На правах рукописи

Солиев Сафарбек Курбонхолович

НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА И ИХ ФУНКЦИЯ ГРИНА

01.01. 02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

.

Душанбе - 2015

Работа выполнена в Таджикском национальном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Мустафокулов Рахмонкул**

Официальные оппоненты: **Юмагулов Марат Гаязович,**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
заведующий кафедрой дифференциальных уравнений;

Шарипов Бобоали,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики в экономике Института предпринимательства и сервиса Республики Таджикистан

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный университет»

Защита диссертации состоится 30 октября *2015 г. в 12 ч.00 мин.* на заседании диссертационного совета Д 047.007. 02, созданного на базе Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу 734063, г. Душанбе, ул Айни 299/4, Институт математики им. А. Джураева.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://www.mitas.tj Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан.

Автореферат разослан “____”__________ 2015г.

Ученный секретарь
дисснртационного совета Каримов У.Х.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию разрешимости некоторых классов краевых задач типа Штурма-Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка, а также анализу их функции Грина.

Классическая задача Штурма-Лиувилля

$$-(pu')' + qu = \lambda mu \qquad (0 \leq x \leq l), \tag{1}$$

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{2}$$

с достаточно регулярными вещественными коэффициентами при $p(\cdot) > 0$ и $q(\cdot) \geq 0, m(\cdot) \geq 0$ $(m(\cdot) \not\equiv 0)$ обладает следующими основными свойствами:

- спектр задачи состоит из неограниченной последовательности $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ вещественных собственных значений, имеющих единичную геометрическую и алгебраическую кратность;

- собственная функция φ_k, соответствующая собственному значению λ_k, имеет в $(0.l)$ точно k простых нулей ($k = 0,1,2,\ldots$), причём нули φ_k и φ_{k+1} перемежаются, т.е. при каждом k между любыми соседними нулями φ_k имеется только один нуль функции φ_{k+1}.

Эти свойства, называемые *гармоническими*, характерны для собственных колебаний обычной струны.

Распространению этих свойств на более широкие классы краевых задач, начатому работами О. Келлога и М. Г. Крейна, посвящена обширная литература (Карлин С., Левин А.Ю., Степанов Г.Д., Покорный Ю.В., Дерр В.Я., и др.). В частности, они справедливы для задач вида $(1)-(2)$, в которых уравнение (1) в конечном наборе точек $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ из $(0, l)$ заменяется условиями связи вида

$$u'(a_i + 0) - u'(a_i - 0) = k_i u(a_i)(k_i > 0) \tag{3}$$

для непрерывных в точках a_i решений $u(\cdot)$. Для случая струны условия связи (3) соответствуют сосредоточенным упругим опорам (типа пружин). Это обстоятельство дало возможность распространить гармонические свойства для сложных систем, допускающих представления в виде набора одномерных континиумов, взаимодействующих только через концы. Простейшим и актуальным примером таких систем является сетка из упругих струн.

Чисто математически анализ систем, составленных из упругих континиумов начал проводиться начиная с 80-х годов прошлого столетия С.Никезом (S. Nicaise) (Франция), Б.С.Павловыми М.Д.Фаддеевым (Санг-Петербург), Ю.В.Покорным (Воронеж) и др.

В Воронеже Ю.В.Покорным и его учениками была создана достаточно глубокая теории дифференциальных уравнений 2-го порядка на графах (пространственных сетях)[1].Дальнейшее развитие этой теории было связано с исследованием дифференциальных уравнений высших порядков (прежде всего 4-го порядка) на графах[2,3].

В настоящей работе изучается аналог задачи $(1)-(3)$ для дифференциальных уравнений 4-го порядка. Она примыкает к теории дифференциальных уравнений на графах. Граф в нашем случае - это связная одномерная структура Г, состоящая из объединения некоторой совокупности интервалов $\gamma_i=(a_{i-1},a_i)$ $(i=1,2,\dots,m)$ и множества их общих концов $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{m-1}\}$. В физических реализациях в качестве Г служит натянутая цепочка стержней.

На множестве Г рассматривается дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$(py'')''-(qy')'=f, \tag{4}$$

которое в точках множества A реализуется в виде некоторых условий связи, а

[1]Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. А., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. –М.:Физматлит, 2004. -268с.

[2]Боровских А.В., Мустафокулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети // Докл. РАН. – 1995. – т. 345, №6, - с.730 – 732.

[3]DekoninckB., NicaiseS. Spectredesreseauxdepoutres // C.R. Acad. Sci. Paris. Serie 1. – 1998. – т. 326. p. 1249 – 1254.

в граничных точках a_0 и a_m множества Г задаются краевые условия. Такую задачу, в отличие от классической задачи на отрезке, назовём *нестандартной*.

Отметим, что нестандартные задачи имеют множество приложений в различных областях физики, механики, биологии и других разделах естественных и прикладных наук. Однако они к настоящему времени мало изучены. Изучение таких задач требует нового подхода и новых методов исследования.

