О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Сангмамадова Давлатмамада Сайфовича «Точные оценки погрешности оптимальных квадратурных формул на некоторых классах функций», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Теория приближённого интегрирования, фундамент которой заложен сразу после обосновании интегрального исчисления, была наиболее развита в классических работах П.Л.Чебышёва и С.Н.Бернштейна. Однако эта теория практическую ценность получила в пятидесятых годах прошлого столетия после публикации известных работ С.М.Никольского об оптимальных квадратурных формулах на классах функций. Большой вклад в развитие теории оптимальных квадратурных формул внесли Н.П.Корнейчук, В.П.Моторный, А.А.Женсыкбаев, А.А.Лигун, К.И.Осколков, Нгуен Тхи Тхьеу Хоа, М.А.Чахкиев и многие другие. Интерес к экстремальным задачам теории квадратур и поныне не ослабевает. Так например, получен ряд новых оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированными особенностями в работах Ю.М.Гиршовича, В.И.Бойко, Л.Онегова, М.Ш.Шабозова, а также найдены ряд оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых в работах С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова.

Диссертационная работа Сангмамадова Д.С. посвящена дальнейшему развитию теории оптимальных квадратурных формул для весовых регулярных интегралов и криволинейных интегралов первого типа на классах функций и кривых малой гладкости.

Первая глава диссертационной работы посвящена нахождению оптимальных квадратурных формул для весовых интегралов на соболевских классах функций $W^{(1)}L(M;a,b)$ и классах функций $H^{\omega}[a,b]$, определяемых заданным модулем непрерывности $\omega(t)$, $0 \le t \le b-a$ (мы далее воспользуемся обозначениями, принятыми в диссертации).

Одним из основных результатов первой главы диссертации является теорема 1.2.1, в которой найдена оптимальная весовая квадратурная формула на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$. Частные случаи этой теоремы для конкретных весовых функций $q(t) = e^{-t}$, $[a,b] = [0,+\infty)$ и $q(t) = t^{-s}$, $0 < s \le 1$, $[a,b] = [0,1]$, соответственно, ранее были получены Ю.Г.Гиршовичем и М.Ш.Шабозовым. В качестве приложения теоремы 1.2.1 диссертант рассматривает другие весовые функции, наиболее интересные из которых является вес $q(t) = \mathrm{tg}(t/2)$, $0 < a \le t \le b < \pi$ для приближённого вычисления сингулярного интеграла Гильберта. Приводится также приложение теоремы 1.2.1 к вопросу о приближённом вычислении двойных интегралов по круговым областям и к вопросу приближённого вычисления многомерного интеграла Лиувилля. Сведение указанных интегралов к одномерным интегралам с явно задаваемым положительным весом обеспечило возможность применения теоремы 1.2.1 и точно вычислить погрешность получаемых при этом конкретных оптимальных квадратурных формул на всём классе функций $W^{(1)}L(M;a,b)$.

Вторым из основных результатов первой главы является теорема 1.4.1, в которой в предположении, что модуль непрерывности $\omega(t)$ является дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функцией, вычислена точная оценка погрешности $\mathcal{E}_n(q;H^\omega[a,b])$ оптимальной квадратурной формулы для произвольной суммируемой веса $q(t)\geq 0$.

Из утверждения теоремы 1.4.1 в качестве следствия получается ранее полученный результат Т.Н.Бусаровой, а также наилучшая квадратурная формула типа Маркова для весовой функции $q(t)=e^{-t}$ и $[a,b]=[0,+\infty)$.

Во второй главе диссертации рассматривается экстремальная задача отыскания наилучших квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов следующего вида

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds=\sum_{k=1}^{N}p_k f(M_k)+R_N(f,\Gamma), \tag{1}$$

где $f(M)=f(x,y)$, $M_k\in\Gamma$, $k=\overline{1,N}$, Γ – некоторая плоская спрямляемая кривая с непрерывной кривизной. При условии, что кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x=x(s)$, $y=y(s)$, $0\leq s\leq L$, при помощи разбиения отрезка $[0,L]$ (L – длина Γ) точками $0\leq s_1<s_2<\cdots<s_{N-1}<s_N\leq L$ формула (1) запишется в виде

