На правах рукописи

Сангмамадов Давлатмамад Сайфович

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

Работа выполнена в Таджикском государственном университете коммерции

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Байзоев Саттор,**
доктор физико-математических наук, ФГБОУ Сибайский институт, филиал ВПО «Башкирский государственный университет», профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,
кандидат физико-математических наук, доцент, Таджикский национальный университет, доцент кафедры математического анализа и теории функций

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова

Защита состоится *10 апреля 2015 г.* в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 047.007.02, при Институте математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул.Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А.Джураева, Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан "___" ____________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02
доктор физико-математических наук Каримов **У.Х. Каримов**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Среди оптимизационных задач численного анализа одной из наиболее важных с практической точки зрения является задача нахождения наилучших квадратурных формул на заданном классе функций. Указанная задача была сформулирована А.Н.Колмогоровым, а первые результаты были получены С.М.Никольским в пятидесятых годах прошлого столетия. Несколько раньше в случае фиксированных узлов аналогичная задача была решена А.Сардом. В дальнейшем теория построения наилучших квадратурных формул стала важным разделом современной вычислительной математики. Для соболевских классов функций с ограниченной старшей производной в пространстве $L_p[a,b], 1 \le p \le \infty$ задача нахождения наилучших квадратурных формул полностью решена в работах А.А.Женсыкбаева и Б.Д.Боянова. Существенный вклад в решение указанной задачи для других классов функций также внесли К.П.Корнейчук и его ученики В.П.Моторный, Н.Е.Лушпай, А.А.Лигун, В.Ф.Бабенко, а также К.И.Осколков, М.И.Левин, Ю.Г.Гиршович, М.Чахкиев, Нгуен Тхи Хоа и другие математики. Все полученные результаты подытожены Н.П.Корнейчуком в расширенном добавлении к монографии С.М.Никольского "Квадратурные формулы" – М.:Наука, 1988 г. В добавлении Корнейчука, в частности, отмечается, что хотя теория наилучших квадратурных формул получила значительное развитие, в ней остаётся ряд нерешенных проблем. К их числу относятся задачи нахождения наилучших весовых квадратурных формул, построения наилучших квадратурных формул для сингулярных и криволинейных интегралов.

Частично этот пробел восполняется в данной работе.

В первой главе диссертации рассматривается квадратурная формула

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f), \tag{1}$$

в которой весовая функция $q(t) \ge 0$ на отрезке $[a,b]$ интегрируема (может быть, в несобственном смысле) по Риману, $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ – вектор коэффициентов, $T = \{t_k : a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \le b\}$ – вектор узлов, а $R_n(f) := R_n(f; q; P, T)$ – погрешность формулы на функции $f(t)$.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(t)\}$, заданных и определённых на конечном или бесконечном отрезке $[a,b]$, то через

$$R_n(\mathfrak{M}; q; P, T) = \sup\left\{|R_n(f; q; P, T)| : \ f \in \mathfrak{M}\right\} \tag{2}$$

обозначим погрешность формулы на классе $\mathfrak{M}$. Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = \inf\left\{R_n(\mathfrak{M}; q; P, T) : (P, T) \subset \mathcal{A}\right\}, \tag{3}$$

где $\mathcal{A}$ – множество векторов узлов и коэффициентов, для которых квадратурная формула (1) имеет смысл. Если существует вектор (P^0, T^0) узлов и коэффициентов, для которого

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = R_n(\mathfrak{M}; q; P^0, T^0),$$

то квадратурная формула (1) называется *наилучшей* или *оптимальной* на классе $\mathfrak{M}$, а вектор (P^0, T^0) называется *наилучшим вектором коэффициентов и узлов* квадратурной формулы (1).

