Таджикский государственный университет коммерции

На правах рукописи

Сангмамадов Давлатмамад Сайфович

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

01.01.01. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель:
академик АН Республики Таджикистан,
доктор физико-математических наук,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е - 2 0 1 5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Среди наиболее важных задач численного анализа особое место занимает экстремальная задача отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получения точной оценки ее остатка. Решения этой задачи, как правило, требует привлечения глубоких фактов теории функций и функционального анализа и сопряжено с преодолением значительных трудностей. Хотя в настоящее время указанная задача решена для соболевских классов функций $W^{(r)}L_p[0,1]$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty)$ и классов функций $W^{(r)}H^\omega[a,b]$ $(r = 0, 1, 2, \cdots;)$, задаваемых модулями непрерывности, немало задач такого рода не решено для весовых интегралов, сингулярных интегралов, криволинейных интегралов, а также в многомерном случае.

Для вышеуказанных классов функций $W^{(r)}L_p$ и $W^{(r)}H^\omega$ сформулированная задача отыскания наилучших квадратурных формул решена в работах А.А.Женсыкбаева [19], Б.Д.Боянова [7] и В.А.Моторного [39]. Существенный вклад в решение задачи для различных классов функций также внесли Н.П.Корнейчук [24], А.А.Лигун [33], Н.Е.Лушпай [34-38], В.Ф.Бабенко [2-4], К.И.Осколков [45] и многие другие. Все эти результаты отмечены в добавлении Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольского [43] "Квадратурные формулы".

Задача отыскания наилучшей квадратурной формулы для заданного на отрезке $[a,b]$ класса функций $\mathfrak{M}$ формулируется следующим образом:

Пусть для вычисления интеграла

$$\mathcal{J}(f) = \int_a^b q(t)f(t)dt,$$

где $f(t) \in \mathfrak{M}$, $q(t) \ge 0$ – весовая функция, произведение которой на всех функциях класса $\mathfrak{M}$ интегрируемо на $[a, b]$, применена квадратурная формула

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f, q), \tag{0.0.1}$$

задаваемая векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ и узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$ ($a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq b$), $R_n(f; q) = R_n(f; q; T, P)$ – погрешность квадратурной формулы (0.0.1) на функцию $f \in \mathfrak{M}$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов (P, T) либо некоторое его подмножество, определяемое некоторыми ограничениями на узлы $\{t_k\}$ и коэффициенты $\{p_k\}$ (например, требованием точности формулы (0.0.1) для многочленов заданной степени).

Если $\mathfrak{M}$ некоторый класс заданных на $[a, b]$ функций, то положим

$$R_n(q; \mathfrak{M}; T, P) = \sup\left\{|R_n(q; f; T, P)| : \ f \in \mathfrak{M}\right\}, \tag{0.0.2}$$

$$\mathcal{E}_n(q; \mathfrak{M}) := \inf\left\{R_n(q; \mathfrak{M}; T, P) : \ (T, P) \in \mathcal{A}\right\}, \tag{0.0.3}$$

и укажем вектор (T^0, P^0) ($T^0 = \{t_k^0\}, P^0 = \{p_k^0\}$) из множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань, то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(q; \mathfrak{M}) = R_n(q; \mathfrak{M}; T^0, P^0).$$

Квадратурная формула (0.0.1) с узлами $\{t_k^0\}$ и коэффициентами $\{p_k^0\}$ дает наименьшую на всем классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди формул, задаваемых множеством $\mathcal{A}$ векторов (T, P), и в этом смысле является *наилучшей* (или *оптимальной*) для класса $\mathfrak{M}$ в смысле С.М.Никольского.

Поскольку верхняя грань (0.0.2) в равной мере при заданной весовой функции $q(t)$ зависит как от выбора вектора коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, так и от вектора узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$, то в теории квадратур возникает задача построения квадратурных формул вида (0.0.1), имеющих на данном классе функций $\mathfrak{M}$ наименьшую оценку остатка при фиксированных узлах (или при фиксированных коэффициентах), то есть требуется найти следующие величины

$$\mathcal{E}_n(q;\mathfrak{M};T) = \inf\left\{R_n(q;\mathfrak{M};T,P):\ P \subset \mathcal{A}\right\}, \tag{0.0.4}$$

$$\mathcal{E}_n(q;\mathfrak{M};P) = \inf\left\{R_n(q;\mathfrak{M};T,P):\ T \subset \mathcal{A}\right\}, \tag{0.0.5}$$

Квадратурная формула (0.0.1), для которой выполняются равенства (0.0.4) и (0.0.5), называются соответственно *наилучшей по коэффициентам* при фиксированных узлах и *наилучшей по узлам* при фиксированных коэффициентах квадратурных формул в смысле А.Сарда [58].

В первой главе диссертационной работы рассматривается экстремальная задача отыскания наилучших квадратурных формул с заданной положительной весовой функцией вида (0.0.1) для различных классов функций малой гладкости.

Во второй главе аналогичные задачи решаются для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для классов функций малой гладкости.

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 77 наименований и занимает 82 страниц машинописного текста. В диссертации применена сквозная нумерация, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Приводим краткое содержание диссертации с указанием основных результатов. Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты работы.

Всюду далее приняты следующие общепринятые обозначения:
$C[a,b]$ – множество непрерывных функций $f(t)$, заданных на отрезке $[a,b]$; $C^{(r)}[a,b]$ – множество функций $f(t)$, у которых $f^{(r)}(t) \in C[a,b]$; $W^{(r)}H^{\omega}[a,b]$ $(r = 0,1,2,\cdots;\ W^{(0)}H^{\omega}[a,b] = H^{\omega}[a,b])$ – множество функций $f(t) \in C^{(r-1)}[a,b] (r \in \mathbb{N})$, у которых существует кусочно-непрерывная производная r-го порядка $f^{(r)}(t)$, удовлетворяющая условию

$$\left| f^{(r)}(t^{''}) - f^{(r)}(t^{'}) \right| \leq \omega(|t^{'} - t^{''}|),\ t^{'}, t^{''} \in [a,b],$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности.

В случае $\omega(t) = t^{\alpha} (0 < \alpha \leq 1),\ H^{\omega} \equiv H^{\alpha}[a,b]$ – класс Гельдера порядка α с константой Гельдера, равной 1, а в случае $\alpha = 1$ – общеизвестный класс Липщица:

$$H^1[a,b] = \left\{ f(t) : |f(t^{'}) - f(t^{''})| \leq |t^{'} - t^{''}|,\ \forall\ t^{'}, t^{''} \in [a,b]. \right\}$$

$L_p[a,b]$ – класс функций $f(t)$, суммируемых со степенью $p(1 \leq p \leq \infty)$ на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq 1;$$

$W^{(r)}L_p[a,b](1 \leq p \leq \infty;\ r = 0,1,2,\cdots; W^{(0)}L_p[a,b] = L_p[a,b])$ – класс функций $f(t)$, у которых производная $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно-непрерывна, $f^{(r)}(t) \in L_p[a,b]$ и удовлетворяет условию

$$\|f^{(r)}\|_p := \|f^{(r)}\|_{L_p[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |f^{(r)}(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

В первом параграфе первой главы приводится общая постановка экстремальной задачи отыскания *наилучших* (*оптимальных*) весовых квадратурных формул в смысле С.М.Никольского [42], основные определения и обозначения общего характера, а также определения классов функций, для которых решаются указанные задачи.

Во втором параграфе первой главы доказывается следующая общая теорема

Теорема 1.2.1. *Среди всех весовых квадратурных формул вида*

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f,q),$$

задаваемых векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ *и узлов* $T = \{t_k\}_{k=1}^n (a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b)$*, наилучшей для класса* $W^{(1)}L_1(M;a,b)$ *является формула, у которой наилучшие узлы и коэффициенты определяются из цепочки равенств*

$$2\int\limits_a^{t_1^0} q(t)dt = \int\limits_{t_1^0}^{t_2^0} q(t)dt = \cdots = \int\limits_{t_{n-1}^0}^{t_n^0} q(t)dt = 2\int\limits_{t_n^0}^{b} q(t)dt := q(T^0),$$

$$P^0 = \{p_k^0 : p_k^0 = q(T^0)\}_{k=1}^n.$$

При этом для погрешности наилучшей весовой квадратурной формулы на всем классе функций $W^{(1)}L_1(M;a,b)$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_n\Big(W^{(1)}L(M;a,b) : q\Big) = \frac{M}{2n}\int\limits_a^b q(t)dt.$$

Замечание. Теорема 1.2.1 обобщает ранее полученные результаты Ю.Г.Гиршовича [16] и М.Ш.Шабозова [65], полученные соответственно для весовых функций $q(t)=e^{-t}, [a,b]=[0,+\infty)$ и $q(t)=t^{-s},\ 0<s\leq 1,\ [a,b]=[0,1]$ для несобственных интегралов первого и второго родов.

В качестве следствия из теоремы 1.2.1 вытекают следующие утверждения:

Теорема 1.2.2. *Пусть $q(t)=t^{\alpha}, \alpha>-1, 0\leq a<b$. В этом случае наилучшие узлы и коэффициенты квадратурной формулы*

$$\int\limits_a^b t^{\alpha}f(t)dt=\sum_{k=1}^{n}p_k^0 f(t_k^0)+R_n(f;P^0,T^0) \tag{0.0.6}$$

имеют вид:

$$t_k^0=\left[\frac{2k-1}{2n}(b^{\alpha+1)}-a^{\alpha+1})+a^{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}},(k=1,2,,...,n); \tag{0.0.7}$$

$$p_k^0=\frac{b^{\alpha+1}-\alpha^{\alpha+1}}{(a+1)n},\ (k=1,2,...,n). \tag{0.0.8}$$

При этом для оценки погрешности квадратурной формулы (0.0.6) с узлами и коэффициентами определяемыми равенствами (0.0.7) и (0.0.8), на всем классе $W^{(1)}L(M;a,b)$, справедливо равенство

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b)\right)=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{2n(\alpha+1)}M.$$

В частности, при $\alpha=0$ наилучшей является формула прямоугольников [5,17]

$$\int\limits_a^b f(t)dt=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)+R_n(f),$$

для которой

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b)\right)=\frac{b-a}{2n}M.$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* $q(t) = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2},\ 0 \le a < t \le b < \pi$. *Тогда наилучшие узлы и коэффициенты квадратурной формулы*

$$\int\limits_a^b f(t)\operatorname{tg}\frac{t}{2}dt = \sum_{k=1}^{n} p_k^0 f(t_k^0) + R_n\left(f; \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$$

имеют вид

$$t_k^0 = 2\arccos\left[\left(\cos\frac{a}{2}\right)^{1-\frac{2k-1}{2n}} \cdot \left(\cos\frac{b}{2}\right)^{\frac{2k-1}{2n}}\right],\ (k = 1, 2, ..., n),$$

$$p_k^0 = \frac{2}{n}\ln\frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)}\ (k = 1, 2, ..., n).$$

Для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $W^{(1)}L(M; a, b)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; a, b) : \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) = \frac{M}{n}\ln\frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)}.$$

В третьем параграфе первой главы рассматривается применение общей теоремы 1.2.1 к вопросу о приближенном вычислении двойных интегралов вида

$$\mathcal{J}(f) = \iint\limits_{(S)} f(x, y)dxdy, \quad S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}. \qquad (0.0.9)$$

Интеграл (0.0.9) запишем в виде одномерного интеграла

$$\mathcal{J}(f) = \int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr, \quad \mathcal{J}_1(r) = \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)dt. \qquad (0.0.10)$$

В равенстве (0.0.10) подынтегральная функция периодическая, а потому для вычисления интеграла $\mathcal{J}_1(r)$ целесообразно применять квадратурную формулу

$$\int\limits_0^{2\pi} g(t)dt = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + r_n(g), \qquad (0.0.11)$$

согласно которой точная оценка погрешности на классе $W^{(r)}L_p, 1 \leq p \leq \infty$ равна [43, с.210]

$$r_n\left(W^{(r)}L_p(M;0,2\pi)\right) = \frac{M}{\pi n^r} \cdot \|D_r(\cdot) + \gamma_r\|_{L_q(0,2\pi)},\ 1 \leq q \leq \infty,$$

где

$$D_r(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ku - \pi r/2)}{k^r}$$

– ядро Бернулли (многочлен Бернулли степени r).

Применив теорему 1.2.2 при $\alpha = 1$ к вычислению интеграла $\mathcal{J}(f)$, приходим к следующему результату

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\mathcal{J}(f) = \int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr = \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{J}(r_k) + R_N(f;r)$$

$$(0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} < r_n \leq 1)$$

наилучшей на классе функций $W^{(1)}L(M;0,1)$ является квадратурная формула

$$\int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{2k-1}{2n}}\right) + R_n(f;r). \tag{0.0.12}$$

При этом для оценки погрешности (0.0.12) *на всем классе функций справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;0,1)\right) = \frac{M}{4n}.$$

В качестве второго применения теоремы 1.2.2 рассмотрим вопрос приближенного вычисления интеграла Лиувилля вида

$$I(f) = \int\int_{(D)}\cdots\int f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

по области $D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\ x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n\}$.

Если подынтегральная функция $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ - непрерывная в симплексе $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\ x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ функция, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - 1 = \alpha,\ \alpha > -1$, то в курсе анализа доказывается, что

$$\mathcal{J}(f) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot \int\limits_{0}^{1} t^{\alpha} f(t) dt,\ \alpha > -1, \tag{0.0.13}$$

где $\Gamma(a)$ – гамма функция Эйлера. В этом случае наилучшая квадратурная формула для вычисления интеграла (0.0.13) имеет узлы и коэффициенты

$$t_k = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}},\quad p_k = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{\Gamma(\alpha+1)n.},\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

При этом, для погрешности наилучшей квадратурной формулы верна оценка

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)} L(M; 0, 1); t^{\alpha}\right) = \frac{M \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{2\Gamma(\alpha+1)n}.$$

В четвертом параграфе первой главы исследуется вопрос оптимизации квадратурной формулы (0.0.1) на классе $H^{\omega}[a, b]$. Известно [30], что среди всех квадратурных формул вида (0.0.1) с суммируемой положительной весовой функцией $q(t)$ наилучшим является вектор узлов

$$T^0 = \{t_k^0 : a \leq t_0^0 < t_1^0 < \cdots < t_n^0 \leq b\},$$

который обращает в минимум выражение

$$\mathcal{J}(t_0, t_1, \cdots, t_n) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} q(t) dt,$$

с коэффициентами

$$p_k^0 = \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)dt,$$

где $x_0^0 = a,\ x_k^0 = (t_{k-1}^0 + t_k^0)/2, k = 1, 2, \cdots, n;\ x_{n+1}^0 = b$, и наилучшей оценкой остатка, равной

$$\mathcal{E}_n(H^\omega[a,b]; q) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)\omega(|t - t_k^0|)dt.$$

Положим

$$q_1(t) = \int\limits_a^t q(u)du,\ a \le t \le b$$

Основным результатом четвертого параграфа является следующая

Теорема 1.4.1. *Если заданным модулем непрерывности* $\omega(t)$ *является непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[a, b]$ *функция, то для погрешности наилучшей квадратурной формулы с суммируемым весом* $q(t) > 0, t \in [a, b]$ *на всем классе* $H^\omega[a, b]$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_n(q; H^\omega[a,b]) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{x_k^0}^{t_k^0} q_1(t)\omega'(t_k^0 - t)dt - \int\limits_{t_{k-1}^0}^{x_k^0} q_1(t)\omega'(t_k^0 - t)dt \right\}. \quad (0.0.14)$$

В частности, если $\omega(t) = Mt,\ M > 0$, *то для класса Липшица с константой* M *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_n(q; H^1[a,b]) =$$

$$= M\left\{ 2\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_a^{t_k^0} q_1(t)dt - 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^{(t_{k-1}^0 + t_k^0)/2} q_1(t)dt + \int\limits_a^b q_1(t)dt \right\}. \quad (0.0.15)$$

Равенство (0.0.15) ранее было доказано Т.Н.Бусаровой [9]. Рассмотрим одно применение теоремы 1.4.1.

