«У Т В Е Р Ж Д А Ю»
Ректор Худжандского государственного университета им. Б.Гафурова
_______________ А.Т. Максудов
«_18_» *марта 2015 г.*

О Т З Ы В

ведущей организации на диссертацию Сангмамадова Давлатмамада Сайфовича «Точные оценки погрешности оптимальных квадратурных формул на некоторых классах функций», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Экстремальная задача отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получения точной оценки её остатка является одной из наиболее актуальных задач численного анализа. Указанная задача впервые сформулирована в 1939 г. А.Н.Колмогоровым как одна из оптимизационных задач вариационного содержания.

Впервые наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы при фиксированных равноотстоящих узлах на классах функций $L_2^{(r)}[a,b]$ были найдены А.Сардом в 1949 г. Через год, в 1950 г. С.М.Никольский нашёл наилучшие квадратурные формулы как по узлам, так и по коэффициентам и подсчитал точную оценку погрешность найденных им квадратурных формул на некоторых классах функций. С этого момента задача отыскания квадратурных формул привлекает внимание многих математиков как теоретического, так и прикладного направлений и за прошедшие годы получен ряд существенных результатов. Тем не менее немало задач, связанных с отысканием наилучших квадратурных формул для различных видов интегралов, таких, например, как интегралов с весом и для криволинейных интегралов, до настоящего времени не решены.

Первая глава диссертационной работы Сангмамадова Д.С. посвящена отысканию весовых квадратурных формул на классах функций малой гладкости $W^{(1)}L[a,b]$, где $[a,b]$ – произвольный промежуток, как конечный, так и бесконечный.

Первый параграф является вспомогательным. Здесь приводятся общая постановка экстремальной задачи отыскания наилучших весовых квадратурных формул, определения и обозначения общего характера, определение классов функций, рассматриваемых в дальнейшем.

Основным результатом второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Пусть $q(t) \geq 0$ – суммируемая не эквивалентная нулю на $[a, b]$ функция. Тогда среди всех весовых квадратурных формул вида*

$$\int_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f, q), \tag{1}$$

задаваемых векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$ и узлов $T = \{t_k : \ a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \leq b\}$, наилучшей для класса $W^{(1)}L(M; a, b)$ является формула, у которой наилучшие узлы и коэффициенты определяются из системы равенств

$$2\int_a^{t_1^0} q(t)dt = \int_{t_1^0}^{t_2^0} q(t)dt = \cdots = \int_{t_{n-1}^0}^{t_n^0} q(t)dt = 2\int_{t_n^0}^{b} q(t)dt := q(T^0),$$

$$P^0 = \left\{p_k^0 : p_k^0 = q(T^0)\right\}_{k=1}^{n}.$$

При этом для погрешности наилучшей весовой квадратурной формулы на всем классе функций $W^{(1)}L(M; a, b)$ справедлива оценка

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; a, b); q\right) = \frac{M}{2n}\int_a^b q(t)dt.$$

Частные случаи теоремы 1.2.1 в случае $q(t) = e^{-t}$, $[a, b] := [0, +\infty)$ ранее доказаны Ю.Г.Гиршовичем, а в случае $q(t) = t^{-s}$, $0 < s \leq 1$, $[a, b] = [0, 1]$ М.Ш.Шабозовым. Отметим одно интересное следствие теоремы 1.2.1 для сингулярного интеграла Гильберта, где $q(t) = \mathrm{tg}\,(t/2)\,,\ 0 \leq a < t \leq b < \pi$, приведённое во втором параграфе в виде теоремы 1.2.3. По сути дела, теорема 1.2.3 содержит первый результат нахождения оптимальных квадратурных формул для вычисления сингулярного интеграла Гильберта. В качестве других следствий рассматривается применение теоремы 1.2.1 к задаче о приближённом вычислении двойных интегралов по области $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ и к вопросу приближённого вычисления многомерного интеграла

Лиувилля от функции $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$, где областью интегрирования является симплекс $\mathcal{D}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\le 1,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,\ldots,n\right\}$, а $q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1},\ \sum\limits_{i=1}^{n}p_i-1=\alpha,\ \alpha>-1.$

Ряд теорем приводится в четвёртом параграфе для класса функций

$$H^{\omega}[a,b]=\left\{f:|f(x^{'})-f(x^{''})|\le\omega|x^{'}-x^{''}|,\ \forall\ x^{'},x^{''}\in[a,b]\right\}$$