Цель работы состоит, во-первых, в выделении основных видов нестандартных краевых задач для уравнения 4-го порядка, возникающих в прикладных задачах, например, при моделировании деформации систем упругих континиумов (стержней, балок), соединенных по типу цепочки и, во-вторых, в установлении таких свойств этих задач, как условия невырожденности (однозначной разрешимости), существования функции Грина и определения основных её свойств. При этом, исследование нестандартных задач требует предварительного установления соответствующих свойств для скалярных задач на отрезке. Поэтому в работе эти свойства устанавливаются сначала для задач на отрезке, затем соответствующие результаты обобщаются на случаи нестандартных задач.

Методы исследования. В настоящей работе широко используются методы качественной теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также методы теории операторов в функциональных пространствах со специальными структурами.

Научная новизна. Основные результаты, приведенные в диссертационной работе является новыми. В числе наиболее важных следует отметить:

- Для уравнения (4) на отрезке (a, b) при $q(x) \equiv 0$ получены условия невырожденности (однозначной разрешимости) краевых задач при граничных условиях типа Штурма-Лиувилля, имеющих наиболее общего видаи (с физической точки зрения) охватывающих все реально известные случаи закрепления концов стержня.

- Установлено, что решение соответствующего однородного уравнения (4) $(f(x) \equiv 0)$ при некоторых граничных условиях обладают свойством монотонности на отрезке. На основании этого свойства выделены граничные условия, обеспечивающие невырожденность краевых задач для уравнения (4) на отрезке при $q(x) \geq 0$ $(q(x) \not\equiv 0)$.

- Свойство монотонности решений однородного уравнения (4) $(f(x) \equiv 0)$ при соответствующих граничных условиях на отрезке, а также условия связи в точках множества A позволяют установить принципа максимума решения для этого уравнения на множестве Г. Граничные условия выбираются так, чтобы невырожденность нестандартных краевых задач для уравнения (4) на Г следует из принципа максимума решений.

- Новый подход к определению функции Грина краевых задач (отличный от аксиоматического) адаптирован к нестандартным краевым задачам и, кроме того, позволяет выписать эту функцию в явном виде, откуда следуют все её основные свойства. В работе этот подход проиллюстрирован сначала для линейной двухточечной краевой задачи n - го порядка, затем этот подход применен к основным краевым задачам, рассмотренных в работе.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации носят, в основном, теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач (в том числе нестандартных), для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью нестандартных краевых задач в решении прикладных задач механики (колебания цепочки, состоящей из упруго сочлененных стержней) и других разделов естествознания.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и неоднократно обсуждались на семинарах кафедры функциональных анализа и дифференциальных уравнения Таджикского национального университета (ТНУ) (2011-2015), на общегородском семинаре механико-математического факультета ТНУ (2015), на семинаре Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан (2015), на ежегодных научных конференциях ППС ТНУ (2011-2015), на Республиканской научно-практической конференции в Таджикском государственном педагогическом университете им. С. Айни (2011) (г. Душанбе), на международных конференциях в ТНУ (2013) (г. Душанбе) и Худжандском государственном университете им. академика Гафурова Б.Г. (2014) (г. Худжанд).

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях в рецензируемых научных журналах, а также отражены в тезисах трёх докладов на научных конференциях, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с Р. Мустафокуловым, соавтору принадлежат постановка задачи и выбор метода исследования.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Работа изложена на 109 страницах компьютерного набора. Библиография насчитывает 42 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава под названием “**Невырожденность краевых задач типа Штурма-Лиувилля для дифференциальных уравнений 4-го порядка**” посвящена вопросу о невырожденности (однозначной разрешимости) краевых задач типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида (4). Она состоит из четырёх параграфов.

В первом параграфе для линейного дифференциального уравнения

$$L(y) \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \qquad (5)$$

где коэффициенты $p_i(x)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны при $a \leq x \leq b$ и $p_0(x) \neq 0$, рассматривается двухточечная краевая задача с граничными условиями вида

$$l_j(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(i)}(b) = F_j (j = 1,2, \dots, n), \tag{6}$$

где α_{ij}, β_{ij} - заданные числа.

На примере этой задачи приводятся необходимые для дальнейшего изложения основные понятия и утверждения из теории краевых задач.

Определение 1.1. Краевая задача $(5)-(6)$ называется *невырожденной*, если соответствующая однородная задача

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ l_j(y) = 0 \quad (j = 1,2, \dots, n) \end{cases}$$

имеет только тривиальное (нулевое) решение.

Из этого определения следует, что невырожденность краевой задачи эквивалентна её однозначной разрешимости для любой правой части $f(x)$ и любою набора чисел F_j, следовательно, однозначную разрешимость краевой задачи достаточно проверять на однородной задаче, что зачастую оказывается существенно легче, чем исследование неоднородной.

Хорошо известным является следующее утверждение о невырожденности краевой задачи $(5)-(6)$.

