ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Солиев Сафарбек Курбонхолович

НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА И ИХ ФУНКЦИЯ ГРИНА

01.01. 02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание учёной степени кандидата

физико - математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Мустафокулов Р.

Душанбе - 2015

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение и дальнейшее развитие теории краевых задач связаны, прежде всего, с проникновением математики в физические проблемы. Например, классическая задача Штурма-Лиувилля

$$-(pu')' + qu = \lambda m u \qquad (0 \le x \le l),$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(0) - \alpha_1 u'(0) = 0, \\ \beta_0 u(l) + \beta_1 u'(l) = 0 \end{cases}$$

была поставлена и изучена Штурмом в первой половине XIX века при исследовании распространения тепла в неоднородном стержне. Знаменитую теорему Штурма, названная Гильбертом замечательной, в современных терминах можно сформулировать следующим образом:

пусть $p(x)$- непрерывно дифференцируема, $q(x)$ и $m(x)$- непрерывны, причём $p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$, $m(x) > 0$ при $x \in (0, l)$; коэффициенты краевых условий $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$- неотрицательны и $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$. Тогда

а) спектр задачи Штурма-Лиувилля состоит из неограниченной последовательности $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ вещественных собственных значений, имеющих единичную геометрическую и алгебраическую кратность;

б) собственная функция φ_k, соответствующая собственному значению λ_k, имеет в $(0.l)$ точно k простых нулей ($k = 0,1,2,\dots$), причём нули φ_k и φ_{k+1} перемежаются, т. е. при каждом k между любыми соседними нулями φ_k имеется точно один нуль функции φ_{k+1}.

Распространение этих свойств спектра на более общие задачи привело к созданию новых разделов современной математики таких, как спектральная теория дифференциальных операторов, теория положительных операторов в полуупорядоченных пространств и др.

Свойства а) и б), получившие название *осцилляционные свойства спектра*, удалось перенести на уравнения 4-го порядка лишь в 40-ые годы прошлого столетия (Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн) и, далее, в 70-ые годы эти свойства были перенесены на достаточно общие случаи не только двухточечных, но и многоточечных задач (Карлин С., Левин А.Ю., Степанов Г.Д., Покорный Ю.В., Дерр В.Я. и др.). Следует отметить, что развитие соответствующей теории было связано с достаточно глубоким анализом функции Грина.

Начиная с 80-ых годов прошлого века начали появляться исследования, в которых проблемы собственных колебаний и свойства амплитудных функций анализировались не только для одного континиума, но и для сложных систем, допускающих представления в виде набора одномерных континиумов, взаимодействующих только через концы (например, сетка из упругих тросов и решётка из упругих стержней) (С. Никез (S. Nicaise), Б.С. Павлов, М.Д. Фаддеев, Ю.В. Покорный и др.). Развивая это направление, группа воронежских математиков под руководством профессора Покорного Ю.В., создали достаточно глубокую теорию дифференциальных уравнений на геометрическом графе [35].

Настоящая работа примыкает к теории краевых задач для дифференциальных уравнений на графе. В ней рассматриваются краевые задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида

$$(p(x)y'')'' - (qy')' = f, \qquad (0.1)$$

заданного на некотором специальном множестве Г числовой оси R^1. Отметим, что уравнение (0.1) является основополагающим понятием при анализе моделей самых разных задач естествознания. Кроме того, оно является “стартовым” для обобщений; если какое-то свойство задачи Штурма-Лиувилля удаётся установить для уравнения (0.1), это почти наверняка означает наличие общего результата для уравнений высших порядков.

В отличие от работ [1], [21], в настоящей работе рассматривается уравнение (0.1) на одномерном графе Г, состоящем из объединении интервалов $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = 1,2, \dots, m)$ и множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}$ их общих концов, при граничных условиях типа Штурма-Лиувилля в точках $b_1 = a_0$ и $b_2 = a_m$. В физических реализациях в качестве Г служит натянутая цепочка стержней (разные γ_i отнесены к разным стержневым звеньям). На каждом интервале γ_i задано уравнение (0.1), в общих точках, где смыкаются смежные γ_i, задаются условия согласования, адекватные в приложениях типам сочленения стержней. Например, если a- одна из таких точек смычки, то условие непрерывного сочленения имеет вид

$$y(a-0) = y(a+0), \tag{0.2}$$

условие

$$y''(a-0) = y''(a+0) = 0 \tag{0.3}$$

означает шарнирность сочленения, а условие

$$[(py'')' - qy'](a-0) - [(py'')' - qy'](a+0) - \chi(a)y(a) = 0 \tag{0.4}$$

означает, что в точке a система к тому же упруго подпёрта.

Дифференциальным уравнением на Г мы называем уравнение (0.1) вместе с условиями согласования $(0.2) - (0.4)$. *Решением* описываемого дифференциального уравнения мы считаем функцию $y(x)$, определенную на всем Г, сужение $y_i(x)$ которой на отрезке γ_i удовлетворяет уравнению (0.1), а в точках a_i сочленения отрезков - условиям $(0.2) - (0.4)$.

В монографии [35] для уравнения (0.1) на графе изучена краевая задача типа Дирихле. В настоящей же работе для уравнения (0.1) на Γ мы изучаем *краевую задачу типа Штурма-Лиувилля,* задавая дополнительно к $(0.1) - (0.4)$ в граничных точках b_1 и b_2 по паре условий видов

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 y(b_1) + \alpha_3[(py'')' - qy'](b_1) = 0, \qquad \alpha_1 y'(b_1) - \alpha_2 y''(b_1) = 0, \\ &\beta_0 y(b_2) - \beta_3[(py'')' - qy'](b_2) = 0, \qquad \beta_1 y'(b_2) + \beta_2 y''(b_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{0.5}$$

Ранее такая задача была изучена [1], [21] лишь в случаях, когда коэффициенты $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$. Рассматриваемые нами здесь граничные условия имеют наиболее общий (с точки зрения физики) вид и охватывают все реально известные случаи упругого закрепления концов стержней.

Исследование нестандартной краевой задачи $(0.1) - (0.5)$ тесно связано с изучением соответствующей скалярной краевой задачи на отрезке. Поэтому в работе сначала изучается краевая задача для уравнения (0.1) на отрезке (a, b) при граничных условиях вида (0.5). Случай, когда в уравнении (0.1) коэффициент $q(x) \equiv 0$ рассматривается отдельно, так как в этом случае фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения находится легко и условие разрешимости краевой задачи определяется в зависимости от коэффициентов граничных условий.

Основные понятия и важнейшие утверждения теории краевых задач комментируются на примере линейной двухточечной краевой задачи для уравнения n- го порядка.

В работе широко используются методы качественной теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также теории операторов в функциональных пространствах со специальными структурами.

Одним из методов исследования краевых задач является переход от исходной задачи к интегральному уравнению с последующим анализом соответствующего интегрального оператора. Первый шаг на этом пути- выяснение возможности однозначного обращения дифференциального оператора

$$Ly \equiv (py'')'' - (qy')',$$

порождаемого левой частью уравнения (0.1) и краевыми условиями (0.5) на границе Г. Первая глава настоящей диссертационной работы посвящена изучению именно этого вопроса. Здесь исследуется вопрос о невырожденности краевых задач вида $(0.1) - (0.5)$.

Возможность перехода от дифференциальных уравнений к интегральным основан на фундаментальном понятии *функции Грина*.

Вторая глава диссертации посвящена изучению функции Грина краевых задач, рассмотренных в главе I.

Под функцией Грина $G(x,s)$ краевой задачи на отрезке обычно понимается объект, определяемый некоторым набором аксиом, который позволяет выразить решение $y(x)$ данной краевой задачи в виде

$$y(x) = \int_0^l G(x,s)f(x)ds.$$

Такая интегральная форма обращения дифференциального оператора L является основополагающим свойством функции Грина. Именно это интегральное представление позволяет исследовать задачи математической физики средствами современного анализа.

При расширении классов изучаемых задач, например, при рассмотрении краевой задачи $(0.1) - (0.5)$ на множестве Г, сохранение аксиоматического подхода требует модификации аксиом, но как именно модифицировать аксиомы, не ясно. Поэтому мы используем другой подход, определяя функцию Грина как ядро интегрального оператора

$$(L^{-1}f)(x) = \int_\Gamma G(x,s)f(x)ds, \qquad (0.6)$$

обращающего дифференциального оператора L. Отметим, что такой подход к определению функции Грина ранее был применен Покорным Ю.В. и его учениками при изучении краевых задач для дифференциальных уравнений на графе [35]. Отметим также, что данный подход к определению функции Грина для скалярной задачи Штурма-Лиувилля на отрезке фактически является эквивалентным аксиоматическому подходу, однако этот подход, в отличие от аксиоматического, позволяет выписать функцию Грина в явном виде и определить непосредственно основные её свойства.

Описанная общая схема применяется нами для двух разных типов нестандартных задач, отличающихся как на отрезках γ_i (для одного из этих типов $q(\cdot) \equiv 0$), так и для реализации уравнения (0.1) в точках a_i. Эти различия существенны и с физической точки зрения и с точки зрения конкретных приемов, используемых нами для доказательства знакорегулярных свойств.

Перейдем теперь к более подробному обзору работы. Диссертация состоит из введения двух глав и списка литературы.

Первая глава под названием "**Невырожденность краевых задач типа Штурма-Лиувилля для дифференциальных уравнений 4-го порядка"** посвящена вопросу о невырожденности (однозначной разрешимости) краевых задач типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида (0.1). Она состоит из четырёх параграфов.

В первом параграфе для линейного дифференциального уравнения

$$L(y) \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (0.7)$$

где функции $p_i(x)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ и $f(x)$ непрерывны при $a \leq x \leq b$ и $p_0(x) \neq 0$, рассматривается двухточечная краевая задача с граничными условиями вида

$$l_j(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(i)}(b) = F_j \quad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (0.8)$$

где α_{ij}, β_{ij}, F_j $(i = 0,1,2,\ldots,n-1;\ j = 1,2,\ldots,n)$ заданные числа. На примере этой задачи приводятся необходимые для дальнейшего изложения основные понятия и утверждения из теории краевых задач [14].

Определение 0.1. Краевая задача $(0.7) - (0.8)$ называется *невырожденной*, если соответствующая однородная задача

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ l_j(y) = 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

имеет только нулевое (тривиальное) решение.

Условие невырожденности краевой задачи $(0.7)-(0.8)$ даёт следующее утверждение:

Теорема 0.1. *Задача* $(0.7)-(0.8)$ *невырождена тогда и только тогда, когда для каждой фундаментальной системы решений* $\{\varphi_i(x)\}_1^n$ *однородного уравнения* $L(y)=0$, *выполняется*

$$det\left\|l_j(\varphi_i)\right\| \neq 0.$$

Из этой теоремы вытекает, что задача $(0.7)-(0.8)$ невырождена тогда и только тогда, когда она имеет единственное решение при любой функции $f(x) \in C_{[a,b]}$ и любого набора чисел F_j $(j=1,2,\dots,n)$.

Во втором параграфе исследуется вопрос о невырожденности краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения

$$(p(x)y'')''=f(x) \qquad (0 \leq x \leq l), \tag{0.9}$$

при граничных условиях вида

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_0 y(0)+\alpha_3(py'')'(0)=0, & \alpha_1 y'(0)+\alpha_2 y''(0)=0, \\ \beta_0 y(l)-\beta_3(py'')'(l)=0, & \beta_1 y'(l)-\beta_2 y''(l)=0. \end{array}\right\} \tag{0.10}$$

Относительно коэффициентов предполагается, что $p(x) \in C_{[0,l]}^2$, $f(x) \in C_{[0,l]}$, причём $p(x)>0$ при $x \in (0,l)$ и $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ $(i,j=0,1,2,3)$, причём $\alpha_i+\alpha_j>0, \beta_i+\beta_j>0$ при $i+j=3$.

Граничные условия (0.10) охватывают все реально существующие виды закрепления концов стержня. Например [15], если в условиях (0.10) коэффициенты $\alpha_2=\alpha_3=0$ и $\beta_0=\beta_1=0$, то стержень слева закреплён *жёстко (защемлён):* $y(0)=y'(0)=0$, а справа - *свободен*: $y''(l)=[(py'')'-qy'](l)=0$, а если $\alpha_1=\alpha_3=0$ и $\beta_0=\beta_2=0$, то стержень слева закреплён *шарнирно*: $y(0)=y''(0)=0$, а справа - *упруго защемлён*: $y'(l)=[(py'')'-qy'](l)=0$.

Так как общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения выписывается в виде

$$y(x)=c_1+c_2 x+c_3\int_0^x \frac{x-t}{p(t)}dt+c_4\int_0^x \frac{x-t}{p(t)}tdt$$

(c_i–произвольные постоянное), то для нахождения условий невырожденности краевой задачи $(0.9)-(0.10)$ получаем однородную систему алгебраических уравнений, определитель которой выписывается явно через коэффициенты краевых условий (0.10):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ \beta_0 & \beta_0 l & \beta_0(\alpha l-\beta) & \beta_0(\beta l-\gamma)-\beta_3 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1\alpha+\beta_2 & \beta_1\beta+\beta_2 l \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме 0.1 условия, при которых этот определитель отличен от нуля, являются условиями невырожденности рассматриваемой краевой задачи.

Основным результатом данного параграфе является утверждение:

Теорема 0.2. *Пусть* $\underset{[0,l]}{inf}p(x)>0$ *и коэффициенты граничных условий* (0.10) *удовлетворяют условиям: при* $\alpha_1+\beta_1>0$ *выполняется* $\alpha_0+\beta_0>0$*, а при* $\alpha_1=\beta_1=0$ *имеет место* $\alpha_0\cdot\beta_0>0$. *Тогда краевая задача* $(0.9)-(0.10)$ *является невырожденной.*

Эту теорему можно применить непосредственно к задаче об упругих колебаниях стержня в зависимости от способа закреплёния его концов:

Следствие. *Задача об упругих колебаниях стержня с коэффициентом жесткости* $p(\cdot)$ *при воздействии внешней силы* $f(\cdot)$ *является однозначно разрешимой, если стержень хотя бы с одной стороны закреплён жестко, или с обоих сторон закреплён шарнирно, или же с одной стороны закреплён шарнирно, а с другой стороны упруго защемлён. Если же стержень с одной стороны свободен, а с другой стороны либо закреплён шарнирно, либо упруго защемлён, или же с обоих сторон либо упруго защемлён, либо свободен то задача является вырожденной.*

В третьем параграфе данной главы рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения

$$(p(x)y'')''-(q(x)y')'=f(x) \qquad (a\le x\le b) \tag{0.11}$$

при граничных условиях вида

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha_0 y(a)+\alpha_3[(py'')'-qy'](a)=0, & \alpha_1 y'(a)-\alpha_2 y''(a)=0,\\ \beta_0 y(b)-\beta_3[(py'')'-qy'](b)=0, & \beta_1 y'(b)+\beta_2 y''(b)=0.\end{array}\right\} \quad (0.12)$$

Относительно коэффициентов предполагается, что $p(x) \in C^2_{[a,b]}$, $q(x) \in C^1_{[a,b]}$, $f(x) \in C_{[a,b]}$, причём $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ при $x \in (a,b)$. Кроме того, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, причём $\alpha_i + \alpha_j > 0$, $\beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$.

Для краевой задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, обоснование невырожденности производилось непосредственно, путем перехода к алгебраической системе с определителем Δ, так как для однородного уравнения $(py'')'' = 0$ удаётся выписать явный вид общего решения. Для уравнения же

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = 0 \qquad (a \leq x \leq b) \qquad (0.13)$$

выписать общее решение явно не представляется возможным. Поэтому здесь для доказательства невырожденности задачи $(0.11) - (0.12)$ мы установим сначала для решений уравнения (0.13) аналог *принципа максимума*, затем, на основании этого принципа, проведем обоснование невырожденности краевой задачи $(0.11) - (0.12)$ на отрезке $[a,b]$.

Для решений $y(x) \not\equiv const$ уравнения (0.13), удовлетворяющих только двум граничным условиям

$$\alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y''(a) = 0, \quad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y''(b) = 0 \qquad (0.14)$$

имеет место следующий аналог принципа максимума [1], [21]:

Лемма 0.1. Пусть $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, при $x \in (a,b)$, *причём при* $q(x) \equiv 0$ *выполняется* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$. *Тогда решение* $y(x)$ *является строго монотонной функцией, причём возрастает (убывает) на* (a,b) *тогда и только тогда, когда* $D_3 y(x) \equiv c < 0$ (> 0).

Если решение $y(x)$ уравнения (0.13) удовлетворяет не только двум условиям (0.14), но всем четырем граничным условиям (0.12), то показывается, что $y(x) \equiv 0$ при $x \in (a,b)$. Поэтому имеет место

Теорема 0.3. *Пусть* $\inf\limits_{[a,b]} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ *при* $x \in (a,b)$, *причём при* $q(x) \equiv 0$ *для коэффициентов граничных условий* (0.12) *выполняется*

$\alpha_0 + \beta_0 > 0$ *при* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$, *а если* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, *то* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$. *Тогда задача* $(0.1.1) - (0.12)$ *является невырожденной.*

Утверждение теоремы 0.3 является основным результатом § 3 гл. I.

В четвёртом параграфе данной главы рассматривается одна нестандартная краевая задача типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида (0.11).

Пусть (b_1, b_2)- интервал числовой оси R^1 и $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ некоторая упорядоченная совокупность точек из этого интервала. Обозначим $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = 1,2, \dots, m;\ a_0 = b_1,\ a_m = b_2)$ и $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$. Рассмотрим на (b_1, b_2) следующую краевую задачу: на Γ задано дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \qquad (x \in \Gamma), \tag{0.15}$$

в точках множества A заданы условия связи

$$\left.\begin{aligned} y(a_i - 0) = y(a_i + 0), \qquad y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0, \\ D_3 y(a_i - 0) - D_3 y(a_i + 0) - \chi(a_i) y(a_i) = 0 \ \ (a_i \in A), \end{aligned}\right\} \tag{0.16}$$

а в точках b_1 и b_2- граничные условия видов

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 y(b_1) + \alpha_3 D_3 y(b_1) = 0, \qquad \beta_0 y(b_2) - \beta_3 D_3 y(b_2) = 0, \\ \alpha_1 y'(b_1) - \alpha_2 y''(b_1) = 0, \qquad \beta_1 y'(b_2) + \beta_2 y''(b_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{0.17}$$

Здесь через $D_3 y(\cdot)$ обозначена третья квазипроизводная $(p(\cdot)y'')'' - q(\cdot)y'$.

Задача $(0.15) - (0.17)$ моделирует целый ряд физических явлений. Например [4], она возникает при описании малых упругих колебаний натянутой цепочки шарнирно сочленений стержней при воздействии внешней силы. При этом, коэффициенты $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ характеризуют, соответственно, жёсткость и натяжение стержней, а $f(\cdot)$- интенсивность внешней нагрузки. Условия (0.16) означают непрерывность шарнирного промежуточного сочленения и равновесия сил, приложенных к шарниру, где $\chi(\cdot)$ коэффициент упругости пружины, подпирающей соответствующий шарнир. Краевые условия (0.17) определяют виды закрепления концов цепочки.

В случае, когда цепочка не растянута ($q(x) \equiv 0$ на Г), уравнение деформации на звеньях γ_i примет вид

$$(p(x)y'')'' = f(x) \qquad (x \in \Gamma) \qquad (0.18)$$

Отметим, что уравнение (0.18), расшифровываемое в каждой точке $a_i \in A$ как система условий (0.16), не является частным случаем уравнения (0.15) на (b_1, b_2) при $q(x) \equiv 0$. Дело в том, что коэффициенты $q(a_i)$ в (0.16) не считаются предельным значением функции $q(x)$ при $x \to a_i$. Поэтому при рассмотрении краевой задачи для уравнения (0.18) на (b_1, b_2) класс дифференциальных уравнений на γ_i сужается, а класс условий связи в точках $a_i \in A$ расширяется и, тем самым, центр тяжести анализа краевой задачи смещается с отрезков γ_i на узловых точках a_i.

Краевую задачу $(0.15) - (0.17)$ (в отличие от обычной) мы назовём *нестандартной.*

Нестандартную краевую задачу $(0.15) - (0.17)$, как и в обычном случае, назовём *невырожденной*, если соответствующая однородная задача ($f(x) \equiv 0$) имеет только тривиальное решение.

В настоящей работе, в отличие от [21], рассматриваются краевые задачи для уравнения (0.15) на одномерном графе, состоящим из цепочки прямолинейных отрезков, при краевых условиях общего вида (0.17).

Пусть $y(x) \not\equiv const$ является решением уравнения

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = 0 \qquad (x \in \Gamma), \qquad (0.19)$$

удовлетворяющим в точках $a_i \in A$ условиям (0.16), а в граничных точках b_1, b_2 только двум граничным условиям

$$\alpha_1 y'(b_1) - \alpha_2 y''(b_1) = 0, \qquad \beta_1 y'(b_2) + \beta_2 y''(b_2) = 0. \qquad (0.20)$$

Если $\inf_{\Gamma} p(x) > 0$ и $q(x) \geq 0$ ($q(x) \not\equiv 0$) при $x \in \Gamma$, то в силу леммы 0.1 функция $y(x) \not\equiv const$ является монотонной на каждом интервале γ_i множества Г. Поведение решения $y(x)$ в точках a_i множества A определяет следующее утверждение:

Лемма 0.2. *Пусть* $\inf\limits_{\Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ $(q(x) \not\equiv 0)$ *при* $x \in \Gamma$. *Тогда* $y(x)$ *не имеет экстремума в тех точках* $a_i \in A$ *где в условии* (0.16) *коэффициенты* $\chi(a_i) = 0$, *а в тех точках* $a_i \in A$, *где* $\chi(a_i) \neq 0$, *может иметь только отрицательный максимум или положительный минимум.*

Аналогично, для решения $y(x) \not\equiv const$ уравнения

$$(p(x)y'')'' = 0 \qquad (x \in \Gamma), \tag{0.21}$$

удовлетворяющим в точках $a_i \in A$ условиям (0.16), а в граничных точках b_1, b_2 условиям (0.20) имеет место

Лемма 0.3. *Пусть* $\inf\limits_{\Gamma} p(x) > 0$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *и в условиях связи* (0.16) *коэффициенты* $q(a_i) \neq 0$ *для всех* $a_i \in A$. *Тогда* $y(x)$ *не имеет экстремума в точках* $a_i \in A$ *при* $\chi(a_i) = 0$ *и может иметь только отрицательный максимум или положительный минимум, если в этих точках* $\chi(a_i) \neq 0$.

Если в условиях связи (0.16) коэффициенты $q(a_i) = 0$ при всех $a_i \in A$, то эти условия примут вид

$$\left.\begin{array}{c} y(a_i - 0) = y(a_i + 0), \quad y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0, \\ (py'')'(a_i - 0) - (py'')'(a_i + 0) - \chi(a_i)y(a_i) = 0 \quad (a_i \in A). \end{array}\right\} \tag{0.22}$$

Для решения $y(x) \not\equiv const$ уравнения (0.21), удовлетворяющего условиям связи (0.22) в точках $a_i \in A$ и граничным условиям (0.20) в точках b_1 и b_2 справедливо утверждение

Лемма 0.4. *Пусть* $\inf\limits_{\Gamma} p(x) > 0$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *и в условиях связи* (0.22) *коэффициенты* $\chi(a_i) \neq 0$ *для всех* $a_i \in A$. *Тогда* $y(x)$ *не имеет экстремума в точках* $a_i \in A$.

Замечания. Если в условиях (0.22) коэффициенты $\chi(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$, то $y(x)$ могут иметь экстремум в точках $a_2, \dots, a_{m-2}$, а в точках a_1 и a_{m-1}- только в том случае, когда в граничных условиях (0.20) коэффициент $\alpha_1 = 0$ и, соответственно, $\beta_1 = 0$.

Леммы 0.2 - 0.4 определяют принцип максимума для нестандартных краевых задач, рассматриваемых на Г. Аналогичные утверждения для случая общего графа при некоторых других граничных условиях, были установлены ранее в [21]. Здесь эти результаты применяются для нестандартных задач вида $(0.15)-(0.17)$ на Г.