Пусть $[a, b] = [0, +\infty)$, $q(t) = e^{-t}$. Тогда из теоремы 1.4.1 сразу получим следующее утверждение.

Теорема 1.4.2. *Среди квадратурных формул вида Маркова*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt = p_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(1) + R_n(f; e^{-t})$$

наилучшей для класса Липшица $H^1[0, +\infty)$ является формула, узлы и коэффициенты которой определяются равенствами

$$t_k^0 = \ln \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \frac{k}{n}\right]^{-2}, \ k = \overline{1, n-1},$$

$$p_0^0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cdot \frac{1}{n}, \ p_n^0 = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

$$p_k^0 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \left[\frac{1}{n} - \frac{k}{n^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right], \ k = \overline{1, n-1}.$$

При этом погрешность на всем классе $H^1[0, +\infty)$ равна

$$\mathcal{E}_n\left(H^1[0, +\infty), e^{-t}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Во второй главе диссертации изучается вопрос об отыскании наилучших (оптимальных) квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа на некоторых классах функций и кривых.

Рассматривается задача о приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода в форме линейного комбинации конечного числа значений подынтегральной функции

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R_n(f;\Gamma), \qquad (0.0.16)$$

где $M_k \in \Gamma$, $p_k(k = \overline{1,N})$ – произвольные числа-коэффициенты, $f(M)$ – функция, определенная вдоль кривой Γ, $R_N(f,\Gamma) = R_N(f;\Gamma;p_k,M_k)$ – погрешность формулы (0.0.16) на функцию $f(M) = f(x,y)$. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k f(M_k)$ по аналогии с определением в монографии С.М.Никольского [43] будем называть квадратурной суммой. Ясно, что для достижения высокой точности вычислений при заданном $N \geq 1$ нужно возможно лучшим образом воспользоваться выбором коэффициентов p_k и узлов M_k.

Всюду далее через $\mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим класс плоских спрямляемых кривых Γ, у которых длина равна L, кривизна кусочно-непрерывна и будем полагать, что все кривые $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ расположены в области $Q = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq L^2\}$.

Хорошо известно, что параметрическое уравнение $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, отнесенной к длине дуги s как параметру в прямоугольной системе координат Oxy имеют вид

$$\Gamma : x = x(s),\ y = y(s), \quad 0 \leq s \leq L.$$

Обозначая через $s_k, s_k \in [0,L](k = \overline{1,N})$ значения длины дуги s кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, которые соответствуют точкам $M_k \in \Gamma$, перепишем формулу (0.0.16) в виде

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x(s_k),y(s_k)) + R_N(f;\Gamma), \qquad (0.0.17)$$

где $x = x(s), y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ. Если обозначить через $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ – вектор коэффициентов, $S = \{s_k\}_{k=1}^N$ – вектор узлов квадратурной формулы (0.0.17), то для каждой функции $f(M) = f(x, y)$ и каждой кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ остаток квадратурной формулы имеет вполне определенное численное значение

$$R_N(f;\Gamma) := R_N(f;\Gamma;P,S) =$$

$$= \int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds - \sum_{k=1}^N p_k f(x(s_k),y(s_k)). \qquad (0.0.18)$$

Если $\mathfrak{M} = \{f\}$ – некоторый класс функций, определенных на кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, то, исходя из (0.0.18), за величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций класса $\mathfrak{M}$ на кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, можно принять число

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S) = \sup\left\{|R_N(f;\Gamma;P,S)| : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Наибольшую погрешность квадратурной формулы (0.0.17) всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S) = \sup\left\{R_N(f;\Gamma;P,S) : \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\right\}.$$

Для получения квадратурной формулы, которую можно было считать наилучшей для всех функций $f \in \mathfrak{M}$ и всех кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, полагаем, что соотношение (0.0.17) является точным для функций $f(x, y) = const$, что приводит к выполнению равенств

$$\int\limits_\Gamma ds = \sum_{k=1}^N p_k = L.$$

Задача состоит в отыскании величины

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S) : (P,S) \in \mathcal{A}\right\},$$

где $\mathcal{A}$ – множество всех векторов (P, S), для которых квадратурная формула (0.0.17) имеет смысл. Если существуют вектор коэффициентов $P^0 = \{p_k^0\}_{k=1}^N$ и узлов $S^0 = \{s_k^0\}_{k=1}^N$ таких для которых

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L)) = \left\{ R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); P^0, S^0) \right\},$$

то квадратурная формула (0.0.17) с этими векторами называется *наилучшей* или *оптимальной* для классов функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Во втором параграфе рассматривается задача о точности оценки погрешности на заданном классе функций усложненной квадратурной формулы прямоугольника

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\right) + R_{\Pi}(f; \Gamma) \quad (0.0.19)$$

и трапеций

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds =$$

$$= \frac{L}{N} \left\{ \frac{f\left(x(0), y(0)\right) + f(x(L), y(L))}{2} + \sum_{k=0}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) \right\} + R_T(f; \Gamma) \quad (0.0.20)$$

на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности.

Обозначим через $H^{\omega}[0, L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C_{[0,L]}$ для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t^{'}) - \varphi(t^{''})| \leq \omega(|t^{''} - t^{'}|),$$

где $\omega(t)$ – заданный на отрезке $[0, L]$ модуль непрерывности, тоесть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная функция, в нуле равная нулю.

Через $\bar{H}^{\omega_1, \omega_2} := \bar{H}^{\omega_1, \omega_2}[0, L]$ обозначим класс кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, параметрические уравнения которых удовлетворяют условиям $x(s) \in H^{\omega_1}[0, L]$,

$y(s) \in H^{\omega_2}[0,L]$, а через $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ обозначим класс функций $f(M) = f(x,y)$, определенных в области $Q = \{(x,y) : x^2+y^2 \le L^2\}$ и для любых двух точек $M' = M(x', y'), M'' = M(x'', y'') \in \Gamma \subset Q$, удовлетворяющих условию

$$\left| f(M') - f(M'') \right| \le \rho(M', M'') := \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}. \qquad (0.0.21)$$

Таким образом, если $M', M'' \in \Gamma$, то неравенство (0.0.21) для $\Gamma \in H^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ означает, что

$$\left| f\left(x(s'), y(s')\right) - f\left(x(s''), y(s'')\right) \right| \le$$

$$\le \sqrt{\left(x(s'') - x(s')\right)^2 + \left(y(s'') - y(s')\right)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\omega_1^2\left(|s''-s'|\right) + \omega_2^2\left(|s''-s'|\right)}.$$

Дадим теперь оценку погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольника с фиксированным вектором коэффициентов $P^0 = \{p_k^0 = L/N\}_{k=1}^N$ и вектором узлов $S^0 = \{s_k^0 : s_k^0 = \frac{2k-1}{2N}L\}_{k=1}^N$ и формул трапеций с вектором коэффициентов $P^* = \{p_0^* : p_0^* = L/N, k = 1, N-1; p_0 = p_N = L/(2N)\}$ и вектором узлов $S^* = \{s_k^* = kL/N\}_{k=0}^N$.

Теорема 2.2.1. *Для погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольников* (0.0.19) *и трапеций* (0.0.20) *на классах функций* $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *справедливы следующие точные оценки*

$$R_\Pi\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_T\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds.$$

Третий параграф второй главы посвящен отысканию оптимальных квадратурных формул вида (0.0.17) для класса функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности второго порядка (модулями гладкости). Пусть задан класс W функций $f(M) = f(x(s), y(s))$, определенных на отрезке $[0, L]$ и для любых двух точек $s^{'}, s^{''} \in [0, L]$, удовлетворяющих условию

$$\left| f\left(x(s^{'}), y(s^{'})\right) + f\left(x(s^{''}), y(s^{''})\right) - 2f\left(x\left(\frac{s^{'}+s^{''}}{2}\right), y\left(\frac{s^{'}+s^{''}}{2}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \left| x(s^{'}) + x(s^{''}) - 2x\left(\frac{s^{'}+s^{''}}{2}\right)\right| + \left| y(s^{'}) + y(s^{''}) - 2y\left(\frac{s^{'}+s^{''}}{2}\right)\right|.$$

Через $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ обозначим класс кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, параметрические уравнения которых удовлетворяют условию

$$\left| x(s^{'}) + x(s^{''}) - 2x\left(\frac{s^{'}+s^{''}}{2}\right)\right| \leq 2\omega_1\left(\frac{|s^{'}-s^{''}|}{2}\right),$$

$$\left| y(s^{'}) + y(s^{''}) - 2y\left(\frac{s^{'}+s^{''}}{2}\right)\right| \leq 2\omega_2\left(\frac{|s^{'}-s^{''}|}{2}\right).$$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.3.1. *Среди квадратурных формул вида* (0.0.7) *наилучшей для классов функций* W *и кривых* $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ *является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{0.0.22}$$

где $M_k^* = M\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)$; $x = x(s), y = y(s)$ *– параметрические уравнения кривой* Γ, L *– ее длина.*

При этом точная оценка погрешности формулы (0.0.22) *на классах функций и кривых равна*

$$\mathcal{E}_N\left(W; \bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \left[\omega_1(t) + \omega_2(t)\right] dt.$$

Из теоремы 2.3.1 вытекает

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.3.1 *для погрешности квадратурной формулы* (0.0.22) *при* $\omega_1(t) = M_1 t^\alpha$, $\omega_2 = M_2 t^\beta$, $M_1, M_2 > 0$, $0 \le \alpha, \beta \le 1$ *и* $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L] \equiv Z_2^{\alpha,\beta}[0,L]$ – *класс Зигмунда порядка* (α,β) *с константами* M_1 *и* M_2 *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(W; Z^{(\alpha,\beta)}[0,L]\right) = \frac{M_1 L}{\alpha+1}\cdot\left(\frac{L}{2N}\right)^\alpha + \frac{M_2 L}{\beta+1}\cdot\left(\frac{L}{2N}\right)^\beta.$$

В четвертом параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача об отыскании оптимальных квадратурных формул типа Маркова (с закрепленными узлами в концах отрезка интегрирования) следующего вида

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = p_0 f\left(x(0), y(0)\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1} p_k f\left(x(s_k), y(s_k)\right) + p_N f\left(x(L), y(L)\right) + R_N(f;\Gamma) \qquad (0.0.23)$$

с произвольными векторами-коэффициентами $P = \{p_k\}_{k=0}^N$ и векторами-узлами $S = \{s_k\}_{k=0}^N$ $(0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N = L)$.

Если $M' = M(x', y') \in \Gamma \subset Q$, $M'' = M(x'', y'') \in \Gamma \subset Q$, $Q = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le L^2\}$, то введем в рассмотрение класс функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\left|f(M') - f(M'')\right| \le \rho_i(M', M''),\ i = 1,2,3,$$

где

$$\rho_1(M', M'') = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2} \text{ – евклидово расстояние,}$$

$$\rho_2(M', M'') = |x''-x'| + |y''-y'| \text{ – хэммингово расстояние,}$$

$$\rho_3(M', M'') = \max\{|x''-x'|, |y''-y'|\} \text{ – расстояние Минковского.}$$

Если кривая $\Gamma \subset \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$, то есть параметрические уравнения кривой Γ удовлетворяют условиям $x(s) \in H^{\omega_1}[0,L], y(s) \in H^{\omega_2}[0,L]$, то для любого $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_i}(Q)$ и любых $s^{'}, s^{''} \in [0,L]$ соответственно при $i = 1,2,3$ выполняются неравенства

$$\left|f(M^{'}) - f(M^{''})\right| \leq \rho_1(M^{'}, M^{''}) \leq \sqrt{\omega_1^2(|s^{'} - s^{''}|) + \omega_2^2(|s^{'} - s^{''}|)},$$

$$\left|f(M^{'}) - f(M^{''})\right| \leq \rho_2(M^{'}, M^{''}) \leq \omega_1(|s^{'} - s^{''}|) + \omega_2(|s^{'} - s^{''}|),$$

$$\left|f(M^{'}) - f(M^{''})\right| \leq \rho_3(M^{'}, M^{''}) \leq \max\{\omega_1(|s^{'} - s^{''}|), \omega_2(|s^{'} - s^{''}|)\}.$$

Сформулируем основной результат четвертого параграфа второй главы.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.23) *с произвольными векторами коэффициентами* $P = \{p_k\}_{k=0}^N$,*и узлами* $S = \{s_k\}_{k=0}^N$ *наилучшей для классов функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i} (i = 1,2,3)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *является формула типа Маркова*

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \frac{L}{N} \sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \qquad (0.0.24)$$

При этом для оценки погрешности квадратурной формулы (0.0.24) *на указанных классах функций и кривых справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2(N+1) \int\limits_0^{L/(2(N+1))} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds,$$

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2(N+1) \int\limits_0^{L/2(N+1)} \left(\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)\right) ds,$$

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2(N+1) \int\limits_0^{L/2(N+1)} \max\left\{\omega_1(s), \omega_2(s)\right\} ds.$$

ГЛАВА I

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ВЕСОМ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ

Известно [43], что экстремальная задача отыскания оптимальных (наилучших) квадратурных формул на заданном классе функций в сороковых годах прошлого столетия была сформулирована А.Н.Колмогоровым, а первые результаты были опубликованы А.Сардом [58] (наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы при фиксированных узлах) и С.М.Никольским [43] (наилучшие по коэффициентам и узлам квадратурные формулы). Сразу же после выхода в свет пионерской работы С.М.Никольского [42] появилась работа А.Х.Турецкого [60], где найдены точные оценки погрешности квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона для класса Липшица, а также точные оценки погрешности квадратурной формулы Эрмита и некоторых других весовых квадратурных формул. Спустя некоторое время появилась работа Т.А.Шайдаева [77], в которой серьезно развиты идеи С.М.Никольского [42].