Теорема 1.1.1. *Задача* $(5)-(6)$ *невырождена тогда и только тогда, когда для каждой фундаментальной системы решений* $\{\varphi_i(x)\}_1^n$ *однородного уравнения* $L(y) = 0$*, выполняется*

$$det\left\| l_j(\varphi_i) \right\| \neq 0.$$

Во втором параграфе исследуется вопрос о невырожденности краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения

$$L_0(y) = (p(x)y'')'' = f(x) \qquad (0 \leq x \leq l). \tag{7}$$

При этом рассматриваются граничные условия вида

$$\left.\begin{array}{ll} l_1(y) \equiv \alpha_0 y(0) + \alpha_3 (py'')'(0) = 0, & l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(0) - \alpha_2 y''(0) = 0, \\ l_3(y) \equiv \beta_0 y(l) - \beta_3 (py'')'(l) = 0, & l_4(y) \equiv \beta_1 y'(l) + \beta_2 y''(l) = 0, \end{array}\right\} \quad (8)$$

где коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ $(i = 0,1,2,3)$, причём $\alpha_i + \alpha_j > 0$, $\beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$. Граничные условия (8) охватывают все реально существующие виды закрепления концов стержня. Они, в отличие от рассмотренных ранее другими авторами, охватывают также реальный физический случай упругого закрепления стержня, когда коэффициенты α_0, β_0 могут принимать любые неотрицательные значения.

Так как для однородного уравнения $L_0(y) = 0$ функции

$$\varphi_1(x) \equiv 1,\ \varphi_2(x) = x,\ \varphi_3(x) = \int_0^x \frac{x-t}{p(t)} dt,\ \varphi_4(x) = \int_0^x \frac{x-t}{p(t)} t dt, \qquad (9)$$

образуют фундаментальную систему решений, то в силу теоремы 1.1.1, необходимым и достаточным условием невырожденности краевой задачи $(7) - (8)$ является

$$\Delta = det\left\| l_j(\varphi_i) \right\| = \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ \beta_0 & \beta_0 l & \beta_0(\alpha l - \beta) & \beta_0(\beta l - \gamma) - \beta_3 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 \alpha + \beta_2 & \beta_1 \beta + \beta_2 l \end{vmatrix} \neq 0,$$

где

$$\alpha = \int_0^l \frac{dt}{p(t)},\ \beta = \int_0^l \frac{tdt}{p(t)},\ \gamma = \int_0^l \frac{t^2 dt}{p(t)}\ .$$

Отсюда следует

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\inf\limits_{[0,l]} p(x) > 0$ *и при* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *выполняется* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, *а при* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ *имеет место* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$. *Тогда краевая задача* $(7) - (8)$ *является невырожденной.*

Теорему 1.2.1 можно применить непосредственно к задаче о поперечных колебаниях стержня в зависимости от способа закрепления его концов:

Следствие. *Задача о малых поперечных колебаниях стержня с коэффициентом жесткости* $p(\cdot)$ *при воздействии внешней силы* $f(\cdot)$

является однозначно разрешимой, если стержень хотя бы с одной стороны закреплен жестко ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ *или* $\beta_2 = \beta_3 = 0$*), с обоих сторон закреплен шарнирно (*$\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ *или* $\beta_1 = \beta_3 = 0$*), или же с одной стороны закреплен шарнирно, а с другой стороны упруго защемлен (*$\alpha_1 = \alpha_3 = 0,\ \beta_0 = \beta_2 = 0$ *или* $\alpha_0 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_3 = 0$*). А если стержень с одной стороны свободен (*$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$*, или* $\beta_0 = \beta_1 = 0$*), а с другой стороны либо закреплен шарнирно (*$\beta_1 = \beta_3 = 0$ *или* $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$*), либо упруго защемлен (*$\beta_0 = \beta_2 = 0$ *или* $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$*), или же с обоих сторон либо упруго защемлен (*$\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ *и* $\beta_0 = \beta_2 = 0$*), либо свободен (*$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ *и* $\beta_0 = \beta_1 = 0$*), то задача является вырожденной.*

В третьем параграфе данной главы рассматривается краевая задача на отрезке $[a, b]$ для дифференциального уравнения более общего вида

$$L_1(y) \equiv (p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \qquad (a \leq x \leq b) \tag{10}$$

сграничными условиями

$$\left.\begin{array}{ll} l_1(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_3 D_3 y(a) = 0, & l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y''(a) = 0, \\ l_3(y) \equiv \beta_0 y(b) - \beta_3 D_3 y(b) = 0, & l_4(y) \equiv \beta_1 y'(b) + \beta_2 y''(b) = 0, \end{array}\right\} \tag{11}$$

где через $D_3 y(\cdot)$ обозначена третья квазипроизводная $(p(\cdot)y'')' - q(\cdot)y'$. Здесь также предполагается, что $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ $(i = 0,1,2,3)$, причём $\alpha_i + \alpha_j > 0$, $\beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$.

Для краевой задачи $(7) - (8)$ обоснование невырожденности производилось непосредственно, путем перехода к алгебраической системе с определителем Δ, так как для соответствующего однородного уравнения удаётся выписать явный вид общего решения через фундаментальную систему решений (9). Для уравнения же $L_1(y) = 0$ определить фундаментальную систему решений непосредственно трудно. Поэтому здесь установим сначала для решений уравнения $L_1(y) = 0$ аналог *принципа максимума*, затем, на основании этого принципа, проведем обоснование невырожденности краевой задачи $(10) - (11)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\inf_{[a,b]} p(x) > 0,\ q(x) \geq 0,$ *причём при* $q(x) \equiv 0$ $(a \leq x \leq b)$ *для коэффициентов граничных условий*

$$l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y''(a) = 0, \quad l_4(y) \equiv \beta_1 y'(b) + \beta_2 y''(b) = 0 \qquad (12)$$

выполняется $\alpha_1 + \beta_1 > 0$. *Тогда решение* $y(x) \not\equiv const$ *уравнения* $L_1(y) = 0$, *удовлетворяющее двум граничным условиям* (12) *строго монотонно, причём возрастает (убывает) на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $D_3 y(x) \equiv c < 0\ (> 0)$.