Доказательство невырожденности краевой задачи $(0.15)-(0.17)$ на Г основано на лемме 0.2.

Теорема 0.4. *Пусть* $\inf_{\Gamma} p(x)>0,\ q(x)\geq 0\ \ (q(x)\not\equiv 0)$ *на* Г *и* $\alpha_0+\beta_0>0$. *Тогда задача* $(0.15)-(0.17)$ *является невырожденной.*

Если $q(x)\equiv 0$ на Γ, то используя лемму 0.3, доказывается

Теорема 0.5. *Пусть* $\inf_{\Gamma} p(x)>0$ *и коэффициенты* $q(a_i)$ *в условиях связи* (0.16) *положительны:* $q(a_i)>0\ (a_i\in A)$, $\alpha_1+\beta_1>0$ *и* $\alpha_0+\beta_0>0$ *либо, если* $\alpha_1=\beta_1=0$, *то* $\alpha_0\cdot\beta_0>0$. *Тогда краевая задача* $(0.18),(0.16),(0.17)$ *является невырожденной.*

В условиях теоремы 0.5 предполагалась строгая положительность коэффициентов $q(a_i)$ $(a_i\in A)$ в условиях связи (0.16). Если эти условия не имеют место, то используя лемму 0.4, доказывается

Теорема 0.6. *Пусть* $\inf_{\Gamma} p(x)>0$ *и условиях связи* (0.16) *коэффициенты* $\chi(a_i)\neq 0\ \ (a_i\in A)$, $\alpha_1+\beta_1>0$ *и* $\alpha_0+\beta_0>0$ *либо, если* $\alpha_1=\beta_1=0$, *то* $\alpha_0\cdot\beta_0>0$. *Тогда краевая задача* $(0.18),(0.22),(0.17)$ *является невырожденной.*

Замечание. Если в условиях теоремы 0.6 коэффициенты $\chi(a_i)=0$ для всех $a_i\in A$ и в краевых условиях (0.17) коэффициенты $\alpha_1=\beta_1=0$, то задача $(0.18),(0.22),(0.17)$ является вырожденной и размерность пространства её решений равна $m-1$. Если же $\alpha_1\cdot\beta_1\neq 0$ *и* $\alpha_0+\beta_0>0$, то рассматриваемая задачи является невырожденной лишь в случае, когда $m\leq 3$.

Вторая глава называется “**Функция Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**”. В ней изучается функция Грина краевых задач типа Штурма-Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренных в главе I настоящей работы. Метод анализа функции Грина, применяемый в настоящей работе, разработан Ю.В. Покорным и его учениками [35]. Ниже этот метод применен к нестандартным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, к краевым задачам, рассмотренным в § 4 главы I.

Если на отрезке (a, b) задана невырожденная краевая задача

$$\begin{cases} L(y) = f, \\ l_i(y) = 0 \quad (i = 1,2, \dots, n), \end{cases} \tag{0.23}$$

где $L(\cdot)$- линейная дифференциальная форма порядка n, $l_i(\cdot)$ - линейные функционалы, а f- заданная в (a, b) функция, то под *функцией Грина* задачи (0.23) мы будем понимать, следуя [34], ядро $G(x, s)$ интегрального оператора (0.6), которое позволяет выразить решение $y(x)$ краевой задачи (0.23) в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds. \tag{0.24}$$

Здесь сохраняется исходный физический смысл функции Грина как функции влияния, перечень аксиом превращается в набор свойств и, главное, для каждой невырожденной задачи записывается интегральное представление решения в явном виде.

В первом параграфе главы II рассматривается линейная двухточечная краевая задача $(0.7) - (0.8)$, где коэффициенты $p_i(x)$, α_{ij}, β_{ij} и правые части $f(x)$, F_j удовлетворяют условиям, обеспечивающим невырожденность краевой задачи (см. § 1,гл. I). Для уравнения (0.7), по аналогии с [3], строится функция Коши которая выражается явно через фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$. Формула для функции Коши позволяет определить основные свойства этой функции. Далее, при помощи функции Коши, строится функции Грина $G(x, s)$, позволяющая представить решение краевой задачи в виде (0.24). Явный вид функции Грина позволяет определить основные её свойства. Такой метод построения и анализа функции Грина краевой задачи $(0.7)-(0.8)$ хорошо изложен в учебном пособии [3].

Теорема 0.7. *Пусть задача* $(0.7)-(0.8)$ *является невырожденной (см., например, Теорему 0.1). Тогда существует единственная функция Грина этой краевой задачи, которая обладает свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s=s_0\in[a,b]$, *функция* $g(x)=G(x,s_0)$ *является решением однородного уравнения* $L(y)=0$ *на каждом промежутке* $[a,s_0]$ *и* $[s_0,b]$;

2) при $x=s_0$ *она удовлетворяет условиям*

$$g^{(i)}(s_0+0)-g^{(i)}(s_0-0)=0$$

для всех производных порядка $i=0,1,2,\ldots,n-2$ *и*

$$g^{(n-1)}(s_0+0)-g^{(n-1)}(s_0-0)=\frac{1}{p_0(s_0)};$$

3) она удовлетворяет граничным условиям

$$l_j(g)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Отметим, что изложенный здесь метод построения функции Грина является универсальным, он может быть применён к другим краевым задачам (в частности, и к нестандартным), рассматриваемым в последующих параграфах настоящей главы.

Во втором параграфе главы II рассматривается краевая задача $(0.9)-(0.10)$. Предполагая эту краевую задачу невырожденной (см теорему 0.2), строится для неё функция Грина $G(x,s)$, при помощи которой решение краевой задачи можно выписать в виде (0.24).

Если

$$\varphi_1(x)\equiv 1,\quad \varphi_2(x)=x,\qquad \varphi_3(x)=\int_0^x\frac{x-t}{p(x)}dt,\qquad \varphi_4(x)=\int_0^x\frac{x-t}{p(x)}tdt$$

фундаментальная система решений однородного уравнения

$$(p(x)y'')''=0, \tag{0.25}$$

то нетрудно показать, что функция Коши этого уравнения определяется формулой

$$K(x,s) = x\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s\varphi_3(x) + \varphi_4(x) = \int_0^x \frac{(x-t)(t-s)}{p(x)} ds. \ (s < x)$$

Функция $G(x,s)$, определяемая следующим образом

$$G(x,s) = \begin{cases} K(x,s) - \dfrac{1}{\Delta}\big(\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x)\psi_2(s)\big), & 0 \le s \le x \le l, \\ -\dfrac{1}{\Delta}\big(\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x) - \psi_2(s)\big), & 0 \le s \le x \le l, \end{cases} \quad (0.26)$$

является функцией Грина краевой задачи $(0.9) - (0.10)$, где обозначены

$$\Phi_1(x) = \big(\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x)\big)(\alpha_1\beta_1\alpha + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) +$$
$$+\alpha_0\big(\alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x)\big)(\beta_1\beta + \beta_2 l),$$
$$\Phi_2(x) = \beta_0\big(\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x)\big)\big(\alpha_1(\alpha l - \beta) + \alpha_2 l + \alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x)\big) +$$
$$+(\alpha_0\beta_0(\beta l - \gamma) - \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3),$$
$$\psi_1(s) = \beta_0\big(l\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s(\alpha l - \beta)\big) + (\beta l - \gamma) - \beta_3$$
$$\psi_2(s) = \beta_1(\varphi_3(s) - s\alpha + \beta) - \beta_2(l - s).$$

Следующая теорема является основным результатом § 2 гл. II.

Теорема 0.8. *Пусть* $\inf\limits_{[0,l]} p(x) > 0$ *и коэффициенты граничных условий* (0.10) *удовлетворяют условиям: при* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *выполняется* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$*, а при* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ *имеет место* $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$*. Тогда функция Грина кривой задачи* $(0.9) - (0.10)$ *существует и представима в виде* (0.26)*, откуда следуют основные её свойства:*

1) *функция* $g(x) = G(x, s_0)$ $\big(s_0 \in (0,l)\big)$ *при* $x \ne s_0$ *удовлетворяет однородному уравнению* (0.25)*;*

2) *при* $x = s_0$ *удовлетворяет условиям*

$$g^{(i)}(s_0+0) - g^{(i)}(s_0-0) = 0 \qquad (i = 0,1,2),$$
$$(pg'')'(s_0+0) - (pg'')'(s_0-0) = 1;$$

3) *удовлетворяет граничным условиям* (0.10)

$$l_j(g) = 0 \qquad (j = 1,2,3,4).$$

Отметим, что представление (0.26) для функции Грина соответствует наиболее общим видам граничных условий (0.10), которые охватывают все реально существующие виды закрепления концов стержня. Из этого представления следуют формулы для функций Грина в некоторых частных случаях, соответствующим наиболее часто встречающимся (см. следствия теоремы 0.2) реальным видам закрепления концов стержня [10].

В третьем параграфе главы II исследуется функция Грина краевой задачи $(0.11)-(0.12)$.

Как было отмечено, задача $(0.9)-(0.10)$ не является частным случаем задачи $(0.11)-(0.12)$ при $q(x)\equiv 0$. Здесь, как это следует из замечания к теореме 0.3 главы I, при $q(x)\equiv 0$ невырожденность краевой задачи обеспечивается условиями на коэффициенты граничных условий (0.12).

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_1^4$-фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (0.13), а

$$K(x,s)=\frac{1}{p(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s)\\ \varphi_1{}'(s) & \varphi_2{}'(s) & \varphi_3{}'(s) & \varphi_4{}'(s)\\ \varphi_1{}''(s) & \varphi_2{}''(s) & \varphi_3{}''(s) & \varphi_4{}''(s)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\end{vmatrix}$$

-функция Коши этого уравнения, где $W(\cdot)$- вронскиан системы $\{\varphi_i(\cdot)\}_1^4$. Тогда

$$G(x,s)=\begin{cases}K(x,s)-\big(\varphi_3(x)\psi_3(s)+\varphi_4(x)\psi_4(s)\big), & a\le s\le x\le b,\\ -\big(\varphi_3(x)\psi_3(s)+\varphi_4(x)\psi_4(s)\big), & a\le s\le x\le b.\end{cases}\qquad(0.27)$$

является функцией Грина краевой задачи $(0.11)-(0.12)$, где обозначены

$$\psi_3(s)=l_3\big(K(b,s)\big)\qquad \psi_4(s)=l_4\big(K(b,s)\big).$$

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 0.9. *Пусть* $\underset{[a,b]}{inf}\,p(x)>0$, $q(x)\ge 0$ *при* $x\in(a,b)$, *причём при* $q(x)\equiv 0$ *коэффициенты граничных условий удовлетворяют условию: при* $\alpha_1+\beta_1>0$ *выполняется* $\alpha_0+\beta_0>0$, *а при* $\alpha_1=\beta_1=0$ *имеет место* $\alpha_0\cdot\beta_0>0$. *Тогда существует и, может быть определена единственным* *образом в виде* (0.27), *функция Грина краевой задачи* $(0.11)-(0.12)$, *которая обладает свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s = s_0 \in (a,b)$, *функция* $g(x) = G(x, s_0)$ *является решением однородного уравнения* (0.13) *при* $x \neq s_0$;

2) удовлетворяет граничным условиям (0.12);

3) *при* $x = s$ *выполняются условия:*

$$g^{(i)}(s_0+0) - g^{(i)}(s_0-0) = 0 \quad (i = 0,1,2),$$
$$(pg'')'(s_0+0) - (pg'')'(s_0-0) = 1.$$

В четвёртом параграфе главы II изучается вопрос о функции Грина нестандартной краевой задачи $(0.15)-(0.17)$, рассмотренной в § 4 главы I, считая её невырожденной (см. теоремы 0.5 и 0.6).

Рассмотрим на множестве $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$ систему уравнений

$$(p_i y_i'')'' - (q_i y_i')' = f_i, \tag{0.28}$$

которая представляет собой набор скалярных дифференциальных уравнений на соответствующих отрезках $\gamma_i = (a_{i-1},\ a_i)$ $(i = 1,2,\dots,m)$, считая теперь все условия $(0.16), (0.17)$ краевыми. Запишем все эти условия в виде набора равенств

$$l_i(y) = 0 \tag{0.29}$$

при произвольной нумерации функционалов l_i. На каждом отрезке γ_i система $(0.28)-(0.29)$ представляет собой обычную двухточечную краевую задачу, которая является, по предположению, невырожденной. Её функцию Грина (существующей в силу теоремы 0.9) обозначим через $Q_i(x,s)$ $(i = 1,2,\dots,m)$.

Определение 0.2. Функцию $K(x,s)$, непрерывную по совокупности переменных на каждом прямоугольнике $\gamma_{ij} = \gamma_i \times \gamma_j$ $(i,j = 1,2,\dots,m)$ назовём *функцией Коши* однородного уравнения (0.19), если для любой непрерывной на Γ функции $f(x)$, функция

$$y(x) = \int_{\Gamma} K(x,s) f(s) ds$$

удовлетворяет на Г уравнению (0.15).

Лемма 0.5. *Функция* $K(x,s)$, *определяемая формулой*

$$K(x,s)=\begin{cases}Q_i(x,s), & \text{при} \quad (x,s)\in\gamma_{ij}\\ 0, & \text{при} \quad (x,s)\in\gamma_{ij}, i\neq j.\end{cases}$$

является функцией Коши уравнения (0.19).

Определение 0.3. *Функцией Грина* краевой задачи $(0.15)-(0.17)$ на множестве $(b_1,b_2)=\Gamma \cup A$ называется функция двух переменных $G(x,s)$, заданная на $[b_1,b_2]\times\Gamma$ и такая, что для каждой $f(x)\in C(\Gamma)$ решение $y(x)$ задачи $(0.15)-(0.17)$ может быть представлено в виде

$$y(x)=\int\limits_{\Gamma} G(x,s)f(s)ds\,.$$

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_1^4$- фундаментальная система решений однородного уравнения (0.19), которая получена из фундаментальных систем скалярных уравнений

$$(p_i y_i'')''-(q_i y_i')'=0 \qquad (x\in\gamma_i)$$

склеиванием в точках $a_i\in A$ условиями (0.16). В силу невырожденности краевой задача $(0.15)-(0.17)$, мы можем выбрать такую фундаментальную систему решений $\{\varphi_j(x)\}$, для которой $l_i(\varphi_j)=\delta_{ij}$, где δ_{ij}- символ Кронекера.

Теорема 0.10. *Пусть* $\inf\limits_{\Gamma} p(x)>0$, $q(x)\geq 0$ $(q(x)\not\equiv 0)$ *на* Г *и* $\alpha_0+\beta_0>0$. *Тогда функция*

$$G(x,s)=K(x,s)-\sum_{j=1}^{4m} l_j\big(K(\cdot,s)\big)\,\varphi_j(x) \tag{0.30}$$

является функцией Грина краевой задачи $(0.15)-(0.17)$, *которая является единственной в классе непрерывных на* $[b_1,b_2]\times\Gamma$ *функций.*

Аналогично доказывается, что в условиях теорем 0.5, 0.6 и замечания к ней, обеспечивающих невырожденность соответствующих краевых задач существует единственная функция Грина $G(x,s)$ этих краевых задач, которая может быть представлена в виде (0.30).

С помощью представления (0.30) для функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи $(0.15) - (0.17)$ на множестве Г, можно получить все её основные свойства, аналогичные свойствам функции Грина скалярной задачи (см. теорему 0.9).

Лемма 0.6. *Пусть* $G(x,s)$ *функция Грина краевой задачи* $(0.15) - (0.17)$ *на множестве* (b_1, b_2). *Тогда при каждом фиксированном* $s = s_0 \in$ Г, *функция* $g(x) = G(x, s_0)$ *удовлетворяет*

1) на каждом интервале γ_i *однородному уравнению* (0.19) *при* $x \neq s_0$*;*

2) *условиям связи* (0.16) *в точках* $a_i \in A$*;*

3) *граничным условиям* (0.17) *в точках* $b_1,\ b_2$*;*

4) *при* $x = s_0$ *условию*

$$D_3 g(s_0 - 0) - D_3 g(s_0 + 0) = -1. \qquad (0.31)$$

Функция Грина $G(x,s)$ краевой задачи $(0.15) - (0.17)$ на Г в отличие от функции Грина скалярной задачи обладает ещё одним свойством, порождаемым спецификой задачи.

Пусть a_i- некоторая точка множества A. Функция

$$g^{(i)}(x) = \lim_{s \to a_i - 0} G(x,s)$$

называется *предельной срезкой* функции Грина.

Лемма 0.7. *Предельная срезка* $g^{(i)}(x)$ *функции Грина краевой задачи* $(0.15) - (0.17)$ *обладает свойствами*:

1) при $x \neq a_i$ *свойствами 1) - 3) леммы 0.6;*

2) при $x = a_i$ *имеет место равенство*

$$D_3 g^i(a_i - 0) - \ D_3 g^i(a_i + 0) = \chi(a_i) g^i(a_i) - 1. \qquad (0.32)$$

Из лемм 0.6 и 0.7 следует

Теорема 0.11. *Пусть выполнены условия теоремы 0.4. Тогда функция Грина* $G(x,s)$ *краевой задачи* $(0.15)-(0.17)$ *обладает следующими свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s=s_0\in\Gamma$ *функция* $g(x)=G(x,s_0)$ *удовлетворяет однородному уравнению* (0.19) *на* $[b_1,b_2]\setminus\{s_0\}$, *условиям связи* (0.16) *в точках* $a_i\in A$, *граничным условиям* (0.17) *в точках* b_1,b_2, *а при* $x=s_0\in\gamma_i$ *условию* (0.31);

2) если $s_0\in A$ *и* γ_i*- один из интервалов, примыкающих к* s_0, *то функция*

$$g^{(i)}(x)=\lim_{\substack{s\to s_0\\ s\in\gamma_i}} G(x,s)$$

при $x=s_0$ *удовлетворяет однородному уравнению* (0.19) *на множестве* $[b_1,b_2]\setminus\{s_0\}$, *граничным условиям* (0.17) *в точках* b_1,b_2, *условиям* (0.16) *в точках* $a\in A$, $a\neq s_0$, *а в точке* $a=s_0$ *вторая строка условий* (0.16) *заменяется условием* (0.32).

Аналогичные свойства функции Грина краевой задачи $(0.15)-(0.17)$ установлены также в случаях, когда в уравнении (0.15) коэффициент $q(x)\equiv 0$ $(x\in\Gamma)$, но в условиях связи (0.16) коэффициенты $q(a_i)+\chi(a_i)>0$ при $a_i\in A$, или же $q(x)\equiv 0$ $(x\in\Gamma)$, $q(a_i)=\chi(a_i)=0$ $(a_i\in A)$, но $m\leq 3$ и в граничных условиях (0.17) коэффициенты $\alpha_1\neq 0$, $\beta_1\neq 0$.

Результаты диссертации докладывались на ежегодных научных конференциях Таджикского национального университета (ТНУ) (2011-2014), на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ (2011-2014), Института математики им. А. Джураева АН РТ, на Республиканской научно-практической конференции в Таджикском государственном педагогическом университете (ТГПУ) им. С. Айни (2011), на международных конференциях в ТНУ (2013) и Худжандском государственном университете (ХГУ) им. акад. Гафурова Б. Г. (2014).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [22]-[26], [38], [39].

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору Мустафокулову Р. за постоянное внимание и всестороннюю помощь.

ГЛАВА I
НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая глава посвящена вопросу о невырожденности (однозначной разрешимости) краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В первом параграфе этой главы на примере линейной двухточечной краевой задачи для уравнения n-го порядка приводятся основные понятия, обозначения и предварительные сведения из теории краевых задач, необходимые для дальнейшего изложения основного содержания работы. Во втором и третьем параграфах рассматриваются краевые задачи для дифференциальных уравнений четвёртого порядка на отрезке при граничных условиях типа Штурма-Лиувилля. При этом, в случае, когда фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения выписывается в явном виде (параграф 2), получены условия невырожденности краевой задачи непосредственно в терминах коэффициентов граничных условий. А в случае, когда фундаментальную систему решений однородного уравнения нельзя записать в явном виде (параграф 3), условия невырожденности краевой задачи получены при помощи принципа максимума.

В четвёртом параграфе изучается одна нестандартная краевая задача для дифференциального уравнения четвёртого порядка на некотором специальном множестве при граничных условиях типа Штурма-Лиувилля. Установлен принцип максимуме для этой нестандартной задачи и при помощи этого принципа найдены условия невырожденности краевой задачи.

§1. Некоторые основные понятия теории краевых задач и предварительные сведения.

В настоящем параграфе приведем основные понятия и некоторые предварительные сведения из общей теории краевых задач, необходимые для дальнейшего изложения основного содержания диссертации.

Рассмотрим на отрезке (a, b) числовой оси R^1 линейное дифференциальное уравнение

$$L(y) \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (1.1.1)$$

где функции $f(x)$ и $p_i(x)$ $(i = 0,1,2, \dots, n)$ непрерывны при $a \le x \le b$ и $p_0(x) \ne 0$. Наряду с уравнением $(1.1.1)$ рассмотрим краевые условия

$$l_j(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(i)}(b) = F_j \quad (j = 1,2, \dots, n), \qquad (1.1.2)$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, F_j$ $(i = 0,1, \dots, n-1;\ j = 1,2, \dots, n)$- заданные числа.

Дифференциальное уравнение $(1.1.1)$ вместе с краевыми условиями $(1.1.2)$ составляют *двухточечную краевую задачу*.

Определение 1.1. Краевая задача $(1.1.1) - (1.1.2)$ называется *невырожденной*, если соответствующая однородная краевая задача

$$L(y) \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad (1.1.3)$$

$$l_j(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(i)}(b) = 0 \quad (j = 1,2, \dots, n) \qquad (1.1.4)$$

имеет только тривиальное (нулевое) решение.

Напомним, что любая система $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 1,2, \dots, n)$ и n линейно независимых частных решений уравнения $(1.1.3)$ называется *фундаментальной системой решений.*

Имеет место утверждение [36]:

Лемма 1.1.1. *Если* $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 1,2, \dots, n)$- *фундаментальная система решений уравнения* $(1.1.3)$ *с непрерывными коэффициентами* $p_i(x)$ $(i = 0,1,2, \dots, n)$*, то определитель Вронского этой системы*

$$W(x) \equiv W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] \equiv \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.1.1. *Задача* $(1.1.1)-(1.1.2)$ *невырождена тогда и только тогда, когда для каждой фундаментальной системы решений* $\{\varphi_i(x)\}$ *уравнения* $(1.1.3)$ *выполняется условие*

$$det\|l_j(\varphi_i)\| = \begin{vmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) & \cdots & l_1(\varphi_n) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) & \cdots & l_2(\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_n(\varphi_1) & l_n(\varphi_2) & \cdots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.1.5)$$

Доказательство. Общее решение однородного уравнения $(1.1.3)$ для любой фундаментальной системы решений $\{\varphi_i(x)\}$ имеет вид

$$y_0(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x),$$

где c_i $(i = 1,2, \dots, n)$ произвольные постоянные. Чтобы оно удовлетворяло краевым условиям $(1.1.4)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$l_j(y_0) = c_1 l_j(\varphi_1) + c_2 l_j(\varphi_2) + \cdots + c_n l_j(\varphi_n) = 0 \quad (j = 1,2, \dots, n). \qquad (1.1.6)$$

Эта система имеет только нулевое решение $c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$ лишь в том случае, когда имеет место условие (1.1.5).

Теорема 1.1.2. *Задача* $(1.1.1)-(1.1.2)$ *невырождена, тогда и только тогда, когда она имеет единственное решение при любой функции* $f(x) \in C_{[a,b]}$ *и любого набора чисел* F_j $(j = 1,2, \dots, n)$.