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds=\sum_{k=1}^{N}p_k f(x(s_k),y(s_k))+R_N(f,\Gamma,P,S), \tag{2}$$

где $P=\{p_k\}_{k=1}^N$ и $S=\{s_k\}_{k=1}^N$ – векторы коэффициентов и узлов, $R_N(f,\Gamma,P,S)$ – погрешность формулы. Далее формулируется постановка общей экстремальной задачи отыскания наилучших квадратурных формул вида (2) в смысле С.М.Никольского: если $\mathfrak{N}_Q(L)$ – класс кривых $\{\Gamma\}$, с непрерывной кривизной, длина которых равна L, а $\mathfrak{M}=\{f(x(s),y(s))\}$ – некоторый класс функций, определённых на множестве кривых $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$, то требуется найти

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L))=\inf_{(P,S)}\sup_{f\in\mathfrak{M}}\sup_{\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)}|R_N(f;\Gamma;P,S)|. \tag{3}$$

Следует отметить, что нахождение величины (3) по сравнению с аналогичной задачей для определённого интеграла является более трудным, поскольку прежде чем найти оптимальный вектор (P^0, S^0), доставляющий минимальную погрешность на классах функций и кривых, требуется указать соответствующие экстремальные кривые и экстремальные функции, принадлежащие исследуемым классам функций и кривых.

Во втором параграфе для кривых, параметрические уравнения которых $x(s) \in H^{\omega_1}[0, L]$, $y(s) \in H^{\omega_2}[0, L]$, и класса функций f, удовлетворяющих условию

$$|f(x(s'), y(s')) - f(x(s''), y(s''))| \leq \sqrt{\omega_1^2(|s'' - s'|) + \omega_2^2(|s'' - s'|)},$$

найдены точные оценки погрешности усложнённых квадратурных формул средних прямоугольников и трапеций.

Третий параграф второй главы посвящён нахождению наилучших квадратурных формул для обобщённого класса Зигмунда и доказывается, что в этом случае оптимальной формулой является квадратурная формула прямоугольников.

По нашему мнению, наиболее важные результаты получены в четвёртом параграфе. В этом параграфе для класса кривых $H^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ и класса функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\left| f(M') - f(M'') \right| \leq \rho_i(M', M''), \ i = 1, 2, 3,$$

где $\rho_i(M', M'')$ $(i = 1, 2, 3)$ – некоторые расстояния между точками $M' = M(x(s'), y(s'))$ и $M'' = M(x(s''), y(s''))$, лежащими на кривых $\Gamma \subset H^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$, доказаны следующие утверждения: если в число узлов квадратурной формулы (2) включать крайние узлы $s_0 = 0$ и $s_N = L$, то наилучшей для указанных классов функций является квадратурная формула трапеций (типа Маркова), а если рассматривать формулу (2) для произвольного разбиения $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \leq L$, то в этом случае наилучшей на классе кривых $H^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ является формула прямоугольников. В обоих случаях подсчитана точная оценка погрешности наилучших формул на указанных классах функций и кривых.

Имеются следующие замечания по оформлению и содержанию диссертации и автореферата.

1. В работе имеются опечатки, например, на странице 43 диссертации в формуле (2.1.1) и на странице 4 формулы (4) автореферата индекс суммирования, не от $k = 1$ до $k = n$, а от $k = 1$ до $k = N$.
2. В формулировке теоремы 1.2.3 при вводе веса $q(t) = \mathrm{tg}(t/2)$ неравенство $0 \leq a < t \leq b < \pi$ по смыслу должно быть $0 < a \leq t \leq b < \pi$.
3. Встречаются ошибки, связанные с грамматикой русского языка.

Но эти замечания нисколько не умаляют достоинство диссертации, её общей ценности.

В целом, диссертационная работа Сангмамадова Давлатмамада Сайфовича является законченной научно-исследовательской работой, вносящей хороший вклад в теории оптимальных квадратурных формул.

Считаю, что диссертация полностью соответствует требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а её автор – Сангмамадов Д.С. заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
и информационных технологий
Сибайского института (филиала) ФГБОУ ВПО
«Башкирский государственный университет» **С. Байзаев**

Подпись С.Байзаева заверяю

Сибайский институт БашГУ
ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
«16» 03 2015 г.
Должность документовед