Во второй главе диссертации рассматривается задача о приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода в форме линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)dS = \sum_{k=1}^{n} p_k f(M_k) + R_n(f, \Gamma), \tag{4}$$

где $f(M) = f(x, y)$, $M_k \in \Gamma, k = \overline{1, N}$. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k f(M_k)$, состоящую из линейной комбинации конечного числа значений подынтегральной функции, назовем квадратурной суммой, а $P = \{p_k\}_{k=1}^N$, $M = \{M_k\}_{k=1}^N$ – векторами коэффициентов и узлов, $R_N(f; \Gamma; P, M)$ – погрешность формулы (4) на функцию f, определенную вдоль кривой Γ.

Сформулируем задачу нахождения наилучших квадратурных формул в смысле С.М.Никольского для криволинейного интеграла первого рода, когда кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(s),\ y = y(s),\quad 0 \le s \le L. \tag{5}$$

В этом случае функция $f(x, y) := f(x(s), y(s))$ и квадратурная формула (4) при помощи разбиения отрезка $[0, L]$ точками $0 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_{N-1} < s_N \le L$ запишется в виде

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(f; \Gamma; P, S) \tag{6}$$

где $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ и $S = \{s_k\}_{k=1}^{N}$ – векторы коэффициентов и узлов, $R_N(f;\Gamma;P,S)$ – погрешность формулы.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, определенных в точках кривой Γ с параметрическими уравнениями (5) и интегрируемых как сложная функция $F(s) := f(x(s),y(s))$ параметра $s \in [0,L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности на всем классе $\mathfrak{M}$ на заданной кривой Γ, примем величину

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S) = \sup\left\{|R_N(f;\Gamma;P,S)| : \ f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{7}$$

Пусть $\mathfrak{N}_Q(L)$ – класс плоских спрямляемых кривых $\{\Gamma\}$ с непрерывной кривизной, расположенных в области $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le L^2\}$, длина которых равна L. Величина

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S) = \sup\left\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S) : \ \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\right\} \tag{8}$$

характеризует наибольшую погрешность квадратурной формулы (6) на классе функций $\mathfrak{M}$ и классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Если $\mathcal{A}$ – множество всевозможных векторов коэффициентов и узлов (P,S) формулы (6), то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S) : \ (P,S) \subset \mathcal{A}\right\}. \tag{9}$$

Если существует вектор (P^0,S^0), для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = R_N\left(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P^0,S^0\right),$$

то квадратурная формула (6) называется наилучшей на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, а (P^0,S^0) – наилучшим вектором коэффициентов и узлов.

Цель работы

1. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций на отрезке и на положительной полуоси.

2. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

3. Найти точную оценку погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольников и трапеций для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классах функций $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ и классе кривых $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$.

4. Найти наилучшие квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ и классе кривых, заданных модулями гладкости.

5. Найти наилучшие квадратурные формулы вида Маркова для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа для классов функций, задаваемых различными расстояниями, и классов кривых, задаваемых модулями непрерывности.

Метод исследования. В работе используются современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания, метод Корнейчука оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований

- Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций малой гладкости на конечном отрезке и на положительной полуоси.

- Найдены наилучшие квадратурные формулы для классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

- Найдены точные оценки погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольников и трапеций для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ и классе кривых $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$.

- Найдены наилучшие квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ и классах кривых, определяемых модулями гладкости.

- Найдены наилучшие квадратурные формулы вида Маркова для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа для классов функций, задаваемых различными расстояниями, и классов кривых, задаваемых модулями непрерывности.

