

Пусть H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство, плотно вложенное в H_0, со своим скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_+$ и нормой $\|\cdot\|_+$. Обозначим через H_- пополнение пространства H_0 по норме

$$\|f : H_-\| = \sup_{u \in H_+} \frac{|(f, u)_0|}{\|u\|_+}, \quad f \in H_0.$$

Полученная тройка H_+, H_0, H_- плотно вложенных пространств называется (см., например, [3] и [53]) оснащенным гильбертовым пространством. Пространство H_+ называется позитивным пространством, а пространство H_- – негативным пространством.

Пусть $D \subseteq H_+$ – некоторое линейное множество, плотное в H_0. Символом $\overset{\circ}{H}_+$ обозначим замыкание D в норме пространства H_+, а символом $\overset{\circ}{H}_-$ – отвечающее ему негативное пространство.

Пусть $\mathcal{B}[u,\, v]$ – полуторалинейная форма, заданная на множестве D, удовлетворяющая условиям

$$|\mathcal{B}[u,\, v]| \le C_0 \|u\|_+ \|v\|_+ \quad \forall u,\, v \in D = D(\mathcal{B}), \tag{3.3.3}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\mathcal{B}[u,\, u] + \lambda_0 \|u\|_0^2\right\} \ge \delta_0 \|u\|_+^2 \quad \forall u \in \overset{\circ}{H}_+, \tag{3.3.4}$$

где $C_0,\, \lambda_0,\, \delta_0$ – некоторые постоянные.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [57] или [53])

Утверждение 3.3.1. *Пусть билинейная форма $\mathcal{B}[u,\, v]$ удовлетворяет условиям (3.3.3), (3.3.4) и пусть вложение $\overset{\circ}{H}_+$ в H_0 компактно. Тогда задача: найти решение $u \in \overset{\circ}{H}_+$*

$$\mathcal{B}[u,\, v] + \mu(u,\, v) = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_+$$

имеет ненулевое решение для счетного числа значений параметра $\mu = \mu_j,\ j = 1,\, 2,\, \ldots,$ причем

$$\mu_j \sim s_j(\mathcal{O})^{-2} \quad \textit{при} \quad j \to \infty,$$

где $\mathcal{O}$ – оператор вложения $\overset{\circ}{H}_+$ в H_0 и $s_j(\mathcal{O}),\ j = 1,\, 2,\, \ldots$ – s-числа этого оператора.

В силу этого утверждения для собственных значений λ_j оператора L имеет место соотношение

$$\lambda_j \sim s_j(O)^{-2} \quad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{3.3.5}$$

где O – оператор вложения $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $s_j(O),\ j = 1,\, 2,\, \ldots$ – s-числа оператора O.

Лемма 3.3.1. *Пусть O_s – оператор вложения $W_2^s(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и пусть Ω – ограниченная область в R^n с гладкой границей.*

Тогда

$$O_s \in \mathfrak{S}_p(W_2^s(\Omega),\, L_2(\Omega)), \tag{3.3.6}$$

где $p = \varepsilon + n/s$ и ε – произвольное положительное число.

Доказательство см. в [47].

Включение (3.3.6) означает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(O_s)^{\frac{n}{s}+\varepsilon} < \infty. \tag{3.3.7}$$

Это оценка позволяет получить асимптотику чисел $s_j(O)$, если воспользоваться вложением (см., например, [47], [64])

$$W^r_{2;\alpha}(\Omega) \to \widetilde{W}^{r-\alpha}_2(\Omega),$$

где $\widetilde{W}^{r-\alpha}_2(\Omega) = W^{r-\alpha}_2(\Omega)$, если $r-\alpha > 0$ и $\widetilde{W}^{r-\alpha}_2(\Omega) = L_2(\Omega)$ в противном случае.

Следовательно, оператор вложения $O : W^r_{2;\alpha}(\Omega) \to L_2(\Omega)$ при $r-\alpha > 0$ представим в виде

$$O = \mathbb{J} \cdot O_{r-\alpha}, \tag{3.3.8}$$

где $\mathbb{J}$ – оператор вложения $W^r_{2;\alpha}(\Omega)$ в $W^{r-\alpha}_2(\Omega)$. В силу ограниченности оператора $\mathbb{J}$ и неравенства (3.3.7) из представления (3.3.8) следует, что $O \in \mathfrak{S}_{\varepsilon+n/(r-\alpha)}(W^r_{2;\alpha}(\Omega),\, L_2(\Omega))$, то есть

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(O)^{\gamma} < \infty, \tag{3.3.9}$$

где γ – любое число большее чем $\dfrac{n}{r-\alpha}$. Отсюда в силу асимптотического соотношения (3.3.5) следует оценка (3.3.2).

Теорема 3.3.1 доказана.