Замечание. Если в условиях теоремы 1.3.1 коэффициенты $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то $y''(x) \equiv 0$ и решением уравнения $L_1(y) = 0$ будет любая линейная функция, однако уточнить направление монотонности в этом случае невозможно.

Если решение $y(x)$ уравнения $L_1(y) = 0$ удовлетворяет не только двум условиям (12), но всем четырем граничным условиям (11), то $y(x) \equiv 0$ при $x \in (a, b)$. Поэтому имеет место утверждение

Теорема 1.3.4. *Пусть* $\inf_{[a,b]} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ $(q(x) \not\equiv 0)$ *при* $x \in (a, b)$. *Тогда задача* $(10) - (11)$ *является невырожденной.*

Замечание. Утверждение теоремы 1.3.4 остаётся справедливым, если $q(x) \equiv 0$, но при этом $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ и $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, или $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$.

В четвёртом параграфе главы I рассматриваются нестандартные краевые задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида (10) на множестве Г.

Пусть $\Gamma = (b_1, b_2)$ - интервал числовой оси R^1 и $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ некоторая упорядоченная совокупность точек из этого интервала. Обозначим $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = 1,2, \dots, m;\ a_0 = b_1,\ a_m = b_2)$ и $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$. Рассмотрим на Г следующую краевую задачу, называемую в дальнейшем *задачей* (A): на Γ_0 задано дифференциальное уравнение (10), в точках множества A заданы условия связи

$$\left.\begin{aligned} y(a_i-0)=y(a_i+0), \qquad y''(a_i-0)=y''(a_i+0)=0, \\ D_3y(a_i-0)-D_3y(a_i+0)-\chi(a_i)y(a_i)=0(a_i\in A), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

а в точках b_1 и b_2 - граничные условия вида (11).

Функция $y(x)$, определенная на Г, есть решение задачи (A) тогда и только тогда, когда каждое её сужение $y_i(x)$ на отрезке γ_i удовлетворяет уравнению (10), причём в точках a_i множества A это решение удовлетворяет условиям (13), а в граничных точках b_1 и b_2 - граничным условиям (11).

Задача (A) моделирует целый ряд физических явлений. Например, она возникает при описании малых упругих колебаний натянутой цепочки шарнирно сочленений стержней при воздействии внешней силы. При этом, коэффициенты $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ характеризуют, соответственно, жесткость и натяжение стержней, а $f(\cdot)$ - интенсивность внешней нагрузки. Условия (13) означают непрерывность шарнирного промежуточного сочленения и равновесия сил, приложенных к шарниру, где $\chi(\cdot)$ коэффициент упругости пружины, подпирающей соответствующий шарнир. Краевые условия в граничных точках b_1, b_2 определяют виды закрепления концов цепочки.

В случае, когда цепочка не растянута ($q(x)\equiv 0$ на Γ_0), уравнение деформации на звеньях γ_i примет вид (7). Соответствующую задачу на множестве Г в этом случае будем называть *задачей* (B).

Отметим, что уравнение (7), расшифровываемое в каждой точке $a_i\in A$ как система условий (13), не является частным случаем уравнения (10) на Г при $q(x)\equiv 0$ $(x\in\Gamma_0)$. Дело в том, что $q(a_i)$ в (13) не считается предельным значением $q(x)$ при $x\to a_i$. Поэтому при рассмотрении задачи (B), класс дифференциальных уравнений на Γ_0 сужается, а класс условий связи в точках множества A расширяется и, тем самым, центр тяжести анализа краевой задачи смещается с отрезков γ_i на узловых точках a_i.

Нестандартных краевых задач (A), (B), как и в случае задач на отрезке, назовём *невырожденные*, если соответствующие однородные задачи ($f(x)$ $\equiv$0) имеют только тривиальное решение.

Для решений однородного уравнения $L_1(y) = 0$ на множестве Г устанавливается аналог принципа максимума, который далее будет использован при доказательстве невырожденности задачи (A).

Пусть $y(x) \not\equiv const$ является решением уравнения $L_1(y) = 0$ на Г, удовлетворяющее в точках $a_i \in A$ условиям (13), а в граничных точках b_1, b_2 только двум граничным условиям

$$l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(b_1) - \alpha_2 y''(b_1) = 0, \quad l_4(y) \equiv \beta_1 y'(b_2) + \beta_2 y''(b_2) = 0, \quad (14)$$

где коэффициенты α_i, $\beta_i \geq 0$ $(i = 1,2)$, причём $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 > 0$. Если $\inf\limits_{\Gamma_0} p(x) > 0$ и $q(x) \geq 0$ при $x \in \Gamma_0$ причём при $q(x) \equiv 0$ $(x \in \Gamma_0)$ выполняется условие $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$, то в силу теоремы 1.3.1 функция $y(x)$ является монотонной на каждом интервале γ_i множества Γ_0. Поведение решения $y(x)$ в точках a_i множества A определяет следующее утверждение