в предположении, что заданный модуль непрерывности $\omega(t)$ на отрезке $[a,b]$ имеет производную $\omega'(t)$. В теореме 1.4.1 утверждается, что если заданным модулем непрерывности $\omega(t)$ является непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция, то для погрешности наилучшей квадратурной формулы (1) на всём классе $H^{\omega}[a,b]$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}_n(q;H^{\omega}[a,b])=\sum_{k=1}^{n}\left\{\int\limits_{x_k^0}^{t_k^0}q_1(t)\omega^{'}(t_k^0-t)dt-\int\limits_{t_{k-1}^0}^{x_k^0}q_1(t)\omega^{'}(t_k^0-t)dt\right\},$$

где $T^0=\{t_k^0\}_{k=0}^{n}$ – наилучший вектор узлов, $x_0^0=a,\ x_k^0=(t_{k-1}^0+t_k^0)/2,\ k=\overline{1,n};\ x_{n+1}^0=b;\ q_1(t)=\int\limits_a^t q(u)du,\ a\le t\le b.$ В частности, если $\omega(t)=Mt$, $M>0$, то для класса Липшица с константой M справедлива оценка

$$\mathcal{E}_n(q;H^1[a,b])=M\left\{2\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_a^{t_k^0}q_1(t)dt-2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_a^{(t_{k-1}^0+t_k^0)/2}q_1(t)dt+\int\limits_a^b q_1(t)dt\right\}.\quad(2)$$

Равенство (2) ранее непосредственным вычислением было получено Т.Н.Бусаровой. Из общего утверждения теоремы 1.4.1 в качестве следствия получаем оптимальную квадратурную формулу типа Маркова в случае $[a,b]=[0,+\infty)$ и весовой функции $q(t)=e^{-t}$.

Во второй главе диссертации рассматривается экстремальная задача отыскания оптимальных квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. В первом параграфе приводится общая постановка отыскания оптимальных квадратурных формул в смысле С.М.Никольского для класса $\mathfrak{M}_{\rho}(Q)$ – функций $f(M)=f(x,y)$, определённых в области $Q=\{(x,y):\ x^2+y^2\le L^2\}$, и для любых двух точек

$M' = M(x', y')$, $M'' = M(x'', y'') \in \Gamma \subset Q$, удовлетворяющих условию

$$|f(M') - f(M'')| \leq \rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2},$$

и кривых $\Gamma \in \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$, параметрические уравнения которых удовлетворяют условиям $x(s) \in H^{\omega_1}[0, L]$, $y(s) \in H^{\omega_2}[0, L]$. Во втором параграфе приводится решение задачи о точности оценки погрешности усложнённой квадратурной формулы прямоугольника и трапеций. Основной результат второго параграфа формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 2.2.1. *Для погрешности усложнённых квадратурных формул прямоугольника*

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_{\Pi}(f; \Gamma)$$

и усложнённой квадратурной формулы трапеции

$$\int\limits_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds =$$

$$= \frac{L}{N}\left\{\frac{f\left(x(0), y(0)\right) + f(x(L), y(L))}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\right\} + R_T(f; \Gamma)$$

на классах функций $\mathfrak{M}_\rho(Q)$ и кривых $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]$ справедливы точные оценки

$$R_{\Pi}\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds,$$

$$R_T\left(\mathfrak{M}_\rho(Q), \bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0, L]\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \sqrt{\omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)}ds.$$

В третьем параграфе для класса W – функций $f(M) = f(x(s), y(s))$, определённых на отрезке $[0, L]$, и для любых $s', s'' \in [0, L]$, удовлетворяющих условию

$$\left|f\left(x(s'), y(s')\right) + f\left(x(s''), y(s'')\right) - 2f\left(x\left((s' + s'')/2\right), y\left((s' + s'')/2\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|x(s') + x(s'') - 2x\left(\frac{s' + s''}{2}\right)\right| + \left|y(s') + y(s'') - 2y\left(\frac{s' + s''}{2}\right)\right|,$$

и класса кривых $\bar{H}_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ доказывается следующая

Теорема 2.3.1. *Среди квадратурных формул вида*

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x(s_k),y(s_k)) + R_N(f;\Gamma;P,S) \tag{3}$$

наилучшей для классов функций W *и кривых* $H_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \tag{4}$$

При этом для оценки погрешности формулы (4) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство

$$\mathcal{E}_N\left(W;H_2^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N\int\limits_0^{L/(2N)} [\omega_1(t)+\omega_2(t)]\,dt.$$

Из теоремы 2.3.1, в частности, для кривых, координатные функции которых удовлетворяют условию Зигмунда, вытекает равенство

$$\mathcal{E}_N\left(W;Z^{(\alpha,\beta)}[0,L]\right) = \frac{M_1 L}{\alpha+1}\left(\frac{L}{2N}\right)^{\alpha} + \frac{M_2 L}{\beta+1}\left(\frac{L}{2N}\right)^{\beta}, \quad 0<\alpha,\beta\le 1.$$