Практическая ценность. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты первой главы могут быть использованы при численном решении сингулярных интегральных уравнений и оптимизации погрешности их решений на классах функций малой гладкости. Результаты второй главы могут быть использованы при приближенном вычислении поверхностных интегралов первого типа.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на ежегодных конференциях Хорогского госуниверситета им. М.Назаршоева (г.Хорог, 2004-2010 гг), на международной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами"(г.Душанбе, 25-28 октября 2003 г.), на республиканской научной конференции „Комплексный анализ и неклассические системы дифференциальных уравнений"(г.Душанбе, 16 октября 2007 г.), на международной конференции „Сингулярные дифференциальные уравнения и сингулярный анализ"(г.Душанбе, 29-30 мая 2008 г.), на семинарах по вопросам теории приближения функций в Институте математики АН Республики Таджикистан, руководимых академиком М.Ш.Шабозовым (г.Душанбе, 2008-2012 гг.), на международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа"(г.Душанбе, 23-24 июня 2010 г.), на международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложения"(г.Душанбе, 28-30 июня 2011 г.), на международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", (г.Душанбе, 29-30 июня 2012 г.), на международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (г.Худжанд, 28-29 июня 2014 г.)

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты, полученные автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10]. В совместных работах [1,6,8], М.Ш.Шабозову принадлежит постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 78 наименований, занимает 80 страниц машинописного текста и набрана на LATEX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Приводим краткое содержание диссертации с указанием основных результатов. Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты работы.

Всюду далее приняты следующие обозначения:
$W^{(r)}H^{\omega}[a,b]$ $(r = 0,1,2,\cdots;\ W^{(0)}H^{\omega}[a,b] = H^{\omega}[a,b])$ – множество функций $f(t) \in C^{(r-1)}[a,b]\,(r \in \mathbb{N})$, у которых существует кусочно-непрерывная производная r-го порядка $f^{(r)}(t)$, удовлетворяющая условию

$$\left|f^{(r)}(t^{''}) - f^{(r)}(t^{'})\right| \le \omega(|t^{'} - t^{''}|),\ t^{'}, t^{''} \in [a,b],$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности.

Если $\omega(t) = t^{\alpha}$ $(0 < \alpha \le 1)$, $H^{\omega} \equiv H^{\alpha}[a,b]$ – класс Гёльдера порядка α с константой Гёльдера, равной 1, а в случае $\alpha = 1$ – общеизвестный класс Липщица:

$$H^1[a,b] = \left\{f(t) : |f(t^{'}) - f(t^{''})| \le |t^{'} - t^{''}|,\ \forall\, t^{'}, t^{''} \in [a,b]\right\},$$

$L_p[a,b]$ — класс функций $f(t)$, суммируемых со степенью $p\,(1 \le p \le \infty)$ на отрезке $[a,b]$, с нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \le 1;$$

$W^{(r)}L_p[a,b](1 \le p \le \infty;\ r = 0,1,2,\cdots; W^{(0)}L_p[a,b] = L_p[a,b])$ – класс функций $f(t)$, у которых производная $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна, $f^{(r)} \in L_p[a,b]$ удовлетворяет условию

$$\|f^{(r)}\|_p := \|f^{(r)}\|_{L_p[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \le 1.$$

В первом параграфе первой главы приводится общая постановка экстремальной задачи отыскания *наилучших* (*оптимальных*) весовых квадратурных формул в смысле С.М.Никольского, основные определения и обозначения общего характера, а также определения классов функций, для которых решаются экстремальные задачи. Во втором параграфе первой главы доказывается следующая общая

Теорема 1.2.1. *Среди всех весовых квадратурных формул вида*

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f,q),$$

задаваемых векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ *и узлов* $T = \{t_k\}_{k=1}^n (a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b)$, *наилучшей для класса* $W^{(1)}L(M;a,b)$ *является формула, у которой наилучшие узлы и коэффициенты определяются из системы равенств*

$$2\int\limits_a^{t_1^0} q(t)dt = \int\limits_{t_1^0}^{t_2^0} q(t)dt = \cdots = \int\limits_{t_{n-1}^0}^{t_n^0} q(t)dt = 2\int\limits_{t_n^0}^{b} q(t)dt := q(T^0),$$

$$P^0 = \left\{p_k^0 : p_k^0 = q(T^0)\right\}_{k=1}^n.$$

При этом для погрешности наилучшей весовой квадратурной формулы на всем классе функций $W^{(1)}L(M;a,b)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b);q\right) = \frac{M}{2n}\int\limits_a^b q(t)dt.$$