Лемма 1.4.1. *Пусть* $\inf\limits_{\Gamma_0} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ *при* $x \in \Gamma_0$, *причём при* $q(x) \equiv 0$ $(x \in \Gamma_0)$ *выполняется* $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ *и в выражении* $D_3 y(a_i) = [(py'')' - qy'](a_i)$ *коэффициенты* $q(a_i) > 0$ *для всех* $a_i \in A$. *Тогда* $y(x)$ *не имеет экстремума в тех точках* $a_i \in A$, *где в условии* (13) *коэффициенты* $\chi(a_i) = 0$, *а в тех точках* $a_i \in A$ *где* $\chi(a_i) \neq 0$, *может иметь только отрицательный максимум или положительный минимум.*

Если в выражениях $D_3 y(a_i)$ коэффициенты $q(a_i) = 0$ при всех $a_i \in A$, то условия (13) примут вид

$$\left.\begin{array}{c} y(a_i - 0) = y(a_i + 0), \quad y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0 \\ (py'')'(a_i - 0) - (py'')'(a_i + 0) - \chi(a_i) y(a_i) = 0 (a_i \in A). \end{array}\right\} \quad (15)$$

Для решения $y(x) \not\equiv const$ уравнения $L_0(y) = 0$ на Г, удовлетворяющее условиям связи (15) в точках $a_i \in A$ и граничным условиям (14) в точках b_1 и b_2 имеет место утверждение

Лемма 1.4.2. *Если в условиях* (15) *коэффициенты* $\chi(a_i) \neq 0$, *то* $y(x)$ *не имеет экстремума в точках* $a_i \in A$.

Замечания. Если в условиях (15) коэффициенты $\chi(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$, то $y(x)$ может иметь экстремума в точках $a_2, \dots, a_{m-2}$, а в точках a_1 и

a_{m-1} только в том случае, когда в граничных условиях (14) коэффициент $\alpha_1 = 0$ и, соответственно, $\beta_1 = 0$.

Доказательство невырожденности краевых задач (A) и (B) на Γ основано на лемму 1.4.1

Теорема 1.4.1. *Пусть* $\inf_{\Gamma_0} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, *причём* $q(x) \not\equiv 0$ *на* Γ_0 *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$. *Тогда задача* (A) *является невырожденной.*

Если же $q(x) \equiv 0$ $(x \in \Gamma_0)$, *но коэффициенты* $q(a_i) > 0$ $(a_i \in A)$ *и при* $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ *выполняется* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, *а при* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ *имеет место* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$, *то задача* (B) *также является невырожденной.*

В условиях теоремы 1.4.1 в случае $q(x) \equiv 0$ $(x \in \Gamma_0)$ предполагалась строгая положительность коэффициентов $q(a_i)$ $(a_i \in A)$. Если это условие не имеет место, то соответствующую краевую задачу на Γ назовём *задачей* (C). Используя лемму 1.4.2 доказывается справедливость следующего утверждения:

Теорема 1.4.2. *Пусть* $\inf_{\Gamma_0} p(x) > 0$, $\chi(a_i) \neq 0$ $(a_i \in A)$ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$. *Тогда задача* (C) *является невырожденной.*

Замечание. Если в условиях теоремы 1.4.2 коэффициенты $\chi(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$ и в краевых условиях (14) коэффициенты $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то задача (C) является вырожденной и размерность пространства её решений равна $m - 1$. Если же $\alpha_1 \cdot \beta_1 \neq 0$, то рассматриваемая задачи является невырожденной лишь в случае, когда $m \leq 3$.

Вторая глава называется "**Функция Грина краевых задач типа Штурма-Лиувилля для дифференциальных уравнений 4-го порядка**". В ней изучается функция Грина краевых задач, рассмотренных в главе I настоящей работы.

Метод анализа функции Грина, применённый в настоящей работе, отличается от классического (аксиоматического) метода и он адаптирован, в основном, к нестандартным задачам, рассмотренных в § 4 главы I.

Если на отрезке (a, b) задана краевая задача

$$\begin{cases} L(y) = f, \\ l_i(y) = 0 \quad (i = 1,2,\dots,n), \end{cases} \tag{16}$$

где $L(\cdot)$ - линейная дифференциальная форма, $l_i(\cdot)$ - линейные функционалы, а f - заданная в (a,b) функция, то под *функцией Грина* задачи (16) мы будем понимать, следуя Ю.В.Покорного, любую функцию $G(x,s)$, которая позволяет выразить решение $y(x)$ краевой задачи (16) в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds. \tag{17}$$

Здесь сохраняется исходный физический смысл функции Грина как функция влияния, перечень аксиом превращается в набор свойств и, главное, для каждой невырожденной задачи записывается интегральное представление решения в явном виде.