Выход в свет в 1958 г. монографии С.М.Никольского дал толчок для отыскания наилучших квадратурных формул на различных классах функций и к поставленным в ней экстремальным задачам привлек внимание многих математиков как теоретического, так и прикладного направлений. За прошедшие полвека в математической печати появилось много работ, связанных с содержанием этой книги. Отыскание наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получение точной оценки ее остатка является одной из основных экстремальных задач теории приближения и, как правило, сопряжено с привлечением глубоких и тонких фактов теории функций и функционального анализа. Все полученные за прошедшие годы результаты приведены Н.П.Корнейчуком в добавлении к монографии С.М.Никольского [43], вышедшей в 1978 и 1988 гг. Следует отметить, что немало задач об отыскании наилучших квадратурных формул (особенно в многомерном случае) для интегралов с весом, сингулярных интегралов, криволинейных интегралов первого рода до настоящего времени не решены.

В настоящей диссертационной работе решены задачи оптимизации приближенного вычисления определенных интегралов с положительными весовыми функциями для классов функций малой гладкости. Рассмотрены также вопросы отыскания наилучших квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности и гладкости. Найденные квадратурные формулы имеют довольно простой структурный вид, а также довольно просто реализуются при помощи стандартных программ на современных компьютерах.

§1.1. Классы функций. Общая постановка экстремальной задачи отыскания наилучших квадратурных формул

Пусть $[a,b]$ – произвольный отрезок вещественной оси или положительная(отрицательная) полуось.

Обозначим через $C[a,b]$ – множество непрерывных функций $f(t)$, заданных и определенных на отрезке $[a,b]$; $C^{(r)}[a,b](r=0,1,2,\cdots;C^{(0)}[a,b]\equiv C[a,b])$ – множество r-раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций; $H^{\omega}[a,b]$ – множество кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$|f(t^{''})-f(t^{'})|\leq\omega(|t^{''}-t^{'}|),\ \forall\ \ t^{'},t^{''}\in[a,b],$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0,b-a]$ функция, для которой $\omega(0)=0$. При $\omega(t)=t^{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1$, класс $H^{\omega}[a,b]$ превращается в класс Гельдера $H^{\alpha}[a,b]$:

$$|f(t^{''})-f(t^{'})|\leq|t^{''}-t^{'}|^{\alpha},\ \forall\ \ t^{'},t^{''}\in[a,b].$$

$H^{1}[a,b]$ – класс Липшица функций с константой 1 и порядка $\alpha\equiv 1$, удовлетворяющих условию [58]

$$H^{1}[a,b]=\left\{f:|f(t^{''})-f(t^{'})|\leq|t^{''}-t^{'}|,\ t^{'},t^{''}\in[a,b]\right\}.$$

$W^{(1)}[a,b]$ – класс функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную $f^{'}(t)$, удовлетворяющих условию

$$supvrai\left\{|f^{'}(t)|:\ t\in[a,b]\right\}\leq 1.$$

Ясно, что $W^{(1)}[a,b]=H^{1}[a,b]$.

$$W^{(r)}H^{\omega}[a,b]\ (r=0,1,2,\cdots;\ W^{(0)}H^{\omega}[a,b]\equiv H^{\omega}[a,b])$$

– множество функций $f(t) \in C^{(r-1)}[a,b]$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r)}(t) \in H^{\omega}[a,b]$.

$$W^{(r)}L_p[a,b] \ (1 \le p \le \infty; \ r = 0,1,2,\cdots; \ W^{(0)}L_p[a,b] \equiv L_p[a,b])$$

– класс функций $f(t)$, у которых производная $f^{(r-1)}(t)$ порядка $r-1$ абсолютно-непрерывна, существует производная r-го порядка $f^{(r)}(t) \in L_p[a,b]$, удовлетворяющая условию

$$\|f^{(r)}\|_p := \|f^{(r)}\|_{L_p} = \left(\int\limits_a^b |f^{(r)}(t)|^p dt\right)^{1/p} \le 1.$$

1.1.1. Постановка экстремальных задач

В этой пункте приводим общую постановку экстремальных задач отыскания наилучших квадратурных формул.

Рассматривается квадратурная формула

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f), \qquad (1.1.1)$$

в которой весовая функция $q(t) \ge 0$ на отрезке $[a,b]$ интегрируема (хотя бы, в несобственном смысле по Риману), $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ – вектор коэффициентов, $T = \{t_k : a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b\}$ – вектор узлов, а $R_n(f) := R_n(q; f; P, T)$ – погрешность квадратурной формулы (1.1.1) на функцию $f(t)$.

Если $\mathfrak{M} = \{f(t)\}$ – некоторый класс функций $f(t)$, заданных и определенных на конечном или бесконечном отрезке $[a,b]$, то через

$$R_n(q; \mathfrak{M}; P, T) = \sup\{|R_n(q; \mathfrak{M}; P, T)| : f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\int\limits_a^b q(t)f(t)dt - \sum_{k=1}^n p_k f(t_k)\right| : f \in \mathfrak{M}\right\} \qquad (1.1.2)$$

обозначим наибольшую допустимую погрешность квадратурной формулы (1.1.1) на классе функций $\mathfrak{M}$. Очевидно, что погрешность квадратурной формулы на классе $\mathfrak{M}$ зависит от выбора вектор-коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ и вектора узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$. Если $\mathcal{A}$ – множество векторов узлов и коэффициентов, для которых квадратурная формула (1.1.1) имеет смысл, то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(q; \mathfrak{M}) = \inf\left\{R_n(q; \mathfrak{M}; P, T) : (P, T) \subset \mathcal{A}\right\}. \qquad (1.1.3)$$

При этом, если существует вектор коэффициентов $P^0 = \{p_k^0\}_{k=1}^n$ и вектор узлов $T^0 = \{t_k^0\}_{k=1}^n$, для которых достигается нижняя грань в (1.1.3), то есть если

$$\mathcal{E}_n(q; \mathfrak{M}) = R_n(q; \mathfrak{M}; P^0, T^0),$$

то квадратурная формула (1.1.1) называется *наилучшей* или *оптимальной* квадратурной формулой на классе $\mathfrak{M}$ в смысле С.М.Никольского [43], а вектор (P^0, T^0) называется наилучшим вектором коэффициентов и узлов квадратурной формулы (1.1.1).

Аналогичным образом, если существует вектор коэффициентов $P^* = \{p_k\}_{k=1}^n$, который реализует нижнюю грань

$$\mathcal{E}_n(q; \mathfrak{M}; T) = \inf\{R_n(q; \mathfrak{M}; P, T) : P \subset \mathcal{A}\}, \qquad (1.1.4)$$

то квадратурная формула (1.1.1) называется наилучшей по коэффициентам квадратурной формулой при фиксированном векторе узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$ или наилучшей квадратурной формулой в смысле Сарда [58].

В литературе задача (1.1.3) называется экстремальной задачей Колмогорова-Никольского, а задача (1.1.4) - экстремальной задачей Сарда. Многочисленные результаты о решении задачи (1.1.3) приведены в "Дополнении" Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольского [43]. Тем не менее имеется много других экстремальных задач, так или иначе связанных с задачами С.М.Никольского [43] и А.Сарда [58], которые непременно ждут своего решения. К таким задачам относятся задачи (1.1.3) и (1.1.4) с конкретными положительными весовыми функциями, имеющие конечное число особенностей на отрезке интегрирования, и интеграл от весовой функции существует в несобственном смысле Римана. Другими словами, решать задачу (1.1.3) для сингулярных интегралов с конечным числом особенностей на отрезке интегрирования.

Отметим, что задача отыскания наилучших квадратурных формул для сингулярных интегралов или весовых квадратурных формул, когда вес $q(t)$ на отрезке $[a, b]$ имеет особенности, была сформулирована Н.П.Корнейчуком [25]. Некоторые результаты в этом направлении получены А.А.Женксыкбаевым [19], М.Ш.Шабозовым [65], Л.А.Онеговым [44], В.А.Бойковым [6], М.Ш.Шабозовым и Р.С.Сабоиевым [71-74], М.Ш.Шабозовым и З.А.Парвонаевой [69-70].

§1.2. Оптимизация весовых квадратурных формул, для некоторых классов функций малой гладкости

В этом параграфе найдена погрешность весовой квадратурной формулы (1.1.1) на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$ – функций $f(t)$, имеющих кусочно-непрерывную производную $f'(t)$ на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющих условию

$$\|f'\|_{L[a,b]} = \int\limits_a^b |f'(t)|dt \leq M.$$

Пусть $W^{(1)}L(M;a,b)$ – класс заданных на отрезке $[a,b]$ функций $f(t)$, у которых производная $f^{'}(t)$ кусочно-непрерывна на $[a,b]$ и удовлетворяет условию

$$\|f^{'}\|_L := \|f^{'}\|_{L_{[a,b]}} = \int\limits_a^b |f^{'}(t)|dt \leq M.$$

Через $\mathcal{A}$ – обозначим множество всех пар векторов (P,T), для которых квадратурная формула имеет смысл и удовлетворяет некоторым условиям, определяющим свойства квадратурной формулы (1.1.1). Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b)\right) =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{|R_n(f;q;P,T)| : \ f \in W^{(1)}L\right\} : \ (P,T) \in \mathcal{A}\right\} \qquad (1.2.1)$$

и указать векторы $P^0 = \{p_k^0\}_{k=1}^n, \ T = \{t_k^0\}_{k=1}^n$, реализующие в (1.2.1) точную нижнюю грань.

Оценку снизу для величины (1.2.1) получим следуя методу оценки снизу погрешности квадратурных формул, изложенному в [43, с.183], а именно, сопоставим каждому вектору узлов множество

$$W_T^{(1)}L(M;a,b) = \left\{f : \ f \in W^{(1)}L : \ f(t_k) = 0, \ k = 1,2,...,n\right\}.$$

Следуя работе [9], введем обозначения:

$$q_k=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}q(t)dt,\ k=1,2,...,n-1;\quad q_0=\int\limits_{a}^{t_1}q(t)dt,\quad q_n=\int\limits_{t_n}^{b}q(t)dt,$$

$$\bar{q}=max\left\{q_k:1\le k\le n-1\right\}=q_\nu;\ q=q(T):=max\left\{\bar{q},\ 2q_0,\ 2q_n\right\}.$$

Определим функцию $f_T(t)$ следующим образом: если $q=2q_0$, то положим

$$f_T(t)=\begin{cases}-\dfrac{2M}{\|f'\|_L}\displaystyle\int\limits_{t}^{t_1}|f'(u)|du, & a\le t\le t_1,\\ \\ 0, & t\in[a,b]\diagdown[a,t_1],\end{cases}$$

а если $q=2q_n$, то

$$f_T(t)=\begin{cases}0, & t\in[a,b]\diagdown[x_n,b],\\ \\ \dfrac{2M}{\|f'\|_L}\displaystyle\int\limits_{t}^{t_1}|f'(u)|du, & a\le t\le t_1.\end{cases}$$

Если же $q=\bar{q}=q_\nu$ $(1\le\nu\le n-1)$, то аналогичным образом полагаем

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{M}{\|f'\|_L}\displaystyle\int\limits_{t_\nu}^{t}|f'(u)|du, & t_\nu\le t\le t_{\nu+1},\\ \\ 0, & t\in[a,b]\diagdown[t_\nu,t_{\nu+1}].\end{cases}$$

Очевидно, что $f_T(t)\in W_T^{(1)}L(M;a,b)$ и не трудно доказать, что для любого вектора коэффициентов P имеем

$$\sup\left\{|R_n(f;q)|:\ f\in W_T^{(1)}L(M;a,b)\right\}=$$

$$=\sup\left\{\left|\int\limits_a^b q(t)f(t)dt\right|:\ f\in W_T^{(1)}L(M;a,b)\right\}=\left|\int\limits_a^b q(t)f_T(t)dt\right|.\qquad(1.2.2)$$

Из (1.2.2) следует, что

$$\mathcal{E}_n\left(W_T^{(1)}L(M;a,b)\right) = M\inf\{q(T):\ T\in\mathcal{A}\}. \tag{1.2.3}$$

Из (1.2.3) рассуждением от противного можно показать, что

$$\inf\{q(T) : T\subset\mathcal{A}\} = q(T^0),$$

где вектор узлов $T^0=\{t_1^0,t_2^0,...,t_n^0\}$ однозначно определяется равенствами

$$2q_0 = q_1 = q_2 = ... = q_{n-1} = 2q_n = q(T^0).$$

Так как $W_T^{(1)}L(M;a,b)\subset W^{(1)}L(M;a,b)$, то

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b)\right) \geq \mathcal{E}_n\left(W_T^{(1)}L(M;a,b)\right). \tag{1.2.4}$$

Приступая к оценке величины $\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b)\right)$ сверху, введем вектор коэффициентов $P^0=\{p_1^0,p_2^0,...,p_n^0\}$, полагая

$$p_k^0 = \int\limits_{\tau_{k-1}^0}^{\tau_k^0} q(t)dt = q(T^0),\quad (k=1,2,...,n),$$

где

$$\tau_0^0=a,\ \tau_n^0=b;\ \int\limits_{\tau_{k-1}^0}^{t_k^0} q(t)dt = \int\limits_{t_k^0}^{\tau_k^0} q(t)dt,\ (k=1,2,...,n),$$

и введем в рассмотрение квадратурную формулу

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^n p_k^0 f(t_k^0) + R_n(f;T^0,P^0). \tag{1.2.5}$$

Для любой функции $f\in W^{(1)}L(M;a,b)$ имеем

$$\left|R_n(f;T^0,P^0)\right| = \left|\int\limits_a^b q(t)f(t)dt - \sum_{k=1}^n p_k^0 f(t_k^0)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\tau_{k-1}^0}^{t_k^0} |f(t) - f(t_k^0)| q(t)dt + \int\limits_{t_k^0}^{\tau_k^0} |f(t) - f(t_k^0)| q(t)dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\tau_{k-1}^0}^{t_k^0} \left| \int\limits_{t_k^0}^{t} f^{'}(u)du \right| q(t)dt + \int\limits_{t_k^0}^{\tau_k^0} \left| \int\limits_{t_k^0}^{t} f^{'}(u)du \right| q(t)dt \right\} \leq$$

$$\leq q(T^0) \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\tau_{k-1}^0}^{t_k^0} |f^{'}(u)|du + \int\limits_{t_k^0}^{\tau_k^0} |f^{'}(u)|du \right\} =$$

$$= q(T^0) \int\limits_0^1 |f^{'}(u)|du \leq M \cdot q(T^0). \qquad (1.2.6)$$

Из (1.2.6) сразу следует, что

$$\mathcal{E}_n \Big(W^{(1)} L(M; a, b) \Big) \leq M \cdot q(T^0). \qquad (1.2.7)$$