Замечание. Теорема 1.2.1 обобщает ранее полученные результаты Ю.Г.Гиршовича[1] и М.Ш.Шабозова[2], полученные соответственно для весовых функций $q(t) = e^{-t}, [a,b] = [0,+\infty)$ и $q(t) = t^{-s},\ 0 < s \le 1,\ [a,b] = [0,1]$ для несобственных интегралов первого и второго родов. В качестве следствия из теоремы 1.2.1 вытекают следующие утверждения.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $q(t) = t^\alpha, \alpha > -1, 0 \le a < b$. *В этом случае наилучшие узлы и коэффициенты квадратурной формулы*

$$\int\limits_a^b t^\alpha f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k^0 f(t_k^0) + R_n(f;P^0,T^0) \tag{10}$$

имеют вид:

$$t_k^0 = \left[\frac{2k-1}{2n}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) + a^{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}, (k = 1,2,,...,n); \tag{11}$$

[1]Гиршович Ю.И. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале / Ю.И. Гиршович // Известия АН Эст.ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – Т.24. – №1. – С. 121-123.

[2]Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью / М.Ш. Шабозов // Укр. матем. журнал. – 1995. – Т.47. – №9. – С. 1300-1305.

$$p_k^0 = \frac{b^{\alpha+1} - \alpha^{\alpha+1}}{(\alpha+1)n}, \ (k = 1, 2, ..., n). \qquad (12)$$

При этом для оценки погрешности квадратурной формулы (10) *с узлами и коэффициентами, определяемыми равенствами* (11) *и* (12), *на всем классе* $W^{(1)}L(M; a, b)$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; a, b)\right) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{2n(\alpha+1)}M.$$

В частности, при $\alpha = 0$ *наилучшей является формула средних прямоугольников*

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) + R_n(f),$$

для которой

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; a, b)\right) = \frac{b-a}{2n}M.$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* $q(t) = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}, \ 0 \le a < t \le b < \pi$. *Тогда наилучшие узлы и коэффициенты квадратурной формулы*

$$\int_a^b f(t)\operatorname{tg}\frac{t}{2}dt = \sum_{k=1}^{n} p_k^0 f(t_k) + R_n\left(f; \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$$

имеют вид

$$t_k^0 = 2\arccos\left[\left(\cos\frac{a}{2}\right)^{1-\frac{2k-1}{2n}} \cdot \left(\cos\frac{b}{2}\right)^{\frac{2k-1}{2n}}\right], \ (k = 1, 2, ..., n),$$

$$p_k^0 = \frac{2}{n}\ln\frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)} \ (k = 1, 2, ..., n).$$

Для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $W^{(1)}L(M; a, b)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; a, b); \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) = \frac{M}{n}\ln\frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)}.$$

В третьем параграфе первой главы рассматривается применение общей теоремы 1.2.1 к вопросу о приближенном вычислении двойных интегралов

вида
$$\mathcal{J}(f)=\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy,\quad S=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}. \tag{13}$$

Интеграл (13) запишем в виде одномерного интеграла
$$\mathcal{J}(f)=\int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr,\quad \mathcal{J}_1(r)=\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)dt. \tag{14}$$

Применив теорему 1.2.2 при $\alpha=1$ к вычислению интеграла $\mathcal{J}(f)$, приходим к следующему результату

Теорема 1.3.1 *Среди всех квадратурных формул вида*
$$\mathcal{J}(f)=\int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr=\sum_{k=1}^{N} p_k\mathcal{J}(r_k)+R_N(f;r)$$
$$(0\le r_1<r_2<\cdots<r_{n-1}<r_n\le 1)$$
наилучшей на классе функций $W^{(1)}L(M;0,1)$ *является квадратурная формула*
$$\int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{2k-1}{2n}}\right)+R_n(f;r). \tag{15}$$
При этом для оценки погрешности (15) *на всем классе функций справедлива оценка*
$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;0,1)\right)=\frac{M}{4n}.$$

В качестве второго применения теоремы 1.2.2 рассмотрим вопрос приближенного вычисления интеграла Лиувилля вида
$$\mathcal{J}(f)=\int\int\limits_{(D)}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n,$$
по области $D=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\le 1,\ x_i>0, i=1,2,\cdots,n\right\}$.