В первом параграфе глава II рассматривается линейная двухточечная краевая задача $(5)-(6)$, где коэффициенты $p_i(x)$, α_{ij}, β_{ij} и правые части $f(x)$, F_j удовлетворяют условиям, обеспечивающих невырожденность краевой задачи (см. § 1, гл. I). Для уравнения (5) строится функция Коши[4], при помощи которой определяется функция Грина $G(x,s)$, позволяющая представить решение краевой задачи в виде (17). На этом пути получен следующий результат:

Теорема 2.1.1. *Пусть задача* $(5)-(6)$ *является невырожденной. Тогда существует единственная функция Грина этой краевой задачи, которая обладает свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s = s_0 \in [a,b]$, *функция* $g(x) = G(x,s_0)$ *является решением однородного уравнения* $L(y) = 0$ *на каждом промежутке* $[a,s_0]$ *и* $[s_0,b]$*;*

2) при $x = s_0$ *она удовлетворяет условиям*

$$g^{(i)}(s_0+0) - g^{(i)}(s_0-0) = 0$$

[4]Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - Москва - Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2003, 540с.

для всех производных порядка $i = 0,1,2,\dots,n-2$ *и*

$$g^{(n-1)}(s_0+0) - g^{(n-1)}(s_0-0) = \frac{1}{p_0(s_0)};$$

3) она удовлетворяет граничным условиям

$$l_j(g) = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n).$$

Отметим, что функция Грина краевой задачи $(5)-(6)$ может быть найдена напрямую, только исходя из трёх условий, перечисленных в теореме 2.1.1.

Во втором параграфе главы II рассматривается краевая задача $(7)-(8)$ на отрезке $(0,l)$. Предполагая эту краевую задачу невырожденной (см теорему 1.2.1), строится для неё функция Грина $G(x,s)$, при помощи которой решение краевой задачи $(7)-(8)$ можно записать в виде (17).

При помощи фундаментальной системы решений (9) однородного уравнения $L_0(y) = 0$ строится функция Коши

$$K(x,s) = x\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s\varphi_3(x) + \varphi_4(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)(t-s)}{p(x)}ds. \quad (s < x)$$

уравнения (7) и функция Грина

$$G(x,s) = \begin{cases} K(x,s) - \dfrac{1}{\Delta}\big(\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x)\psi_2(s)\big), & 0 \le s \le x \le l, \\ -\dfrac{1}{\Delta}\big(\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x) - \psi_2(s)\big), & 0 \le x \le s \le l \end{cases} \tag{18}$$

краевой задачи $(7)-(8)$, где обозначены

$$\Phi_1(x) = \big(\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x)\big)(\alpha_1\beta_1\alpha + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + \alpha_0\big(\alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x)\big)(\beta_1\beta + \beta_2 l),$$

$$\Phi_2(x) = \beta_0\big(\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x)\big)\big(\alpha_1(\alpha l - \beta) + \alpha_2 l + \alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x)\big) + (\alpha_0\beta_0(\beta l - \gamma) - \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3),$$

$$\psi_1(s) = \beta_0\big(l\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s(\alpha l - \beta)\big) + (\beta l - \gamma) - \beta_3$$

$$\psi_2(s) = \beta_1(\varphi_3(s) - s\alpha + \beta) - \beta_2(l - s).$$

Это представление функции Грина позволяет определить основные её свойства. Следующее утверждение является основным результатом данного параграфа:

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Тогда существует функция Грина кривой задачи* $(7)-(8)$ *в виде* (18), *которая обладает следующими свойствами:*

1) *функция* $g(x)=G(x,s_0)$ $\big(s_0\in(0,l)\big)$ *при* $x\neq s_0$ *удовлетворяет однородному уравнению* $L_0(y)=0$*;*

2) *при* $x=s_0$ *удовлетворяет условиям*

$$g^{(i)}(s_0+0)-g^{(i)}(s_0-0)=0 \qquad (i=0,1,2),$$

$$(pg'')'(s_0+0)-(pg'')'(s_0-0)=1;$$

3) удовлетворяет граничным условиям (8):

$$l_j(g)=0 \qquad (j=1,2,3,4).$$

Отметим, что представление (18) для функции Грина соответствует наиболее общим граничным условиям (8), которые охватывают все реально существующие виды закрепления концов стержня. Из этого представления следуют формулы для функций Грина краевых задач с граничными условиями, соответствующие конкретным видам закрепления концов стержня (см. следствия теоремы 1.2.1).

В третьем параграфе главы II рассматривается краевая задача $(10)-(11)$ на отрезке (a,b). В § 3 главы I были определены условия невырожденности этой краевой задачи. В настоящем параграфе строится функция Грина этой краевой задачи и определяются основные её свойства.

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_1^4$- фундаментальная система решений однородного уравнения $L_1(y)=0$ на отрезке (a,b) и

$$K(x,s)=\frac{1}{p(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s)\\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) & \varphi_3'(s) & \varphi_4'(s)\\ \varphi_1''(s) & \varphi_2''(s) & \varphi_3''(s) & \varphi_4''(s)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\end{vmatrix}$$

-функция Коши этого уравнения, где $W(\cdot)$ - вронскиан системы $\{\varphi_i(\cdot)\}_1^4$. Тогда

$$G(x,s)=\begin{cases}K(x,s)-\big(\varphi_3(x)\psi_3(s)+\varphi_4(x)\psi_4(s)\big), & a\le s\le x\le b,\\ \qquad -\big(\varphi_3(x)\psi_3(s)+\varphi_4(x)\psi_4(s)\big), & a\le x\le s\le b,\end{cases} \qquad (19)$$