Из неравенств (1.2.4) и (1.2.7) следует, что

$$\mathcal{E}_n \Big(W^{(1)} L(M; a, b) \Big) = M \cdot q(T^0). \qquad (1.2.8)$$

Из (1.2.8) следует, что узлы t_k^0 и коэффициенты p_k^0 наилучшей для класса $W^{(1)}L(M; a, b)$ квадратурной формулы (1.2.5) определяются по весовой функции $q(t)$ равенствами

$$2 \int\limits_{\alpha}^{t_1^0} q(t)dt = \int\limits_{t_1^0}^{t_2^0} q(t)dt = ... = \int\limits_{t_{n-1}^0}^{t_n^0} q(t)dt = 2 \int\limits_{t_n^0}^{b} q(t)dt := q(T^0); \qquad (1.2.9)$$

$$p_k^0 = q(T^0), (k = 1, 2, ..., n). \qquad (1.2.10)$$

Из равенств (1.2.9) и (1.2.10), а также из результатов работ Т.Н.Бусарова и А.А. Борисенко [8] и Ю.Г.Гиршовича [16] вытекает, что узлы и коэффициенты наилучшей квадратурной формулы (1.2.5) определяются из системы равенств

$$\int\limits_{t_k^0}^{b} q(t)dt = \frac{2n-2k+1}{2n}\int\limits_{a}^{b} q(t)dt,\ r=1,2,...,n$$

$$p_k^0 = \frac{1}{n}\int\limits_{a}^{b} q(t)dt. \tag{1.2.11}$$

Погрешность квадратурной формулы (1.2.5) имеет вид

$$\mathcal{E}_n\Big(W^{(1)}L(M;a,b);q(t)\Big) = \frac{M}{2n}\cdot\int\limits_{a}^{b} q(t)dt.$$

Резюмируя все сказанное, сформулируем следующую общую теорему.

Теорема 1.2.1. *Среди всех весовых квадратурных формул вида (0.0.1)наилучшей для класса $W^{(1)}L_1(M;a,b)$ является формула, у которой наилучшие узлы и коэффициенты определяются из системы равенств (1.2.9) и (1.2.10). При этом погрешности наилучшей весовой квадратурной формулы на всем классе $W^{(1)}L_1(M;a,b)$ определяются равенством*

$$\mathcal{E}_n\Big(W^{(1)}L(M;a,b):q\Big) = \frac{M}{2n}\int\limits_{a}^{b} q(t)dt.$$

Используя формулы (1.2.9) - (1.2.11), сформулируем следующие утверждения

Теорема 1.2.2. *Пусть $q(t)=t^\alpha, \alpha>-1, 0\le a<b$. В этом случае наилучшие узлы и коэффициенты квадратурной формулы (1.2.5) имеют вид:*

$$t_k^0 = \left[\frac{2k-1}{2n}(b^{\alpha+1)}-a^{\alpha+1})+a^{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}(k=1,2,,...,n),$$

$$p_k^0 = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)n}, \ (k = 1, 2, ..., n).$$

При этом для оценки погрешности квадратурной формулы (1.2.5) справедлива оценка

$$\mathcal{E}_n \left(W^{(1)} L(M; a, b) \right) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{2n(\alpha+1)} \cdot M.$$

В частности, при $[a, b] = [0, 1]$ квадратурная формула

$$\int_0^1 t^\alpha f(t) dt = \frac{1}{(\alpha+1)n} \sum_{k=1}^n f\left(\left(\frac{2k-1}{2n} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right) + R_n(f; t^\alpha)$$

является наилучшей для класса $W^{(1)}L(M; 0, 1)$. Погрешность этой формулы на всем классе равна

$$\mathcal{E}_n \left(W^{(1)} L(M; 0, 1), t^\alpha \right) = \frac{M}{2(\alpha+1)n}.$$

Теорема 1.2.3. *Пусть $q(t) = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \ 0 \le a < t \le b < \pi$. Тогда наилучшие узлы и коэффициенты квадратурной формулы*

$$\int_a^b f(t) \operatorname{tg} \frac{t}{2} dt = \sum_{k=1}^n p_k^0 f(t_k^0) + R_n\left(f; \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$$

имеют вид

$$t_k^0 = 2 \arccos \left[\left(\cos \frac{a}{2} \right)^{1 - \frac{2k-1}{2n}} \cdot \left(\cos \frac{b}{2} \right)^{\frac{2k-1}{2n}} \right], \ (k = 1, 2, ..., n),$$

$$p_k^0 = \frac{2}{n} \ln \frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)} \ (k = 1, 2, ..., n).$$

При этом для погрешности наилучшей квадратурной формулы (1.2.5) на всем классе $W^{(1)}L(M; a, b)$ справедлива точная оценка

$$\mathcal{E}_n \left(W^{(1)} L(M; a, b) : \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) = \frac{M}{n} \ln \frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)}.$$

§1.3. Применение результатов предыдущего параграфа для вычислении двойных интегралов

Рассмотрим одно применение результатов, полученных в первом параграфе, к вопросу о вычислении двойных интегралов по области $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$:

$$\mathcal{J}(f) = \iint\limits_{(S)} f(x, y)dxdy. \tag{1.3.1}$$

Представим интеграл (1.3.1) по единичному кругу в следующем виде

$$\mathcal{J}(f) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy \right) dx.$$

В [44] доказано, что если $f(\pm 1, 0) \neq 0$, то функция

$$\mathcal{J}_1(x) = \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$$

имеет неограниченные производные и поэтому при численном интегрировании по переменной x следует применять специальные приемы вычисления интегралов от таких функций. Целесообразнее записать интеграл в виде

$$\mathcal{J}(f) = \int\limits_{0}^{1} r\mathcal{J}_1(r)dr, \quad \mathcal{J}_1(r) = \int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)d\varphi.$$

Подынтегральная функция интеграла $\mathcal{J}_1(r)$ периодическая, а потому имеет смысл применять квадратурную формулу

$$\int\limits_{0}^{2\pi} g(t)dt = \frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + r_n(g), \tag{1.3.2}$$

точная оценка погрешности которой на классе $W^{(r)}L_p,\ 1 \leq p \leq \infty$ известна [43]. Для вычисления интеграла $\mathcal{J}(f)$, применив теорему 1.2.1 при $\alpha = 1$, приходим к следующему результату.

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\mathcal{J}(f) = \int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathcal{J}_1(r_k) + R_n(f;r)$$

наилучшей на классе функций $W^{(1)}L(M;0,1)$ *является квадратурная формула*

$$\int\limits_0^1 r\mathcal{J}_1(r)dr = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{2k-1}{2n}}\right) + R_n(f;r). \qquad (1.3.3)$$

При этом для оценки погрешности квадратурной формулы (1.3.3) *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(W^{(1)}L(M;0,1)\right) = \frac{M}{4n}.$$

В качестве второго применения теоремы 1.2.1 рассмотрим общеизвестный интеграл Лиувилля

$$I(f) = \int\int\limits_{(D)}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

где $D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le 1,\ x_i > 0,\ i = \overline{1,n}\}$.

Если подынтегральная функция f – непрерывная в симплексе $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le 1$, $x_i \ge 0$ функция, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - 1 = \alpha,\ \alpha > -1$, то в курсе анализа доказывается, что

$$I(f) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(p_i)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \int\limits_0^1 t^\alpha f(t)dt,\ \alpha > -1, \qquad (1.3.4)$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера.

В этом случае наилучшая квадратурная формула имеет узлы и коэффициенты

$$t_k = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}},\ k = 1, 2, \cdots, N;$$

$$p_k = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{\Gamma(\alpha+1)N.},\ k = 1, 2, \cdots, N$$

и наилучшая квадратурная формула для вычисления интеграла Лиувилля имеет вид

$$I(f) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \sum_{k=1}^{N} f\left(\left(\frac{2k-1}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\right) + R_N(f).$$

При этом оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе функций $W^{(1)}L(M; a, b)$ равна

$$\mathcal{E}_N\left(W^{(1)}L(M; a, b)\right) = \frac{M \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}{2\ \Gamma(\alpha+1)N}.$$

§1.4. Об оптимизации весовых квадратурных формул на классе функций $H^{\omega}[a,b]$

В этом параграфе исследуем вопрос оптимизации весовой квадратурной формулы

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f), \tag{1.4.1}$$

задаваемой векторами узлов $T = \{t_k : a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^{n}$ на классе $H^{\omega}[a,b]$ функций $f(t)$, для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [a,b]$ удовлетворяющих условию

$$|f(t^{'}) - f(t^{''})| \le \omega(|t^{'} - t^{''}|),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть, неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0, b-a]$ функция, такая, что $\omega(0) = 0$. Известно [30], что среди всех квадратурных формул вида (1.4.1) с весовой функцией $q(t)$ наилучшей является формула, вектор узлов $T^0 = \{t_k^0 : a \le t_0^0 < t_1^0 < \cdots < t_n^0 \le b\}$ которой обращает в минимум выражение

$$\mathcal{J}(t_0, t_1, \cdots, t_n) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} q(t)\omega(|t - t_k|)dt, \tag{1.4.2}$$

с коэффициентами

$$p_k^0 = \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)dt,$$

где $x_0^0 = a,\ x_k^0 = (t_{k-1}^0 + t_k^0)/2, k = 1, 2, \cdots, n,\ x_{n+1}^0 = b$ и наилучшей оценкой остатка, равной

$$\mathcal{E}_n(q; H^{\omega}[a,b]) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)\omega(|t - t_k^0|)dt. \tag{1.4.3}$$

Всюду далее полагаем

$$t_0 = x_0 = a,\ x_k = (t_{k-1} + t_k)/2, k = 1, 2, \cdots, n;\ x_{n+1} = t_n = b.$$

Очевидно, что

$$x_0 = t_0 < x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < x_{n-1} < t_n = x_{n+1} = b.$$

Положим $q_1(t) = \int\limits_a^t q(u)du,\ a \leq t \leq b$. Имеет место следующая

Теорема 1.4.1. *Если заданным модулем непрерывности $\omega(t)$ является непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, то для погрешности наилучшей квадратурной формулы* (1.4.1) *на всем классе $H^\omega[a, b]$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_n(q; H^\omega[a, b]) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{x_k^0}^{t_k^0} q_1(t)\omega^{'}(t_k^0 - t)dt - \int\limits_{t_{k-1}^0}^{x_k^0} q_1(t)\omega^{'}(t_k^0 - t)dt \right\}. \quad (1.4.4)$$

В частности, если $\omega(t) = Mt,\ M > 0$, то для класса Липшица с константой M справедлива оценка

$$\mathcal{E}_n(q; H^1[a, b]) =$$

$$= M\left\{ 2\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_a^{t_k^0} q_1(t)dt - 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^{(t_{k-1}^0+t_k^0)/2} q_1(t)dt + \int\limits_a^b q_1(t)dt \right\}. \quad (1.4.5)$$

Доказательство. В самом деле, переписав формулу (1.4.2) в виде

$$R_n(q; H^\omega[a, b]; T, P) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{t_k}^{(t_{k-1}+t_k)/2} q(t)\omega(t - t_{k-1})dt + \int\limits_{(t_{k-1}+t_k)/2}^{t_k} q(t)\omega(t_k - t)dt \right\} :=$$

$$\stackrel{der}{=} \mathcal{J}(t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n) \tag{1.4.6}$$

интегрированием по частям находим

$$R_n(q; H^\omega[a,b]; T, P) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{t_k}^{(t_{k-1}+t_k)/2} \omega(t - t_{k-1}) dq_1(t) + \int\limits_{(t_{k-1}+t_k)/2}^{t_k} \omega(t_k - t) dq_1(t) \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \omega\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right) q_1\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) - \omega\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right) q_1\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(t_{k-1}+t_k)/2}^{t_k} q_1(t)\omega'(t_k - t)dt - \int\limits_{t_k}^{(t_{k-1}+t_k)/2} q_1(t)\omega(t - t_{k-1})dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{(t_{k-1}+t_k)/2}^{t_k} q_1(t)\omega'(t_k - t)dt - \int\limits_{t_{k-1}}^{(t_{k-1}+t_k)/2} q_1(t)\omega(t - t_{k-1})dt \right\}. \tag{1.4.7}$$

Заметим, что правая часть равенство (1.4.7) не зависит от вектора коэффициентов

$P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$. Таким образом, при фиксированных узлах

$$T = \{t_k : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

точная оценка погрешности квадратурной формулы (1.4.1) с весовой функцией $q(t)$ на классе $H_0^\omega[a,b]$ имеет вид (1.4.7).

Положим

$$\mathcal{J}(a, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, b) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{(t_{k-1}+t_k)/2}^{t_k} q_1(t)\omega'(t_k - t)dt - \int\limits_{t_{k-1}}^{(t_{k-1}+t_k)/2} q_1(t)\omega(t - t_{k-1})dt \right\} \qquad (1.4.8)$$

и задача сводится к нахождению минимума функции $\mathcal{J}(a, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, b)$ по всевозможным векторам $T = \{t_k\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющим условиям $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots, t_{n-1} < t_n = b$.

Приравняв нулю частные производные функции (1.4.8) по переменным $t_k, k = 1, 2, \cdots, n-1$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_k} = \int\limits_{(t_{k-1}+t_k)/2}^{t_k} q_1(t)\omega''(t_k - t)dt - q_1\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)\omega'\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right) -$$

$$- \int\limits_{t_k}^{(t_k+t_{k+1})/2} \omega''(t_k - t)dt - q_1\left(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right)\omega'\left(\frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right) = 0, k = 1, 2, \cdots, n-1. \qquad (1.4.9)$$

Если решение $T^0 = \{a, t_1^0, t_2^0, \cdots, t_{n-1}^0, b\}$ системы (1.4.9) существует и единственно, то оно как раз определяет точку минимума функции $\mathcal{J}(a, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, b)$, причем вектор коэффициентов

$$P^0 = \left\{ p_k^0 : p_k^0 = \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)dt \right\} \qquad (1.4.10)$$

$$x_0^0 = a,\ x_k^0 = (t_{k-1}^0 + t_k^0)/2, \quad k = 1, 2, \cdots, n;\ x_n = b$$

по этим же узлам определяется оптимальным образом.