Доказательство. Пусть $\bar{y}(x)$- какое-либо решение неоднородного уравнения $(1.1.1)$ для заданной функции $f(x)$. Тогда общее решение уравнения $(1.1.1)$ имеет вид

$$y(x) = \bar{y}(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) = \bar{y}(x) + y_0(x),$$

где c_i $(i = 1,2, \dots, n)$- произвольные постоянные, а $\{\varphi_i(x)\}$- некоторая фундаментальная система решений однородного уравнения $(1.1.3)$. Для того, чтобы при некоторых $c_i \quad (i = 1,2, \dots, n)$ эта функция удовлетворяла краевым условиям (1.1.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$l_j(y) = l_j(\bar{y}) + c_1 l_j(\varphi_1) + c_2 l_j(\varphi_2) + \dots + c_n l_j(\varphi_n) = F_j \quad (j = 1,2, \dots, n).$$

Отсюда получаем систему алгебраических уравнений относительно c_i:

$$c_1 l_j(\varphi_1) + c_2 l_j(\varphi_2) + \dots + c_n l_j(\varphi_n) = F_j - l_j(\bar{y}) \quad (j = 1,2, \dots, n). \qquad (1.1.7)$$

Эта система разрешима лишь в случае, когда выполнено условие (1.1.5).

Таким образом, если задача $(1.1.1) - (1.1.2)$ невырождена, то в силу теоремы 1.1.1 определитель $(1.1.5)$ отличен от нуля, поэтому система $(1.1.7)$, а следовательно и задача $(1.1.1) - (1.1.2)$ однозначно разрешима.

Наоборот, если задача $(1.1.1) - (1.1.2)$ однозначно разрешима при любой правой части $f(x)$, то алгебраическая система $(1.1.7)$ относительно $c_i \quad (i = 1,2, \dots, n)$ имеет единственное решение, поэтому определитель этой системы отличен от нуля. Это, в случае однородной краевой задачи, означает, что система $(1.1.6)$ имеет нулевое решение $c_i = 0 \quad (i = 1,2, \dots, n)$, следовательно, краевая задача $(1.1.1) - (1.1.2)$ является невырожденной.

Теорема 1.1.2 доказана.

Будем говорить, что задача $(1.1.1) - (1.1.2)$ *однозначно разрешима*, если она имеет единственное решение при любой $f(x) \in C_{[a,b]}$ и любого набора чисел $F_j \; (j = 1,2, \dots, n)$.

Из теоремы 1.1.2 следует, что однозначную разрешимость задачи $(1.1.1) - (1.1.2)$ достаточно проверять на соответствующей однородной задаче, что зачастую оказывается существенно легче, чем исследование неоднородной.

Для определения значения коэффициентов $c_i \quad (i = 1,2, \dots, n)$ в системе $(1.1.7)$, необходимо решить эту систему. Эта задача существенно упрощается, если матрица системы $\left\| l_j(\varphi_i) \right\|$ оказывается единичной. Тогда уравнения системы просто давали бы решение, так как имели бы вид

$$c_j = F_j - l_j(\bar{y}) \qquad (j = 1,2, \dots, n).$$

Оказывается этого можно добиться за счёт выбора фундаментальной системы решений.

Лемма 1.1.2. *Пусть краевая задача* $(1.1.1)-(1.1.2)$ *невырождена. Тогда существует такая фундаментальная система решений* $\{\theta_i(x)\}$ *уравнения* (1.1.3)*, что* $l_j(\theta_i)=\delta_{ij}$*, где* δ_{ij}*- символ Кронекера*:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{при} \quad i=j,\\ 0, & \text{при} \quad i\neq j.\end{cases}$$

Доказательство. Возьмём в качестве $\theta_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ решение задачи $(1.1.1)-(1.1.2)$ с $f(x)\equiv 0$ и $F_j=\delta_{ij}$. Такие решения существуют (в силу невырожденности задачи), удовлетворяют однородному уравнению $(1.1.3)$ и по построению, $l_j(\theta_i)=\delta_{ij}$. Поэтому для доказательства леммы остаётся показать, что система $\{\theta_i(x)\}$ линейно независима.

В предположении противного существуют постоянные k_i $(i=1,2,\dots,n)$ такие что

$$k_1\theta_1(x)+k_2\theta_2(x)+\cdots+k_n\theta_n(x)=0$$

и хотя бы одно значение $k_i\neq 0$. Тогда для всех j имеет место

$$k_1 l_j(\theta_1)+k_2 l_j(\theta_2)+\cdots+k_n l_j(\theta_n)=0.$$

А это означает, что строки матрицы $\left\|l_j(\theta_i)\right\|$ линейно зависимы, что невозможно, так как по построению это-единичная матрица.

Лемма 1.1.2 доказана.

Отметим, что доказанная лемма утверждает существование нужной нам фундаментальной системы решений, но не даёт прямо рецепта для её построения из имеющейся фундаментальной системы решений $\{\varphi_i(x)\}$. Однако, если представить $\theta_i(x)$ через $\varphi_i(x)$ с помощью матрицы перехода $\left\|\alpha_{ij}\right\|$:

$$\theta_i(x)=\alpha_{i1}\varphi_1(x)+\alpha_{i2}\varphi_2(x)+\cdots+\alpha_{in}\varphi_n(x) \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

то оказывается, что

$$\left\|l_j(\theta_i)\right\|=\|\alpha_{ik}\|\cdot\left\|l_j(\varphi_k)\right\|.$$

Отсюда, если мы хотим, чтобы было $\|l_j(\theta_i)\| = \delta_{ij}$, то необходимо взять $\|\alpha_{ik}\|$ обратной к матрице $\|l_j(\varphi_k)\|$.

Предположим, что краевая задача $(1.1.1)-(1.1.2)$ невырожденна и $\{\theta_i(x)\}$- фундаментальная система решений уравнения $(1.1.3)$ такая, что $l_j(\theta_i) = \delta_{ij}$. Тогда, представив решение уравнения $(1.1.1)$ в виде

$$y(x) = \bar{y}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\theta_i(x), \qquad (1.1.8)$$

и, подставив его в краевые условия $(1.1.2)$, получим явные выражения для c_j:

$$c_j = F_j - l_j(\bar{y}) \qquad (j = 1,2,\dots,n).$$

Подставляя полученные для c_j выражения в $(1.1.8)$, получим решение краевой задачи в виде

$$y(x) = \bar{y}(x) + \sum_{i=1}^{n}[F_i - l_i(\bar{y})]\theta_i(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i\theta_i(x) + \bar{y}(x) - \sum_{i=1}^{n} l_i(\bar{y})\theta_i(x).$$

Здесь первое слагаемое справа явно зависит от F_j- правой части краевых условий $(1.1.2)$, но никак не связано с $f(x)$- правой частью уравнения $(1.1.1)$, а второе слагаемое зависит от $f(x)$ (через частное решение $\bar{y}(x)$), но не зависит от F_i. Легко проверить, что эти два слагаемые являются решениями задач

$$\begin{cases} L(y) = 0 & (a \le x \le b), \\ l_j(y) = F_j & (j = 1,2,\dots,n) \end{cases} \qquad (1.1.9)$$

и, соответственно,

$$\begin{cases} L(y) = f(x) & (a \le x \le b), \\ l_j(y) = 0 & (j = 1,2,\dots,n). \end{cases} \qquad (1.1.10)$$

Так как y каждой из этих задач либо уравнение, либо краевое условие является однородными, то такие задачи называются *полуоднородными*.

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 1.1.3. *Если краевая задача* $(1.1.1)-(1.1.2)$ *невырождена, то решение этой краевой задачи равно сумме решений двух полуоднородных задач* $(1.1.9)$ *и* $(1.1.10)$.

§2. Невырожденность краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида $(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'')'' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

В настоящем параграфе на отрезке $(0, l)$ рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'')'' = f(x) \tag{1.2.1}$$

при краевых условиях типа Штурма-Лиувилля

$$\alpha_0 y(0) + \alpha_3 (py'')'(0) = 0, \qquad \alpha_1 y'(0) - \alpha_2 y''(0) = 0, \tag{1.2.2}$$

$$\beta_0 y(l) - \beta_3 (py'')'(l) = 0, \qquad \beta_1 y'(l) + \beta_2 y''(l) = 0. \tag{1.2.3}$$

Относительно коэффициентов уравнения $(1.2.1)$ и краевых условий $(1.2.2)$, $(1.2.3)$ предполагается выполнения следующих условий:

- $p(x) \in C^2{}_{[0,l]}$, $f(x) \in C_{[0,l]}$ и $\inf\limits_{[0,l]} p(x) > 0$;

- $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ $(i = 0,1,2,3)$, причем $\alpha_i + \alpha_j > 0$, $\beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$ (последнее необходимо для невырожденности краевых условий $(1.2.2)$ и $(1.2.3)$). Эти условия будем называть в дальнейшем *условиями знакосогласованности* коэффициентов краевой задачи $(1.2.1)-(1.2.3)$.

Краевая задача $(1.2.1)-(1.2.3)$ возникает [15], при моделировании малых упругих деформаций стержня (балки) с коэффициентом жесткости $p(\cdot)$ при воздействии внешней силы $f(\cdot)$. При этом краевые условия $(1.2.2)$, $(1.2.3)$ определяют виды закрепления концов стержня и в зависимости от значений коэффициентов α_i, β_i охватывают все реально существующие виды закрепления. Например, если $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то стержень слева *закреплён жёстко (защемлён):*

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

а справа-*свободен:*

$$y''(l) = (py'')'(l) = 0.$$

а если $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ и $\beta_0 = \beta_2 = 0$, то стержень слева *закреплён шарнирно*:

$$y(0) = y''(0) = 0,$$

а справа-*упруго защемлён*:

$$y'(l) = (py'')'(l) = 0.$$

Очевидно, что возникновение колебательных процессов в стержне (балке) зависит от способа закрепления его концов. Поэтому разрешимость задачи $(1.2.1) - (1.2.3)$ вообще говоря, зависит от значений коэффициентов α_i, β_i краевых условий $(1.2.2)$, $(1.2.3)$.

Ранее, в работах [20], [21], краевая задача $(1.2.1) - (1.2.3)$ рассматривалась в одном частном случае, когда коэффициенты $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. Реальный физический случай, когда α_0, β_0 любые неотрицательные числа, из рассмотрения выпадал.

В настоящем параграфе приводятся условия невырожденности (однозначной разрешимости при любой правой части $f(\cdot)$) краевой задачи $(1.2.1) - (1.2.3)$ в терминах коэффициентов α_i, β_i.

Напомним (см. Определение 1.1), что краевая задача $(1.2.1) - (1.2.3)$ называется *невырожденной*, если соответствующая однородная задача $(f(x) \equiv 0)$ имеет только тривиальное решение.

Теорема 1.2.1 *Пусть коэффициенты уравнения* $(1.2.1)$ *и краевых условий* $(1.2.2)$, $(1.2.3)$ *обладают свойством знакосогласованности. Пусть, кроме того, при* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *выполняется* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, *а при* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ *имеет место* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$. *Тогда краевая задача* $(1.2.1) - (1.2.3)$ *является невырожденной.*

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы 1.2.1 однородное уравнение

$$(p(x)y'')'' = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \qquad (1.2.4)$$

при краевых условиях $(1.2.2)$, $(1.2.3)$ имеет только тривиальное решение.

Нетрудно показать, что функции

$$\varphi_1(x) \equiv 1, \quad \varphi_2(x) \equiv x, \quad \varphi_3(x) = \int_0^x \frac{x-t}{p(t)} dt, \qquad \varphi_4(x) = \int_0^x \frac{x-t}{p(t)} t dt$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.2.4). Поэтому общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \int_0^x \frac{x-t}{p(t)} dt + c_4 \int_0^x \frac{x-t}{p(t)} t dt, \tag{1.2.5}$$

где c_i $(i = 1,2,3,4)$- произвольные постоянные.

Для определения значений коэффициентов c_i потребуем, чтобы функция $y_0(x)$ удовлетворяла граничным условиям (1.2.2) и (1.2.3). Вычислим производные функции $y_0(x)$:

$$y'_0(x) = c_2 + c_3 \int_0^x \frac{dt}{p(t)} + c_4 \int_0^x \frac{tdt}{p(t)},$$

$$y''_0(x) = c_3 \frac{1}{p(t)} + c_4 \frac{x}{p(t)}, \quad (py_0'')'(x) = c_4.$$

Так как $y_0(0) = c_1$, $y'_0(0) = c_2$, $(py''_0)(0) = c_3$, $(py''_0)'(0) = c_4$, $y_0(l) = c_1 + c_2 l + c_3(\alpha l - \beta) + c_4(\beta l - \gamma)$, $y'_0(l) = c_2 + c_3\alpha + c_4\beta$, $\big(py''_0\big)(l) = c_3 + c_4 l$, $(py''_0)'(l) = c_4$, где обозначены

$$\alpha = \int_0^l \frac{dt}{p(t)}, \quad \beta = \int_0^l \frac{tdt}{p(t)}, \quad \gamma = \int_0^l \frac{t^2dt}{p(t)},$$

то из условий (1.2.2) и (1.2.3) следуют

$$0 = \alpha_0 y_0(0) + \alpha_3 (py''_0)'(0) = \alpha_0 c_1 + \alpha_3 c_4,$$

$$0 = \alpha_1 y'_0(0) - \alpha_2 (py''_0)(0) = \alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_3,$$

$$0 = \beta_0 y_0(l) - \beta_3 \big(py''_0\big)'(l) =$$

$$= \beta_0 [c_1 + c_2 l + c_3(\alpha l - \beta) + c_4(\beta l - \gamma)] - \beta_3 c_4 =$$

$$= \beta_0 c_1 + \beta_0 l c_2 + \beta_0(\alpha l - \beta) c_3 + [\beta_0(\beta l - \gamma) - \beta_3] c_4,$$

$$0 = \beta_1 y'_0(l) + \beta_2 (py''_0)(l) = \beta_1 [c_2 + c_3\alpha + c_4\beta] + \beta_2(c_3 + c_4 l) =$$

$$= \beta_1 c_2 + (\beta_1\alpha + \beta_2) c_3 + (\beta_1\beta + \beta_2 l) c_4.$$

Таким образом, для определения неизвестных c_i получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 c_1 + \alpha_3 c_4 = 0, \\ \alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_3 = 0, \\ \beta_0 c_1 + \beta_0 l c_2 + \beta_0(\alpha l - \beta) c_3 + [\beta_0(\beta l - \gamma) - \beta_3] c_4 = 0, \\ \beta_1 c_2 + (\beta_1 \alpha + \beta_2) c_3 + (\beta_1 \beta + \beta_2 l) c_4 = 0. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ \beta_0 & \beta_0 l & \beta_0(\alpha l - \beta) & \beta_0(\beta l - \gamma) - \beta_3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_1 \alpha + \beta_2 & \beta_1 \beta + \beta_2 l \end{vmatrix}$$

В силу свойства знакосогласованности коэффициентов α_i, β_i, каждая строка этого определителя имеет по крайней мере один ненулевой элемент. Если же при $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ выполняется $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, а при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ имеет место $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$, то и каждый столбец этого определителя имеет по крайней мера один ненулевой элемент. Вычислим непосредственно значение определителя Δ. Проведя несложные вычисления, получим

$$\Delta = \alpha_1 \beta_1 [\alpha_0 \beta_0 (\alpha\gamma - \beta^2) + (\alpha_0 \beta_3 + \beta_0 \alpha_3)\alpha] + \alpha_1 \beta_2 [\alpha_0 \beta_0 (\alpha l^2 + \gamma - 2\beta l) + \\ + (\alpha_0 \beta_3 + \beta_0 \alpha_3)] + \beta_1 \alpha_2 [\alpha_0 \beta_0 \gamma + \alpha_0 \beta_3 + \beta_0 \alpha_3] + \alpha_0 \beta_0 \alpha_2 \beta_2 l^2. \quad (1.2.7)$$

Величины $\alpha l^2 + \gamma - 2\beta l = \sigma$ $\alpha\gamma - \beta^2 = \delta$ являются положительными. Поэтому, если $\alpha_1 + \beta_1 > 0$, то в силу знакосогласованности коэффициентов имеем $\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 > 0$. Если при этом выполняется $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, то опять в силу знакосогласованности коэффициентов имеем $\alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_3 + \beta_0\alpha_3 > 0$. Отсюда, в силу положительности величин $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ и δ следует, что по крайней мере одно из трёх первых слагаемых в правой части равенства (1.2.7) является положительным.

Пусть теперь $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Тогда в силу знакосогласованности коэффициентов имеем $\alpha_2 \cdot \beta_2 > 0$. Если при этом $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$, то четвёртое слагаемое $\alpha_0\beta_0\alpha_2\beta_2 l^2$ в правой части равенства (1.2.7) является положительной величиной.

Таким образом, в условиях теоремы 1.2.1 имеем $\Delta \neq 0$. Поэтому линейная однородная алгебраическая система $(1.2.6)$ имеет только тривиальное решение: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Значит $y_0(x) \equiv 0$ и это означает, что краевая задача $(1.2.1) - (1.2.3)$ является невырожденной.

Теорема 1.2.1 доказана.

Если теорему 1.2.1 применить к задаче о колебании стержня в зависимости от видов закрепления его концов, то получим следующее утверждение:

Следствие. *Задача об упругих колебаниях стержня с коэффициентом жёсткости $p(\cdot)$ при воздействии внешней силы $f(\cdot)$ является однозначно разрешимой, если*

а) *стержень хотя бы с одной стороны закреплён жёстко ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ или $\beta_2 = \beta_3 = 0$);*

б) *с обоих сторон закреплён шарнирно ($\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ и $\beta_1 = \beta_3 = 0$);*

в) *с одной стороны закреплён шарнирно, а с другой стороны упруго защемлён* ($\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\beta_0 = \beta_2 = 0$ *или* $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$).

Если же стержень

г) *с одной стороны свободен ($\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ или $\beta_0 = \beta_1 = 0$), а с другой стороны либо закреплён шарнирно ($\beta_1 = \beta_3 = 0$ или $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$), либо упруго защемлён ($\beta_0 = \beta_2 = 0$ или $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$);*

д) *с обоих сторон либо упруго защемлён ($\alpha_0 = \alpha_2 = 0$* и *$\beta_0 = \beta_2 = 0$), либо свободны ($\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ и $\beta_0 = \beta_1 = 0$),*

то задача вырождена.

Результаты этого параграфа опубликованы в работах [23], [38].

§3. Невырожденность краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида $(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'')'' - (\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}')' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

В настоящем параграфе рассматриваются краевые задачи для дифференциального уравнения более общего вида

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \qquad (a \le x \le b) \qquad (1.3.1)$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} &l_1(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_3 D_3 y(a) = 0, \ \ l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y''(a) = 0, \\ &l_3(y) \equiv \beta_0 y(b) - \beta_3 D_3 y(b) = 0, \ \ \ l_4(y) \equiv \beta_1 y'(b) + \beta_2 y''(b) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1.3.2)$$

где через $D_3 y(\cdot)$ обозначена третья квазипроизводная $(p(\cdot)y'')' - q(\cdot)y'$.

Относительно коэффициентов уравнения и граничных условий предполагается выполнение следующих условий (называемых далее *условиями знакосогласованности коэффициентов*):

- $p(x) \in C^2{}_{[a,b]}$, $q(x) \in C^1{}_{[a,b]}$, $f(x) \in C_{[a,b]}$, причем $\inf\limits_{[a,b]} p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$ при $x \in [a,b]$;

- $\alpha_i \ge 0$, $\beta_i \ge 0$ $(i = 0,1,2,3)$, причем $\alpha_i + \alpha_j > 0$, $\beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$.

Отметим, что условия знакосогласованности коэффициентов определяются физическим смыслом задачи, причём последние строгие неравенства означают просто невырожденность граничных условий.

Задача $(1.3.1) - (1.3.2)$ возникает, например [15], при описании колебательных процессов натянутого стержня с коэффициентами жесткости $p(\cdot)$ и натяжения $q(\cdot)$, закрепленного каким-нибудь образом за концами, при воздействии внешней силы $f(\cdot)$.

Краевую задачу $(1.3.1) - (1.3.2)$, согласно Определению 1.1, будем называть *невырожденной*, если соответствующая однородная задача $(f(x) \equiv 0)$ $(1.3.3) - (1.3.2)$ имеет только тривиальное решение. Отсюда, в силу теоремы 1.1.2 имеем, что для однозначной разрешимости краевой задачи $(1.3.1) - (1.3.2)$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = 0 \qquad (1.3.3)$$

при краевых условиях $(1.3.2)$ имело только тривиальное решение.

Для краевых задач, рассмотренных в предыдущем параграфе, обоснование невырожденности производилось непосредственно, путем перехода к алгебраической системе уравнений, так как для уравнения $(1.2.4)$ удаётся выписать явный вид общего решения через фундаментальную систему решений. Для уравнения же $(1.3.3)$ выписать явное выражение для его общего решения не представляется возможным. Поэтому здесь мы поступим по-другому, а именно, установим сначала для решений уравнения $(1.3.3)$, следуя [35], аналог принципа максимума, затем, на основании этого принципа, проведем обоснование невирожденности краевой задачи $(1.3.1) - (1.3.2)$.

На отрезке (a, b) числовой оси R^1 рассмотрим уравнение $(1.3.3)$ вместе с двумя граничными условиями

$$\alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y''(a) = 0, \quad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y''(b) = 0. \qquad (1.3.4)$$

Пусть $y(x) \not\equiv const$ является решением уравнения $(1.3.3)$, удовлетворяющее условиям $(1.3.4)$. Обозначим $y'(x) = u(x)$. Тогда из уравнения $(1.3.3)$ получим

$$[p(x)u']' - q(x)u \equiv c \quad (c - const).$$

Имеет место утверждение [21]:

Лемма 1.3.1. *Пусть коэффициенты уравнения* $(1.3.3)$ *и условий* $(1.3.4)$ *обладают свойством знакосогласованности. Тогда, если* $c \neq 0$*, то* $u(x)$ *сохраняет строгий знак на отрезке* (a, b)*, противоположный знаку числа* c*; если же* $c = 0$*, то* $u(x) \equiv 0$ $(a \leq x \leq b)$.

Доказательство. Пусть сначала $c > 0$. Покажем, что для любого решения $u(x) \not\equiv 0$ дифференциального неравенства

$$(pu')' - qu > 0, \qquad (1.3.5)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$l_2(y) \equiv \alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a) = 0, \;\; l_4(y) \equiv \; \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \qquad (1.3.6)$$

справедливо неравенство $u(x) < 0$ при $x \in [a,b]$.

В предположении противного существует точка $\xi \in [a,b]$ неотрицательного максимума функции $u(x)$: $u_{max} = u(\xi) \geq 0$. Если ξ-внутренняя точка отрезка (a,b), то из (1.3.5) следует, что неравенство $(pu')'(\cdot) > (qu)(\cdot) \geq 0$ выполняется в некоторой окрестности точки ξ. Тогда функция $(pu')(x)$ монотонно возрастает в этой окрестности. Отсюда, в силу $u'(\xi) = 0$ и положительности $p(x)$ следует, что функция $u'(x)$ при переходе через точку ξ меняет знак с отрицательного на положительный, что противоречит максимальности $u(\xi)$. Полученное противоречие означает, что функция $u(x)$ не имеет неотрицательного максимума во внутренних точках промежутка (a,b).

Пусть теперь $\xi = a$, т.е. $u_{max} = u(a) \geq 0$. Тогда в силу (1.3.5), $(pu')(\cdot)$ монотонно возрастает справа вблизи от a. Из первого условия (1.3.6) имеем $\alpha_2 u'(a) = \alpha_1 u(a) \geq 0$. Отсюда, если $\alpha_2 \neq 0$, то $u'(a) \geq 0$, следовательно $u'(x) > 0$ справа вблизи от a. А это противоречит максимальности $u(a)$. Поэтому $\alpha_2 = 0$ и, в силу знакосогласованности коэффициентов, из первого условия (1.3.6) имеем $u(a) = 0$, а $u'(a)$ может имеет любой знак. Как было показано, $u'(a) \geq 0$ не может выполняться, поэтому $u'(a) < 0$. Тогда $u'(x) < 0$ справа вблизи от a. Отсюда, в силу $u(a) = 0$ получаем $u(x) < 0$ справа вблизи от a.

Если же $\xi = b$, т.е. $u_{max} = u(b) \geq 0$, то аналогично предыдущему случаю, используя теперь второе условие (1.3.6) получаем, что $u(b) = 0$ и $u(x) < 0$ слева вблизи от b.