является функцией Грина краевой задачи $(10)-(11)$, где обозначены

$$\psi_3(s)=l_3\big(K(b,s)\big), \qquad \psi_4(s)=l_4\big(K(b,s)\big).$$

Основным результатом данного параграфе является

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\inf\limits_{[a,b]} p(x)>0$, $q(x)\ge 0$, *причём если* $q(x)\equiv 0$ $\big(x\in(a,b)\big)$, *то при* $\alpha_1+\beta_1>0$ *имеет место* $\alpha_0+\beta_0>0$, *а при* $\alpha_1=\beta_1=0$ *выполняется* $\alpha_0\cdot\beta_0>0$. *Тогда существует и может быть определена единственным образом в виде* (19) *функция Грина краевой задачи* $(10)-(11)$, *которая обладает свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s=s_0\in(a,b)$, *функция* $g(x)=G(x,s_0)$ *является решением однородного уравнения* $L_1(y)=0$ *при* $x\neq s_0$;

2) удовлетворяет граничным условиям (11): $l_j(g)=0 \quad (j=1,2,3,4)$;

3) *при* $x=s_0$ *выполняются условия:*

$$g^{(i)}(s_0+0)-g^{(i)}(s_0-0)=0 \qquad (i=0,1,2),$$

$$(pg'')'(s_0+0)-(pg'')'(s_0-0)=1.$$

В четвёртом параграфе главы II изучается вопрос о функции Грина нестандартных краевых задач (A), (B) и (C) рассмотренных в § 4 главы I.

Рассмотрим на множестве $\Gamma_0=\bigcup_{i=1}^m \gamma_i$ систему уравнений

$$(p_i y_i'')''-(q_i y_i')'=f_i, \qquad (20)$$

которая представляет собой набор скалярных дифференциальных уравнений на соответствующих отрезках $\gamma_i=(a_{i-1},\ a_i)$ $(i=1,2,\dots,m)$, считая теперь все условия $(13),(11)$ краевыми. Запишем все эти условия в виде набора равенств

$$l_i(y)=0 \qquad (21)$$

при произвольной нумерации функционалов l_i. На каждом отрезке γ_i система $(20)-(21)$ представляет собой обычную двухточечную краевую задачу, которую предположим невырожденной. Её функцию Грина (существующей в силу теоремы 2.3.2) обозначим через $Q_i(x,s)$ $(i=1,2,\dots,m)$.

Определение 2.3. Функцию $K(x,s)$, непрерывную по совокупности переменных на каждом прямоугольнике $\gamma_{ij}=\gamma_i\times\gamma_j$ $(i,j=1,2,\dots,m)$, назовём *функцией Коши* однородного уравнения $L_1(y)=0$ на Γ_0, если для любой непрерывной на Г функции $f(x)$, функция

$$y(x)=\int\limits_{\Gamma} K(x,s)f(s)ds$$

удовлетворяет на Γ_0 уравнению (10).

Лемма 2.4.1. *Функция $K(x,s)$, определяемая формулой*

$$K(x,s)=\begin{cases} Q_i(x,s), & \text{при} \quad (x,s)\in\gamma_{ii} \\ 0, & \text{при} \quad (x,s)\in\gamma_{ij}, \qquad i\neq j. \end{cases}$$

является функцией Коши уравнения $L_1(y)=0$ на Γ_0.

Определение 2.4. *Функцией Грина* краевой задачи (A) на множестве Г называется функция двух переменных $G(x,s)$, заданная на $[b_1,b_2]\times\Gamma$ и такая, что для каждой $f(x)\in C(\Gamma_0)$ решение $y(x)$ задачи (A) может быть представлено в виде

$$y(x)=\int\limits_{\Gamma} G(x,s)f(s)ds.$$

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_1^4$- фундаментальная система решений однородного уравнения $L_1(y)=0$, которая получена из фундаментальных систем скалярных однородных уравнений (20) $(f_i\equiv 0)$ на отрезках $\gamma_i(i=1,2,\dots,m)$ склеиванием в точках $a_i\in A$ условиями (13). Если краевая задача (A) невырожденна, то существует такая фундаментальная система решений $\{\varphi_j(x)\}$, для которой $l_i(\varphi_j)=\delta_{ij}$, где $l_i(\cdot)$ - набор функционалов (21) и δ_{ij}-символ Кронекера.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\inf\limits_{\Gamma} p(x)>0,$ $q(x)\geq 0$ $(q(x)\not\equiv 0)$ *на* Γ_0 *и* $\alpha_0+\beta_0>0$. *Тогда функция*

$$G(x,s) = K(x,s) - \sum_{j=1}^{4m} l_j\big(K(\cdot,s)\big)\,\varphi_j(x) \qquad (22)$$

является функцией Грина краевой задачи (A), *которая является единственной в классе непрерывных на* $[b_1, b_2] \times \Gamma$ *функций.*

Аналогично доказывается, что в условиях теорем 1.4.1, 1.4.2 и замечания к ней существует единственная функция Грина $G(x,s)$ краевых задач (B) и, соответственно (C), которая может быть представлена в виде (22).