Если подынтегральная функция $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ – непрерывная в симплексе $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\le 1$ $(x_i\ge 0, i=\overline{1,n})$ функция, $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i-1=\alpha,\ \alpha>-1$, то
$$\mathcal{J}(f)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(p_i)}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\int\limits_0^1 t^\alpha f(t)dt,\ \alpha>-1, \tag{16}$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера. Применяя теорему 1.2.2 к интегралу (16), находим наилучшие узлы и коэффициенты

$$t_k = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad p_k = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{\Gamma(\alpha+1)n.}, \; k = 1, 2, \cdots, n.$$

При этом для погрешности наилучшей квадратурной формулы верна оценка

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; 0, 1); t^\alpha\right) = \frac{M\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{2\Gamma(\alpha+1)n}.$$

В четвертом параграфе первой главы исследуется вопрос оптимизации квадратурной формулы (1) на классе $H^\omega[a, b]$. Г.К.Лебедь[3] доказал, что среди всех квадратурных формул вида (1) с суммируемой положительной весовой функцией $q(t)$ наилучшим является вектор узлов $T^0 = \{t_k^0\}_{k=0}^n$, который обращает в минимум выражение

$$\mathfrak{L}(t_0, t_1, \cdots, t_n) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} q(t)dt,$$

с коэффициентами

$$p_k^0 = \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)dt,$$

где $x_0^0 = a, \; x_k^0 = (t_{k-1}^0 + t_k^0)/2, k = 1, 2, \cdots, n; \; x_{n+1}^0 = b$, и наилучшей оценкой остатка, равной

$$\mathcal{E}_n(H^\omega[a, b]; q) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)\omega(|t - t_k^0|)dt.$$

Положим

$$q_1(t) = \int\limits_{a}^{t} q(u)du, \; a \le t \le b.$$

[3]Лебедь Г.К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций / Г.К. Лебедь // Мат. заметки. – 1968. – Т.3. – №5. – С. 577-586.

Теорема 1.4.1. *Если заданным модулем непрерывности $\omega(t)$ является непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция, то для погрешности наилучшей квадратурной формулы с суммируемым весом $q(t) > 0$, $t \in [a,b]$ на всем классе $H^\omega[a,b]$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_n(q; H^\omega[a,b]) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{x_k^0}^{t_k^0} q_1(t)\omega'(t_k^0 - t)dt - \int\limits_{t_{k-1}^0}^{x_k^0} q_1(t)\omega'(t_k^0 - t)dt \right\}. \qquad (17)$$

В частности, если $\omega(t) = Mt,\ M > 0$, то для класса Липщица с константой M справедлива оценка

$$\mathcal{E}_n(q; H^1[a,b]) =$$

$$= M\left\{ 2\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{a}^{t_k^0} q_1(t)dt - 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{a}^{(t_{k-1}^0 + t_k^0)/2} q_1(t)dt + \int\limits_{a}^{b} q_1(t)dt \right\}. \qquad (18)$$

Отметим, что равенство (18) ранее непосредственным вычислением было доказано Т.Н.Бусаровой[4]. Рассмотрим одно применение теоремы 1.4.1. Положим $[a,b] = [0,+\infty),\ q(t) = e^{-t}$. Тогда из теоремы 1.4.1 вытекает следующая

Теорема 1.4.2. *Среди квадратурных формул вида Маркова*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} f(t)dt = p_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(1) + R_n(f; e^{-t})$$