Действительно, с одной стороны, имеем:

$$\mathcal{E}_n(q, H^\omega) \geq \inf\left\{R_n(q; H^\omega; P, T) : (P, T) \subset A\right\} =$$

$$= \inf_T \mathcal{J}(a, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, b) = \mathcal{J}(a, t_1^0, t_2^0, \cdots, t_{n-1}^0, b) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{x_k^0}^{t_k^0} q_1(t)\omega'(t_k - t)dt - \int\limits_{t_{k-1}^0}^{x_k^0} q_1(t)\omega'(t - t_{k-1}^0)dt \right\}. \qquad (1.4.11)$$

С другой стороны, для получения противоположного неравенства оценим $\mathcal{E}_n(q; H^\omega)$ сверху. Пусть $T^0 = \{a, t_1^0, t_2^0, \cdots, t_{n-1}^0, b\}$ - решение системы (1.4.9). Тогда, используя векторы коэффициентов (1.4.10), для любой функции $f \in H^\omega[a, b]$, будем иметь

$$R_n(q; f; P^0, T^0) = \left| \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} \left[f(t) - f(t_k^0) \right] q(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} \omega(|t - t_k^0|)q(t)dt = \mathcal{J}(a, t_1^0, t_2^0, \cdots, t_{n-1}^0, b),$$

а потому

$$\mathcal{E}_n(H^\omega; q) \leq \mathcal{J}(a, t_1^0, t_2^0, \cdots, t_{n-1}^0, b). \qquad (1.4.12)$$

Из сопоставления (1.4.11) и (1.4.12) следует, что

$$\mathcal{E}_n(H^\omega; q) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{x_k^0}^{t_k^0} q_1(t)\omega'(t_k^0 - t)dt - \int\limits_{t_{k-1}^0}^{x_k^0} q_1(t)\omega'(t - t_{k-1}^0)dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{h_k^0} \left[q_1(t_k^0 - t) + q_1(t + t_{k-1}^0) \right] \omega'(t)dt, \ h_k^0 = t_k^0 - t_{k-1}^0. \qquad (1.4.13)$$

В частности, для случая $\omega(t) = t$, то есть, когда $H^\omega[a,b] = H^1[a,b]$, равенство (1.4.13) примет вид

$$\mathcal{E}_n(H^1;q) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{h_k^0} \left[q_1(t_k^0 - t) + q_1(t + t_{k-1}^0)\right] dt =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_a^{t_1^0} q_1(t)dt - 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^{(t_{k-1}^0+t_k^0)/2} q_1(t)dt + \int\limits_a^b q_1(t)dt. \qquad (1.4.14)$$

Равенство (1.4.14) ранее получено в работе Т.Н.Бусаровой [9].

Рассмотрим некоторые частные весовые квадратурные формулы.

Пусть $[a,b] = [0,+\infty)$, $q(t) = e^{-t}$. В этом случае справедлива

Теорема 1.4.2. *Среди квадратурных формул вида Маркова*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt = p_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(1) + R_n(f;e^{-t})$$

наилучшей для класса Липщица $H^1[0,+\infty)$ является формула, узлы и коэффициенты которой определяются равенствами

$$t_k^0 = ln\left(1 - \frac{k}{n} + \frac{k}{n}\cdot e^{-1/2}\right)^{-2},\ k = 1,2,\cdot,n-1,\ t_0 = 0;\ t_n^0 = 1,$$

$$p_0^0 = \left(1 - e^{-1/2}\right)\cdot\frac{1}{n},\ p_n^0 = \left(e^{-1/2} - e^{-1}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

$$p_k^0 = \frac{2}{n^2}\left(1 - e^{-1/2}\right)\left[n + k\left(e^{-1/2} - 1\right)\right],\ k = 1,2,\cdots,n-1.$$

При этом погрешность на всем классе $H^1[0,+\infty)$ равна

$$\mathcal{E}_n\left(H^1[0,+\infty), e^{-t}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2.$$

ГЛАВА II

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО ТИПА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ

§2.1 Постановка задач

Рассмотрим задачу о приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода в форме линейной комбинации конечного числа значений подынтегральной функции

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f, \Gamma), \tag{2.1.1}$$

где $M_k \in \Gamma,\ k = \overline{1, N};\ p_1, p_2, \cdots, p_N$ – произвольные числа-коэффициенты, $f(M)$ – функция, определенная вдоль кривой Γ, $R_N(f;\Gamma) := R_N(f;\Gamma;p_k, M_k)$ – погрешность формулы (2.1.1) на функции $f(M)$. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k f(M_k)$ по аналогии с определением, принятым в монографии С.М.Никольского [43], В.И.Крылова [29] и Н.С.Бахвалова [5], будем называть квадратурной суммой. Само собою разумеется, что для достижения высокой точности вычислений при заданном $N \geq 1$ нужно возможно лучшим образом воспользоваться выбором коэффициентов p_k и узлов M_k

Всюду далее обозначим через $\mathfrak{N}_Q(L)$ класс плоских спрямляемых кривых Γ, у которых длина равна L, кривизна кусочно-непрерывна и всюду в дальнейшем будем полагать, что все кривые $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$ расположены в области $Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq L^2\}$.

Хорошо известно, что параметрические уравнения кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, отнесенной к длине дуги s как параметру, в прямоугольной системе координат Oxy имеют вид

$$\Gamma : \begin{cases} x = \int\limits_0^s \cos\beta(s)ds + x_0, \\ y = \int\limits_0^s \sin\beta(s)ds + y_0, \quad 0 \le s \le L, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

где (x_0, y_0) – координаты начальной точки кривой Γ; $\beta(s) = \int\limits_0^s k(\Gamma; s)ds + \beta_0$, β_0 – угол, образованный касательной к Γ в точке (x_0, y_0) положительным направлением оси Ox, $k(\Gamma, s)$ – кривизна кривой Γ в точке с координатами $(x(s), y(s)) \in \Gamma$.

Обозначим через $s_k, s_k \in [0, L], k = \overline{1, N}$ значения длины дуги s кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, которые соответствуют точкам $M_k \in \Gamma$ и перепишем формулу (2.1.1) следующим образом:

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \sum_{k=1}^N p_k f\left(x(s_k), y(s_k)\right) + R_N(f, \Gamma), \tag{2.1.3}$$

где $x = x(s)$ и $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ, представленные в виде (2.1.2).

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $f(M) = f(x, y)$, определенных на кривых $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, то для каждой функции $f \in \mathfrak{M}$ и каждой кривой $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ остаток квадратурной формулы $R_N(f; \Gamma) = R_N(f; \Gamma; P, S)$, где $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ – вектор-коэффициенты, $S = \{s_k\}_{k=1}^N$ – вектор узлов $(0 \le s_1 < s_2 <$

$... < s_{N-1} < s_N \leq L)$ имеет вполне определенное численное значение

$$R_N(f;\Gamma;P,S) = \int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds - \sum_{k=1}^{N} p_k f\left(x(s_k), y(s_k)\right).$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций из класса $\mathfrak{M}$ на кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, можно принять число

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S) = \sup\left\{|R_N(f;\Gamma;P,S)| : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Полагаем, далее

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S) = \sup\left\{|R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,S)| : \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\right\}.$$

Через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(P,S)$ обозначим множество векторов коэффициентов и узлов (P,S), либо некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на коэффициенты и узлы формулы (2.1.1) (например, требование точности формулы (2.1.1) на многочленов заданной степени, положительность коэффициентов p_k, $k = \overline{1,N}$ и др.).

Для получения формулы, которую можно было бы считать оптимальной для всех функций $f \in \mathfrak{M}$ и кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, полагаем, что формула (2.1.1) является точной для $f(M) = const$, то есть

$$\int\limits_{\Gamma} ds = \sum_{k=1}^{N} p_k = L. \tag{2.1.4}$$

Всюду, в дальнейшем, при изложении последующих результатов будем считать, что условие (2.1.4) выполняется. Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)\right) =$$

$$= \inf\left\{R_N\left(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);P,S\right) : (P,S) \in \mathcal{A}\right\}, \tag{2.1.5}$$

по аналогии с монографией С.М.Никольского [43], будем называть оптимальной оценкой погрешности формулы (2.1.3) на рассматриваемых классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Если существует вектор $(P^0, S^0) \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L)\right) = R_N\left(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); P^0, S^0\right),$$

то квадратурная формула (2.1.3) с этим вектором называется наилучшей или оптимальной на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

§2.2. О точности усложненных квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности

В этом параграфе будем рассматривать усложненные квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого типа, имеющие вид (2.1.3). Эти формулы строятся следующим образом. Пусть требуется вычислить приближенно определенный интеграл

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds. \tag{2.2.1}$$

Для этого отрезок $[0, L]$ делят на N равных частей точками $s_k = kL/N$, $k = 0, 1, 2, ..., N$ и на каждом интервале (s_k, s_{k+1}), $k = 0, 1, 2, ..., N-1$ применяют заранее выбранную квадратурную формулу с узлами

$$s_k \le t_1 < t_2 < \cdots < t_m \le s_{k+1}$$

и коэффициентами p_i $(i = 1, 2, ..., m)$. В результате получим усложненную квадратурную формулу

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \sum_{k=0}^{N-1} L(s_k, s_{k+1}; f) + R_N(f; \Gamma), \tag{2.2.2}$$

где

$$L(s_k, s_{k+1}; f) = \sum_{i=1}^{m} p_i f\left(x(t_i), y(t_i)\right).$$

По описанной схеме усложненные квадратурные формулы, построенные на базе простейших квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона, соответственно имеют вид

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x\left(\frac{(2k+1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k+1)L}{2N}\right)\right) + R_{\Pi}(f;\Gamma), \tag{2.2.3}$$

$$\int_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \frac{L}{2N}\Bigg\{ f\left(x(0), y(0)\right) +$$

$$+2\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + f\left(x(L), y(L)\right)\Bigg\} + R_T(f;\Gamma), \tag{2.2.4}$$

$$\int_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds =$$

$$= \frac{L}{6N}\Bigg\{ f\left(x(0), y(0)\right) + 4\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + f\left(x(L), y(L)\right)\Bigg\} + R_S(f;\Gamma). \tag{2.2.5}$$

Обозначим через $H^{\omega}[0, L]$ множество функций $f(t) \in C[0, L]$ для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0, L]$, удовлетворяющих условию

$$\left| f(t^{'}) - f(t^{''}) \right| \le \omega\left(|t^{'} - t^{''}| \right),$$

где $\omega(t)$ – заданный на отрезке $[0, L]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[0, L]$ функция, в нуле равная нулю.

Через $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2} := \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ обозначим класс кривых $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, определенных параметрическими уравнениями (2.1.2) и таких, у которых $x(s) \in H^{\omega_1}[0, L],\ y(s) \in H^{\omega_2}[0, L]$.

Через $\mathfrak{M}_{\rho}(Q)$ обозначим множество функций $f(M) = f(x, y)$, определенных в области $Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le L^2\}$ и для любых двух точек $M^{'}(x^{'}, y^{'}),\ M^{''}(x^{''}, y^{''}) \in \Gamma \subset Q$ удовлетворяющих условию

$$\left| f(M^{'}) - f(M^{''}) \right| \le \rho(M^{'}, M^{''}), \qquad (2.2.6))$$

где

$$\rho(M^{'}, M^{''}) = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Таким образом, если $M^{'}, M^{''} \in \Gamma \subset H^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$, то неравенство (2.2.6) означает, что

$$\left| f\left(x(s^{'}), y(s^{'})\right) - f\left(x(s^{''}), y(s^{''})\right)\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(x(s'') - x(s')\right)^2 - \left(y(s'') - y(s')\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\omega_1^2\left(|s'' - s'|\right) - \omega_2^2\left(|s'' - s'|\right)}. \tag{2.2.7}$$

Дадим теперь оценку погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольника (2.2.3) и формул трапеций (2.2.4) на классах функций $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ и кривых $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$. Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Для погрешности усложненных квадратурных формул прямоугольников* (2.2.3) *и трапеций* (2.2.4) *на классах функций* $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ *справедливы следующие точные оценки*

$$R_\Pi\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) =$$

$$= R_T\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) =$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds. \tag{2.2.8}$$

Доказательство. Сначала приводим доказательство равенства (2.2.8) для усложненной формулы прямоугольников. Из равенства (2.2.3) для любого $f \in \mathfrak{M}_\rho(Q)$ имеем

$$|R_\Pi(f; \Gamma)| =$$

$$= \left| \int_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds - \frac{L}{N} \sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left[f\left(x(s), y(s)\right) ds - f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) \right] ds \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left| f\left(x(s), y(s)\right) ds - f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) \right| ds \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \sqrt{\omega_1^2\left(\left|s - \frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right) + \omega_2^2\left(\left|s - \frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right)} ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2\left(\frac{(2k-1)L}{2N} - s\right) + \omega_2^2\left(\frac{(2k-1)L}{2N} - s\right)} ds + \right.$$

$$\left. + \int_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N} \sqrt{\omega_1^2\left(s - \frac{(2k-1)L}{2N}\right) + \omega_2^2\left(s - \frac{(2k-1)L}{2N}\right)} ds \right) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{N} \int_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds = 2N \int_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds.$$

Таким образом, мы доказали, что для произвольной $f(x(s), y(s)) \in \mathfrak{M}_\rho(Q)$ и произвольной кривой $\Gamma \in \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ выполняется неравенство

$$|R_\Pi(f; \Gamma)| \leq 2N \int_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds. \qquad (2.2.9)$$

Непосредственным вычислением легко доказать, что для экстремальной кривой $\Gamma^0 \in \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ параметрические уравнения, которые имеют вид

$$\Gamma^0 := \begin{cases} x_0 := x_0(s) = \omega_1(|s - s_k^0|) \\ y_0 := y_0(s) = \omega_2(|s - s_k^0|), \ (0 \le s \le L), \end{cases}$$

где $s_k^0 := (2k-1)L/2N$ и функция $f_0(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}_\rho(Q)$, определенная равенством

$$f_0(x_0, y_0) := f_0(x_0(s), y_0(s)) =$$

$$= \sqrt{\omega_1^2(|s - s_k^0|) + \omega_2^2(|s - s_k^0|)}$$

$$((k-1)L/N \le s \le kL/N; k = 1, 2, ..., N),$$

неравенство (2.2.9) обращается в равенство. В самом деле, поскольку $f_0(x(s_k^0, y(s_k^0))) \equiv 0, \ k = 1, 2, \cdots, N$, то простой подсчет дает

$$\left|R_\Pi(f_0; \Gamma^0)\right| = \int\limits_0^L f_0(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N} f_0(x(s), y(s))ds =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N} \sqrt{\omega_1^2\left(\left|s - \frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right) + \omega_2^2\left(\left|s - \frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right)} =$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds$$

или что то же

$$R_\Pi\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds. \qquad (2.2.10)$$

Этим утверждение теоремы 2.2.1 для усложненной квадратурной формулы прямоугольников доказано.