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.1 собственные значения λ_j дифференциального оператора L удовлетворяют неравенству*

$$j^{2/\gamma} < |\lambda_j| \tag{3.3.10}$$

при достаточно больших натуральных j. Здесь γ – такое же число, как в теореме 3.3.1.

Доказательство. Из сходимости ряда в левой части неравенства (3.3.2) и расходимости гармонического ряда следует, что

$$|\lambda_j|^{-\gamma/2} \leq \frac{1}{j}$$

при достаточно больших j. Отсюда следует неравенство (3.3.10).

Литература

[1] Байдельдинов Б.Л. Об одном аналоге первой краевой задачи для эллиптического уравнения порядка $2m$ со степенным вырождением на границе // Доклады АН СССР. 1983, т. 270, №5, с.1038 – 1042.

[2] Байдельдинов Б.Л. Об аналоге первой краевой задачи для эллиптических уравнений с вырождением. Метод билинейных форм //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984, т.170, с. 3 – 11.

[3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, Наукова думка. - 1965.- 799 с.

[4] Бесов О. В. О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1983, т. 161, с. 29-47.

[5] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. - М.: Наука, 1975. – 480 с.

[6] Бесов О.В., Кадлец Я., Куфнер А. О некоторых свойствах весовых классов // ДАН СССР.-1966.-Т. 171.- №3.-С. 514-516.

[7] Бесов О. В., Кудрявцев Л.Д., Лизоркин П.И., Никольский С.М. Исследование по теории пространств дифференцируемых функций многих переменных//Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988, т.182, с.68 – 127.

[8] Бойматов К.Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах // Доклады АН СССР. 1989, т.307, №6, с.1296 – 1299.

[9] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Доклады АН СССР. 1992, т.327, №1, с. 9-5.

[10] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой // Доклады АН России, 1993, т. 330, №3, с.285 – 290.

[11] Бойматов К.Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами // Доклады АН России, 1994, т. 339, №1, с.5 – 10.

[12] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем вырожденно-эллиптических уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". Москва, 1995,Сборник тезисов, с.54 – 55.

[13] Бойматов К.Х. Граничные задачи для некоэрцитивных форм // Доклады АН РТ,1998, т. XLI, №10, с.10-16.

[14] Бойматов К.Х., Исхоков С.А. О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой //Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1997, т.214, с.107-134.

[15] Бойматов К.Х., Исхоков С.А. О собственных значениях и собственных функциях матричных дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Вестник Хорогского Университета. Естественные науки, 2000, №2, с.13 – 24.

[16] Вашарин А.А. Граничные свойства функций касса $W^1_{2,\alpha}$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики // Известия АН СССР. Серия математики.-1959.-Т.23, №2.- с. 421-454.

[17] Вашарин А.А., Лизоркин П.И. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе // Докл. АН СССР.-1961.-Т. 137, №5.- с. 1015-1018.

[18] Глушко В.П., Савченко Ю.Б. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математический анализ. -1985.-Т. 23. с. 125-218.

[19] Гохберг И.Ц, Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.- М.: Наука.- 1965.- 448 с.

[20] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами // Доклады Академии наук (Россия), 2003, т. 392, №5, стр. 606-609

[21] Исхоков С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1995, т. 31, №4, стр. 641-653.

[22] Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Доклады Академии наук (Россия), 1993, т. 330, №4, стр. 420-423.

[23] Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Доклады Академии наук (Россия), 1995, т. 342, №1, стр. 20-22.

[24] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Доклады Академии наук (Россия), 1995, т. 345, №2, стр. 164-167.

[25] Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Математические заметки. 2010. Т. 87. №2. С. 201 – 216.

[26] Исхоков С.А., Сивцева Г.И. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора, вырождающегося на многообразиях различных измерений // Математические заметки ЯГУ. 1999, т. 6, №2, стр. 28-41.

[27] Исхоков С.А., Кужмуратов А.Я. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов // Доклады Академии наук (Россия), 2005, Том 403, №2, стр. 165-168.

[28] Исхоков С.А., Кужмуратов А.Я. Об одной вариационной задаче для эллиптического оператора, вырождающегося на границе ограниченной области // В сб.: Тезисы докладов IV Международной конференции по мат. моделированию. Якутск, 27-31.07.2004, стр. 19-20.

[29] Исхоков С.А., Кужмуратов А.Я. Априорная оценка решений однородной задачи Дирихле для общих эллиптических уравнений с вырождением // Материалы международной конференции "Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики", посвященной 70-летию академика АН РТ Усманова З.Д., Душанбе 24-25 августа 2007 г., с. 43-44.

[30] Исхоков С.А., Куджмуродов А.Ё. О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в дивергентной форме// Доклады АН Республики Таджикистан, 2008, т. 51, №12, с.802-809.

[31] Исхоков С.А., Тарасова Г.И. Обобщенная задача Дирихле для эллиптических уравнений, вырождающихся на неограниченных многообразиях // Вестник Новосибирского Госуниверситета. Серия:Математика, механика, информатика, 2006, том. 6, вып. 4, с. 43-49.