Таким образом, при $c > 0$ функция $u(x)$ не имеет неотрицательного максимума во внутренних точках промежутка (a,b) и $u(a) = u(b) = 0$. Поэтому $u(x) < 0$ при $x \in (a,b)$.

При $c < 0$, рассуждая аналогично с заменой слово “максимум” на “минимум” и, записанных там неравенств на противоположных по смыслу заключаем, что $u(x)$ не имеет неположительного минимума в промежутке (a, b) и $u(a) = u(b) = 0$, т.е. $u(x) > 0$ при $x \in (a, b)$.

Пусть теперь $c = 0$. Покажем тогда, что однородное уравнение

$$(pu')' - qu = 0, \tag{1.3.7}$$

при краевых условиях (1.3.6) имеет в (a, b) только тривиальное решение.

Действительно, если предположить существование нетривиального решения $u(x)$ уравнения (1.3.7), удовлетворяющего краевым условиям (1.3.6), то (в силу однородности уравнения) можно считать, что в $[a, b]$ существует точка ξ положительного максимума или отрицательного минимума функции $u(x)$. Однако, здесь рассуждая как при случаях $c > 0$ и $c < 0$ можно установить, что функция $u(x)$ не имеет неотрицательного максимума и неположительного минимума во внутренних точках промежутка (a, b) и $u(a) = u(b) = 0$, т.е. $u(x) \equiv 0$ при $x \in (a, b)$.

Лемма 1.3.1 полностью доказана.

Из этой леммы, в силу $y'(x) = u(x)$, непосредственно следует

Теорема 1.3.1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.3.3) *и граничных условий* (1.3.4) *обладают свойством знакосогласованности. Тогда всякое решение* $y(x)$ *уравнения* (1.3.3), *удовлетворяющее граничным условиям* (1.3.4) *либо постоянно, либо строго монотонно, причём возрастает (убывает) на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $D_3 y(x) \equiv c < 0 \quad (> 0)$.

Рассмотрим теперь на отрезке (a, b) уравнение

$$(p(x)y'')'' = 0 \qquad \big(x \in (a, b)\big) \tag{1.3.8}$$

вместе с граничными условиями (1.3.4). Если $y(x) \not\equiv const$ является решением уравнения (1.3.8), удовлетворяющее условиям (1.3.4), то обозначая $y'(x) = u(x)$, получим $(p(x)u')' = c_0 \;\; (c_0 - const)$

Лемма 1.3.2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.3.8) *и граничных условий* (1.3.4) *обладают свойством знакосогласованности. Тогда, если*

$c_0 \neq 0$, *то при* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *в граничных условиях* (1.3.4), *функция* $u(x)$ *сохраниет строгий знак на* (a,b), *причём* $c_0 u(x) < 0$ *при* $x \in (a,b)$; *если же* $c_0 = 0$, *то* $u(x) \equiv const$, *если* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *и* $u(x) \equiv 0$, *если* $\alpha_1 \cdot \beta_1 = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $c_0 > 0$. Тогда функция $(pu')(x)$ является возрастающей на (a,b). Если $u'(a) \geq 0$,то $(pu')(a) = p(a)u'(a) \geq 0$, поэтому $(pu')(x) > 0$ при $x \in (a,b)$. Отсюда в силу $p(x) > 0$ имеем $u'(x) > 0$ при $x \in (a,b)$. Тогда $u'(b) > 0$ и из второго условия (1.3.6) получаем $u(b) < 0$ при $\beta_2 \neq 0$ и $u(b) = 0$ при $\beta_2 = 0$. Отсюда $u(x) < 0$ при $x \in (a,b)$, так как $u(x)$ является возрастающей функцией на (a,b). Это означает, что $u(a) < 0$, что противоречит первому условию (1.3.6) при $\alpha_1 \neq 0$. Если же $\alpha_1 = 0$, то из первого условия (1.3.6) следует $u'(a) = 0$ и $u(a) < 0$, так как $u(b) \leq 0$ и $u(x)$- возрастающая на (a,b) функция, т.е. $u(x) < 0$ при $x \in (a,b)$.

Таким образом, при $\alpha_1 = 0$ справедливо утверждение леммы 1.3.2, а при $\alpha_1 \neq 0$ выполняется $u'(a) < 0$. Если при этом $u'(b) \leq 0$, то $(pu')(b) \leq 0$ и, так как $(pu')(x)$ возрастающая на (a,b) функция, то $(pu')(x) < 0$ при $x \in (a,b)$. Отсюда следует, в силу $p(x) > 0$, что $u'(x) < 0$ при $x \in (a,b)$. Поэтому $u(x)$ убывающая на (a,b) функция. В силу $u'(a) < 0$, из первого условия (1.3.6) получаем $u(a) \leq 0$, а в силу $u'(b) \leq 0$, из второго же условия (1.3.6) следует $u(b) \geq 0$ при $\beta_1 \neq 0$. А в случае $\beta_1 = 0$ из этого же условия следует $u'(b) = 0$ и $u(b) < 0$, так как $u(a) \leq 0$ и $u(x)$- убывающая на (a,b) функция, т.е. $u(x) < 0$ при $x \in (a,b)$.

Таким образом, при $\beta_1 = 0$ утверждение леммы 1.3.2 доказано, а при $\beta_1 \neq 0$ имеет место $u'(b) > 0$.

Пусть теперь $u'(a) < 0$ и $u'(b) > 0$. Тогда функция $(pu')(x)$ на промежутке (a,b) возрастая, меняет знак с отрицательного на положительный. Это, в силу $p(x) > 0$ означает, что $u'(x)$ также меняет знак с отрицательного на положительный. Поэтому функция $u(x)$ имеет в промежутке (a,b) точку минимума. В силу $u'(a) < 0$ и $u'(b) > 0$ из краевых условий $(1.3.6)$ следует $u(a) \leq 0$ и, соответственно, $u(b) \leq 0$. Поэтому $u(x) < 0$ при всех $x \in (a,b)$.

Аналогичными рассуждениями показывается, что если $c_0 < 0$, то при $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ выполняется $u(x) > 0$ при $x \in (a,b)$.

Пусть теперь $c_0 = 0$. Тогда $(pu')(x) \equiv c_1 = const$. Если $c_1 > 0$, то в силу $p(x) > 0$ имеем $u'(x) > 0$ при $x \in (a,b)$. Поэтому функция $u(x)$ является возрастающей на промежутке (a,b). Из краевых условий $(1.3.6)$ получаем $u(a) \geq 0$ и, соответственно, $u(b) \leq 0$. А это противоречит тому, что $u(x)$- возрастающая на (a,b) функция.

Аналогично показывается, что $c_1 < 0$ также не может выполняться. Поэтому $c_1 = 0$ и, так как $p(x) > 0$, то $u'(x) \equiv 0$ $\big(x \in (a,b)\big)$. Следовательно, $u(x) \equiv const$ и из краевых условий $(1.3.6)$ получаем, что $u(x) \equiv 0$, если $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ и $u(x) \not\equiv 0$, если $\alpha_1 \cdot \beta_1 = 0$.

Лемма 1.3.2 полностью доказана.

Из леммы 1.3.2 в силу $u(x) = y'(x)$ следует

Теорема 1.3.2. *Пусть коэффициенты уравнения* $(1.3.8)$ *и граничных условий* $(1.3.4)$ *обладают свойством знакосогласованности, причём* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$. *Тогда всякое решение* $y(x)$ *уравнения* $(1.3.8)$, *удовлетворяющее граничным условиям* $(1.3.4)$ *либо постоянно, либо строго монотонно, причём возрастает (убывает) на* (a,b) *тогда и только тогда, когда* $(py'')'(x) \equiv c < 0$ (> 0).

Замечание. Если в условиях теоремы 1.3.2 коэффициенты $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то $y''(x) \equiv 0$ и решением уравнения $(1.3.8)$ будет любая линейная функция, однако уточнить направление монотонности в этом случае невозможно.

Из теорем 1.3.1 и 1.3.2 следует следующий *принцип максимума* для уравнения $(1.3.3)$:

Теорема 1.3.3. *Пусть однородное уравнение* $(1.3.3)$ *при граничных условиях* $(1.3.4)$ *обладает свойством знакосогласованности, причём при*

$q(x) \equiv 0$ *выполняется* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$. *Тогда решение* $y(x) \not\equiv const$ *уравнения* $(1.3.3)$*, удовлетворяющее граничным условиям* $(1.3.4)$*, достигает своего экстремума только на концах промежутка* (a, b).

Отметим, что при доказательстве лемм 1.3.1 и 1.3.2 использована знакорегулярная техника анализа скалярных дифференциальных уравнений из работы Ю.В. Покорного и О.М. Пенкина [32].

Рассмотрим теперь однородное уравнение $(1.3.3)$ вместе с четырьмя граничными условиями $(1.3.2)$. Покажем, что при условии знакосогласованности коэффициентов, однородная краевая задача $(1.3.3) - (1.3.2)$ имеет в (a, b) только тривиальное решение.

Действительно, в силу теоремы 1.3.3 решение $y(x) \not\equiv const$ уравнения $(1.3.3)$, удовлетворяющее граничным условиям $(1.3.4)$, является строго монотонной функцией на промежутке (a, b) и принимает свои экстремумы в граничных точках a и b.

Пусть, например, $D_3 y(x) \equiv c > 0$. Тогда в силу теоремы 1.3.1 $y(x)$- монотонно убывающая на (a, b) функция и $y(a) = y_{max}$, $y(b) = y_{min}$. Отсюда и из граничных условий $l_1(y) = 0$, $l_3(y) = 0$ имеем $y(a) \leq 0$ и, соответственно, $y(b) \geq 0$. Это означает, что $y_{max} = y_{min} = 0$, т. е. $y(x) \equiv 0 \quad (a \leq x \leq b)$.

Аналогично показывается, что при $D_3 y(x) < 0$ также $y(x) \equiv 0$ $(a \leq x \leq b)$.

Пусть теперь $c = 0$. Тогда в силу теоремы 1.3.1 $y(x) \equiv const$, если $q(x) \not\equiv 0$ или $q(x) \equiv 0$, но $\alpha_1 + \beta_1 > 0$. Поэтому из $l_1(y) = 0$ и $l_3(y) = 0$ следует $\alpha_0 y(a) = 0$ и, соответственно, $\beta_0 y(b) = 0$. Отсюда, если $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, то $y(a) \cdot y(b) = 0$, т.е. $y(x) \equiv 0$ $(a \leq x \leq b)$.

Если $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то в силу замечания к теореме 1.3.2 решением $y(x)$ уравнения (1.3.8) будет любая линейная функция. Для того, чтобы $y(x) \equiv 0$ необходимо, чтобы $y(a) = y(b) = 0$. Это следует из граничных условий $l_1(y) = 0$ и $l_3(y) = 0$ только в том случае, когда $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$.

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 1.3.4. *Пусть коэффициенты краевой задачи* $(1.3.1)-(1.3.2)$, *обладают свойством знакосогласованности, причём при* $q(x)\equiv 0$ $\big(x\in(a,b)\big)$ *коэффициенты граничных условий удовлетворяют условию: при* $\alpha_1+\beta_1>0$ *выполняется* $\alpha_0+\beta_0>0$, *а при* $\alpha_1=\beta_1=0$ *имеет место* $\alpha_0\cdot\beta_0>0$. *Тогда краевая задача* $(1.3.1)-(1.3.2)$ *является невырожденной.*

Результаты данного параграфа опубликованы в работах [22], [25], [38].

§4. Невырожденность одной нестандартной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида $(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'')''-(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}')'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Пусть (b_1,b_2)- интервал числовой оси R^1 и $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{m-1}\}$ - некоторая совокупность точек из этого интервала. Обозначим $\gamma_i=(a_{i-1},a_i)$ $(i=1,2,\dots,m;\ a_0=b_1,a_m=b_2)$ и $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i$. Рассмотрим на (b_1,b_2) следующую краевую задачу:

На Γ задано дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'')''-(q(x)y')'=f(x)\quad(x\in\Gamma),\tag{1.4.1}$$

в точках множества A заданы условия связи

$$y(a_i-0)=y(a_i+0),\quad y''(a_i-0)=y''(a_i+0)=0,\tag{1.4.2}$$

$$D_3y(a_i-0)-D_3y(a_i+0)-\chi(a_i)y(a_i)=0\quad(a_i\in A),\tag{1.4.3}$$

а в точках b_1 и b_2 – граничные условия типа Штурма

$$l_1(y)\equiv\alpha_0y(b_1)+\alpha_3D_3y(b_1)=0, l_3(y)\equiv\beta_0y(b_2)-\beta_3D_3y(b_2)=0,\tag{1.4.4}$$

$$l_2(y)\equiv\alpha_1y'(b_1)-\alpha_2y''(b_1)=0, l_4(y)\equiv\beta_1y'(b_2)+\beta_2y''(b_2)=0,\tag{1.4.5}$$

где через $D_3y(\cdot)$ обозначена, по-прежнему, третья квазипроизводная $(p(\cdot)y'')'-q(\cdot)y'$.

Задача $(1.4.1) - (1.4.5)$ моделирует целый ряд физических явлений. Например [2], [35], она возникает при описании малых упругих колебаний натянутой цепочки шарнирно сочлененных стержней при воздействии внешней силы. При этом, коэффициенты $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ характеризуют, соответственно, жесткость и натяжение стержней, а $f(\cdot)$- интенсивность внешней нагрузки. Условия $(1.4.2)$ означают непрерывность и шарнирное промежуточное закрепление, $(1.4.3)$- равновесие сил, приложенных к упругому шарниру, а $\chi(\cdot)$- коэффициент упругости пружины, подпирающей соответствующий шарнир. Краевые условия $(1.4.4), (1.4.5)$ определяют виды закрепления концов цепочки.

Отметим, что при рассмотрении уравнения $(1.4.1)$ как системы дифференциальных уравнений на γ_i с нераспадающими граничными условиями $(1.4.2)$, $(1.4.3)$, мы столкнемся с серёзными трудностями, связанными с количеством дифференциальных уравнений и с особенностями граничных условий. Именно поэтому при исследовании дифференциального уравнения $(1.4.1)$ на множестве (b_1, b_2), в настоящей работе мы придерживаемся не векторного, а синтетического подхода: под дифференциальным уравнением на множестве (b_1, b_2) мы будем понимать совокупность уравнений $(1.4.1)$ на отрезках γ_i и условий связи $(1.4.2)$, $(1.4.3)$ в точках множества A.

В случае, когда цепочка не растянута $(q(x) \equiv 0 \text{ на } \Gamma)$, уравнение деформации на звенях γ_i примет вид

$$(p(x)y'')'' = f(x) \qquad (x \in \Gamma). \tag{1.4.6}$$

Отметим, что уравнение $(1.4.6)$, расшифровываемое в каждой точке $a_i \in A$ как система условий $(1.4.2), (1.4.3)$, не является частным случаем уравнения $(1.4.1)$ на (b_1, b_2). В этом случае класс дифференциальных уравнений на γ_i сужается, а класс условий связи в точках a_i расширяется и, тем самым, центр тяжести анализа краевой задачи смещается с отрезков γ_i на узловые точки a_i.

В настоящем параграфе исследуется краевая задача $(1.4.1) - (1.4.5)$, которую, в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе задач, назовём *нестандартной*. Для этой задачи устанавливается условие невырожденности (однозначной разрешимости).

Отметим, что задача $(1.4.1) - (1.4.5)$ для случая общего геометрического графа Г была изучена в монографии [35], а также в работах [1], [20], [21]. Здесь же эту задачу мы рассматриваем для случая одномерного графа при граничных условиях более общего вида $(1.4.4), (1.4.5)$.

Решение задачи $(1.4.1) - (1.4.5)$ будем искать в классе $C_{[b_1,b_2]}$ непрерывных на $[b_1, b_2]$ функций $y(x)$, сужение которых на Г принадлежат классу $C^3(\Gamma)$.

Относительно коэффициентов уравнения $(1.4.1)$ и условий $(1.4.2) - (1.4.5)$ будем предполагать выполнение следующих условий (далее называемых *условиями знакосогласованности* коэффициентов):

- $p(x) \in C^{(2)}(\Gamma),\ q(x) \in C^{(1)}(\Gamma),\ f(x) \in C(\Gamma);\ \ \inf_{\Gamma} p(x) > 0,$ $q(x) \geq 0$ на Г;

- $q(a_i) \geq 0,\ \chi(a_i) \geq 0$ при $a_i \in A$;

- $\alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0\ \ (i = 0,1,2,3)$, причём $\alpha_i + \alpha_j > 0,\ \beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$.

Отметим, что условия знакосогласованности коэффициентов определяются физическим смыслом задачи, которые означают регулярность дифференциальных выражений на множествах Г и А, а также невырожденность краевых условий в граничных точках b_1 и b_2.

Как и в случае задачи на отрезке, нестандартную краевую задачу $(1.4.1) - (1.4.5)$ назовём *невырожденной*, если она однозначно разрешима для любой правой части $f(x)$ (см. Теорему 1.1.2).

Вопрос о невырожденности нестандартной краевой задачи $(1.4.1) - (1.4.5)$ можно свести к вопросу о невырожденности обычной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, заданных на γ_i. Этот переход очевиден: уравнение $(1.4.1)$ адекватно системе из m уравнений на отрезках $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = 1,2, \dots, m)$, а условия $(1.4.2), (1.4.3)$, вместе с условиями $(1.4.4), (1.4.5)$ в граничных точках b_1, b_2, примут вид нераспадающихся (вообще говоря) краевых условий. Нетрудно убедиться, что количество получающихся при таком переходе краевых условий равно $4m$, т.е. равно порядку системы. Отсюда следует

Теорема 1.4.1. *Краевая задача* $(1.4.1) - (1.4.5)$ *невырождена тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача* $(f(x) \equiv 0)$ *имеет только тривиальное (нулевое) решение.*

Отметим, что теорема 1.4.1 не обосновывает невырожденность задачи, а сводит её к исследованию однородной задачи, которое оказывается зачастую существенно легче, чем исследование неоднородной задачи.

Установим сначала некоторые свойства решения $y(x)$ однородного уравнения

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = 0 \tag{1.4.7}$$

на отрезке (a, b) при двух граничных условиях

$$l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y''(a) = 0, \quad l_4(y) \equiv \beta_1 y'(b) + \beta_2 y''(b) = 0. \tag{1.4.8}$$

Обозначим $(p(x)'')' - q(x)y' \equiv c \quad (c - const)$. Тогда для $y(x)$ имеет место утверждение теоремы 1.3.1 предыдущего параграфа.

Отметим, что утверждение теоремы 1.3.1 остаётся справедливым, если $q(x) \equiv 0$ на (a, b) и в граничных условиях (1.4.8) коэффициенты $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ (теорема 1.3.2). В этом случае направление монотонности решения $y(x)$ уравнения

$$(p(x)y'')'' = 0 \qquad (a \le x \le b), \tag{1.4.9}$$

определяется знаком числа $c_0 \equiv (p(x)y'')'$. В случае $c_0 = 0$, $y(x)$ является линейной функцией, если в условиях (1.4.8) коэффициенты $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $y(x) \equiv const$, если $\alpha_1 + \beta_1 > 0$.

Рассмотрим теперь однородное уравнение (1.4.7) на множестве Г и установим для решения этого уравнения аналог *принципа максимума* на Г, который в дальнейшем будет использован при доказательстве невырожденности задачи (1.4.1) – (1.4.5).

Пусть $y(x) \not\equiv const$ является решением однородного уравнения (1.4.7) на Г, удовлетворяющее в точках $a_i \in A$ условиям (1.4.2) и (1.4.3), а в граничных точках b_1 и b_2 условиям (1.4.8). Так как утверждения теоремы 1.3.1 справедливы, в частности, и при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то в силу (1.4.2) $y(x)$ является монотонной функцией на каждом интервале γ_i множества Г. Поведение решения $y(x)$ в точках a_i множества A определяет утверждение:

Лемма 1.4.1. *Пусть задача* (1.4.1) – (1.4.5) *обладает свойством знакосогласованности коэффициентов, причём* $q(x) \not\equiv 0$ *на Г. Тогда решение* $y(x) \not\equiv const$ *уравнения* (1.4.7), *удовлетворяющее условиям* (1.4.2), (1.4.3) *в точках* $a_i \in A$ *и двум граничным условиям* (1.4.8) *в точках* b_1, b_2 *не имеет экстремума в тех точках* $a_i \in A$, *где* $\chi(a_i) = 0$, *а в тех точках* $a_i \in A$, *где* $\chi(a_i) \neq 0$ *может иметь только отрицательный максимум или положительный минимум.*

Доказательство. Пусть $a_i \in A$, в которой, например, $y(a_i) = y_{max}$. Тогда $y(x)$ либо строго возрастает на $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ и строго убывает на $\gamma_{i+1} = (a_i, a_{i+1})$, либо тождественно равна константе на интервалах γ_i и γ_{i+1}. Следовательно, в силу леммы 1.3.1, имеем либо $c_i \equiv D_3 y(a_i - 0) = [(py'')' - qy'](a_i - 0) < 0$ и $c_{i+1} \equiv D_3 y(a_i + 0) = [(py'')' - qy'](a_i + 0) > 0$, либо $c_i = c_{i+1} = 0$ и $y(x) = const$ на γ_i и γ_{i+1}. Но это противоречит условию (1.4.3) при $\chi(a_i) = 0$. А если $\chi(a_i) \neq 0$, то из этого же условия следует $y(a_i) < 0$.

Таким образом, доказано, что при $\chi(a_i) = 0$ функция $y(x)$ не имеет максимума в точке $a_i \in A$, а при $\chi(a_i) \neq 0$ не имеет неотрицательного максимума в этой точке.

Аналогичными рассуждениями показывается, что $y(x)$ не имеет минимума в точках $a_i \in A$ при $\chi(a_i) = 0$ и не имеет неположительного минимума в этих точках при $\chi(a_i) \neq 0$.

Лемма 1.4.1 доказана.

Аналогично, для уравнения (1.4.9) имеет место:

Лемма 1.4.2. *Пусть в условиях леммы 1.4.1 коэффициент* $q(x) \equiv 0$ *при* $x \in \Gamma$ $\alpha_1 + \beta_1 > 0$, *но* $q(a_i) \neq 0$ *при всех* $a_i \in A$. *Тогда решение* $y(x) \not\equiv const$ *уравнения* (1.4.9), *удовлетворяющее условиям* (1.4.2), (1.4.3) *в точках* $a_i \in A$ *и двум граничным условиям* (1.4.8) *в точках* b_1, b_2, *не имеет экстремума в точках* $a_i \in A$ *при* $\chi(a_i) = 0$ *и может иметь только отрицательный максимум или положительный минимум, если в этих точках* $\chi(a_i) \neq 0$.

Доказательство. Из теоремы 1.3.2 следует, что $y(x)$ является монотонной функцией на интервалах $\gamma_1 = (b_1, a_1)$ и $\gamma_m = (a_{i-1}, b_2)$. Для функции $y(x)$ на интервалах $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$, $i = 2,3,\dots,m-1$, в силу условий (1.4.2), справедливо $y''(x) \equiv 0$. Поэтому $y(x)$ является линейной функцией в интервалах γ_i, при $i = 2,3,\dots,m-1$,. То есть, $y(x)$ является монотонной функцией на каждом интервале γ_i $(i = 1,2,\dots,m)$.

Определим теперь значение решения $y(x)$ в точках множества A. Пусть $a_i \in A$, и, например, $y(a_i) = y_{max}$. Тогда $y'(a_i - 0) \geq 0$ и $y'(a_i + 0) \leq 0$, причём хотя бы с одной стороны имеет место строгое неравенство. Так как $y(x)$ является линейной функцией на всех интервалах γ_i при $i = 2,3,\dots,m-1$, то $(py'')'(x) \equiv 0$ и условия (1.4.3) на этих интервалах примет вид

$$-(qy')(a_i - 0) - (qy')(a_i + 0) - \chi(a_i)y(a_i) = 0$$

$$(i = 2,3, \dots, m-1) \qquad (1.4.10)$$

Так как $q(a_i) \neq 0$ при всех $a_i \in A$, $y'(a_i - 0) \geq 0$ $y'(a_i + 0) \leq 0$ и хотя бы с одной стороны имеет место строгое неравенство, то равенства (1.4.10) невозможны при $\chi(a_i) = 0$. А если $\chi(a_i) \neq 0$, то из (1.4.10) следует, что $y(a_i) < 0$. Таким образом, если в точках a_i, при $i = 2,3, \dots, m-1$, имеет место $\chi(a_i) = 0$, то $y(x)$ не имеет максимума в этих точках, а если $\chi(a_i) \neq 0$, то $y(x)$ не имеет в этой точке неотрицательного максимума.