Приступая к доказательству аналогичного утверждения для усложненной квадратурной формулы трапеций (2.2.4), оценим остаток формулы следующим образом. Положив ради удобства и простоты вычислений

$$s_k = kh,\ k = 0, 1, \cdots, N;\quad h = L/N;\quad t_k = s_{k-1} + h/2 = s_k - h/2,$$

$$t_{k+1} = s_k + h/2,\ k = 1, 2, \cdots, N-1;\quad t_0 = 0, t_N = L,$$

остаток усложненной квадратурной формулы трапеций (2.2.4) запишем в следующем виде

$$R_T(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds - \frac{h}{2}\Biggl\{ f\left(x(0), y(0)\right) +$$

$$+2\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x(kh), y(kh)\right) + f\left(x(L), y(L)\right)\Biggr\} =$$

$$= \int\limits_0^{h/2} \left[f\left(x(s), y(s)\right) - f\left(x(0), y(0)\right)\right] ds +$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f\left(x(s), y(s)\right) - f\left(x(s_k), y(s_k)\right)\right] ds +$$

$$+\int\limits_{L-h/2}^{L} \left[f\left(x(s), y(s)\right) - f\left(x(L), y(L)\right)\right] ds. \tag{2.2.11}$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (2.2.11), для любой функции $f \in \mathfrak{M}_\rho(Q)$ и любой кривой $\Gamma \in \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ будем иметь

$$|R_T(f;\Gamma)| \leq \int\limits_0^{h/2} \left|f\left(x(s), y(s)\right) - f\left(x(0), y(0)\right)\right| ds +$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|f\left(x(s),y(s)\right)-f\left(x(s_k),y(s_k)\right)\right|ds+$$

$$+\int\limits_{L-h/2}^{L}\left|f\left(x(s),y(s)\right)-f\left(x(L),y(L)\right)\right|ds\leq$$

$$\leq\int\limits_{0}^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds+\int\limits_{L-h/2}^{L}\sqrt{\omega_1^2(L-s)+\omega_2^2(L-s)}ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{s_k-h/2}^{s_k+h/2}\sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|)+\omega_2^2(|s-s_k|)}=$$

$$=2\int\limits_{0}^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left(\int\limits_{s_k-h/2}^{s_k}+\int\limits_{s_k}^{s_k+h/2}\right)\sqrt{\omega_1^2(|s-s_k|)+\omega_2^2(|s-s_k|)}ds=$$

$$=2\int\limits_{0}^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds+2(N-1)\int\limits_{0}^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds=$$

$$=2N\int\limits_{0}^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds. \qquad (2.2.12)$$

Как и в случае формулы прямоугольников, непосредственным вычислением легко доказать, что для экстремальной кривой $\Gamma^*\in\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$, параметрические уравнения которой имеют вид

$$x^*:=x^*(s)=\omega_1(|s-s_k|)$$

$$y^* := y^*(s) = \omega_2(|s - s_k|),\ (0 \le s \le L),$$

где $s_k := kh, k = 0, 1, \cdots, N, h = L/N$, и функция $f_* \in \mathfrak{M}_\rho(Q)$, определенная на экстремальной кривой Γ^* равенством

$$f_*\left(x^*(s), y^*(s)\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}, \quad 0 \le s \le L/(2N) \\ \sqrt{\omega_1^2(|s - s_k|) + \omega_2^2(|s - s_k|)} \\ \left(s_k - L/(2N) \le s \le s_k + L/(2N),\ s_k = kh,\ h = L/N, k = \overline{1, N-1}\right) \\ \sqrt{\omega_1^2(L - s) + \omega_2^2(L - s)}, \quad L - h/2 \le s \le L. \end{cases}$$

Неравенство (2.2.12) обращается в равенство. Это проверяется следующим образом. Заметив, что $f_*(x^*(s_k), y^*(s_k)) \equiv 0,\ k = 1, 2, \cdots, N$ будем иметь:

$$R_T(f_*, \Gamma^*) = \int\limits_0^L f^*(x^*(s), y^*(s)) = \int\limits_0^{L/(2N)} f^*(x^*(s), y^*(s))ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{s_k - L/(2N)}^{s_k + L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(|s - s_k|) + \omega_2^2(|s - s_k|)}ds + \int\limits_{L-h/2}^{L} \sqrt{\omega_1^2(L - s) + \omega_2^2(L - s)}ds =$$

$$= 2 \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds + 2\sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} =$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds.$$

Следовательно, для указанных классов функций и кривых имеем:

$$R_T\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1, \omega_2}[0, L]\right) = R_T(f_*; \Gamma) =$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds. \quad (2.2.13)$$

Требуемое равенство (2.2.8) вытекает из (2.2.10) и (2.2.13) чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

§2.3. Оптимальные квадратурные формулы приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого типа для классов функций и кривых, задаваемых модулями гладкости (модулями непрерывности второго порядка)

В этом параграфе для некоторых классов функций и кривых найдена точная оценка погрешности оптимальных квадратурных формул приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого типа, задаваемых модулями непрерывности второго порядка (модулями гладкости).

Рассматривается квадратурная формула (2.1.3) вида

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \sum_{k=0}^{N} p_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(f;\Gamma;P,S), \qquad (2.3.1)$$

задаваемая вектором коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и вектором узлов $S = \{s_k : 0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \le L\}$. $R_N(f;\Gamma;P,S)$ – погрешность квадратурной формулы (2.3.1) на функцию f.

Пусть задан класс W функций $f(M) = f\left(x(s), y(s)\right)$, определенных на отрезке $[0,L]$ и для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0,L]$ удовлетворяющих условию

$$\left| f\left(x(t^{'}), y(t^{'})\right) + f\left(x(t^{''}), y(t^{''})\right) - 2f\left(x\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right), y\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right)\right)\right| \le$$

$$\le \left|x(t^{'}) + x(t^{''}) - 2x\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right)\right| + \left|y(t^{'}) + y(t^{''}) - 2y\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right)\right|.$$

Через $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим класс кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$, параметрические уравнения (2.1.2) которых удовлетворяют условию

$$\left|x(t^{'}) + x(t^{''}) - 2x\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right)\right| \le 2\omega_1\left(\frac{|t^{'}-t^{''}|}{2}\right),$$

$$\left|y(t^{'}) + y(t^{''}) - 2y\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right)\right| \le 2\omega_2\left(\frac{|t^{'}-t^{''}|}{2}\right),$$

где $\omega_i(\delta)(i=1,2)$ – заданные на отрезке $[0,L]$ модули непрерывности, то есть непрерывные и неубывающие для $0\le t\le L$ функции, такие что $\omega_i(0)=0$ и $0\le\omega_i(t_2)-\omega_i(t_1)\le\omega_i(t_2-t_1)(0\le t_1\le t_2), i=1,2.$

В этом параграфе вычислим величину (2.1.5) для введенных классов функций W и кривых $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$, то есть отыщем величину

$$\mathcal{E}_N\left(W;\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right)=\inf\left\{R_N\left(W;\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L];P,S\right):(P,S)\subset\mathcal{A}\right\}. \quad (2.3.2)$$

Если существуют векторы $(P^0,S^0)\subset\mathcal{A}$, для которых

$$\mathcal{E}_N\left(W;\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right)=R_N\left(W;\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L];P^0,S^0\right), \quad (2.3.3)$$

то этот вектор коэффициентов и узлов определяет наилучшую квадратурную формулу вида (2.3.1) для рассматриваемых классов функций W и кривых $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$. При отыскании наилучшей квадратурной формулы будем предполагать, что между узлами и коэффициентами существует линейная связь следующего вида

$$s_k=\sum_{i=1}^{k}p_i-\frac{p_k}{2},\ (k=1,2,\cdots,N),\quad \sum_{k=1}^{N}p_k=L. \quad (*)$$

Для таких квадратурных формул погрешность представима в виде

$$R_N(f;\Gamma;P,S)=\int\limits_0^L f\left(x(s),y(s)\right)ds-\sum_{k=1}^{N}p_kf\left(x(s_k),y(s_k)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{s_k-\frac{p_k}{2}}^{s_k+\frac{p_k}{2}}f\left(x(s),y(s)\right)ds-\sum_{k=1}^{N}p_kf\left(x(s_k),y(s_k)\right). \quad (2.3.5)$$

Разбивая интеграл по отрезку $[s_k-p_k/2,s_k+p_k/2]$ на два промежутка $[s_k-p_k/2,s_k]$ и $[s_k,s_k+p_k/2]$ сделаем в интеграле на промежутке $[s_k-p_k/2,s_k]$

замену s на $s-t$, а в интеграле на промежутке $[s_k, s_k+p_k/2]$ замену s на $s+t$, после простых преобразований получим

$$R_N(f;\Gamma;P,S)=\int\limits_0^L f\left(x(s),y(s)\right)ds-\sum_{k=1}^N p_k f\left(x(s_k),y(s_k)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^N\int\limits_0^{p_k/2}\left[f\left(x(s_k+t),y(s_k+t)\right)+f\left(x(s_k-t),y(s_k-t)\right)-2f\left(x(s_k),y(s_k)\right)\right]dt.$$

Оценивая по абсолютной величине полученное соотношение для произвольной $f\in W$ и $\Gamma\subset\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$, получаем

$$|R_N(f;\Gamma;P,S)|=\left|\int\limits_0^L f\left(x(s),y(s)\right)ds-\sum_{k=1}^N p_k f\left(x(s_k),y(s_k)\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^N\int\limits_0^{p_k/2}\Big|f\left(x(s_k+t),y(s_k+t)\right)+f\left(x(s_k-t),y(s_k-t)\right)-$$

$$-2f\left(x(s_k),y(s_k)\right)\Big|dt\leq\sum_{k=1}^N\int\limits_0^{p_k/2}\Big\{|x(s_k+t)+x(s_k-t)-2x(s_k)|+$$

$$+|y(s_k+t)+y(s_k-t)-2y(s_k)|\Big\}dt\leq 2\sum_{k=1}^N\int\limits_0^{p_k/2}\left\{\omega_1(t)+\omega_2(t)\right\}dt. \quad (2.3.6)$$

Если $p_k>0, k=1,2,\cdots,N$, то неравенство (2.3.6) обращается в равенство для функции $f_0\in W$, определенной следующим образом

$$f_0\left(x(s),y(s)\right)=\omega_1\left(|x-s_k|\right)+\omega_2\left(|x-s_k|\right)+$$

$$+\omega_1\left(\frac{p_1}{2}\right)+\omega_2\left(\frac{p_1}{2}\right)-\left\{\omega_1\left(\frac{p_k}{2}\right)+\omega_2\left(\frac{p_k}{2}\right)\right\}$$

для $s_k - p_k/2 \le s \le s_k + p_k/2,\ k = 1, 2, \cdots, N$; и кривой $\Gamma^* : x = \omega_1(s)$, $y = \omega_2(s),\ 0 \le s \le L$. Таким образом, мы доказали, что

$$R_N\left(W; \bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0, L], P\right) = 2\sum_{k=1}^{N} \int\limits_0^{p_k/2} [\omega_1(t) + \omega_2(t)]\, dt. \qquad (2.3.7)$$

Минимизируем правую часть (2.3.7) по коэффициентам p_k при условии $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k = L$, для чего составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{J}(p_1, p_2, ..., p_N) = 2\sum_{k=1}^{N} \int\limits_0^{p_k/2} [\omega_1(t) - \omega_2(t)]\, dt + \lambda\left(L - \sum_{k=1}^{N} p_k\right). \qquad (2.3.8)$$

Дифференцируя функцию $\mathcal{J}(p_1, p_2, ..., p_N)$ по коэффициентам p_k, получаем

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_k} = \omega_1\left(\frac{p_k}{2}\right) + \omega_2\left(\frac{p_k}{2}\right) - \lambda = 0,\ k = 1, 2, \cdots, N.$$

Решая эту систему, находим $p_1 = p_2 = \cdots = p_N$, и так как $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k = L$, то $p_k = L/N, k = 1, 2, \cdots N$. Положив эти значения в равенство $(*)$, получим

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} p_i - \frac{p_k}{2} = \frac{kL}{N} - \frac{L}{2N} = \frac{(2k-1)L}{2N}.$$

Простые вычисления показывают, что

$$d^2(p_1, p_2, \cdots, p_N)\Big|_{p_i = L/N} \ge 0, \qquad (2.3.9)$$

откуда сразу вытекает, что найденные значения

$$p_k = L/N,\ s_k = \frac{(2k-1)L}{2N},\quad k = 1, 2, \cdots N$$

обращают в минимум величину (2.3.1), и мы приходим к следующему утверждению

Теорема 2.3.1. *Среди квадратурных формул вида* (2.3.1) *для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого типа на классе функций W и классе кривых $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ наилучшей является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds \approx \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f(M_k^*), \tag{2.3.10}$$

где $M_k = M\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)$; $x = x(s), y = y(s)$ *– параметрические уравнения кривой* Γ, L *– ее длина.*

При этом точная оценка погрешности формулы (2.3.10) *на указанных классах функций и кривых равна*

$$\mathcal{E}_N\left(W; H_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} [\omega_1(t)+\omega_2(t)]\, dt.$$

Из доказанной теоремы 2.3.1 вытекает

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.3.1 *для погрешности квадратурной формулы* (2.3.10) *при* $\omega_1(t) = M_1 t^{\alpha}$, $\omega_2 = M_2 t^{\beta}$, $M_1, M_2 > 0$, $0 \le \alpha, \beta \le 1$ *и* $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L] \equiv Z_2^{\alpha,\beta}[0,L]$ *– класс Зигмунда порядка* (α,β) *с константами* M_1 *и* M_2 *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(W; Z^{(\alpha,\beta)}[0,L]\right) = \frac{M_1 L}{\alpha+1}\cdot\left(\frac{L}{2N}\right)^{\alpha} + \frac{M_2 L}{\beta+1}\cdot\left(\frac{L}{2N}\right)^{\beta}.$$

Замечание. *Если вместо класса W ввести в рассмотрение класс W^*-функций $f(M) = f(x(s), y(s))$, определенных на отрезке $[0,L]$ и для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0,L]$ удовлетворяющих условию*

$$\left| f(x(t^{'}), y(t^{'})) + f(x(t^{''}), y(t^{''})) - 2f\left(x\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right), y\left(\frac{t^{'}+t^{''}}{2}\right)\right)\right| \le$$

$$\le 2\sqrt{\omega_1^2\left(\left|\frac{s^{'}-s^{''}}{2}\right|\right) + \omega_2^2\left(\left|\frac{s^{'}-s^{''}}{2}\right|\right)},$$

то тем же способом, как и выше, доказывается следующая

Теорема 2.3.2. *Среди квадратурных формул вида* (2.3.1) *для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого типа на классе* W^* *и классе кривых* $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *формула* (2.3.10) *является наилучшей. При этом справедлива следующая точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(W^*, H_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)}dt.$$

§2.4. Оптимальная квадратурная формула типа Маркова приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности

В данном параграфе исследуются квадратурные формулы типа Маркова (с закрепленными узлами в концах отрезка интегрирования)

$$\int\limits_0^L f\left(x(s),y(s)\right)ds =$$

$$= p_0 f\left(x(0),y(0)\right)+\sum_{k=1}^{N-1} p_k f\left(x(s_k),y(s_k)\right)+p_N f\left(x(L),y(L)\right)+R_N(f;\Gamma) \quad (2.4.1)$$

с произвольными векторами коэффициентами $P=\{p_k\}_{k=0}^N$ и векторами узлами $S=\{s_k\}_{k=0}^N$ $(0=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_{N-1}<s_N=L)$. Конкретизируем класс кривых $\{\Gamma\}$ и класс функций $\{f(M)\}$, для которых решаем экстремальную задачу (2.1.5), и найдем наилучшие коэффициенты и узлов, а также точную оценку погрешности наилучшей квадратурной формулы вида (2.4.1) на нижеприведенных классах функций и кривых.