Из представления (22) для функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи (A) на множестве Г, вытекают все её основные свойства, аналогичные свойствам функции Грина скалярной задачи (см. теорему 2.3.2).

Лемма 2.4.2. *Пусть* $G(x,s)$ *функция Грина краевой задачи* (A) *на множестве* Г. *Тогда при каждом фиксированном* $s = s_0 \in \Gamma$, *функция* $g(x) = G(x, s_0)$ *удовлетворяет*

1) на каждом интервале γ_i *однородному уравнению* $L_1(y) = 0$ *при* $x \neq s_0$;

2) *условиям связи* (13) *в точках* $a_i \in A$;

3) *граничным условиям* (11) *в точках* $b_1,\ b_2$;

4) *при* $x = s_0$ *условию*

$$D_3 g(s_0 - 0) - D_3 g(s_0 + 0) = -1. \qquad (23)$$

Функция Грина $G(x,s)$ краевой задачи (A) на Г, в отличие от функции Грина скалярной задачи, обладает ещё одним свойством, порождаемое спецификой задачи.

Пусть a_i - некоторая точка множества A. Функция

$$g^{(i)}(x) = \lim_{s \to a_i - 0} G(x,s)$$

называется *предельной срезкой* функции Грина.

Лемма 2.4.3. *Предельная срезка* $g^{(i)}(x)$ *функции Грина краевой задачи* (A) *обладает свойствами*:

1) при $x \neq a_i$ *свойствами 1) - 3) леммы 2.4.2;*

2) при $x = a_i$ *имеет место равенство*

$$D_3 g^i(a_i - 0) - \ D_3 g^i(a_i + 0) = \chi(a_i) g^i(a_i) - 1. \qquad (24)$$

Из лемм 2.4.2 и 2.4.3 следует

Теорема 2.4.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1. Тогда функций Грина $G(x,s)$ краевых задач (A) и (B) обладает следующими свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s = s_0 \in \Gamma$ функция $g(x) = G(x, s_0)$ удовлетворяет однородному уравнению $L_1(y) = 0$ на $[b_1, b_2] \setminus \{s_0\}$, условиям связи (13) в точках $a_i \in A$, граничным условиям (11) в точках b_1, b_2, а при $x = s_0 \in \gamma_i$ условию (23);

2) если $s_0 \in A$ и γ_i - один из интервалов, примыкающих к s_0, то функция

$$g^{(i)}(x) = \lim_{\substack{s \to s_0 \\ s \in \gamma_i}} G(x,s)$$

при $x = s_0$ удовлетворяет однородному уравнению $L_1(y) = 0$ на множестве $[b_1, b_2] \setminus \{s_0\}$, граничным условиям (11) в точках b_1, b_2, условиям (13) в точках $a \in A$, $a \neq s_0$, а в точке $a = s_0$ вторая строка условий (13) заменяется условием (24).

Аналогичные свойства функции Грина установлены также в случаях, когда в уравнении (10) коэффициент $q(x) \equiv 0$ $(x \in \Gamma)$, но в условиях связи (13) коэффициенты $q(a_i) + \chi(a_i) > 0$ при $a_i \in A$ (задача (B)), или же $q(x) \equiv 0$ $(x \in \Gamma)$, $q(a_i) = \chi(a_i) = 0$ $(a_i \in A)$, но $m \leq 3$ и в граничных условиях (11) коэффициенты $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ (задача (C)).

Пользуясь, случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, профессору Р. Мустафокулову за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях:

1. Солиев С.К. Невырожденность краевой задачи типа Штурма для одного дифференциального уравнений 4-го порядка и её функция Грина (Мустафокулов Р., Солиев С.К.) //Вестник Таджикского национального университета. Научный журнал. Серия естественных наук, №1/2(81), Душанбе, 2012. с. 26-33.

2. Солиев С.К. Исследование краевой задачи типа Штурма для дифференциальных уравнений четвёртого порядка // Известия АН РТ. Отд. физ.- мат., хим, геол. и тех. наук, 2012, №2 (147), с. 22-28.

3. Солиев С.К. О функции Грина одной нестандартной краевой задачи //Вестник Таджикского национального университета. Научный журнал. Серия естественных наук, №1/2 (106), Душанбе, 2013. с. 60-66.

4. Солиев С.К. Об одной многоточечной краевой задачи (Мустафокулов Р., Солиев С.К.) // Доклады АН РТ, 2014, т.57 , № 9-10, с. 725 - 731.

В других изданиях:

1. Солиев С.К. Об одной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для уравнения 4-го порядка и её функция Грина (Мустафокулов Р., Солиев С.К.) // Материалы республиканской научно - практической конференции, посвященной 75-летию профессора Г. Собирова. Душанбе, 2011, с. 21-24.

2. Солиев С.К. Функция Грина импульсных задач (Мустафокулов Р., Солиев С.К.) // Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева. Душанбе 2013, с. 43-45.

3. Солиев С.К. Невырожденность краевой задачи типа Штурма для одного дифференциального уравнений 4-го порядка (Мустафокулов Р., Солиев С.К.) // Материалы международной научной конференции, посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан. Спецвыпуск №2(29), Худжанд, 2014. с. 184-187.