Изучим теперь поведение $y(x)$ в точках a_1 и a_{m-1} из множества A. Для точки a_1 выполняются

$$D_3 y(a_1 - 0) = [(py'')' - qy'](a_1 - 0) = (py'')'(a_1 - 0) - (qy')(a_1 - 0) =$$
$$= c_0 - (qy')(a_1 - 0) \leq 0,$$

$$D_3 y(a_1 + 0) = [(py'')' - qy'](a_1 + 0) = -(qy')(a_1 + 0) \geq 0,$$

причём, хотя бы с одной стороны, имеет место строгое неравенство.

Аналогично, для точки a_{m-1} выполняются неравенства

$$D_3 y(a_{m-1} + 0) = -(qy')(a_{m-1} - 0) \leq 0,$$

$$D_3 y(a_{m-1} + 0) = c_0 - (qy')(a_{m-1} + 0) \geq 0.$$

Здесь также, хотя бы с одной стороны, от точки a_{m-1}, имеет место строгое неравенство.

Из этих неравенств следует, что равенство (1.4.3) не выполняется при $i = 1$ и $i = m-1$, если $\chi(a_1) = 0$ и, соответственно, $\chi(a_{m-1}) = 0$. А если $\chi(a_1) \neq 0$ и $\chi(a_{m-1}) \neq 0$, то $y(a_1) < 0$ и, соответственно, $y(a_{m-1}) < 0$. То есть, $y(x)$ не имеет неотрицательного максимума в точках a_1 и a_{m-1}, если $\chi(a_1) \neq 0$ и, соответственно, $\chi(a_{m-1}) \neq 0$. Если же $\chi(a_1) = 0$ и $\chi(a_{m-1}) = 0$, то $y(x)$ не имеет в этих точках максимума вообще.

Аналогичными рассуждениями показывается, что $y(x)$ в точках $a_i \in A$ не имеет неположительного минимума, если в этих точках $\chi(a_i) > 0$ и не имеет минимума вообще, если $\chi(a_i) = 0$.

Лемма 1.4.2 доказана.

Если в условиях связи (1.4.3) коэффициенты $q(a_i) = 0$ при $a_i \in A$, то эти условия примут вид

$$(py'')'(a_i - 0) - (py'')'(a_i + 0) - \chi(a_i)y(a_i) = 0 \quad (a_i \in A). \quad (1.4.11)$$

Для решения $y(x) \not\equiv const$ уравнения (1.4.9), удовлетворяющего условиям связи (1.4.2) и (1.4.11) в точках $a_i \in A$ и граничным условия (1.4.5) в точках b_1 и b_2 имеет место:

Лемма 1.4.3. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.4.9) *и условий* (1.4.8), (1.4.11) *обладают свойством знакосогласованности, причём* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$. *Тогда* $y(x)$ *не имеет экстремума в точках* $a_i \in A$, *если в условии* (1.4.11) *коэффициент* $\chi(a_i) \neq 0$.

Доказательство. Из теоремы 1.3.2 следует, что $y(x)$ является монотонной функцией на интервалах $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ при $i = 2,3, \dots, m-1$. Поэтому нам остаётся показать, что $y(x)$ не имеет экстремума в точках $a_i \in A$.

Так как $y(x)$ является линейной функцией в интервалах $\gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}$, то из условия (1.4.11) следует $y(a_i) = 0$ ($\chi(a_i) \neq 0$ по условию) для всех $i = 2,3, \dots, m-2$. Отсюда следует, что если $y(x)$ имеет экстремумы в точках множества A, то это могут быть только точки a_1 или a_{m-1}.

Пусть, например, $y(a_1) = y_{max}$. Тогда в силу леммы 1.3.2 $c_0 \equiv (py'')'(x) < 0$ на промежутке $\gamma_1 = (b_1, a_1)$. В точке a_1 условие (1.4.11) запишется в виде

$$c_0 - \chi(a_1)y(a_1) = 0.$$

Отсюда, так как $\chi(a_i) \neq 0$, то $y(a_1) < 0$. А это противоречит максимальности $y(a_1)$, так как $y(a_i) = 0$ при всех $i = 2,3, \dots, m-2$.

Аналогично, если $y(a_{m-1}) = y_{max}$, то $c_0 > 0$ на промежутке $\gamma_i = (a_{m-1}, b_2)$. Из условия (1.4.11) в точке a_{m-1} имеем

$c_0 + \chi(a_{m-1})y(a_{m-1}) = 0$, следовательно $y(a_{m-1}) < 0$, что противоречит максимальности $y(a_{m-1})$.

Полученные противоречия означают, что $y(x)$ не имеет максимума в точках a_1 и a_{m-1}. Таким образом, $y(x)$ не имеет максимума во всех точках $a_i \in A$.

Такими же рассуждениями показывается, что $y(x)$ не имеет минимума в точках $a_i \in A$.

Лемма 1.4.3 доказана.

Замечание. Если в условиях леммы 1.4.3 допустить $\chi(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$, то решение $y(x)$ может иметь экстремум в точках a_i при $i = 2, \dots, m-2$, а в точках a_1 и a_{m-1} только в том случае, когда в граничных условиях $(1.4.8)$ коэффициент $\alpha_1 = 0$ и, соответственно, $\beta_1 = 0$.

Перейдем теперь к исследованию вопроса о невырожденности краевой задачи $(1.4.1) - (1.4.5)$.

Итак, рассмотрим задачу:

на множестве Γ задано дифференциальное уравнение $(1.4.1)$, *в точках множества A заданы условия связи* $(1.4.2), (1.4.3)$, *а в точках* b_1, b_2- *краевые условия* $(1.4.4), (1.4.5)$.

Справедливо утверждение

Теорема 1.4.2. *Пусть коэффициенты краевой задачи* $(1.4.1) - (1.4.5)$ *обладают свойством знакосогласованности, причём* $q(x) \not\equiv 0$ *на* Γ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$. *Тогда задача* $(1.4.1) - (1.4.5)$ *является невырожденной.*

Доказательство. В силу теоремы 1.4.1 нам достаточно показать, что соответствующая однородная задача $(f(x) \not\equiv 0)$ имеет в Γ только нулевое решение.

Предположим противное, т.е. пусть $y(x)$- ненулевое решение уравнения $(1.4.7)$, удовлетворяющее условиям $(1.4.2), (1.4.3)$ на множестве A и краевым условиям $(1.4.4), (1.4.5)$ в точках $b_1,\ b_2$. В силу теоремы 1.3.1 и леммы 1.4.1, $y(x)$ либо не имеет экстремума во внутренних точках промежутка (b_1, b_2), либо имеет только отрицательные максимумы или положительные минимумы в точках $a_i \in A$, где $\chi(a_i) \neq 0$, либо же $y(x) \not\equiv const$ на всем промежутке (b_1, b_2). С другой стороны, в силу условий $(1.4.4)$ имеем, что $y(x)$ имеет в граничных точках b_1, b_2 либо отрицательный максимум, либо положительный минимум. Полученное противоречие означает, что $y(x) \equiv const$ на всем промежутке (b_1, b_2). Тогда из условий $(1.4.4)$ следует, что $\alpha_0 y(b_1) = 0$ и $\beta_0 y(b_2) = 0$. Отсюда, если $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, то либо $y(b_1) = 0$, либо $y(b_2) = 0$. Следовательно, $y(x) \equiv 0$ на всем (b_1, b_2). Теорема 1.4.2 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $q(x) \equiv 0$ на Г. Пусть на множестве Г задано дифференциальное уравнение $(1.4.6)$, в точках множества A заданы условия $(1.4.2), (1.4.3)$, а в граничных точках b_1, b_2- краевые условия $(1.4.4), (1.4.5)$. Имеет место утверждение.

Теорема 1.4.3. *Пусть коэффициенты краевой задачи* $(1.4.6), (1.4.2) - (1.4.5)$ *обладают свойством знакосогласованности, причём* $q(a_i) \neq 0$ *для всех* $a_i \in A$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, *либо, если* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, *то* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$. *Тогда задача* $(1.4.6), (1.4.2) - (1.4.5)$ *является невырожденной.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы, в силу теоремы 1.4.1, нам достаточно показать, что однородное уравнение $(1.4.9)$ при условиях $(1.4.2) - (1.4.5)$ имеет только нулевое решение.

Каждое решение $y(x)$ однородной задачи $(1.4.9), (1.4.2) - (1.4.5)$, в силу теоремы 1.3.2 и леммы 1.4.2, либо не имеет экстремума во внутренних точках промежутка (b_1, b_2), либо может иметь только отрицательный максимум или положительный минимум в точках $a_i \in A$, где $\chi(a_i) \neq 0$, либо $y(x) \equiv const$ на всем промежутке (b_1, b_2). Однако, из условий $(1.4.4)$ следует, что $y(x)$ имеет в граничных точках b_1, b_2 либо отрицательный максимум, либо положительный минимум. Поэтому $y(x) \equiv const$ на всем промежутке (b_1, b_2). Тогда опять из условий $(1.4.4)$, в силу $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ следует, что либо $y(b_1) = 0$, либо $y(b_2) = 0$, следовательно, $y(x) \equiv 0$ на всем промежутке (b_1, b_2). Теорема 1.4.3 доказана.

В условиях теоремы 1.4.3 предполагалась в условии связи $(1.4.3)$ строгая положительность коэффициентов $q(a_i)$ для всех $a_i \in A$. Если это условие не имеет место, то аналогично теореме 1.4.3, используя лемму 1.4.3, доказывается

Теорема 1.4.4. *Пусть коэффициенты уравнения* $(1.4.6)$, *условий связи* $(1.4.2), (1.4.11)$ *и краевых условий* $(1.4.4), (1.4.5)$ *обладают свойством знакосогласованности, причём* $\chi(a_i) \neq 0$ $(a_i \in A)$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ *либо, если* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, *то* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$. *Тогда краевая задача* $(1.4.6) - (1.4.2), (1.4.11) - (1.4.4), (1.4.5)$ *является невырожденной.*

Заметим, что если в условиях теоремы 1.4.4 коэффициент $\chi(a_i) = 0$ в какой-то точке a_i $(i = 2, \dots, m-2)$, то в силу замечания к лемме 1.4.3, имеем, что $y(x)$ может иметь ненулевой экстремум в этой точке a_i. Поэтому любая линейная на примыкающих к a_i интервалах γ_i и γ_{i+1} функция и принимающая в самой точке a_i любое ненулевое значение, может быть решением однородной задачи $(1.4.9) - (1.4.2), (1.4.11) - (1.4.4), (1.4.5)$. Это означает, что в случае $\chi(a_i) = 0$, задача $(1.4.6) - (1.4.2), (1.4.11) - (1.4.4), (1.4.5)$ является вырожденной, если $m > 3$.

Если же $m \leq 3$, то опять в силу замечания к лемме 1.4.3, имеем, что задача $(1.4.6) - (1.4.2)$, $(1.4.11) - (1.4.4)$, $(1.4.5)$ является невырожденной, когда в граничных условиях $(1.4.5)$ коэффициенты $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$.

Таким образом, справедливо следующее замечание к теореме 1.4.4:

Замечание. Пусть в условиях теоремы 1.4.4 коэффициенты $\chi(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$. Если в краевых условиях $(1.4.5)$ коэффициенты $\alpha_1 = \beta_1 =$

0, то задача $(1.4.6)-(1.4.2)$, $(1.4.11)-(1.4.4)$, $(1.4.5)$ является вырожденной и размерность пространства её решений равна $m-1$. Если же $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ и $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, то рассматриваемая задача является невырожденной лишь в случае $m \leq 3$.

Результаты данного параграфа опубликованы в работах [26], [39].

ГЛАВА II
ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА

В настоящей главе изучается функция Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренных в главе I настоящей диссертационной работы. Строится явный вид функции Грина этих краевых задач, который позволит определить важнейшие её свойства. Метод анализа функции Грина, применяемый в настоящей работе принадлежит Ю.В. Покорному [35] и он хорошо адаптирован к нестандартным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, к краевой задаче, рассмотренной в §4 главы I настоящей работы.

Возможность перехода от дифференциальных уравнений к интегральным базируется на фундаментальном понятии функции Грина. Ещё со времён Гильберта функция Грина понимается как объект, определяемый некоторым набором аксиом. Однако извлечь непосредственно из аксиом функции Грина какие-либо её свойства является непростой, а порой и вообще невыполнимой задачей. В [11] был предложен другой подход к определению функции Грина, который решает проблемы, возникающие при применении аксиоматического подхода [34]. Этот подход прекрасно проиллюстрирован в учебном пособии [3] для двухточечной краевой задачи. Здесь мы применим этот подход для краевых задач, рассмотренных в главе I настоящей работы.

§1. Функция Грина двухточечной краевой задачи для линейного дифференциального уравнения n-го порядка

Рассмотрим на отрезке (a, b) линейное дифференциальное уравнение

$$L(y) \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (2.1.1)$$

где коэффициенты $p_i(x)$ $(i = 0,1,2,\dots,n)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны при $a \le x \le b$ и $p_0(x) \ne 0$. Наряду с уравнением (2.1.1) рассмотрим краевые условия

$$l_j(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(i)}(b) = 0 \quad (j = 1,2,\dots,n), \quad (2.1.2)$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i = 0,1,\dots,n-1;\ j = 1,2,\dots,n)$- заданные числа.

Для этой двухточечной полуоднородной краевой задачи мы, следуя [3], определим и построим функцию Грина, затем, в последующих параграфах, этот метод построения и анализа функции Грина распространим для других краевых задач, рассмотренных в §§ 2-4 главы I.

Напомним (см. теорему 1.1.2 главы I), что однозначная разрешимость двухточечной краевой задачи $(2.1.1) - (2.1.2)$ эквивалентна её невырожденности. Предполагая краевую задачу $(2.1.1) - (2.1.2)$ невырожденной, для её общего решения $y(x)$, можно получить следующую формулу (см. § 1 гл. I):

$$y(x) = \bar{y}(x) - \sum_{j=1}^{n} l_j(\bar{y})\theta_j(x) \quad (2.1.3)$$

где $\bar{y}(x)$- какое-то решение уравнения (2.1.1), а $\theta_j(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$-фундаментальная система решений однородного уравнения $L(y) = 0$ такая, что $l_j(\theta_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij}- символ Кронекера.

Частное решение $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения (2.1.1) определим методом вариации произвольных постоянных. Имеет место утверждение

Лемма 2.1.1.[3] *Пусть* $\{\varphi_i(x)\}$- *фундаментальная система решений однородного уравнения* $L(y) = 0$. *Если* $c_i(x)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{p_0(x)}, \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

то функция

$$y(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n(x) \qquad (2.1.5)$$

будет решением неоднородного уравнения (2.1.1).

Доказательство. Пусть $c_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ удовлетворяют системе (2.1.4). Рассмотрим функцию $y(x)$, определенную равенством (2.1.5), и вычислим её производные:

$$y'(x) = c_1'(x)\varphi_1(x) + c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + c_2(x)\varphi_2'(x) + \cdots +$$
$$+c_n'(x)\varphi_n(x) + c_n(x)\varphi_n'(x) = [c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + \cdots +$$
$$+c_n'(x)\varphi_n(x)] + [c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n'(x)] =$$
$$= c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n'(x),$$

в силу первого уравнения системы (2.1.4). Вычислим вторую производную

$$y''(x) = [c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n'(x)] +$$
$$+[c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n''(x)] =$$
$$= c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n''(x),$$

где опять первая скобка равна нулю, в силу второго уравнения системы (2.1.4). Продолжая также далее, получим для всех производных до порядка $(n - 1)$ включительно, что

$$y^{(i)}(x) = c_1(x)\varphi_1^{(i)}(x) + c_2(x)\varphi_2^{(i)}(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n^{(i)}(x).$$

Для последней, n- й производной

$$y^{(n)}(x) = \left[c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)\right] +$$
$$+c_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + c_2(x)\varphi_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n^{(n)}(x).$$

Первая скобка равна $\frac{f(x)}{p_0(x)}$, в силу последнего уравнения системы (2.1.4). Поэтому

$$y^{(n)}(x) = c_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + c_2(x)\varphi_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{p_0(x)}.$$

Умножая полученное выражение для $y^{(i)}(x)$ на $p_{n-i}(x)$ и складывая, получаем:

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y =$$
$$= p_0(x)\left[c_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + c_2(x)\varphi_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{p_0(x)}\right] +$$
$$+p_1(x)\left[c_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)\right] +$$
$$+ \cdots + p_n(x)[c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n(x)].$$

Отсюда, после перегруппировки слагаемых, получим

$$c_1(x)\left[p_0(x)\varphi_1^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\varphi_1(x)\right] +$$
$$+c_2(x)\left[p_0(x)\varphi_2^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\varphi_2(x)\right] + \cdots +$$
$$+c_n(x)\left[p_0(x)\varphi_n^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\varphi_n(x)\right] + f(x) = f(x),$$

так как каждая из скобок равна нулю: все $\varphi_i(x)$ являются решениями однородного уравнения. Собирая начало и конец нашей формулы, получаем, что $y(x)$ действительно является решением уравнения (2.1.1).

Лемма 2.1.1 доказана.

Отметим, что система (2.1.4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_i'(x)$. Поскольку определитель этой системы-определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

то в силу леммы 1.1.1 из § 1, гл. I система имеет единственное решение. Это значит, что мы можем явно написать выражение для $c_i'(x)$, откуда $c_i(x)$ находятся обычным интегрированием.

Находим решение системы (2.1.4) методом Крамера:

$$c_i'(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{i-1}(x) & 0 & \varphi_{i+1}(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_{i-1}'(x) & 0 & \varphi_{i+1}'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_{i-1}^{(n-2)}(x) & 0 & \varphi_{i+1}^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_{i-1}^{(n-1)}(x) & \dfrac{f(x)}{p_0(x)} & \varphi_{i+1}^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+i} f(x)}{p_0(x) W(x)}\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_{i-1}(x) & \varphi_{i+1}(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_{i-1}'(x) & \varphi_{i+1}'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_{i-1}^{(n-2)}(x) & \varphi_{i+1}^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}.$$

Проинтегрируем это равенство

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(-1)^{n+i} f(s)}{p_0(s) W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{i-1}(s) & \varphi_{i+1}(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_{i-1}'(s) & \varphi_{i+1}'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_{i-1}^{(n-2)}(s) & \varphi_{i+1}^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} ds +$$

$$+c_i(x_0) \quad (i = 1,2, \dots, n)$$

и подставим найденные выражения для $c_i(x)$ в формулу (2.1.5) (поскольку нас интересует только одно решение, можем положить $c_i(x_0) = 0$):

$$y(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n(x) =$$

$$= \varphi_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{(-1)^{n+1} f(s)}{p_0(s) W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_2'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_2^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} ds +$$

$$+\varphi_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{(-1)^{n+2} f(s)}{p_0(s) W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_3(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_3'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \varphi_3^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} ds + \cdots +$$

$$+\varphi_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{(-1)^{n+i} f(s)}{p_0(s) W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{i-1}(s) & \varphi_{i+1}(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_{i-1}'(s) & \varphi_{i+1}'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_{i-1}^{(n-2)}(s) & \varphi_{i+1}^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} ds +$$

$$+ \cdots + \varphi_n(x) \int_{x_0}^{x} \frac{(-1)^{n+n} f(s)}{p_0(s) W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{n-1}(s) \\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_{n-1}'(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} ds =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p_0(s)W(s)} \left[(-1)^{n+1}\varphi_1(x) \begin{vmatrix} \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_2'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_2^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} + \right.$$

$$+(-1)^{n+2}\varphi_2(x) + \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_3(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_3'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \varphi_3^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+(-1)^{n+i}\varphi_i(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{i-1}(s) & \varphi_{i+1}(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_{i-1}'(s) & \varphi_{i+1}'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_{i-1}^{(n-2)}(s) & \varphi_{i+1}^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\left. +(-1)^{n+n}\varphi_n(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{n-1}(s) \\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_{n-1}'(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} \right] f(s)ds.$$

Если сумму, заключенную в скобках $[\cdots]$ обозначить через $K(x,s)$, то для $y(x)$ получим выражение

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)f(s)ds.$$

В выражении в скобках $[\cdots]$, которое обозначено через $K(x,s)$, можно увидеть разложение по последней строке определителя

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix},$$

так что функция $K(x,s)$ оказывается равной

$$K(x,s) = \frac{1}{p_0(s)W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_n'(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}. \qquad (2.1.6)$$

Определение 2.1. Функцию $K(x,s)$, определенную формулой (2.1.6) называют *функцией Коши* уравнения (2.1.1)

Из формулы (2.1.6) непосредственно следуют следующие свойства функции Коши:

Свойство 1. *При каждом* $s = s_0$ *функция* $Z(x) = K(x, s_0)$ *является решением однородного уравнения* $Ly = 0$.

Действительно, если разложить определитель (2.1.6) по последней строке, то получим линейную комбинацию решений $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ однородного уравнения $Ly = 0$, где коэффициенты при $\varphi_i(x)$- алгебраические дополнения к ним, которые при фиксированном s являются просто числами.

Свойство 2. *При* $x = s$ *все производные функции* $Z(x)$ *до порядка* $(n-2)$ *включительно равны нулю.*

Действительно, дифференцирование определителя (2.1.6) по x затрагивает только последнюю строку, а при $x = s$ она совпадает с одной из предыдущих строк определителя.

Свойство 3. *При* $x = s$ *предпоследняя,* $(n-1)$- *я производная функции* $Z(x)$ *равна* $\frac{1}{p_0(x)}$.

Действительно, после $(n-1)$- кратного дифференцирования последней строки определителя (2.1.6) и полагания в ней $x = s$, этот определитель окажется в точности совпадающим с определителем Вронского $W(s)$ и сократится с $W(s)$ в знаменателе.

Замечание. Перечисленные свойства 1 - 3 однозначно определяют функцию, им определяющую: по существу, при каждом фиксированном $s = s_0$, функция $Z(x) = K(x, s_0)$ является решением однородного уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющее начальным условиям в точке $x = s_0$, из которых только одно (относительно $(n-1)$- й производной) ненулевое, а остальные-нулевые. Решение такой начальной задачи существует и единственно. Таким образом, если нам необходимо построить функцию

Коши, достаточно построить функцию, обладающую этими тремя свойствами.