Наиболее интересные результаты приводятся в заключительном четвёртом параграфе диссертации для классов $\mathfrak{M}_{\rho_i}(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\left|f(M')-f(M'')\right| \le \rho_i(M',M''),\ i=1,2,3,$$

где

$$\rho_1(M',M'') = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2},$$
$$\rho_2(M',M'') = |x''-x'|+|y''-y'|,$$
$$\rho_3(M',M'') = \max\{|x''-x'|,|y''-y'|\},$$

и класса кривых $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$. Здесь доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида (3) с произвольными векторами коэффициентов* $P=\{p_k\}_{k=0}^N$ *и узлов*

$$S=\{s_k:\,0=s_0<s_1<\cdots<s_{N-1}<s_N=L\}$$

наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}(i=1,2,3)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *является формула типа Маркова*

$$\int_0^L f\left(x(s),y(s)\right)ds=\frac{L}{N}\Bigg\{\left[f(x(0),y(0))+f(x(L),y(L))\right]/2+$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right),y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\}+R_N(f;\Gamma). \qquad (5)$$

При этом для оценки погрешности квадратурной формулы (5) на указанных классах функций и кривых справедливы равенства

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_1};\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right)=2N\int_0^{L/(2N)}\sqrt{\omega_1^2(s)+\omega_2^2(s)}ds, \qquad (6)$$

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_2};\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right)=2N\int_0^{L/(2N)}\left(\omega_1(s)+\omega_2(s)\right)ds, \qquad (7)$$

$$\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M}_{\rho_3};\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right)=2N\int_0^{L/(2N)}\max\left\{\omega_1(s),\omega_2(s)\right\}ds. \qquad (8)$$

Теорема 2.4.2 *Среди всех квадратурных формул вида (3) с произвольными векторами коэффициентов* $P=\{p_k\}_{k=1}^N$ *и узлов* $S=\{s_k\}_{k=1}^N$ *наилучшей для классов функций* $\mathfrak{M}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$ *и класса кривых* $\mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]$ *является формула средних прямоугольников (4). При этом для погрешности квадратурной формулы (4) на указанных классах функций и кривых справедливы равенства (6) – (8).*

Однако по диссертационной работе имеется ряд замечаний:

1. Следует отметить, что впервые оптимальная квадратурная формула для классов функций малой гладкости $f(x,y)$, у которых $|grad\, f(x,y)|\le 1$, была найдена С.Б.Вакарчуком (см. Украинский математический журнал, 1986, т.38, №5, с.643-645).
2. В диссертации встречаются опечатки как в математических формулах, так и в тексте. Например, в формулировке теоремы 2.3.1 по смыслу вместо формулы (11) должно быть (6).

Подобного рода незначительные неточности встречаются, например, в формуле усложнённой квадратурной формулы на стр. 48 вместо «$\sum_{k=0}^{N-1}$» должно быть «$\sum_{k=1}^{N-1}$», а на стр. 14 автореферата в формуле (19) вместо $f\left(x\left((2k-1)/(2N)\right), y\left((2k-1)/(2N)\right)\right)$ должно быть $f\left(x\left((2k-1)L/(2N)\right), y\left((2k-1)L/(2N)\right)\right)$.

Несмотря на сделанные замечания, результаты, приведённые в диссертации, являются новыми, научно достоверными и строго математически обоснованными. Содержание автореферата правильно отражает основные научные положения диссертации. Результаты, полученные в диссертации, а также использованные в ней методы могут найти дальнейшее применение, связанное с отысканием оптимальных кубатурных формул для приближённого вычисления поверхностных интегралов.

Всё сказанное выше даёт основание считать, что диссертационная работа Сангмамадова Давлатмамада Сайфовича «Точные оценки погрешности оптимальных квадратурных формул на некоторых классах функций» удовлетворяет всем требованиям ВАК России, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа математического факультета Худжандского государственного университета им. Б. Гафурова 17.03.2015 г.

Зав. кафедрой математического анализа математического факультета Худжандского государственного университета им. Б.Гафурова доктор физ.-мат. наук **А. Мухсинов**

Подпись А.Мухсинова подтверждаю
Начальник ОК ХГУ им. Б.Гафурова **З.Н. Ашрапова**

Вазорати маориф ва илми Чумхурии Тоҷикистон • Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Бобоҷон Ғафуров • ШУЪБАИ КАДРҲО