наилучшей для класса Липщица $H^1[0,+\infty)$ является формула, узлы и коэффициенты которой определяются равенствами

$$t_k^0 = \ln\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)\frac{k}{n}\right]^{-2},\ k = \overline{1, n-1},$$

$$p_0^0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)\cdot\frac{1}{n},\ p_n^0 = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

$$p_k^0 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left[\frac{1}{n} - \frac{k}{n^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right],\ k = \overline{1, n-1}.$$

[4] Бусарова Т.Н. – Оптимизация некоторых весовых квадратурных формул / Т.Н. Бусарова // В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск. ДГУ. – 1980. – С. 17-21.

При этом погрешность на всем классе $H^1[0,+\infty)$ *равна*

$$\mathcal{E}_n\left(H^1[0,+\infty), e^{-t}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Во второй главе диссертации изучается вопрос об отыскании *наилучших* квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа на некоторых классах функций и кривых.

В первом параграфе второй главы приводится постановка задачи отыскания наилучших квадратурных формул вида (6) для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода в смысле С.М.Никольского.

Во втором параграфе рассматривается задача о точности оценки погрешности на заданном классе функций усложненной квадратурной формулы прямоугольника

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\right) + R_{\Pi}(f;\Gamma) \quad (19)$$

и трапеции

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right)ds =$$

$$= \frac{L}{N}\left\{\frac{f\left(x(0), y(0)\right) + f(x(L), y(L))}{2} + \sum_{k=0}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\right\} + R_T(f;\Gamma) \quad (20)$$

на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности.

Обозначим через $H^\omega[0,L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C_{[0,L]}$ для любых двух точек $t', t'' \in [0,L]$, удовлетворяющих условию $|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t'' - t'|)$, где $\omega(t)$ – заданный на отрезке $[0,L]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная функция, в нуле равная нулю.

Через $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2} := \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим класс кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, параметрические уравнения которых удовлетворяют условиям $x(s) \in H^{\omega_1}[0,L]$, $y(s) \in H^{\omega_2}[0,L]$, а через $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ обозначим класс функций $f(M) = f(x,y)$ определенных в области $Q = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le L^2\right\}$ и для любых двух точек $M' = M(x', y'), M'' = M(x'', y'') \in \Gamma \subset Q$ удовлетворяющих условию

$$\left|f(M') - f(M'')\right| \le \rho(M', M'') := \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}. \quad (21)$$

Таким образом, если $M^{'}, M^{''} \in \Gamma$, то неравенство (21) для $\Gamma \in H^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ означает, что

$$\left| f\left(x(s^{'}), y(s^{'})\right) - f\left(x(s^{''}), y(s^{''})\right) \right| \le$$

$$\le \sqrt{\left(x(s'') - x(s')\right)^2 + \left(y(s'') - y(s')\right)^2} \le \sqrt{\omega_1^2\left(|s'' - s'|\right) + \omega_2^2\left(|s'' - s'|\right)}.$$

Дадим теперь оценку погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольника с фиксированным вектором коэффициентов $P^0 = \{p_k^0 = L/N\}_{k=1}^N$ и вектором узлов $S^0 = \{s_k^0 : s_k^0 = \frac{2k-1}{2N} L\}_{k=1}^N$ и формул трапеций с вектором коэффициентов $P^* = \{p_0^* : p_0^* = L/N, k = 1, N-1; p_0 = p_N = L/(2N)\}$ и вектором узлов $S^* = \{s_k^* = kL/N\}_{k=0}^N$.