Вернемся к формуле (2.1.3). Выберем фигурирующее в этой формуле частное решение $\bar{y}(x)$ в виде

$$\bar{y}(x) = \int_a^x K(x,s)f(s)ds,$$

где $K(x,s)$- функция Коши уравнения (2.1.1). Для вычисления значений функционалов l_j от этого решения, нам понадобятся значения его производных в точках a и b. Найдем производные функции $\bar{y}(x)$ по правилу дифференцирования по параметру интеграла с параметром и в верхнем пределе и под интегралом

$$\bar{y}'(x) = K(x,s)f(s)|_{x=s} + \int_a^x \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} f(s)ds = \int_a^x \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} f(s)ds.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как первый множитель равен нулю при $x = s$. Далее, аналогично для всех $(i = 2,3,\dots,n-1)$

$$\bar{y}^{(i)}(x) = \frac{\partial^{i-1}K(x,s)}{\partial x^{i-1}} f(s)\bigg|_{x=s} + \int_a^x \frac{\partial^i K(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds = \int_a^x \frac{\partial^i K(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds.$$

При $x = a$ все эти производные равны нулю, а при $x = b$ имеем

$$\bar{y}^{(i)}(b) = \int_a^b \frac{\partial^{i-1}K}{\partial x^{i-1}}(b,s)f(s)ds,$$

поэтому для любого функционала вида

$$l(y) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i y^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{n-1} B_i y^{(i)}(b) \qquad (2.1.7)$$

получаем

$$l(\bar{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \int_a^b \frac{\partial^{i-1}K}{\partial x^{i-1}}(b,s)f(s)ds = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n-1} B_i \frac{\partial^{i-1}K}{\partial x^{i-1}}(b,s)\right] f(s)ds.$$

Обозначим

$$\psi(s) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \frac{\partial^{i-1} K}{\partial x^{i-1}}(b, s)$$

Тогда

$$l(\bar{y}) = \int_a^b \psi(s) f(s) ds.$$

Воспользовавшись такой формулой для каждого l_j, получим следующую формулу для общего решения $y(x)$ уравнения (2.1.1):

$$y(x) = \bar{y}(x) - \sum_{j=1}^{n} l_j(\bar{y})\, \theta_j(x) = \int_a^x K(x,s) f(s) ds - \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x) \int_a^b \psi_j(s) f(s) ds$$

$$= \int_a^x K(x,s) f(s) ds - \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} \theta_j(x)\, \psi_j(s) \right] f(s) ds.$$

Мы получили сумму двух интегралов, в которых интегрирование производится по разным промежуткам. Для объединения их в один, разобьем второй интеграл на два (по промежутку $[a, x]$ и по промежутку $[x, b]$) и первую его часть объединим с первым интегралом, а потом соберем интегралы по стыкующимся промежуткам в один.

$$y(x) = \int_a^x K(x,s) f(s) ds - \int_a^x \left[\sum_{j=1}^{n} \theta_j(x)\, \psi_j(s) \right] f(s) ds -$$

$$- \int_x^b \left[\sum_{j=1}^{n} \theta_j(x)\, \psi_j(s) \right] f(s) ds = \int_a^x \left[K(x,s) - \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x)\, \psi_j(s) \right] f(s) ds -$$

$$- \int_x^b \left[\sum_{j=1}^{n} \theta_j(x)\, \psi_j(s) \right] f(s) ds = \int_a^x G(x,s) f(s) ds + \int_x^b G(x,s) f(s) ds =$$

$$= \int_a^b G(x,s) f(s) ds,$$

где через $G(x, s)$ обозначена функция, которая при $s \in [a, x]$ и при $s \in [x, b]$ определяется, соответственно, формулами

$$G(x,s) = \begin{cases} K(x,s) - \sum_{j=1}^{n} \theta_i(x)\,\psi_i(s), & s \le x, \\ -\sum_{j=1}^{n} \theta_i(x)\,\psi_i(s), & x \le s. \end{cases} \qquad (2.1.8)$$

Таким образом, мы получили формулу

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds, \qquad (2.1.9)$$

позволяющую явно представить решение краевой задачи $(2.1.1) - (2.1.2)$ через правую часть $f(x)$ уравнения. При этом функция $G(x,s)$, стоящая множителем при $f(s)$ под знаком интеграла, от $f(s)$ никак не зависит.

Определение 2.2 [3]. Функция $G(x,s)$, позволяющая представить решение краевой задачи в виде (2.1.9), называется *функцией Грина,* а сама формула (2.1.9)- *формулой Грина*.

Из формулы (2.1.8) видно, что функция Грина строится из фундаментальной системы решений однородного уравнения и описывается формулой “в две строки” (при $s \le x$ и при $x \le s$), причём коэффициенты линейной комбинации в обеих строках зависят от переменой s, играющей роль параметра. Количество этих коэффициентов равно $2n$ штук (n в первой строке и n-го второй), поэтому для их определения необходимы столько же условий (зависящих от параметра s).

Первый “комплект” условий легко выделить из формулы (2.1.8) откуда видно, что разница между верхней и нижней строчками в точности равна функции Коши $K(x,s)$, которая обладает свойствами 1 - 3. Чтобы переформулировать эти свойства для функции Грина, введем формальные обозначения $G(s+0,s)$ для значений верхней при $s \le x$ и $G(s-0,s)$ для значений нижней (при $x \le s$) формул при $x = s$. В этих обозначениях получаем

$$G(s+0,s) - G(s-0,s) = 0$$

и для производных до порядка $(n-2)$ включительно

$$\frac{\partial^i G}{\partial x^i}(s+0,s)-\frac{\partial^i G}{\partial x^i}(s-0,s)=0 \qquad (i=1,2,\dots,n-2)$$

(эти условия непрерывности при $x=s$), а для $(n-1)$ - й производной

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(s+0,s)-\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(s+0,s)=\frac{1}{p_0(s)}$$

(скачек $(n-1)$- ой производной).

Таким образом, мы уже имеем n условий, которые одни и те же для всех функций Грина, вне зависимости от того, такую краевую задачу мы рассматриваем. От краевой задачи зависят функции $\psi_i(s)$, в вычислении которых задействованы функционалы краевых условий. Нам следует определить связь этих функционалов с функцией Грина.

Из формулы (2.1.9) в силу (2.1.8) имеем

$$y(x)=\int_a^x\left[K(x,s)-\sum_{j=1}^n\theta_j(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)ds-\int_x^b\left[\sum_{j=1}^n\theta_j(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)ds.$$

Применяя здесь формулу дифференцирования по параметру интеграла с параметром и в пределах интеграла и под знаком интеграла, получим для всех $i=1,2,\dots,n-1$, что

$$y^{(i)}(x)=\left\{\left[\frac{\partial^{i-1}K(x,s)}{\partial x^i}-\sum_{j=1}^n\theta_j{}^{(i-1)}(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)\right\}_{x=s}+$$

$$+\int_a^x\left[\frac{\partial^{i}K(x,s)}{\partial x^i}-\sum_{j=1}^n\theta_j{}^{(i)}(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)ds+$$

$$+\left\{\left[\sum_{j=1}^n\theta_j{}^{(i-1)}(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)\right\}_{x=s}-\int_x^b\left[\sum_{j=1}^n\theta_j{}^{(i)}(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)ds=$$

$$=\int_a^x\left[\frac{\partial^{i}K(x,s)}{\partial x^i}-\sum_{j=1}^n\theta_j{}^{(i)}(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)ds-\int_x^b\left[\sum_{j=1}^n\theta_j{}^{(i)}(x)\,\psi_j(s)\right]f(s)ds$$

$$=$$

$$= \int_a^x \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds - \int_x^b \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds = \int_a^b \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds.$$

Отсюда, для функционалов вида $(2.1.7)$ получаем

$$l(y) = \int_a^b l\big(G(\cdot,s)\big) f(s)ds.$$

Если теперь l- один из функционалов краевых условий $(2.1.2)$, то для любой $f(s)$ должно выполняться

$$\int_a^b l\big(G(\cdot,s)\big) f(s)ds = 0,$$

что возможно, только если множитель при $f(s)$ тождественно нулевой, т.е. мы получаем ещё n условий:

$$l_j\big(G(\cdot,s)\big) = 0 \quad (j = 1,2,\dots,n).$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату (см. [3]):

Теорема 2.1.1. *Если задача* $(2.1.1) - (2.1.2)$ *невырождена, то её функция Грина существует и обладает следующими свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s = s_0 \in [a,b]$ *функция* $g(x) = G(x,s_0)$ *является решением однородного уравнения* $Ly = 0$ *на каждом из промежутков* $[a,s_0]$ *и* $[s_0,b]$*;*

2) при $x = s_0$ *она удовлетворяет условиям*

$$g^{(i)}(s_0+0) - g^{(i)}(s_0-0) = 0$$

для всех производных порядка $i = 0,1,2,\dots,n-2$ *и*

$$g^{(n-1)}(s_0+0) - g^{(n-1)}(s_0-0) = \frac{1}{p_0(s_0)};$$

3) она удовлетворяет краевым условиям

$$l_j(g) = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n).$$

Отметим, что перечисленные в теореме 2.1.1 свойства могут однозначно определять функцию Грина краевой задачи. Другими словами, справедливо утверждение

Теорема 2.1.2. *Если задача* $(2.1.1)-(2.1.2)$ *невырождена, то функция, удовлетворяющая условиям 1) - 3) теоремы 2.1.1, существует и определяется единственным образом.*

Доказательство. Из условия 1) теоремы 2.1.1 следует, что функция $G(x,s)$ имеет вид

$$G(x,s)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,a_j(s), & a\le s\le x\le b,\\ \sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,b_j(s), & a\le x\le s\le b.\end{cases}$$

где $\{\varphi_j(x)\}_1^n$- некоторая фундаментальная система решений однородного уравнения $Ly=0$, а $a_j(s)$, $b_j(s)$ $(j=1,2,\dots,n)$- коэффициенты линейных комбинаций, зависящие, вообще говоря, от s.

В силу условия 2) теоремы 2.1.1, при каждом фиксированном $s\in[a,b]$, получаем соотношения

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j{}^{(i)}(s)\left[a_j(s)-b_j(s)\right]=0 \qquad (i=0,1,2,\dots,n-2\,)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j{}^{(n-1)}(s)\left[a_j(s)-b_j(s)\right]=\frac{1}{p_0(s)}.$$

Нетрудно заметить, что эти равенства определяют алгебраическую систему относительно $c_j(s)=a_j(s)-b_j(s)$:

$$\begin{cases}\varphi_1(s)c_1(s)+\varphi_2(s)c_2(s)+\cdots+\varphi_n(s)c_n(s)=0,\\ \varphi_1'(s)c_1(s)+\varphi_2'(s)c_2(s)+\cdots+\varphi_n'(s)c_n(s)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(s)c_1(s)+\varphi_2^{(n-1)}(s)c_2(s)+\cdots+\varphi_n^{(n-1)}(x)c_n(s)=\dfrac{1}{p_0(s)},\end{cases} \qquad (2.1.10)$$

определителем которой является $W(s)$. Так как $\varphi_j(x)$- фундаментальная система решений уравнения $Ly=0$, то $W(s)\neq 0$, поэтому система $(2.1.10)$ имеет единственное решение $c_1(s),c_2(s),\cdots,c_n(s)$.

Представим теперь функцию $G(x,s)$ в виде

$$G(x,s)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,a_j(s), & a\le s\le x\le b,\\ \sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,a_j(s)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,c_j(s), & a\le x\le s\le b.\end{cases}$$

Так как решение $c_i(s)$ $(i=1,2,\dots,n)$ системы $(2.1.10)$ определяется равенством

$$c_i(s)=\frac{(-1)^{n+i}}{p_0(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{i-1}(s) & \varphi_{i+1}(s) & \cdots & \varphi_n(s)\\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_{i-1}'(s) & \varphi_{i+1}'(s) & \cdots & \varphi_n'(s)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \varphi_{i-1}^{(n-1)}(s) & \varphi_{i+1}^{(n-1)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(s)\end{vmatrix}$$

$(i=1,2,\dots,n)$, то выражение

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,c_j(s)$$

представляет собой разложения по последней строке определителя

$$\frac{1}{p_0(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s)\\ \varphi_1'(s) & \cdots & \varphi_n'(s)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s)\\ \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x)\end{vmatrix},$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,c_j(s)=\ K(x,s)$$

где $K(x,s)$- функция Коши, определенная равенством $(2.1.6)$.

Таким образом, функция

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,c_j(s)$$

является решением однородного уравнения $Ly=0$, для которого выполнены условия:

- при $x = s$ все производные этой функции по x до порядка $(n-1)$ включительно равны нулю;

- при $x = s$ производная порядка $(n-1)$ по x от этой функции равна $\frac{1}{p_0(s)}$.

Эта функция определяется однозначно в силу замечания к свойствам функции Коши.

Если обозначить

$$G_0(x,s) = \begin{cases} 0, & a \leq s \leq x \leq b, \\ K(x,s)\,, & a \leq x \leq s \leq b, \end{cases}$$

то функцию $G(x,s)$ можно записать в виде

$$G(x,s) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\, a_j(s) + G_0(x,s),$$

где $a_j(s)$ $(j = 1,2,\dots,n)$- неизвестные пока функции. Для их определения воспользуемся третьим условием теоремы 2.1.1. Подстановка функции $G(x,s)$ в краевые условия даёт систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} l_i(\varphi_j)\, a_j(s) + l_i\big(G_0(\cdot,s)\big) = 0 \quad (j = 1,2,\dots,n).$$

Эта система алгебраических уравнений относительно $a_j(s)$. Определителем этой системы является определитель матрицы $\left\| l_i(\varphi_j) \right\|$, который отличен от нуля в силу нежырожденности краевой задачи. Значит функции $a_j(s)$ могут быть определены из этой системы однозначно.

Вместе с $a_j(s)$ оказывается однозначно определенной и вся функция $G(x,s)$. Теорема 2.1.2 доказана.

Из этой теоремы следует, что функция Грина может быть найдена напрямую, только исходя из трех условий, перечисленных в теореме 2.1.1.

§2. Функция Грина краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида $(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'')'' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

На отрезке $(0, l)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'')'' = f(x) \qquad (2.2.1)$$

вместе с граничными условиями типа Штурма-Лиувилля

$$l_1(y) \equiv \alpha_0 y(0) + \alpha_3(py'')'(0) = 0, \quad l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(0) - \alpha_2 y''(0) = 0, \qquad (2.2.2)$$

$$l_3(y) \equiv \beta_0 y(l) - \beta_3(py'')'(l) = 0, \quad l_4(y) \equiv \beta_1 y'(l) + \beta_2 y''(l) = 0. \qquad (2.2.3)$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения $(2.2.1)$ и граничных условий $(2.2.2)$, $(2.2.3)$ обладают свойствами знакосогласованости.

В §2 главы I были установлены условия невырожденности краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$. (см. теорему 1.2.1 гл. I).

Предполагая в настоящем параграфе краевую задачу $(2.2.1) - (2.2.3)$ невырожденной, построим для неё функцию Грина, при помощи которой решение краевой задачи можно выписать в явном виде.

Как и в §1 настоящей главы, под функцией Грина краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$ мы будем понимать любую функцию $G(x, s)$, определенную в области $0 \leq x, s \leq l$, позволяющую получить решение $y(x)$ краевой задачи в виде

$$y(x) = \int_0^l G(x, s) f(s) ds \,. \qquad (2.2.4)$$

Такой подход к определению функции Грина краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$ имеет ряд преимуществ по сравнению с аксиоматическим подходом, которые были отмечены в предыдущем параграфе.

Так как в случае уравнения $(2.2.1)$ фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения можно выписать явно, то и функция Грина краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$ записывается в явном виде через коэффициенты граничных условий $(2.2.2)$, $(2.2.3)$. Поскольку мы здесь рассматриваем граничные условия более общего вида, то полученные нами здесь формулы охватывают все известные формулы [15] для функции Грина краевых задач, соответствующих, наиболее часто встречающимся случаям закрепления концов стержня.

Теорема 2.2.1. *Пусть коэффициенты краевой задачи* $(2.2.1)-(2.2.3)$ *обладают свойством знакосогласованности, причём при* $\alpha_1+\beta_1>0$ *выполняется* $\alpha_0+\beta_0>0$, *а если* $\alpha_1=\beta_1=0$, *имеет место* $\alpha_0\cdot\beta_0>0$. *Тогда существует единственная функция Грина этой краевой задачи.*

Доказательство. Пусть $\bar{y}(x)$- какое-то решение уравнения (2.2.1) и $y_0(x)$, определенная равенством (1.2.5) главы I, общее решение однородного уравнения

$$(p(x)y'')''=0. \tag{2.2.5}$$

Тогда общее решение $y(x)$ неоднородного уравнения (2.2.1) запишется в виде

$$y(x)=\bar{y}(x)+c_1+c_2x+c_3\int\limits_0^x\frac{x-t}{p(t)}dt+c_4\int\limits_0^x\frac{x-t}{p(t)}tdt, \tag{2.2.6}$$

где c_1,c_2,c_3,c_4- произвольные постоянные.

Для определения частного решения $\bar{y}(x)$ воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. В силу леммы 2.1.1 предыдущего параграфа настоящей главы, если $c_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$ удовлетворяют системе соотношений

$$\left.\begin{aligned} c'_1(x)+c'_2(x)\cdot x+c'_3(x)\int\limits_0^x\frac{x-t}{p(t)}dt+c'_4(x)\int\limits_0^x\frac{x-t}{p(t)}tdt=0,\\ c'_2(x)+c'_3(x)\int\limits_0^x\frac{dt}{p(t)}+c'_4(x)\int\limits_0^x\frac{tdt}{p(t)}=0,\\ c'_3(x)+c'_4(x)\cdot x=0,\\ c'_4(x)=f(x), \end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

то частное решение $\bar{y}(x)$ может быть определено следующим образом:

$$\bar{y}(x)=c_1(x)+c_2(x)\cdot x+c_3(x)\int\limits_0^x\frac{x-t}{p(t)}dt+c_4(x)\int\limits_0^x\frac{x-t}{p(t)}tdt=$$

$$= c_1(x) + c_2(x) \cdot x + c_3(x)\varphi_3(x) + c_4(x)\varphi_4(x)$$

Решая систему (2.2.7), находим ${c'}_4(x) = f(x)$, ${c'}_3(x) = -x \cdot f(x)$, ${c'}_2(x) = \varphi_3(x) f(x)$, ${c'}_1(x) = -\varphi_4(x) f(x)$. Интегрируя эти выражения, и, полагая в них $c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, получим

$$c_1(x) = -\int_0^x \varphi_4(s) f(s) ds, \qquad c_2(x) = \int_0^x \varphi_3(s) f(s) ds,$$

$$c_3(x) = -\int_0^x s f(s) ds, \qquad c_4(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Следовательно,

$$\bar{y}(x) = \int_0^x [x\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s\varphi_3(x) + \varphi_4(x)] f(s) ds =$$

$$= \int_0^x K(x, s) f(s) ds. \qquad (2.2.8)$$

Функция

$$K(x, s) = x\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s\varphi_3(x) + \varphi_4(x) =$$

$$= \int_s^x \frac{(x - t)(t - s)}{p(x)} ds \quad (s < x) \qquad (2.2.9)$$

является *функцией Коши* дифференциального уравнения (2.2.5).

Из формулы (2.2.9) непосредственно вытекают следующие свойства функции $K(x, s)$:

1) при каждом фиксированном s, как функция от x, она удовлетворяет однородному уравнению (2.2.5), ($K(x, s)$ определяется в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений $\{\varphi_i(x)\}$, коэффициенты которой при фиксированном s- просто числа);

2) $K(s, s) = \frac{\partial K}{\partial x}(s, s) = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(s, s) = 0$;

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(s, s) = 1$.

Из равенств (2.2.6) и (2.2.8) получаем следующее выражение для общего решения $y(x)$ уравнения (2.2.1):

$$y(x) = \int_0^x K(x,s)f(s)ds + c_1 + c_2 x + c_3 \int_0^x \frac{x-t}{p(t)}dt +$$

$$+c_4 \int_0^x \frac{x-t}{p(t)} t dt \qquad (2.2.10)$$

Определим значения постоянных c_i из краевых условий (2.2.2) и (2.2.3). Для этого вычислим сначала производные функции $y(x)$. При вычислении производных интеграла, зависящего от параметра, используется свойство 2) функции $K(x,s)$.

$$y'(x) = \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}(x,s)f(s)ds + c_2 + c_3 \int_0^x \frac{dt}{p(t)} + c_4 \int_0^x \frac{tdt}{p(t)},$$

$$y''(x) = \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,s)f(s)ds + c_3 \frac{1}{p(x)} + c_4 \frac{x}{p(x)},$$

$$(py'')'(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(x,s)f(s)ds + c_4.$$

Так как $y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$, $(py'')(0) = c_3$, $(py'')'(0) = c_4$,

$$y(l) = \int_0^l K(l,s)f(s)ds + c_1 + c_2 l + c_3(\alpha l - \beta) + c_4(\beta l - \gamma),$$

$$y'(l) = \int_0^l \frac{\partial K}{\partial x}(l,s)f(s)ds + c_2 + c_3\alpha + c_4\beta,$$

$$(py'')(l) = \int_0^l \left(p \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(l,s)f(s)ds + c_3 + c_4 l,$$

$$(py'')'(l) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(l,s)f(s)ds + c_4,$$

где обозначены

$$\alpha=\int_0^l \frac{dt}{p(t)},\quad \beta=\int_0^l \frac{tdt}{p(t)},\quad \gamma=\int_0^l \frac{t^2dt}{p(t)},$$

то из краевых условий (2.2.2) и (2.2.3) получаем

$$l_1(y)=\alpha_0c_1+\alpha_3c_4=0,\qquad l_2(y)=\alpha_1c_2-\alpha_2c_3=0,$$

$$l_3(y)=\beta_0[c_1+c_2l+c_3(\alpha l-\beta)+c_4(\beta l-\gamma)+A]-\beta_3(c_4+D)=0,$$

$$l_4(y)=\beta_1(c_2+c_3\alpha+c_4\beta+B)+\beta_2(c_3+c_4l+C)=0,$$

где обозначены

$$A=\int_0^l K(l,s)f(s)ds,\qquad B=\int_0^l \frac{\partial K}{\partial x}(l,s)f(s)ds,$$

$$C=\int_0^l \left(p\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(l,s)f(s)ds,\qquad D=\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(l,s)f(s)ds.$$

Таким образом, для определения постоянных c_i получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0c_1+\alpha_3c_4=0,\\ \alpha_1c_2-\alpha_2c_3=0,\\ \beta_0c_1+\beta_0lc_2+\beta_0(\alpha l-\beta)c_3+[(\beta l-\gamma)-\beta_3]c_4=-\beta_0A+\beta_3D,\\ \beta_1c_2+(\beta_1\alpha+\beta_2)c_3+(\beta_1\beta+\beta_2l)c_4=-\beta_1B-\beta_2C. \end{cases}\tag{2.2.11}$$

Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \alpha_3\\ 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & 0\\ \beta_0 & \beta_0l & \beta_0(\alpha l-\beta) & \beta_0(\beta l-\gamma)-\beta_3\\ 0 & \beta_1 & \beta_1\alpha+\beta_2 & \beta_1\beta+\beta_2l \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (см. §2 гл I). Поэтому неоднородная система (2.2.11) имеет единственное решение. Найдем решение этой системы, например, методом Крамера. После несложных вычислений находим

$$c_1=\frac{\alpha_3}{\Delta}[-(\beta_0A-\beta_3D)(\alpha_1\beta_1\alpha+\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)-$$

$$-\beta_0(\beta_1B+\beta_2C)(\alpha_1(\alpha l-\beta)+\alpha_2l)],$$

$$c_2=\frac{\alpha_2}{\Delta}[-\alpha_0(\beta_0A-\beta_3D)(\beta_1\beta+\beta_2l)+$$

$$+(\beta_1B+\beta_2C)(-\beta_0\alpha_3-\alpha_0\beta_3+\alpha_0\beta_0(\beta l-\gamma))],$$

$$c_3 = \frac{\alpha_1}{\Delta}[-\alpha_0(\beta_0 A - \beta_3 D)(\beta_1\beta + \beta_2 l) +$$
$$+(\beta_1 B + \beta_2 C)(-\beta_0\alpha_3 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_0\beta_0(\beta - \gamma))],$$
$$c_4 = \frac{\alpha_0}{\Delta}[(\beta_0 A - \beta_3 D)(\alpha_1\beta_1\alpha + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) -$$
$$-\beta_0(\beta_1 B + \beta_2 C)(\alpha_1(\alpha l - \beta) + \alpha_2 l)].$$

Подставляя найденные значения c_i в (2.2.10), получим следующее выражение для решения $y(x)$ краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$:

$$y(x) = \int_0^x K(x,s)f(s)ds + \frac{\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x)}{\Delta}[-(\beta_0 A - \beta_3 D)(\alpha_1\beta_1\alpha + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) +$$
$$+\beta_0(\beta_1 B + \beta_2 C)(\alpha_1(\alpha l - \beta) + \alpha_2 l)] +$$
$$+\frac{\alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x)}{\Delta}[-\alpha_0(\beta_0 A - \beta_3 D)(\beta_1\beta + \beta_2 l) +$$
$$+(\beta_1 B + \beta_2 C)(\alpha_0\beta_0(\beta l - \gamma) - \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3)] = \int_0^x K(x,s)f(s)ds -$$
$$-\frac{1}{\Delta}\Big\{\Big[\big(\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x)\big)(\alpha_1\beta_1\alpha + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + \alpha_0\big(\alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x)\big)(\beta_1\beta + \beta_2 l)\Big] \times$$
$$\times (\beta_0 A - \beta_3 D) - \big[\beta_0\big(\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x)\big)\big((\alpha_1(\alpha l - \beta) + \alpha_2 l) + \alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x)\big) \times$$
$$\times (\alpha_0\beta_0(\beta l - \gamma) - \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3)](\beta_1 B + \beta_2 C)\}.$$

