

Отзыв
официального оппонента на диссертационную работу
Нематуллоева Олимджона Акбаровича

«О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области» представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Актуальность избранной темы.

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений и исследование свойств их решения составляют один из основных направлений в современной теории краевых задач для уравнений с частными производными. Наличие разнообразных типов поведения коэффициентов таких уравнений вблизи поверхности вырождения требует разработки различных подходов к их исследованию. Одним из таких подходов является метод, основанный на элементах функционального анализа и теории вложения весовых нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных. Этот метод разрабатывался в работах Л.Д. Кудрявцева в пятидесятых-шестидесятых годах прошлого столетия, а позже совершенствовался в работах С.М. Никольского, Х. Трибеля, Л.Д. Кудрявцева, С.В. Успенского, П.И. Лизоркина, И. Нечаса, А. Куфнера, К.Х. Бойматова и др. Как правило, в работах по этому направлению наряду с результатами по разрешимости краевых задач для уравнений с частными производными получаются и новые результаты по теории весовых функциональных пространств, которые имеют самостоятельный научный интерес.

Диссертационная работа О.А. Нематуллоева посвящена исследованию разрешимости и изучению спектральных свойств вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка в ограниченной области с измеримыми коэффициентами и, несомненно, относится к важному и актуальному направлению теории граничных задач для уравнений с частными производными.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации.

Все теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и неравенства, полностью обоснованы.

Достоверность и новизна полученных результатов.

Полученные в диссертации результаты достоверны, являются новыми и дополняют исследования С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина, К.Х. Бойматова, С.А. Искокова. По сравнению с ранее опубликованными научными результатами по исследуемым в диссертации вопросам О.А. Нематуллоеву удалось существенно ослабить условия на гладкость коэффициентов уравнений и условия эллиптичности.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов.

Основные результаты диссертации имеют важное значение для дальнейшего развития теории граничных задач для уравнений с частными производными и спектральной теории дифференциальных операторов. Они могут быть использованы специалистами Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Института математики им. С.Л. Соболева СО

РАН, Воронежского государственного университета, Института математики им. А.Д. Джурараева АН Республики Таджикистан, Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и других институтов и университетов.

Оценка содержания диссертации, ее завершенность.

Работа состоит из введения и трех глав. Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются основные цели работы и излагаются основные полученные автором результаты. Первая глава диссертации состоит из трех параграфов. В первом параграфе приводятся определения основных функциональных пространств со степенным весом и сформулированы для них основные известные теоремы вложения, теоремы о замыкании класса финитных бесконечно дифференцируемых функций в этих пространствах, прямая и обратная теоремы о следах функций из этих пространств. Во втором параграфе первой главы доказаны некоторые весовые интегральные неравенства для оценки норм произведения производных двух функций. Эти неравенства применяются в третьем параграфе первой главы, основным результатом которого является аналог неравенства Гординга для эллиптических операторов высокого порядка в произвольной ограниченной области со степенным вырождением на границе.

Во второй главе диссертации, которая состоит из двух параграфов, исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений. В первом параграфе рассматривается случай однородных граничных условий, а во втором параграфе - случай неоднородных граничных условий. Применение аналога неравенства Гординга из первой главы позволили автору ослабить традиционные условия на гладкость коэффициентов и условия эллиптичности. В обоих параграфах второй главы проводятся дальнейшие уточнения основных результатов, выделяются случаи, когда в зависимости от параметра вырождения и от гладкости границы области граничные условия задаются в явном виде.

Третья глава диссертации состоит из трех параграфов. В ней в основном исследуется фредгольмова разрешимость обобщенной задачи на собственные значения для эллиптических операторов высокого порядка в ограниченной области со степенным вырождением на границе и изучается асимптотика спектра таких операторов. В первом параграфе рассматривается случай однородных граничных условий. Случай неоднородных граничных условий рассматривается во втором параграфе и в третьем параграфе изучается асимптотика собственных значений вырождающихся эллиптических операторов.

Диссертация О.А. Нематуллоева является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой.

Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования.

Достоинствами диссертации являются следующие полученные в ней результаты:

- Доказаны теоремы об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле в случаях однородных и неоднородных граничных условий для эллиптических уравнений высшего порядка в произвольной ограниченной области, когда коэффициенты имеют степенное вырождение на границе и принадлежать некоторым весовым L_p -пространствам;
- Найдены достаточные условия фредгольмовой разрешимости обобщенной задачи на собственные значения для вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка в ограниченной области с суммируемыми коэффициентами;
- Получена оценка скорости роста собственных значений эллиптических операторов в

ограниченной области со степенным вырождением на границе.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, но в них имеется ряд пробелов и опечаток:

1. По моему мнению, обзор результатов по исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений следует дополнить работами зарубежных авторов, а также современными работами, отличными от работ сотрудников Института математики АН РТ. Это бы еще больше подтвердило актуальность диссертации.

2. Одним из основных достижений диссертации является ослабление условия 2.1.5 на коэффициенты дифференциального оператора (условия I Теоремы 1.3.1 и Теоремы 2.1.1). Поэтому в тексте диссертации следовало бы показать, как из условия 2.1.5 получается условие I Теоремы 2.1.1. Кроме того, следовало бы пояснить (например, во Введении), к каким сложностям при доказательстве разрешимости задачи D_λ приводит ослабление условия 2.1.5. Эти же замечания касаются условия 2.2.4 и условия I Теоремы 2.2.1.

3. В автореферате одним символом $B[u, v]$ обозначены разные полуторалинейные формы (см. формулы (10) и (14)).

4. Во введении сказано, что Следствие 3.3.1 является уточнением асимптотической формулы Теоремы 3.3.1. На самом деле это не так. Следствие 3.3.1 является лишь возможной (но не точной), оценкой скорости роста собственных значений λ_j .

5. В формулировке Теоремы 3.1.1 автор использует параметр ε – «достаточно малое положительное число». Насколько малое? Зависит ли ε от параметров задачи?

6. В тексте диссертации имеются опечатки и грамматические неточности (см., например, стр. 14, 16, 41, 60, 69, 109). Часто вместо символа \leq («меньше или равно») автор используется символ \ll («много меньше») (см. стр. 20, 72, 87 и др.).

Отметим, что указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.

Автореферат соответствует требованиям ВАК МОН РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011.

Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ не в полной мере.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным "Положением о присуждении ученых степеней" по пунктам 10, 11 и 14.

Диссертация О.А. Нематуллоева соответствует критериям, установленным "Положением о присуждении ученых степеней" по пунктам 10, 11 и 14:

(П. 10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения по теории граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствуют о личном вкладе автора диссертации в теорию уравнений с частными производными. Полученные результаты являются развитием других известных работ как в направлении расширения классов уравнений так и уточнения соответствующих оценок;

(П. 11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в шести научных работах, три из которых входят в перечень ВАК МОН РФ (на момент опубликования);

(П. 14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Диссертация Нематуллоева Олимджона Акбаровича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории уравнений с частными производными, что соответствует требованиям П.9 Положения о присуждения ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Рудой Евгений Михайлович,

доктор физико-математических наук,

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, 630090, Российская федерация, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15

телефон: (383)333-16-12,

E-mail: rem@hydro.nsc.ru

ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук,

Заместитель директора по научной работе

Е.М. Рудой