Напомним что, как и в параграфе 2.2 этой главы, через $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma\subset R^2$, заданных параметрическими уравнениями (2.1.2), у которых $x(s)\in H^{\omega_1}[0,L],\ y(s)\in H^{\omega_2}[0,L]$. Очевидно, что решение экстремальной задачи (2.1.5) существенно зависит от выбора метрики в R^2. Если $M^{'}=M(x^{'},y^{'})\in R^2, M^{''}=M(x^{''},y^{''})\in R^2$, то введем в рассмотрение следующие расстояние:

а) евклидово расстояние

$$\rho_1(M^{'},M^{''})=\sqrt{(x^{''}-x^{'})^2+(y^{''}-y^{'})^2};$$

б)хэммингово расстояние

$$\rho_2(M^{'}, M^{''}) = |x^{''} - x^{'}| + |y^{''} - y^{'}|;$$

в) расстояние Минковского

$$\rho_3(M^{'}, M^{''}) = \max\{|x^{''} - x^{'}|, |y^{''} - y^{'}|\}.$$

Через $\mathfrak{M}_{\rho_i}, i = 1, 2, 3$ обозначим класс функций $\{f(M)\}$, определенных на кривых $\Gamma \subset \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ и для любых двух точек $M^{'}, M^{''} \in \Gamma$ удовлетворяющих условию

$$\left| f(M^{'}) - f(M^{''}) \right| \leq \rho_i(M^{'}, M^{''}),\ i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, если $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$, то

$$\left| f(M^{'}) - f(M^{''}) \right| \leq$$

$$\leq |x(s^{'}) - x(s^{''})| + |y(s^{'}) - y(s^{''})| \leq$$

$$\leq \omega_1(|s^{'} - s^{''}|) + \omega_2(|s^{'} - s^{''}|),\ s^{'}, s^{''} \in [0, L],$$

а если $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_1}$, то

$$\left| f(M^{'}) - f(M^{''}) \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\omega_1^2(|s' - s''|) + \omega_2^2(|s' - s''|)},\ s^{'}, s^{''} \in [0, L]. \tag{2.4.2}$$

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.4.1) *с произвольными векторами коэффициентами и узлами* $(P, S), P = \{p_k\}_{k=0}^{N}$, $S = \{s_k\}_{k=0}^{N}$ *наилучшей для классов функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}(i = 1, 2, 3)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ *является формула*

$$\int_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \frac{L}{N}\Bigg\{\left[f(x(0), y(0)) + f(x(L), y(L))\right]/2+$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_N(f;\Gamma). \qquad (2.4.3)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (2.4.1) *типа Маркова на указанных классах функций и кривых справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds, \qquad (2.4.4)$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \left(\omega_1(s)+\omega_2(s)\right)ds, \qquad (2.4.5)$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \max\left\{\omega_1(s),\omega_2(s)\right\}ds. \qquad (2.4.6)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, ради простоты, доказательств приводим для класса $\mathfrak{M}_{\rho_2}$, поскольку для классов $\mathfrak{M}_{\rho_1}$ и $\mathfrak{M}_{\rho_3}$ оно приводится по той же схеме известным методом Н.П.Корнейчука [43]. Каждому вектору узлов

$$S = \{s_k\}_{k=0}^N : 0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N = L$$

сопоставим подмножество $\mathfrak{M}_{\rho_2,S}$ функций из $\mathfrak{M}_{\rho_2}$, таких, что в точках $M^{(k)} = (x(s_k), y(s_k)) \subset \Gamma, k = 0,1,\cdots,N$, обращаются в нуль $f(M^{(k)}) \equiv 0$. Фиксируем произвольный вектор узлов $S = \{s_k\}_{k=0}^N$ и заметим, что если $f \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$, то для любой точки $M\left(x(s), y(s)\right) \in \Gamma$ и любого узла $s_k, s_k \in [0,L], k = 0,1,\cdots,N$ будем иметь

$$|f(M)| = \left|f(M) - f(M^{(k)})\right| \le \omega_1(|s-s_k|) + \omega_2(|s-s_k|),$$

откуда сразу следует, что

$$|f(M)| \le \min_{s_k}\left\{\omega_1(|s-s_k|)+\omega_2(|s-s_k|)\right\} \equiv \Psi(s). \qquad (2.4.7)$$

Функцию $\Psi(s) = \Psi_S(s)$, определенную равенством (2.4.7), в силу расположения узлов $s_k < s_{k+1}, k = 0,1,...,N$, а также монотонно возрастания $\omega_1(s)$ и $\omega_2(s)$ можно записать в виде

$$\Psi(s) = \Psi_S(s) = \omega_1\left(\min_{s_k}|s-s_k|\right) + \omega_2\left(\min_{s_k}|s-s_k|\right).$$

Легко показать, что $\Psi(s) \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$. В самом деле, имеем

$$\left|\Psi(s^{'}) - \Psi(s^{''})\right| =$$

$$= \left|\omega_1\left(\min_{s_k}|s^{'}-s_k|\right) - \omega_1\left(\min_{s_k}|s^{''}-s_k|\right) +\right.$$

$$\left.+\omega_2\left(\min_{s_k}|s^{'}-s_k|\right) - \omega_2\left(\min_{s_k}|s^{''}-s_k|\right)\right| \le$$

$$\le \left|\omega_1\left(\min_{s_k}|s^{'}-s_k|\right) - \omega_1\left(\min_{s_k}|s^{''}-s_k|\right)\right| +$$

$$+\left|\omega_2\left(\min_{s_k}|s^{'}-s_k|\right) - \omega_2\left(\min_{s_k}|s^{''}-s_k|\right)\right| \le$$

$$\le \omega_1\left(\min_{s_k}|s^{'}-s_k| - \min_{s_k}|s^{''}-s_k|\right) + \omega_2\left(\min_{s_k}|s^{'}-s_k| - \min_{s_k}|s^{''}-s_k|\right) \le$$

$$\le \omega_1\left(|s^{'}-s^{''}|\right) + \omega_2\left(|s^{'}-s^{''}|\right).$$

Поскольку $\Psi(M^{(k)}) = \Psi(s_k) = 0$, то $\Psi_S(s) \in \mathfrak{M}_{\rho_2,S}$. Это с учетом (2.4.7) приводит к соотношению

$$R_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2,S} : \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]; P, S\right) =$$

$$= \sup_{f\in\mathfrak{M}_{\rho_2,S}} \sup_{\Gamma\in H^{\omega_1,\omega_2}[0,L]} \left| \int\limits_0^L f\left(x(s),y(s)\right)ds \right| =$$

$$= \int\limits_0^L \Psi_s(s)ds = \int\limits_0^L \left[\omega_1(\min_{s_k}|s-s_k|) + \omega_2(\min_{s_k}|s-s_k|)\right]ds. \tag{2.4.8}$$

Мы теперь докажем, что если вектор узлов S_0 имеет вид

$$S_0 = \left\{s_k^0 : s_k^0 = kL/N, k = 0,1,\cdots,N\right\},$$

то

$$\int\limits_0^L \Psi_S(s)ds \geq \int\limits_0^L \Psi_{S_0}(s)ds. \tag{2.4.9}$$

В самом деле, положив

$$\Phi(s) = \int\limits_0^s \Psi_S(t)dt,\ 0 \leq s \leq L \tag{2.4.10}$$

и учитывая, что функция (2.4.10) выпукла вниз на отрезке $[0,L]$ можно указать такую возрастающую систему чисел $\alpha_\nu,\ \nu = 1,2,\cdots,N$, что выполняется равенство (см., например, [26, стр.369-370])

$$\int\limits_0^L \Psi_S(s)ds = 2\sum_{\nu=1}^N \Phi(\alpha_\nu),\ \text{причем}\ 2\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu = L,$$

а потому, согласно неравенству Иенсена [61,стр.92], имеем

$$\sum_{\nu=1}^N \Phi(\alpha_\nu) \geq N\Phi\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu\right) = N\Phi\left(\frac{L}{2N}\right),$$

откуда сразу следует, что

$$\int\limits_0^L \Psi_S(s)ds = 2\sum_{\nu=0}^N \Phi(\alpha_\nu) \geq 2N\Phi\left(\frac{L}{2N}\right) =$$

$$= \int_0^L \Psi_{S_0}(s)ds = 2N \int_0^{L/(2N)} [\omega_1(s)+\omega_2(s)]\, ds. \qquad (2.4.11)$$

Таким образом, учитывая (2.4.8) и (2.4.11) получаем

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) \geq \inf_{(P,S)} R_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2,S}; \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]; P, S\right) =$$

$$= \inf_{(P,S)} \int_0^L \Psi_S(s)ds = \int_0^L \Psi_{S_0}(s)ds = 2N \int_0^{L/(2N)} [\omega_1(s)+\omega_2(s)]\, ds. \qquad (2.4.12)$$

Для получения оценки сверху правой части неравенства (2.4.12) рассмотрим квадратурную формулу типа Маркова (2.4.1), заданную вектором узлов $S_0 = \left\{s_k^0 : s_k^0 = kL/N, k = 0, 1, \cdots, N\right\}$ и вектором коэффициентов

$$P = \left\{p_k^0 : p_k^0 = L/N, \quad k = 1, 2, \cdots, N-1;\ p_0^0 = p_N^0 = L/(2N)\right\}.$$

Поэтому для любой кривой $\Gamma \in \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ и любой функции $f \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$, в предположении

$$t_0^0 = 0,\ t_k^0 = (s_{k-1}^0 + s_k^0)/2,\ k = 1, 2, \cdots, N;\ t_{N+1}^0 = L$$

получаем

$$\left|R_N(f;\Gamma;P^0,S^0)\right| = \left|\int_0^L f\left(x(s),y(s)\right) ds - \frac{L}{2N} f(x(0),y(0)) - \right.$$

$$\left. - \frac{L}{2N} f\left(x(L),y(L)\right) - \frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{L/(2N)} \left|f\left(x(s),y(s)\right) - f(x(0),y(0))\right| ds +$$

$$+\int\limits_{L-L/(2N)}^{L} \left|f\left(x(s),y(s)\right)-f\left(x\left(L\right),y\left(L\right)\right)\right| ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k^0}^{t_{k+1}^0}\left|f(x(s),y(s))-f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right),y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\right| ds\le$$

$$\le 2\int\limits_0^{L/(2N)}\left[\omega_1(s)+\omega_2(s)\right]ds+\sum_{k=1}^{N-1}\left\{\int\limits_{t_k^0}^{kL/N}\left[\omega_1\left(\frac{kL}{N}-s\right)+\omega_2\left(s-\frac{kL}{N}\right)\right]ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{kL/N}^{t_{k+1}^0}\left[\omega_1\left(s-\frac{kL}{N}\right)+\omega_2\left(s-\frac{kL}{N}\right)\right]ds\right\}=$$

$$=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\left[\omega_1(s)+\omega_2(s)\right]ds. \tag{2.4.13}$$

Сравнивая оценку снизу (2.4.12) и оценку сверху (2.4.13), получаем требуемое равенство (2.4.5), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

Если же ввести в рассмотрение квадратурную формулу (2.3.1) с произвольным вектором узлов

$$S=\{s_k:\ 0\le s_1<s_2<\cdots<s_N\le L\}$$

и произвольным вектором коэффициентов $P=\{p_k\}_{k=1}^N$, то повторяя буквально схему рассуждения теоремы 2.4.1, приходим к следующему утверждению

Теорема 2.4.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.3.1) *с произвольными векторами коэффициентов и узлов*

$$P=\{p_k\}_{k=1}^N,\ S=\{s_k:\ 0\le s_1<s_2<\ldots<s_N\le L\}$$

наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и класса кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}[0, L]$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L f\left(x(s),\, y(s)\right) ds =$$

$$= \frac{L}{N} \sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f). \tag{2.4.14}$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (2.4.14) *на указанных классах функций и кривых справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}[0, L]\right) = 2N \int_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)} ds,$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}[0, L]\right) = 2N \int_0^{L/(2N)} \left(\omega_1(s) + \omega_2(s)\right) ds,$$

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \mathcal{T}^{\omega_1, \omega_2}[0, L]\right) = 2N \int_0^{L/(2N)} \max\{\omega_1(s), \omega_2(s)\} ds.$$

Список литературы

[1] Алхимова В.М. Наилучшие квадратурные формулы с равноотстоящими узлами / В.М.Алхимова // ДАН СССР. – 1972. – Т.202. – №2. – С.263-266.

[2] Бабенко В.Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул / В.Ф.Бабенко // Матем.заметки. – 1976. – Т.19. – №3. – С.313-332.

[3] Бабенко В.Ф. Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов функций весовых кубатурных формул / В.Ф.Бабенко // Матем.заметки. – 1976. – Т.20. – №4. – С.589-595.

[4] Бабенко В.Ф. Об оптимальной оценке погрешности кубатурных формул на некоторых классах непрерывных функций / В.Ф.Бабенко // Analysis Mathematica. – 1977. – Т.3. – №1. – С.3-9.

[5] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С.Бахвалов – М.: Наука, 1975. – 631 с.

[6] Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов / И.В.Бойков – Саратов: Из-во Саратовского университета, 1983. – 210 с.

[7] Боянов Б.Д. Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для одного класса дифференцируемых функций / Б.Д.Боянов // ДАН СССР. – 1977. – 232. – №6. – С.1233-1236.

[8] Бусарова Т.Н. Наилучшие квадратурные формулы с весом для класса функции ограниченной вариации / Т.Н.Бусарова, А.А.Борисенко // В сб.:

Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск. – 1982. – С.13-19.