Заметим, что

$$\beta_0 A - \beta_3 D = \int_0^l \left[\beta_0 K(l,s) - \beta_3\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(l,s)\right]f(s)ds =$$
$$= \int_0^l \big[\beta_0\big(l\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s(\alpha l - \beta) + \beta l - \gamma\big) - \beta_3\big]f(s)ds,$$
$$\beta_1 B + \beta_2 C = \int_0^l [\beta_1\frac{\partial K}{\partial x}(l,s) + \beta_2\left(p\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)(l,s)]f(s)ds =$$
$$= \int_0^l [\beta_1\big(\varphi_3(s) - s\alpha + \beta\big) + \beta_2(-s + l)]f(s)ds.$$

Если здесь обозначить

$$\begin{cases}\psi_1(s) = \beta_0(l\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s(\alpha l - \beta) + \beta l - \gamma) - \beta_3, \\ \psi_2(s) = \beta_1(\varphi_3(s) - s\alpha + \beta) - \beta_2(l - s),\end{cases} \qquad (2.2.12)$$

то будем иметь

$$\beta_0 A - \beta_3 D = \int_0^l \psi_1(s) f(s) ds, \quad \beta_1 B + \beta_2 C = \int_0^l \psi_2(s) f(s) ds.$$

Введем также обозначения

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = (\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x))\big(\alpha_1\beta_1\alpha + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2\big) + \\ \qquad\qquad + \alpha_0(\alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x))\big(\beta_1\beta + \beta_2 l\big), \\ \Phi_2(x) = \beta_0(\alpha_3 - \alpha_0\varphi_4(x))(\alpha_1(\alpha l - \beta) + \alpha_2 l) + \\ + (\alpha_2 x + \alpha_1\varphi_3(x))\big(\alpha_0\beta_0(\beta l - \gamma) - \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3\big). \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Тогда для решения $y(x)$ получим выражение

$$y(x) = \int_0^x K(x,s) f(s) ds - \frac{1}{\Delta}\left[\Phi_1(x)\int_0^l \psi_1(s) f(s) ds - \Phi_2(x)\int_0^l \psi_2(s) f(s) ds\right] =$$

$$= \int_0^x K(x,s) f(s) ds - \frac{1}{\Delta}\int_0^l \left[\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x)\psi_2(s)\right] f(s) ds =$$

$$= \int_0^x \left[K(x,s) - \frac{1}{\Delta}\Big(\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x)\psi_2(s)\Big)\right] f(s) ds -$$

$$- \frac{1}{\Delta}\int_x^l \left[\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x)\psi_2(s)\right] f(s) ds.$$

Если сравнить это выражение с равенством $(2.2.4)$, то получим существование функции Грина краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$ в виде

$$G(x,s) = \begin{cases} K(x,s) - \dfrac{1}{\Delta}\big(\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x)\psi_2(s)\big), & 0 \le s \le x \le l, \\ -\dfrac{1}{\Delta}\big(\Phi_1(x)\psi_1(s) - \Phi_2(x)\psi_2(s)\big), & 0 \le x \le s \le l. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Единственность такого представления следует из однозначной разрешимости системы $(2.2.11)$, которая обеспечивается условием $\Delta \neq 0$.

Теорема 2.2.1 доказана.

Таким образом, существует функция Грина $G(x,s)$ краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$, определенная равенством $(2.2.14)$, и, позволяющая представить решение $y(x)$ краевой задачи в виде

$$y(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)ds.$$

Из формулы (2.2.14) видно, что функция Грина $G(x,s)$ краевой задачи $(2.2.1) - (2.2.3)$ строится из фундаментальной системы решений $\{\varphi_i(x)\}$ однородного уравнения (2.2.5), причём коэффициенты линейной комбинации зависят от переменой s, играющей роль параметра. Из этой формулы также видно, что разница между верхней и нижней строчками в точности равна функции Коши $K(x,s)$, которая обладает свойствами 1) - 3). Поэтому для функции $G(x,s)$ выполняются равенства

$$\frac{\partial^i G}{\partial x^i}(s+0,s) - \frac{\partial^i G}{\partial x^i}(s-0,s) = 0 \quad (i = 0,1,2).$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)(s+0,s) - \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)(s-0,s) = 1.$$

Аналогично предыдущему параграфу можно показать, что

$$y^i(x) = \int_0^l \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds \qquad (i = 1,2,3).$$

Поэтому для функционалов l_j $(j = 1,2,3,4)$, порождаемых граничными условиями (2.2.2) и (2.2.3), имеем

$$l_j(y) = \int_0^l l_j\big(G(\cdot,s)\big)f(s)ds = 0 \quad (j = 1,2,3,4).$$

Отсюда следуют

$$l_j\big(G(\cdot,s)\big) = 0 \quad (j = 1,2,3,4).$$

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.1 существует функция Грина краевой задачи* $(2.2.1) - (2.2.3)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) *функция* $g(x) = G(x,s_0)$ $\big(s_0 \in (0,l)\big)$ *при* $x \neq s_0$ *удовлетворяет однородному уравнению* (2.2.5);

2) *при* $x = s_0$ *она удовлетворяет условиям*

$$g^{(i)}(s_0 + 0) - g^{(i)}(s_0 - 0) = 0 \quad (i = 0,1,2)$$

и

$$(pg'')'(s_0 + 0) - (pg'')'(s_0 - 0) = 1;$$

3) она удовлетворяет граничным условиям

$$l_j(g) = 0 \quad (j = 1,2,3,4).$$

Как было отмечено в § 2 главы I, краевые условия (2.2.2), (2.2.3) являются наиболее общими и охватывают все реально существующие виды закрепления концов стержня. Ниже приведем вид функции Грина для некоторых краевых задач при краевых условиях частного вида, соответствующим наиболее часто встречающимся реальным видам закрепления концов стержня. Эти выражения для функции Грина следуют из общей формулы (2.2.14) и совпадают с соответствующими формулами для функции Грина, приведенными в [10].

Известно (см. § 2 главы I), что в случае поперечных колебаний стержня встречаются краевые условия:

1. $y(\cdot) = y'(\cdot) = 0$ (жёстко закрепленный или защемленный конец),
2. $y(\cdot) = y''(\cdot) = 0$ (опёртый или шарнирно закрепленный конец),
3. $y''(\cdot) = (py'')'(\cdot) = 0$ (свободный конец),
4. $y(\cdot) = (py'')'(\cdot) = 0$ (упругое защемление).

Ниже y функции Грина первый (второй) верхный индекс указывает, какое из этих краевых условий задаётся на левом (правом) конце $x = 0$ $(x = l)$; например, $G^{1,2}(x,s)$ обозначает функцию Грина, соответствующую задаче

$$(p(x)y'')'' = f(x),$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \qquad y(l) = y''(l) = 0.$$

Рассмотрим сначала случай жёсткого закрепления стержня с обеих сторон. В этом случае

$$\alpha_2=\alpha_3=\beta_2=\beta_3=0 \text{ и } \alpha_0=\alpha_1=\beta_0=\beta_1=1.$$

Поэтому из формулы (1.2.7) § 2 главы I, а также из равенств (2.2.12) и (2.2.13) настоящего параграфе получаем $\Delta=\alpha\gamma-\beta^2$,

$$\psi_1(s)=l\varphi_3(s)-\varphi_4(s)-s(\alpha l-\beta)+(\beta l-\gamma),\ \ \psi_2(s)=\varphi_3(s)-(s\alpha-\beta),$$

$$\Phi_1(x)=-\varphi_4(x)\alpha+\varphi_3(x)\beta,\ \ \Phi_2(x)=-\varphi_4(x)(\alpha l-\beta)+\varphi_3(x)(\beta l-\gamma).$$

Если обозначить

$$G_0(x,s)=\begin{cases} K(x,s), & \text{при} \quad 0\le s\le x\le l,\\ 0 & \text{при} \quad 0\le x\le s\le l,\end{cases}$$

то из формулы (2.2.14) получаем следующее выражение для функции Грина $G^{1,1}(x,s)$ краевой задачи, соответствующей жёсткому закреплению стержня с обеих сторон:

$$G^{1,1}(x,s)=G_0(x,s)-\frac{1}{\alpha\gamma-\beta^2}\{\varphi_4(x)[\alpha\varphi_4(s)-\beta\varphi_3(s)+(\alpha\gamma-\beta^2)]+$$

$$+\varphi_3(x)[\gamma\varphi_3(s)-\beta\varphi_4(s)-s(\alpha\gamma-\beta^2)]\}.$$

При этом предполагается, что $\alpha\gamma-\beta^2\neq 0$. Если $\alpha\gamma-\beta^2=0$, то функция Грина не существует, так как соответствующая однородная краевая задача имеет нетривиальное решение $y(x)=c_3\varphi_3(x)+c_4\varphi_4(x)$, где c_3,c_4- ненулевое решение системы

$$\begin{cases}\alpha c_3+\beta c_4=0,\\ \beta c_3+\gamma c_4=0.\end{cases}$$

В случае жёсткого закрепления слева и свободного правого конца имеем $\alpha_2=\alpha_3=\beta_0=\beta_1=0$ и $\alpha_0=\alpha_1=\beta_2=\beta_3=1$. Поэтому в этом случае $\Delta=1$ и, соответственно,

$$\psi_1(s)=-1,\ \ \psi_2(s)=l-s,$$

$$\Phi_1(x)=-\varphi_4(x)+\varphi_3(x)l,\ \ \Phi_2(x)=-\varphi_3(x).$$

Отсюда и из формулы (2.2.14) получаем

$$G^{1,3}(x,s)=G_0(x,s)+s\varphi_3(x)-\varphi_4(x).$$

В случае же жёсткого закрепления слева и шарнирного закрепления справа имеем $\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_3=0$ и $\alpha_0=\alpha_1=\beta_0=\beta_2=1$. Поэтому в этом случае $\Delta = \alpha l^2 - 2\beta l + \gamma = \sigma$, а из (2.2.12) и (2.2.13) имеем, соответственно

$$\psi_1(s) = l\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s(\alpha l - \beta) + \beta l - \gamma, \ \psi_2(s) = l - s,$$

$$\Phi_1(x) = -\varphi_4(x) + \varphi_3(x)l, \ \ \Phi_2(x) = -\varphi_4(x)(\alpha l - \beta) + \varphi_3(x)(\beta l - \gamma).$$

Отсюда следует

$$G^{1,2}(x,s) = G_0(x,s) - \frac{1}{\sigma}\{\varphi_3(x)\left[l\varphi_4(s) - l^2\varphi_3(s) + s\sigma\right] +$$

$$+\varphi_4(x)[l\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - \sigma]\}.$$

Здесь также предполагается, что $\sigma = \alpha l^2 - 2\beta l + \gamma \neq 0$. Если $\sigma = 0$, то функция Грина краевой задачи не существует.

А в случае жёсткого закрепления слева и упругого защемления справа имеем $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_0 = \beta_2 = 0$ и $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \beta_3 = 1$. Поэтому в этом случае $\Delta = \alpha$ и, соответственно,

$$\psi_1(s) = -1, \ \psi_2(s) = \varphi_3(s) - s\alpha + \beta,$$

$$\Phi_1(x) = -\varphi_4(x)\alpha + \varphi_3(x)\beta, \ \ \Phi_2(x) = -\varphi_3(x).$$

Отсюда следует

$$G^{1,4}(x,s) = G_0(x,s) - \frac{1}{\alpha}[\varphi_3(x)(\varphi_3(s) - s\alpha) - \alpha\varphi_4(x)].$$

Рассмотрим теперь случай шарнирного закрепления с обеих сторон. В этом случае $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = 0$ и $\alpha_0 = \alpha_2 = \beta_0 = \beta_2 = 1$, следовательно, $\Delta = 1$,

$$\psi_1(s) = l\varphi_3(s) - \varphi_4(s) - s(\alpha l - \beta) + \beta l - \gamma, \ \psi_2(s) = l - s,$$

$$\Phi_1(x) = xl, \ \ \Phi_2(x) = -\varphi_4(x)l + x(\beta l - \gamma).$$

Отсюда имеем

$$G^{2,2}(x,s) = G_0(x,s) - \varphi_4(x)l(l - s) +$$

$$+x[l\varphi_4(s) - l^2\varphi_3(s) + s(\alpha l^2 - 2\beta l + \gamma)].$$

В случае шарнирного закрепления слева и упругого защемления справа имеем $\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_0 = \beta_2 = 0$ и $\alpha_0 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_3 = 1$. Поэтому в этом случае $\Delta = 1$,

$$\psi_1(s) = -1, \ \psi_2(s) = \varphi_3(s) - s\alpha + \beta,$$

$$\Phi_1(x) = -\varphi_4(x) + x\beta, \quad \Phi_2(x) = -x.$$

Следовательно,

$$G^{2,4}(x,s) = G_0(x,s) - \varphi_4(x) - x(\varphi_3(s) - \alpha s).$$

Функция Грина $G^{2,3}(x,s)$ и $G^{3,3}(x,s)$ краевых задач, соответствующих случаям *г)* и *д)* следствия из теоремы 1.2.1 § 2 главы I не существуют, так как в этих случаях соответствующие однородные краевые задачи имеют ненулевые решения $y_0(x) \equiv$ с и, соответственно, $y_0(x) \equiv c_1 x + c_2$.

Результаты этого параграфа опубликованы в работе [23].

§3. Функция Грина краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида $(\boldsymbol{p(x)y''})'' - (\boldsymbol{q(x)y'})' = \boldsymbol{f(x)}$

В настоящем параграфе на отрезке (a,b) рассматривается дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \tag{2.3.1}$$

вместе с граничными условиями типа Штурма-Лиувилля

$$l_1(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_3 D_3 y(a) = 0, \quad l_2(y) \equiv \alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y''(a) = 0, \tag{2.3.2}$$

$$l_3(y) \equiv \beta_0 y(b) - \beta_3 D_3 y(b) = 0, \quad l_4(y) \equiv \beta_1 y'(b) + \beta_2 y''(b) = 0, \tag{2.3.3}$$

где $D_3 y(\cdot) = [(py'')' - qy'](\cdot)$. Относительно коэффициентов уравнения (2.3.1) и граничных условий (2.3.2), (2.3.3) предполагается, что они обладают свойством знакосогласованности.

В §3 главы I были установлены условия невырожденности краевой задачи (2.3.1) – (2.3.3) (см. теорему 1.3.4 и замечание к ней из гл. I). В настоящем параграфе, предполагая краевую задачу (2.3.1) – (2.3.3) невырожденной, построим для неё функцию Грина, при помощи которой выписывается интегральное представление решения краевой задачи в явном виде.

Как и в предыдущих параграфах, под *функцией Грина* краевой задачи $(2.3.1)-(2.3.3)$ мы будем понимать любую функцию $G(x,s)$, определенную в области $[0,l]\times[0,l]$, и, позволяющую получить решение $y(x)$ задачи $(2.3.1)-(2.3.3)$ в виде

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)ds. \tag{2.3.4}$$

При таком подходе к определению функции Грина нам удастся выписать явный вид этой функции для краевой задачи $(2.3.1)-(2.3.3)$. Полученная формула для функции Грина позволяет непосредственно определить основные её свойства.

Теорема 2.3.1. *Для невырожденной краевой задачи* $(2.3.1)-(2.3.3)$ *существует функция Грина.*

Доказательство. Пусть $\bar{y}(x)$- какое-то решение уравнения (2.3.1) и $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$- фундаментальная система решений однородного уравнения

$$(p(x)y'')''-(q(x)y')'=0. \tag{2.3.5}$$

Тогда общее решение $y(x)$ уравнения (2.3.1) записывается в виде

$$y(x)=\bar{y}(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)+c_4\varphi_4(x) \tag{2.3.6}$$

где c_i $(i=1,2,3,4)$- произвольные постоянные.

Частное решение $\bar{y}(x)$ уравнения (2.3.1) может быть определено методом вариации произвольных постоянных. Согласно лемме 2.1.1, если c_i $(i=1,2,3,4)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)+c_3'(x)\varphi_3(x)+c_4'(x)\varphi_4(x)=0, \\ c_1'(x)\varphi'_1(x)+c_2'(x)\varphi'_2(x)+c_3'(x)\varphi'_3(x)+c_4'(x)\varphi'_4(x)=0, \\ c_1'(x)\varphi''_1(x)+c_2'(x)\varphi''_2(x)+c_3'(x)\varphi''_3(x)+c_4'(x)\varphi''_4(x)=0, \\ c_1'(x)\left(p\varphi''_1\right)'(x)+c_2'(x)\left(p\varphi''_2\right)'(x)+c_3'(x)\left(p\varphi''_3\right)'(x)+ \\ +c_4'(x)\left(p\varphi''_4\right)'(x)=f(x), \end{cases} \tag{2.3.7}$$

то $\bar{y}(x)$ определяется следующим образом:

$$\bar{y}(x)=c_1(x)\varphi_1(x)+c_2(x)\varphi_2(x)+c_3(x)\varphi_3(x)+c_4(x)\varphi_4(x) \tag{2.3.8}$$

Так как определитель системы (2.3.7) - определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \varphi'_3(x) & \varphi'_4(x)\\ \varphi''_1(x) & \varphi''_2(x) & \varphi''_3(x) & \varphi''_4(x)\\ (p\varphi''_1)'(x) & (p\varphi''_2)'(x) & (p\varphi''_3)'(x) & (p\varphi''_4)'(x)\end{vmatrix}\neq 0,$$

то система (2.3.7) имеет единственное решение. Решая эту систему, находим

$$c_1'(x)=-\frac{f(x)}{p(x)W(x)}\begin{vmatrix}\varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\\ \varphi'_2(x) & \varphi'_3(x) & \varphi'_4(x)\\ \varphi''_2(x) & \varphi''_3(x) & \varphi''_4(x)\end{vmatrix},$$

$$c_2'(x)=\frac{f(x)}{p(x)W(x)}\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\\ \varphi'_1(x) & \varphi'_3(x) & \varphi'_4(x)\\ \varphi''_1(x) & \varphi''_3(x) & \varphi''_4(x)\end{vmatrix},$$

$$c_3'(x)=-\frac{f(x)}{p(x)W(x)}\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_4(x)\\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \varphi'_4(x)\\ \varphi''_1(x) & \varphi''_2(x) & \varphi''_4(x)\end{vmatrix},$$

$$c_4'(x)=\frac{f(x)}{p(x)W(x)}\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x)\\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \varphi'_3(x)\\ \varphi''_1(x) & \varphi''_2(x) & \varphi''_3(x)\end{vmatrix}.$$

Интегрируя эти выражения, и, подставляя их в (2.3.8), получим

$$\bar{y}(x)=\varphi_1(x)\int_a^x\frac{-f(s)}{p(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s)\\ \varphi'_2(s) & \varphi'_3(s) & \varphi'_4(s)\\ \varphi''_2(s) & \varphi''_3(s) & \varphi''_4(s)\end{vmatrix}ds+$$

$$+\varphi_2(x)\int_a^x\frac{f(s)}{p(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s)\\ \varphi'_1(s) & \varphi'_3(s) & \varphi'_4(s)\\ \varphi''_1(s) & \varphi''_3(s) & \varphi''_4(s)\end{vmatrix}ds+$$

$$+\varphi_3(x)\int_a^x\frac{-f(s)}{p(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_4(s)\\ \varphi'_1(s) & \varphi'_2(s) & \varphi'_4(s)\\ \varphi''_1(s) & \varphi''_2(s) & \varphi''_4(s)\end{vmatrix}ds+$$

$$+\varphi_4(x)\int_a^x\frac{f(s)}{p(s)W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s)\\ \varphi'_1(s) & \varphi'_2(s) & \varphi'_3(s)\\ \varphi''_1(s) & \varphi''_2(s) & \varphi''_3(s)\end{vmatrix}ds=$$

$$= \int\limits_a^x \frac{1}{p(s)W(s)} \left[-\varphi_1(x) \begin{vmatrix} \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi'_2(s) & \varphi'_3(s) & \varphi'_4(s) \\ \varphi''_2(s) & \varphi''_3(s) & \varphi''_4(s) \end{vmatrix} + \right.$$

$$+\varphi_2(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi'_1(s) & \varphi'_3(s) & \varphi'_4(s) \\ \varphi''_1(s) & \varphi''_3(s) & \varphi''_4(s) \end{vmatrix} - \varphi_3(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi'_1(s) & \varphi'_2(s) & \varphi'_4(s) \\ \varphi''_1(s) & \varphi''_2(s) & \varphi''_4(s) \end{vmatrix} +$$

$$\left. + \varphi_4(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) \\ \varphi'_1(s) & \varphi'_2(s) & \varphi'_3(s) \\ \varphi''_1(s) & \varphi''_2(s) & \varphi''_3(s) \end{vmatrix} \right] f(s)ds =$$

$$= \int\limits_a^x \frac{1}{p(s)W(s)} \begin{bmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi'_1(s) & \varphi'_2(s) & \varphi'_3(s) & \varphi'_4(s) \\ \varphi''_1(s) & \varphi''_2(s) & \varphi''_3(s) & \varphi''_4(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{bmatrix} f(s)ds = \int\limits_a^x K(x,s)\, f(s)ds,$$

где через $K(x,s)$ обозначено

$$K(x,s) = \frac{1}{p(s)W(s)} \begin{bmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi'_1(s) & \varphi'_2(s) & \varphi'_3(s) & \varphi'_4(s) \\ \varphi''_1(s) & \varphi''_2(s) & \varphi''_3(s) & \varphi''_4(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{bmatrix} \qquad (2.3.9)$$

Функция $K(x,s)$, определенная равенством (2.3.9), называется *функцией Коши* уравнения (2.3.5). Из формулы (2.3.9) непосредственно следуют следующие её основные свойства:

1) при каждом $s = s_0$ функция $z(x) = K(x, s_0)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.2.5);

2) $z(s_0) = z'(s_0) = z''(s_0) = 0$;

3) $(pz'')'(s_0) = 1$.

Вернемся к формуле (2.3.6) общего решения уравнения (2.3.1). Для определения значений постоянных c_i воспользуемся граничными условиями (2.3.2) и (2.3.3). В силу невырожденности краевой задачи (2.3.1) – (2.3.3) мы можем считать, что система решений $\{\varphi_i(x)\}$ является биортогональной набору функционалов l_j, определяемых краевыми условиями (2.3.2) и (2.3.3), т.е. $l_j(\varphi_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij}- символ Кронекера.

Тогда из равенства (2.3.6) находим $c_j = -l_j(\bar{y})$ $(j = 1,2,3,4)$, следовательно, для решения краевой задачи (2.3.1) – (2.3.3) получим выражения

$$y(x) = \bar{y}(x) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\, l_j(\bar{y}). \qquad (2.3.10)$$

Для вычисления значений функционалов l_j от решения

$$\bar{y}(x) = \int_a^x K(x,s)\, f(s)ds,$$

нам понадобятся значения его производных в точках a и b. Находим

$$\bar{y}'(x) = K(x,s)f(s)|_{x=s} = \int_a^x \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} f(s)ds = \int_a^x \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} f(s)ds,$$

$$\bar{y}''(x) = \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} f(s)\bigg|_{x=s} = \int_a^x \frac{\partial^2 K(x,s)}{\partial x^2} f(s)ds = \int_a^x \frac{\partial^2 K(x,s)}{\partial x^2} f(s)ds,$$

$$(p\bar{y}'')'(x) = p(x)\frac{\partial^2 K(x,s)}{\partial x^2} f(s)\bigg|_{x=s} = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left[p\frac{\partial^2 K(x,s)}{\partial x^2}\right] f(s)ds =$$

$$= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left[p\frac{\partial^2 K(x,s)}{\partial x^2}\right] f(s)ds.$$

В этих выражениях внеинтегральные члены равны нулю в силу свойства 2) функции Коши $K(x,s)$.