Теорема 2.2.1. *Для погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольников* (19) *и трапеций* (20) *на классах функций* $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *справедливы следующие точные оценки*

$$R_\Pi\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds,$$

$$R_T\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds.$$

Третий параграф второй главы посвящен отысканию оптимальных квадратурных формул вида (6) для класса функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности второго порядка (модулями гладкости). Пусть задан класс W функций $f(M) = f(x(s), y(s))$, определенных на отрезке $[0, L]$ и для любых двух точек $s^{'}, s^{''} \in [0, L]$ удовлетворяющих условию

$$\left| f\left(x(s^{'}), y(s^{'})\right) + f\left(x(s^{''}), y(s^{''})\right) - 2f\left(x\left(\frac{s^{'} + s^{''}}{2}\right), y\left(\frac{s^{'} + s^{''}}{2}\right)\right) \right| \le$$

$$\le \left| x(s^{'}) + x(s^{''}) - 2x\left(\frac{s^{'} + s^{''}}{2}\right) \right| + \left| y(s^{'}) + y(s^{''}) - 2y\left(\frac{s^{'} + s^{''}}{2}\right) \right|.$$

Через $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим класс кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, параметрические уравнения которых удовлетворяют условию

$$\left| x(s^{'}) + x(s^{''}) - 2x\left(\frac{s^{'} + s^{''}}{2}\right) \right| \le 2\omega_1\left(\frac{|s^{'} - s^{''}|}{2}\right),$$

$$\left| y(s^{'}) + y(s^{''}) - 2y\left(\frac{s^{'}+s^{''}}{2}\right) \right| \leq 2\omega_2\left(\frac{|s^{'}-s^{''}|}{2}\right).$$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.3.1. *Среди квадратурных формул вида* (11) *наилучшей для классов функций* W *и кривых* $H_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) + R_N(f;\Gamma), \quad (22)$$

где $x = x(s), y = y(s)$ *– параметрические уравнения кривой* Γ*,* L *– ее длина. При этом точная оценка погрешности формулы* (22) *на классах функций и кривых равна*

$$\mathcal{E}_N\left(W; H_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \left[\omega_1(t) + \omega_2(t)\right] dt.$$

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.3.1 *для погрешности квадратурной формулы* (22) *при* $\omega_1(t) = M_1 t^{\alpha}$*,* $\omega_2 = M_2 t^{\beta}$*,* $M_1, M_2 > 0$*,* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *и* $H_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L] \equiv Z_2^{\alpha,\beta}[0,L]$ *– класс Зигмунда порядка* (α,β) *с константами* M_1 *и* M_2 *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(W; Z^{(\alpha,\beta)}[0,L]\right) = \frac{M_1 L}{\alpha+1}\cdot\left(\frac{L}{2N}\right)^{\alpha} + \frac{M_2 L}{\beta+1}\cdot\left(\frac{L}{2N}\right)^{\beta}.$$

В четвертом параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача об отыскании оптимальных квадратурных формул типа Маркова (с закрепленными узлами в концах отрезка интегрирования) следующего вида

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds =$$

$$= p_0 f\left(x(0), y(0)\right) + \sum_{k=1}^{N-1} p_k f\left(x(s_k), y(s_k)\right) + p_N f\left(x(L), y(L)\right) + R_N(f;\Gamma) \quad (23)$$

с произвольными векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^{N}$ и векторами узлов $S = \{s_k\}_{k=0}^{N}$ $(0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N = L)$.

Если $M^{'} = M(x^{'}, y^{'}) \in \Gamma \subset Q$, $M^{''} = M(x^{''}, y^{''}) \in \Gamma \subset Q$, $Q = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq L^2\}$, то введем в рассмотрение класс функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\left| f(M^{'}) - f(M^{''}) \right| \leq \rho_i(M^{'}, M^{''}),\ i = 1, 2, 3,$$

где

$$\rho_1(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} - \text{евклидово расстояние},$$

$$\rho_2(M', M'') = |x'' - x'| + |y'' - y'| - \text{хэммингово расстояние},$$

$$\rho_3(M', M'') = \max\{|x'' - x'|, |y'' - y'|\} - \text{расстояние Минковского}.$$