[9] Бусарова Т.Н. О порядке остатка формулы прямоугольников для фиксированных функций. / Т.Н.Бусарова // В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск. – 1973. – С.13-15.

[10] Бусарова Т.Н. Наилучшие квадратурные формулы для одного класса дифференцируемых периодических функций / Т.Н.Бусарова // Укр.матем.журнал. – 1973. – Т.25 – №3. – С.291-301.

[11] Бусарова Т.Н. Об оптимизации приближенного интегрирования быстроосциллирующих функций / Т.Н.Бусарова // Укр.матем.журнал. – 1986. – Т.38. – №1. – С.89-93.

[12] Вакарчук С.Б. К интерполяции билинейными сплайнами / С.Б.Вакарчук // Матем.заметки. – 1990. – №47. – Вып.5. – С.26-29.

[13] Васильев Н.И. Применение полиномов Чебышева в численном анализе / Н.И.Васильев, Ю.А.Клоков, А.Я.Шкерстена – Рига: Знатне, 1984.– 240 с.

[14] Великин В.Л. Эрмитовы сплайны и связанные с ними квадратурные формулы для некоторых классов дифференцируемых функций / В.Л.Виленкин // Изв. вузов. – Математика. – 1976. – №5. – С.15-28.

[15] Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б.Г.Габдулхаев – Казань: Из-во Каз.ун-та, 1980. – 232 с.

[16] Гиршович Ю.И. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале / Ю.И.Гиршович // Известия АН ЭсТ.ССР. – Сер.физ.-мат.наук. – 1975. – Т.24 – №1. – С.121-123.

[17] Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций / В.Л.Гончаров – Гостехиздат, 1954. – 327 с.

[18] Ермолаева Л.Б. Об одной квадратурной формуле / Л.Б.Ермолаева // Изв.вузов. Математика. – 2000. – №3. – С.25-28.

[19] Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы / А.А.Женсыкбаев // Успехи матем.наук. – 1981. – Т.36. – №4. – С.107-159.

[20] Жилейкин Я.М. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций / М.Я.Жилейкин, А.Б.Кукаркин // ЖВМ и МФ. – 1978. – 18. – №2. – С.294-301.

[21] Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С.Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко. – М.:Наука, 1985. – 396 с.

[22] Задирак В.К. Оптимальные квадратурные формулы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций из некоторых классов и их реализация на ЭВМ / В.К.Задирак, С.С.Василенко – Киев, 1974. – 37 с. – (Препринт АН УССР – Ин-т кибернетики; 74-17).

[23] Ибрагимов И.И. О некоторых наилучших кубатурных формулах / И.И.Ибрагимов, Р.М.Алиев // Изв.АН Азерб.ССР. – 1967. – №3-4. – С.154-161.

[24] Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных / Н.П.Корнейчук // Матем.заметки. – 1968. – Т.3. – №5. – С.565-576.

[25] Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение / Н.П.Корнейчук, Н.Е.Лушпай // Изв. АН СССР. – Серия матем. – 1969. – Т.33. – №6. – С.1416-1437.

[26] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Н.П.Корнейчук – М.: Наука, 1983. – 324 с.

[27] Корнейчук Н.П. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н.П.Корнейчук Н.П., Б.Ф.Бабенко, А.А.Лигун // Киев: Наукова думка, 1992. – 304 с.

[28] Крылов В.И. Справочная книга по численному интегрированию / В.И.Крылов, Л.Т.Шульгина – М.: Наука, 1966. – 371 с.

[29] Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов / В.И.Крылов – М.: Наука, 1967 – 500 с.

[30] Лебедь Г.К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций / Г.К.Лебедь // Матем.заметки. – 1968. – Т.3. – №5. – С.577-586.

[31] Левин М.И. Экстремальные задачи для кубатурных формул / М.И.Левин М.И., Ю.Г.Гиршович // ДАН ССР. – 1977. – Т.236. – №6. – С.1303-1306.

[32] Левин М.И. Наилучшие кубатурные формулы на множествах периодических функций / М.И.Левин, Ю.Г.Гиршович // Изв.АН ЭсТ.ССР. – Сер.физ.-матем. – 1977. – 26. – №2. – С.114-122.

[33] Лигун А.А. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций / А.А.Лигун // Матем.заметки – 1976. – Т.19. – №6. – С.913-926.

[34] Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на некоторых классах функций / Н.Е.Лушпай // Изв.вузов матем. – 1969. – №12. – С.53-69.

[35] Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций / Н.Е.Лушпай // Матем.заметки. – 1969. – Т.4. – №6. – С.475-480.

[36] Лушпай Н.Е. Оптимальные квадратурные формулы для дифференцируемых периодических функций / Н.Е.Лушпай // В сб. Исслед. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложениями – Днепропетровск, 1972. – С.53-55.

[37] Лушпай Н.Е. О наилучших кубатурных формулах для одного класса дифференцируемых функций двух переменных / Н.Е.Лушпай // Сб.работ асп.ДГУ (матем. и механика) – Днепропетровск – 1972. – С.35-39.

[38] Лушпай Н.Е. О наилучших кубатурных формулах для классов дифференцируемых функций двух переменных / Н.Е.Лушпай, С.В.Переверзев // В сб. Исслед. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложениями – Днепропетровск – 1976. – С.38-45.

[39] Моторный В.П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В.П.Моторный // Доклады АН СССР. – 1973. – Т.211. – №5. – С.1060-1062.

[40] Моторный В.П. О квадратурных формулах с равными коэффициентами / В.П.Моторный // Укр.матем.журнал. – 1995. – Т.47. – №9. – С.1205-1208.

[41] Натансон И.П. Конструктивная теория функций / И.П.Натансон – М.: Гостехиздат, 1949. – 684 с.

[42] Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами / С.М.Никольский // Успехи матем.наук. – 1950. – Т.5. – Вып.2. – №36. – С.165-177.

[43] Никольский С.М. Квадратурные формулы / С.М.Никольский – М.: Наука, 1986. – 256 с.

[44] Онегов Л.А. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью / Л.А.Онегов // Изв.вузов. – Математика. – 1981. – №9. – С.76-79.

[45] Осколков К.И. Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций / К.И.Осколков // ДАН СССР. – 1979. – Т.249. – №1. – С.49-52.

[46] Парвонаева З.А. Об оптимальных квадратурных формулах для функций определенных на полуоси / З.А.Парвонаева // Материалы межд. научной конферен. „Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа" (г.Душанбе – 8-10 ноября – 2005г.) – С.136.

[47] Парвонаева З.А. Оптимизация весовых квадратурных формул для классов функций малой гладкости / З.А.Парвонаева // ДАН РТ. – 2008. – Т.51. – №2. – С.87-96.

[48] Парвонаева З.А. О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах для классов функций задаваемых модулями непрерывности / З.А.Парвонаева // Материалы межд. науч. конф. посв. 60-летию академика К.Х.Бойматова (г.Душанбе – 23-24 июня 2010 г.).

[49] Парвонаева З.А. О наилучших весовых кубатурных формулах для некоторых классов функций / З.А.Парвонаева // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №3. – С.6-10.

[50] Сабоиев Р.С. Об оптимальных по коэффициентам квадратурных формулах с весовыми функциями – имеющими фиксированные особенности / Р.С.Сабоиев // ДАН РТ. – 2005. – Т.48. – №3-4. – С.315-323.

[51] Сабоиев Р.С. О наилучших по коэффициентам весовых кубатурных формулах для классов функций задаваемых модулями непрерывности / Р.С.Сабоиев // ДАН РТ. – 2006. – Т.49. – №7. – С.597-603.

[52] Сангмамадов Д.С. Приближенное вычисление двумерных сингулярных интегралов с фиксированной особенностью в круге / Д.С.Сангмамадов // Вестник Хорогского университета. – Серия 1. – 2003. – №6. – С.61-64.

[53] Сангмамадов Д.С. Наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода / Д.С.Сангмамадов // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №9. – С.709-714.

[54] Сангмамадов Д.С. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых определяемых модулями непрерывности / Д.С.Сангмамадов // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №10. – С.801-806.

[55] Сангмамадов Д.С. К вопросу об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода некоторых классов функции / Д.С.Сангмамадов // Изв. АН РТ. Отд.физ-мат – хим. – геол. и техн.н. – 2011. – №3(144). – С.7-13.

[56] Сангмамадов Д.С. Оптимизация весовых квадратурных формул – для некоторых классов функций малой гладкости / Д.С.Сангмамадов // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №12. – С.957-962.

[57] Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных формулах приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций задаваемых модулями непрерывности / Д.С.Сангмамадов // Материалы международной научной конференции Современные проблемы математического анализа и теории функций – (г.Душанбе – 29-30 июня 2012г.) – С.151-154.

[58] Sard A. Best approximation integration formulas / A.Sard // Best approximate formulas. – American J. of Math. – 1949. – LXXI – P.80-91.

[59] Сухарев А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа / А.Г.Сухарев – М.:Наука, 1989. 304 с.

[60] Турецкий А.Х. Об оценках приближений квадратурными формулами для функций удовлетворяющих условию Липшица / А.Х.Турецкий // Успехи матем.наук. – 1951. – Т.6. – Вып.5. – С.166-171.

[61] Харди Г.Г. Неравенства / Г.Г.Харди, Дж.Е.Литтльвуд и Г.Полиа – М., 1948. – 456 с.

[62] Шабозов М.Ш. О наилучших кубатурных формулах с весом / М.Ш.Шабозов // Изв.АН Тадж.ССР. Отд. физ.-мат. и геолого-хим. наук. – 1980. – №4. – С.86-90.

[63] Шабозов М.Ш. Об оценках погрешности квадратурных формул для некоторых классов функций / М.Ш.Шабозов // Укр.мат.журнал. – 1991. – Т.43. – №12. – С.1712-1716.

[64] Шабозов М.Ш. О погрешности интерполяции билинейными сплайнами / М.Ш.Шабозов // Укр.мат.журнал. – 1994. – Т.46. – №11. – С.1554-1560.

[65] Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью / М.Ш.Шабозов // Укр.мат.журнал. – 1995. – Т.47. – №9. – С.1300-1305.

[66] Шабозов М.Ш. Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами / М.Ш.Шабозов // Матем.заметки. – 1996. – Т.59. – №1. – С.142-152.

[67] Шабозов М.Ш. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости / М.Ш.Шабозов, С.С.Каландаршоев // ДАН РТ. – 1998. – Т.41. – №10. – С.69-75.

[68] Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных и кубатурных формулах с весом для классов функций малой гладкости / М.Ш.Шабозов,

Д.С.Сангмамадов // Вестник Национального университета. – Серия математика. – 2004. – №1. – С.113-123.

[69] Шабозов М.Ш. О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах для классов функций, задаваемых модулями непрерывности / М.Ш.Шабозов, З.А.Парвонаева // ДАН РТ. – 2006. – Т.49. – №7. – С.589-596.

[70] Шабозов М.Ш. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций / М.Ш.Шабозов, З.А.Парвонаева // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат. – хим. – геол. и тех.н. – 2008. – №3(132). – С.7-16.

[71] Шабозов М.Ш. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосцилирующих функций / М.Ш.Шабозов, Р.С.Сабоиев – Вестник ХоГУ. – Серия 1. – 2004. – №6. – С.17-22.

[72] Шабозов М.Ш. Об оптимизации приближенного интегрирования быстроосциллирующих функций / М.Ш.Шабозов, Р.С.Сабоиев // ДАН РТ. – Т.47. – 2004. – №3. – С.14-19.

[73] Шабозов М.Ш. О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах имеющих фиксированные особенности / М.Ш.Шабозов, Р.С.Сабоиев // Вестник ХоГУ. – Серия 1. – 2006. – №7. – С.42-54.

[74] Шабозов М.Ш. Оптимизация некоторых весовых квадратурных формул в пространстве $L_1[a--b]$ / М.Ш.Шабозов, Р.С.Сабоиев, Ш.Дж.Хамдамов // ДАН РТ. – 2009. – Т.52. – №1. – С.5-9.

[75] Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для интегралов с фиксированной особенностью / М.Ш.Шабозов, Д.С.Сангмамадов // Труды

межд.конференции по дифф. и интег. уравнениям с сингулярными коэффициентами (г.Душанбе – 25-28 октября 2003 г.) – С.22-26.

[76] Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа / М.Ш.Шабозов, Д.С.Сангмамадов // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №11. – С.847-852.

[77] Шайдаева Т.А. Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка для некоторых классов функций / Т.А.Шайдаева // Труды Матем. ин-та. – АН СССР. – 1959. – С.313-341.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Сангмамадов Д.С.* Приближенное вычисление двумерных сингулярных интегралов с фиксированной особенностью в круге / Д.С. Сангмамадов // Вестник Хорогского госуниверситета. – 2003. Серия 1. – №6. – С.61-64.
2. *Сангмамадов Д.С.* О наилучших квадратурных формулах для интегралов с фиксированной особенностью / М.Ш. Шабозов, Д.С. Сангмамадов // Труды международной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами, 25-28 октября 2003. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2003. – С.22-26.
3. *Сангмамадов Д.С.* О наилучших квадратурных и кубатурных формулах с весом для классов функций малой гладкости / М.Ш.Шабозов, Д.С.Сангмамадов // Вестник Национального университета. – Серия математика. – 2004. – №1. – С.113-123.
4. *Сангмамадов Д.С.* Наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода / Д.С. Сангмамадов // ДАН Республики Таджикистан. – 2011. – Т.54. – №9. – С.709-714.
5. *Сангмамадов Д.С.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности / Д.С. Сангмамадов // ДАН Республики Таджикистан. – 2011. – Т.54. – №10. – С.801-806.
6. *Сангмамадов Д.С.* К вопросу об оценках квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функции / Д.С. Сангмамадов // Известия АН Республики Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2011. – №3(144). – С.7-13.
7. *Сангмамадов Д.С.* Оптимизация весовых квадратурных формул для некоторых классов функций малой гладкости / Д.С. Сангмамадов // ДАН Республики Таджикистан. – 2011. – Т.54. – №12. – С.957-962.
8. *Сангмамадов Д.С.* О наилучших квадратурных формулах приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа / М.Ш. Ша-

бозов, Д.С. Сангмамадов // ДАН Республики Таджикистан. – 2012. – Т.55. – №11. – С.847-852.

9. *Сангмамадов Д.С.* О наилучших квадратурных формулах приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода для классов функций, задаваемых модулями непрерывности / Д.С. Сангмамадов // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", 29-30 июня 2012. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2012. – С.151-154.

10. *Сангмамадов Д.С.* Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых / Д.С. Сангмамадов // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014. – Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. – С.75-78.