[32] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. М.: Наука, 1976, 544 с.

[33] Кондрашов В. И. Об одной оценке для семейств функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам // ДАН СССР.-1938.-Т. 18.- №4-5.-С. 253-254.

[34] Куджмуродов А.Ё. Об одной априорной оценке решений однородной задачи Дирихле для эллиптических уравнений в дивергентной форме // Доклады АН Республики Таджикистан, 2007, т.50, №7, с. 573-579.

[35] Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1959, т. 55, с. 1-182.

[36] Кудрявцев Л.Д. Теоремы вложения для классов функций, определенных на неограниченных областях // Доклады АН СССР.-1963.-Т. 153, №2.-С. 530-532.

[37] Кудрявцев Л.Д. О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом // Дифференциальные уравнения. 1983, т. 19, №10, стр. 1723-1740.

[38] Кудрявцев Л.Д. О существование и единственности решений вариационных задач // Доклады АН СССР.-1988.-Т. 298, №5.-С. 1055-1060.

[39] Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундаментальные направления.-1988.-Т. 26. с. 5-157.

[40] Левендорский С.З., Панеях Б.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения и их краевые задачи // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. -1990.-Т. 63. с. 131-200.

[41] Лизоркин П.И. К тории вырождающихся эллиптических уравнений //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985, т.172, с. 235 – 271.

[42] Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. О гладкости решения первой краевой задачи для одного модельного вырождающегося эллиптического оператора второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1986, т.22, №11, с.1945 – 1951.

[43] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981, т.157, с.90 – 118.

[44] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983, т.161, с.157 – 183.

[45] Лизоркин П.И., Отелбаев М.О. Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами // Ч.I., Математический сборник, 1979, т. 108, №3, с.358 – 373; Ч.II., Математический сборник, 1980, т. 112, №5, с.56 – 85.

[46] Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора // Дифференциальные уравнения, 1988, т.24, №3, с.455 – 464.

[47] Мирошин Н.В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. некоторые спектральные свойства // Дифференциальные уравнения, 1976, т.12, №6, с.1099 – 1111.

[48] Мирошин Н.В. Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1979, т.150, с. 198 – 211.

[49] Мирошин Н.В. Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора //Изв. Вузов. Математика. 1988, №8, с.47 – 55.

[50] Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением //Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1992, т.194, с. 179 – 195.

[51] Никольский С.М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных //Успехи мат. наук. -1961-Т.16-№5-С.63-114.

[52] Никольский С.М. Приближений функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977, 455 с.

[53] Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.И. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.//Известия Вузов. Математика. 1988, №8, с.4 – 30.

[54] Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математические анализ. -1971.-Т. . с. 7-252.

[55] Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. - М.: Наука.- 1966.- 292 с.

[56] Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск.-1976.-144с.

[57] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: Мир.- 1980.- 664 с.

[58] Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир. 1986г. 448 стр.

[59] Треноги В.А. Функциональный анализ.- М.: Наука.- 1980.- 497 с.

[60] Успенский С.В., Демиденко Г.В., Перепелкин В.Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск. Наука.-1984.-224с.

[61] Burenkov V.I. Sobolev spaces on domains. Stuttgart. B G Teubner. 1998.

[62] Iskhokov S.A. Existence and uniqueness of solutions for variational Dirichlet problems of a nonlinear degenerate differential equation.// Математические заметки ЯГУ. 2008. - т.15. - Вып. 1. - С. 21 – 38.

[63] Lax P.D., Milgram A.N. Parabolic equations, Contributions to the theory of partial differential equations.// Annals of math. studies, Princeton, 1954, v. 33, 167 – 190.

[64] Meyer R.D. Some embedding theorems for generalized Sobolev spaces and applications to degenerate elliptic differential operators. // Journal of Math. and Mech. 1967, v.16, №7, 739 – 760.

[65] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm Sup., Pisa. 1959. - vol. 13. №3. - P. 115 – 162.

[66] Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области. // Доклады АН Республики Таджикистан, 2012, т. 55, №8, с. 617-621.

[67] Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области. // Доклады АН Республики Таджикистан, 2013, т. 56, №5, с. 352-358.

[68] Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О собственных функциях и собственных значениях одного класса вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка. //Сб. докладов "Наука и инновационные разработки - северу", Мирный, 12-14 марта 2014 г. - С. 523-526.

[69] Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О собственных функциях и собственных значениях одного класса вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и её преподавания", Худжанд, 28- 29 июня 2014 г. с.176-179.

[70] Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О собственных функциях и собственных значениях одного класса вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка.// Доклады АН Республики Таджикистан, 2014, т. 57, №7, с. 551-555.

[71] Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О фредгольмовой разрешимости неоднородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел", Душанбе, 29- 30 октября 2015 г. с. 107-110.