Если кривая $\Gamma \subset \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$, то есть параметрические уравнения кривой Γ удовлетворяют условиям $x(s) \in H^{\omega_1}[0, L], y(s) \in H^{\omega_2}[0, L]$, то для любого $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_i}(Q)$ и любых $s', s'' \in [0, L]$ соответственно при $i = 1, 2, 3$ выполняются неравенства

$$\left|f(M') - f(M'')\right| \le \rho_1(M', M'') \le \sqrt{\omega_1^2(|s' - s''|) + \omega_2^2(|s' - s''|)},$$

$$\left|f(M') - f(M'')\right| \le \rho_2(M', M'') \le \omega_1(|s' - s''|) + \omega_2(|s' - s''|),$$

$$\left|f(M') - f(M'')\right| \le \rho_3(M', M'') \le \max\Big\{\omega_1(|s' - s''|), \omega_2(|s' - s''|)\Big\}.$$

Основными результатами четвертого параграфа второй главы являются следующие утверждения.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (23) *с произвольными векторами коэффициентов* $P = \{p_k\}_{k=0}^N$, *и узлов* $S = \{s_k\}_{k=0}^N$ *наилучшей для классов функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i} (i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ *является формула типа Маркова*

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \frac{L}{N}\Bigg\{\left[f(x(0), y(0)) + f(x(L), y(L))\right]/2+$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_N(f; \Gamma). \qquad (24)$$

При этом для оценки погрешности квадратурной формулы (24) *на указанных классах функций и кривых справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds, \qquad (25)$$

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} (\omega_1(s)+\omega_2(s))\,ds, \tag{26}$$

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \max\{\omega_1(s),\omega_2(s)\}\,ds. \tag{27}$$

Теорема 2.4.2 *Среди всех квадратурных формул вида* (6) *с произвольными векторами коэффициентов и узлов*

$$P = \{p_k\}_{k=1}^N,\ \ S = \{s_k:\ 0 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_N \le L\}$$

наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и класса кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int\limits_0^L f\left(x(s),\, y(s)\right) ds = \frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f). \tag{28}$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (28) *на указанных классах функций и кривых справедливы равенства* (25) – (27).

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН РТ М.Ш.Шабозову за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных и кубатурных формулах с весом для классов функций малой гладкости / М.Ш. Шабозов, Д.С. Сангмамадов // Вестник Национального университета. Серия математика. – 2004. – №1. – С. 113-123.

2. Сангмамадов Д.С. Наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода / Д.С. Сангмамадов // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №9. – С. 709-714.

3. Сангмамадов Д.С. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности / Д.С. Сангмамадов // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №10. – С. 801-806.

4. Сангмамадов Д.С. К вопросу об оценках квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функции / Д.С. Сангмамадов // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2011. – №3(144). – С. 7-13.
5. Сангмамадов Д.С. Оптимизация весовых квадратурных формул для некоторых классов функций малой гладкости / Д.С. Сангмамадов // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №12. – С. 957-962.
6. Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных формулах приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа / М.Ш. Шабозов, Д.С. Сангмамадов // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №11. – С. 847-852.

В других изданиях:

7. Сангмамадов Д.С. Приближенное вычисление двумерных сингулярных интегралов с фиксированной особенностью в круге / Д.С. Сангмамадов // Вестник Хорогского госуниверситета. – 2003. Серия 1. – №6. – С. 61-64.
8. Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных формулах для интегралов с фиксированной особенностью / М.Ш. Шабозов, Д.С. Сангмамадов // Труды международной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами, 25-28 октября 2003. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2003. – С. 22-26.
9. Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных формулах приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций, задаваемых модулями непрерывности / Д.С. Сангмамадов // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", 29-30 июня 2012. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2012. – С. 151-154.
10. Сангмамадов Д.С. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых / Д.С. Сангмамадов // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014. – Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. – С. 75-78.