При $x = a$ функция $\bar{y}(x)$ и значения её производных равны нулю, следовательно,

$$l_1(\bar{y}) = l_2(\bar{y}) = 0,$$

а при $x = b$ имеем

$$\bar{y}(b) = \int_a^b K(b,s)\, f(s)ds, \qquad \bar{y}'(b) = \int_a^b \frac{\partial K(b,s)}{\partial x} f(s)ds,$$

$$\bar{y}''(b) = \int_a^b \frac{\partial^2 K(b,s)}{\partial x^2} f(s)ds, \quad D_3\bar{y}(b) = \int_a^b D_3 K(b,s) f(s)ds,$$

$$l_3(\bar{y}) = \int_a^b l_3\big(K(b,s)\big) f(s)ds, \quad l_4(\bar{y}) = \int_a^b l_4\big(K(b,s)\big) f(s)ds.$$

Обозначая здесь

$$\psi_3(s) = l_3\big(K(b,s)\big), \qquad \psi_4(s) = l_4\big(K(b,s)\big),$$

получаем из (2.3.10)

$$y(x) = \int_a^x K(x,s) f(s)ds - \varphi_3(x)\int_a^b \psi_3(s) f(s)ds - \varphi_4(x)\int_a^b \psi_4(s) f(s)ds =$$

$$= \int_a^x K(x,s) f(s)ds - \int_a^b [\varphi_3(x)\psi_3(s) + \varphi_4(x)\psi_4(s)] f(s)ds.$$

Разобьем второй интеграл на два (по промежутку $[a,x]$ и по промежутку $[x,b]$) и объединим первую его часть с первым интегралом

$$y(x) = \int_a^x [K(x,s) - \varphi_3(x)\psi_3(s) - \varphi_4(x)\psi_4(s)] f(s)ds -$$

$$-\int_x^b [\varphi_3(x)\psi_3(s) + \varphi_4(x)\psi_4(s)] f(s)ds. \qquad (2.3.11)$$

Обозначим через $G(x,s)$ функцию, которая при $s \in [a,x]$ и при $s \in [x,b]$ определяется формулами

$$G(x,s) = \begin{cases} K(x,s) - [\varphi_3(x)\psi_3(s) + \varphi_4(x)\psi_4(s)], & a \le s \le x \le b, \\ -[\varphi_3(x)\psi_3(s) + \varphi_4(x)\psi_4(s)], & a \le x \le s \le b. \end{cases} \qquad (2.3.12)$$

Тогда для решения $y(x)$ краевой задачи $(2.3.1) - (2.3.3)$ получим формулу (2.3.4), что доказывает существования функции Грина в виде (2.3.12).

Теорема 2.3.1 доказана.

Отметим, что формула (2.3.4) позволяет явно представить решение краевой задачи $(2.3.1) - (2.3.3)$ через правую часть $f(x)$ уравнения

(2.3.1), при этом функция Грина $G(x,s)$, стоящая множителем при $f(s)$ под знаком интеграла, от $f(x)$ никак не зависит.

Из формулы (2.3.12) вытекают основные свойства функции Грина $G(x,s)$. Из формулы (2.3.9) для функции Коши и из (2.3.12) видно, что функция Грина краевой задачи (2.3.1) – (2.3.3) строится из фундаментальной системы решений $\{\varphi_i(x)\}$ однородного уравнения (2.3.5), причём коэффициенты линейной комбинации зависят от переменой s, играющей роль параметра. Поэтому при $s=s_0$ функция $G(x,s_0)$ на каждом из промежутков $[a,s_0]$ и $[s_0,b]$ является решением однородного уравнения (2.3.5).

Из (2.3.12) видно также, что разница между верхней и нижней строчками в точности равна функции Коши $K(x,s)$, которая обладает свойствами 1) - 3). Отсюда

$$\frac{\partial^i G}{\partial x^i}(s+0,s)-\frac{\partial^i G}{\partial x^i}(s-0,s)=0 \qquad (i=0,1,2), \tag{2.3.13}$$

а для третьей квазипроизводной

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)(s+0,s)-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)(s-0,s)=1. \tag{2.3.14}$$

Отметим, что эти свойства одни и те же для всех функций Грина, вне зависимости от того, какую краевую задачу мы рассматриваем. От краевой задачи зависят функции $\psi_3(s)$ и $\psi_4(s)$, в вычислении которых задействованы краевые условия (2.3.2) и (2.3.3). Определим связь этих краевых условий с функцией Грина $G(x,s)$.

Дифференцируя равенство (2.3.11) по правилу дифференцирования по параметру интеграла с параметром и в пределах интеграла и под знаком интеграла, получим для $i=1,2$, что

$$y^{(i)}(x)=\left\{\left[\frac{\partial^{i-1}K(x,s)}{\partial x^{i-1}}-\varphi_3{}^{(i-1)}(x)\psi_3(s)-\varphi_4{}^{(i-1)}(x)\psi_4(s)\right]f(s)\right\}_{x=s}+$$

$$+\int_a^x \left[\frac{\partial^i K(x,s)}{\partial x^i} - {\varphi_3}^{(i)}(x)\psi_3(s) - {\varphi_4}^{(i)}(x)\psi_4(s)\right] f(s)ds +$$

$$+\left\{\left[{\varphi_3}^{(i-1)}(x)\psi_3(s) + {\varphi_4}^{(i-1)}(x)\psi_4(s)\right] f(s)\right\}_{x=s} -$$

$$-\int_x^b \left[\, {\varphi_3}^{(i)}(x)\psi_3(s) - {\varphi_4}^{(i)}(x)\psi_4(s)\right] f(s)ds =$$

$$=\int_a^x \left[\frac{\partial^i K(x,s)}{\partial x^i} - {\varphi_3}^{(i)}(x)\psi_3(s) - {\varphi_4}^{(i)}(x)\psi_4(s)\right] f(s)ds -$$

$$-\int_x^b \left[\, {\varphi_3}^{(i)}(x)\psi_3(s) - {\varphi_4}^{(i)}(x)\psi_4(s)\right] f(s)ds =$$

$$= \int_a^x \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds - \int_x^b \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds = \int_a^b \frac{\partial^i G(x,s)}{\partial x^i} f(s)ds.$$

Аналогично, для третьей квазипроизводной

$$(py'')'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left[p\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}\right] f(s)ds.$$

Отсюда, для функционалов $l_j(\cdot)$ видов (2.3.2) и (2.3.3) получаем

$$l_j(y) = \int_a^b l_j\big(G(\cdot,s)\big) f(s)ds \qquad (i = 1,2,3,4),$$

что возможно, если $l_j\big(G(\cdot,s)\big) = 0$ при $i = 1,2,3,4$.

Таким образом, мы установили

Теорема 2.3.2. *Для невырожденной краевой задачи* (2.3.1) – (2.3.3) *существует функция Грина, обладающая свойствами*:

1) *при каждом фиксированном* $s = s_0 \in [a,b]$ *функция* $g(x) = G(x,s_0)$ *является решением однородного уравнения* (2.3.5) *на каждом из промежутков* $[a,s_0]$ *и* $[s_0,b]$;

2) $g(x)$ *удовлетворяет краевым условиям* (2.3.2) *и* (2.3.3);

3) *при* $x = s$ *выполняются условия* (2.3.13) *и* (2.3.14).

Отметим, что перечисленные в теореме 2.3.2 свойства 1) - 3) могут однозначно определять функцию Грина краевой задачи. Другими словами, справедливо утверждение

Теорема 2.3.3. *Пусть коэффициенты краевой задачи* $(2.3.1)-(2.3.3)$ *обладают свойством знакосогласованности, причём при* $q(x) \equiv 0$ $\big(x \in (a,b)\big)$ *коэффициенты граничных условий удовлетворяют условию: при* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *выполняется* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$*, а при* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ *имеет место* $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$.. *Тогда функция, удовлетворяющая условиям 1) - 3) теоремы 2.3.2, существует и может быть определена единственным образом.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.2.2 из § 2 настоящей главы.

Из теоремы 2.3.3 следует, что функцию Грина $G(x,s)$ краевой задачи $(2.3.1)-(2.3.3)$ можно определить непосредственно, исходя только из трёх условий, перечисленных в теореме 2.3.2.

Результаты данного параграфа опубликованы в работах [38], [39].

§4. Функция Грина одной нестандартной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения вида $(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x)$

В настоящем параграфе изучается вопрос о существовании функции Грина нестандартной краевой задачи, рассмотренной в §4 главы I. Выписывается явная формула для этой функции и определяются основные её свойства.

Пусть (b_1,b_2)- интервал числовой оси R^1 и $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{m-1}\}$- некоторая упорядоченная совокупность точек из этого интервала. Обозначим $\gamma_i=(a_{i-1},a_i)$ $(i=1,2,\dots,m;\ a_0=b_1, a_m=b_2)$ и $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i$. Рассмотрим на (b_1,b_2) следующую краевую задачу: на Γ задано дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \qquad (x \in \Gamma), \qquad (2.4.1)$$

в точках a_i множества A заданы условия связи

$$y(a_i - 0) = y(a_i + 0), \qquad y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0 \qquad (2.4.2)$$

$$D_3 y(a_i - 0) - D_3 y(a_i + 0) - \chi(a_i)y(a_i) = 0 \quad (a_i \in A), \qquad (2.4.3)$$

а в граничных точках b_1, b_2- краевые условия типа Штурма

$$\alpha_0 y(b_1) + \alpha_3 D_3 y(b_1) = 0, \qquad \beta_0 y(b_2) - \beta_3 D_3 y(b_2) = 0, \qquad (2.4.4)$$

$$\alpha_1 y'(b_1) - \alpha_2 y''(b_1) = 0, \qquad \beta_1 y'(b_2) + \beta_2 y''(b_2) = 0, \qquad (2.4.5)$$

где через $D_3 y(\cdot)$ обозначена третья квазипроизводная $[(py'')' - qy'](\cdot)$.

В §4 главы I был изучен вопрос о невырожденности краевой задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$. Предполагая краевую задачу невырожденной, изучим вопрос о функции Грина этой краевой задачи. Отметем, что аналогичная задача для случая общего геометрического графа была рассмотрена ранее, в работах [11], [34], [35]. В настоящей работе уравнение $(2.4.1)$ рассматривается на одномерном графе Г при граничных условиях более общего вида.

Как известно [18], функция Грина краевой задачи на отрезке обычно определяется при помощи набора аксиом, которые однозначно определяют эту функцию. Однако такой подход едва реализуем к описанию функции Грина краевой задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$, поскольку наличие множеств узловых точек A делает неясной аксиоматику. Здесь оказывается более эффективным иной подход-конструктивный, примененный в предыдущих параграфах.

Как и ранее, относительно коэффициентов уравнения $(2.4.1)$ и условий $(2.4.2) - (2.4.5)$ предполагается, что они обладают свойством знакосогласованности:

- $p(x) \in C^{(2)}(\Gamma),\ q(x) \in C^{(1)}(\Gamma),\ f(x) \in C(\Gamma)$; причём $\inf\limits_{\Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ при $x \in \Gamma$;
- $q(a_i) \geq 0,\ \ \chi(a_i) \geq 0$ при $a_i \in A$;

- $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ $(i = 0,1,2,3)$, причём $\alpha_i + \alpha_j > 0$, $\beta_i + \beta_j > 0$ при $i + j = 3$.

Рассмотрим на множестве Г систему уравнений

$$(p_i y_i'')'' - (q_i y_i')' = f_i\,, \qquad (2.4.6)$$

которая представляет собой набор скалярных дифференциальных уравнений на соответствующих отрезках $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = 1,2,\dots,m)$, считая теперь все условия $(2.4.2) - (2.4.5)$ краевыми. Запишем все эти условия в виде набора равенств

$$l_i(y) = 0 \qquad (2.4.7)$$

при произвольной нумерации функционалов l_i. На каждом отрезке γ_i система $(2.4.6) - (2.4.7)$ представляет собой обычную двухточечную краевую задачу, которая является, по предположению, невырожденной. Её функцию Грина (существующую в силу теоремы 2.3.1) обозначим через $Q_i(x,s)$ $(i = 1,2,\dots,m)$.

Определение 2.3. Функцию $K(x,s)$, непрерывную по совокупности переменных на каждом прямоугольнике $\bar{\gamma}_{ij} = \bar{\gamma}_i \times \bar{\gamma}_j$ $(i,j = 1,2,\dots,m)$ назовём *функцией Коши* однородного уравнения

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = 0 \qquad (x \in \Gamma), \qquad (2.4.8)$$

если для любой непрерывной на Г функции $f(x)$, функция

$$y(x) = \int\limits_{\Gamma} K(x,s) f(x) ds \qquad (2.4.9)$$

удовлетворяет на Г уравнению (2.4.1).

Лемма 2.4.1. *Функция* $K(x,s)$, *определяемая формулой*

$$K(x,s) = \begin{cases} Q_i(x,s), & \text{при} \quad (x,s) \in \gamma_{ii}, \\ 0, & \text{при} \quad (x,s) \in \gamma_{ij}, i \neq j, \end{cases} \qquad (2.4.10)$$

является функцией Коши уравнения (2.4.8).

Доказательство. Каждая из функций $Q_i(x,s)$ $(i = 1,2,\dots,m)$, являясь функцией Грина соответствующей скалярной задачи на γ_i, непрерывна по совокупности переменных на квадрате $\bar{\gamma}_{ii}$. Поэтому, в силу формулы

(2.4.10), функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности переменных на каждом прямоугольнике $\bar{\gamma}_{ii}$.

Покажем теперь, что для любой непрерывной на Г функции $f(x)$, функция $y(x)$, определяемая формулой (2.4.9), удовлетворяет на Г уравнению (2.4.8).

Зафиксируем некоторое $i = i_0$. При $(x,s) \in \gamma_{i_0 i_0}$ функция $K(x,s)$ совпадает с функцией Грина $Q_{i_0}(x,s)$ скалярной задачи на γ_0, а значит на γ_{i_0} формула (2.4.9) определяет решение $y_{i_0}(x)$. Если же $(x,s) \bar{\in} \gamma_{i_0 i_0}$, то $K(x,s) \equiv 0$, поэтому на всех остальных отрезках γ_i $(i \neq i_0)$ положим $y_{i_0}(x) \equiv 0$. Теперь функция y: $\Gamma \to R^1$ такая, что

$$y(x) = y_i(x), \quad (x \in \gamma_i\,;\ i = 1,2,\dots,m)$$

является решением уравнения (2.4.6) на Г. Лемма 2.4.1 доказана.

Лемма 2.4.2. *Функции* $\psi_j(s) = l_j\big(K(\cdot,s)\big)$ $(j = 1,2,\dots,k)$ *равномерно непрерывны на каждом отрезке* γ_i $(i = 1,2,\dots,m)$.

Доказательство. Пусть функционал l_j соответствует одному из условий непрерывности в какой-нибудь внутренней точек $a_i \in A$: $l_j(y) = y(a_i + 0) - y(a_i - 0)$. В этом случае $\psi_j(s) = l_j\big(K(\cdot,s)\big)$ определяется равенством

$$\psi_j(s) = \lim_{x\to a_i+0} K(x,s) - \lim_{x\to a_i-0} K(x,s).$$

В силу представления (2.4.10), если s не принадлежит ни одному из отрезков γ_i и γ_{i+1}, то $\psi_j(s) \equiv 0$. Если же s принадлежит либо γ_i, либо γ_{i+1}, то либо

$$\lim_{x\to a_i-0} K(x,s) = \lim_{x\to a_i} Q_i(x,s), \ \text{ либо } \ \lim_{x\to a_i+0} K(x,s) = \lim_{x\to a_i} Q_{i+1}(x,s).$$

В силу совокупной непрерывности функции Грина $Q_i(x,s)$ $\big(Q_{i+1}(x,s)\big)$ скалярной задачи на квадрате $\bar{\gamma}_{ii}$ $\big(\bar{\gamma}_{i+1,i+1}\big)$ эти пределы конечны. Значит и функция $\psi_j(s)$ непрерывна на $\bar{\gamma}_i$ $(\bar{\gamma}_{i+1})$ и имеет конечный предел при $s \to a_i - 0$, или, соответственно, при $s \to a_i + 0$.

Пусть функционал l_j соответствует другому из условий (2.4.2) в какой-нибудь внутренней точке $a_i \in A$, например,

$$l_i(y) = y''(a_i - 0).$$

В этом случае $\psi_j(s) = \lim_{x \to a_i - 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,s)$. В силу (2.4.10), если $s \overline{\in} \gamma_i$, то $\psi_j(s) \equiv 0$, а если $s \in \gamma_i$, то

$$\lim_{x \to a_i - 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,s) = \lim_{x \to a_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q_i(x,s).$$

Так как $Q_i(x,s)$- функция Грина скалярной задачи на отрезке γ_i, то функция $\frac{\partial^2}{\partial x^2} Q_i(x,s)$ является непрерывной по совокупности переменных на квадрате $\bar{\gamma}_{ii}$, следовательно, функция $\psi_j(s)$ непрерывна на γ_i и имеет конечный предел при $s \to a_i - 0$.

Аналогично доказывается непрерывность $\psi_j(s)$ на γ_{i+1} при $l_i(y) = y''(a_i + 0)$.

Пусть теперь функционал l_j соответствует одному из условий связи (2.4.3) в какой-нибудь точке $a_i \in A$, т.е.

$$l_j(y) = D_3 y(a_i - 0) - D_3 y(a_i + 0) - \chi(a_i) y(a_i).$$

Соответствующая функция $\psi_j(s)$ в этом случае имеет вид

$$\psi_j(s) = \lim_{x \to a_i - 0} D_3 K(x,s) - \lim_{x \to a_i + 0} D_3 K(x,s) - \chi(a_i) \lim_{x \to a_i} y(a_i).$$

Если s не принадлежит ни γ_i ни γ_{i+1}, то $\psi_j(s) = 0$, а если s принадлежит либо γ_i, либо γ_{i+1}, то либо

$$\psi_j(s) = \lim_{x \to a_i} D_3 Q_i(x,s) - \chi(a_i) \lim_{x \to a_i} Q_i(x,s), \tag{2.4.11}$$

либо

$$\psi_j(s) = \lim_{x \to a_i} D_3 Q_{i+1}(x,s) - \chi(a_i) \lim_{x \to a_i} Q_{i+1}(x,s). \tag{2.4.12}$$

Так как $Q_i(x,s)$ $\left(Q_{i+1}(x,s)\right)$ является функцией Грина скалярной задачи на отрезке γ_i (γ_{i+1}), то она непрерывна по совокупности переменных на всем квадрате $\bar{\gamma}_{ii}$ (соответственно, $\bar{\gamma}_{i+1,i+1}$) в месте с производными до второго порядка по x. Кроме того, функцию $D_3 Q_i(x,s)$ $\left(D_3 Q_{i+1}(x,s)\right)$

можно доопределить на диагонали $x = s$ так, что на соответствующих замкнутых треугольниках она будет непрерывной по совокупности переменных. Поэтому существуют конечные пределы (2.4.11) и (2.4.12), следовательно, функции $\psi_j(s)$ непрерывны на γ_i и γ_{i+1} и имеют конечные пределы при $s \to a_i$.

Пусть, наконец, функционал l_j соответствует одному из краевых условий (2.4.4) в граничной точке b_1 и b_2, например,

$$l_j(y) = \alpha_0 y(b_1) + \alpha_3 D_3 y(b_1)$$

Функция $\psi_j(s)$ в этом случае определяется равенством

$$\psi_j(s) = \alpha_0 \lim_{x \to b_1 + 0} K(x,s) + \alpha_3 \lim_{x \to b_1 + 0} D_3 K(x,s).$$

Если $s \overline{\in} \gamma_1$, то $\psi_j(s) = 0$, а, если $s \in \gamma_1$, то

$$\psi_j(s) = \alpha_0 \lim_{x \to b_1 + 0} Q_1(x,s) + \alpha_3 \lim_{x \to b_1 + 0} D_3 Q_1(x,s),$$

где $Q_1(x,s)$- функция Грина скалярной задачи на отрезке γ_1. Отсюда следует, что функция $\psi_j(s)$ является непрерывной на γ_1и имеет конечный предел при $s \to b_1$.

Аналогично, если функционал l_j соответствует другому из краевых условий в точке b_1, например,

$$l_j(y) = \alpha_1 y'(b_1) - \alpha_2 y''(b_1),$$

то $\psi_j(s) = \alpha_1 \lim_{x \to b_1 + 0} \frac{\partial}{\partial x} K(x,s) - \alpha_2 \lim_{x \to b_1 + 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,s)$. Отсюда, если $s \overline{\in} \gamma_1$, то $\psi_j(s) = 0$, а если $s \in \gamma_1$, то

$$\psi_j(s) = \alpha_1 \lim_{x \to b_1 + 0} \frac{\partial}{\partial x} Q_1(x,s) - \alpha_2 \lim_{x \to b_1 + 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q_1(x,s).$$

Так как $Q_1(x,s)$ является функцией Грина скалярной задачи на отрезке $\gamma_1 = (b_1, \alpha_1)$, то $\frac{\partial}{\partial x} Q_1(x,s)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2} Q_1(x,s)$ являются непрерывными по совокупности переменных на квадрате γ_{11}. Поэтому функция $\psi_j(x)$ непрерывна на γ_1 и имеет конечный предел при $x \to b_1$.

Лемма 2.4.2 полностью доказана.

Рассмотрим теперь на множестве $(b_1, b_2) = \Gamma \cup A$ краевую задачу $(2.4.1) - (2.4.5)$.

Определение 2.4. *Функцией Грина краевой задачи* $(2.4.1) - (2.4.5)$ на множестве (b_1, b_2) называется функция двух переменных $G(x,s)$, заданная на $[b_1, b_2] \times \Gamma$ и такая, что для каждой $f(x) \in C(\Gamma)$ решение $y(x)$ задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$ может быть представлено в виде

$$y(x) = \int_{\Gamma} G(x,s) f(s) ds. \qquad (2.4.13)$$

Пусть $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{4m}$- фундаментальная система решений однородного уравнения (2.4.8), которая получена из фундаментальных систем скалярных уравнений

$$(p_i(x) y_i'')'' - (q_i(x) y_i')' = 0 \qquad (x \in \gamma_i),$$

на рёбрах γ_i $(i = 1,2,\dots,m)$ склеиванием в точках $a_i \in A$ условиями (2.4.2) и (2.4.3). Функцию Грина $G(x,s)$ краевой задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$ будем искать в виде

$$G(x,s) = K(x,s) + \sum_{j=1}^{k} c_j(s) \varphi_j(x) \qquad (k = 4m), \qquad (2.4.14)$$

где $K(x,s)$- функция Коши однородного уравнения (2.4.8). При подстановке $G(x,s)$ по переменной x в условиях (2.4.2) и (2.4.3), для $s \neq a_i$ $(a_i \in A)$, получим систему уравнений относительно $c_j(s)$ с ненулевым определителем (в силу невырожденности задачи). Выразив $c_j(s)$ по формуле Крамера, и, подставив в (2.4.14), получим следующую формулу для функции Грина

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} K(x,s) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_k(x) \\ l_1(K(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \cdots & l_1(\varphi_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_k(K(\cdot,s)) & l_k(\varphi_1) & \cdots & l_k(\varphi_k) \end{vmatrix} \qquad (2.4.15)$$

где $\Delta = det\|l_i(\varphi_j)\|$- есть определитель системы.

В силу нерырожденности краевой задачи (2.4.1) – (2.4.5), мы можем выбрать такую фундаментальную систему решений $\{\varphi_j(x)\}$, для которой $l_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij}- символ Кронекера. Поэтому из (2.4.15) мы имеем

$$G(x,s) = K(x,s) - \sum_{j=1}^{k} l_j\big(K(\cdot,s)\big)\varphi_j(x)\ . \qquad (2.4.16)$$

Теорема 2.4.1. *Пусть коэффициенты краевой задача* (2.4.1) – (2.4.5) *обладают свойством знакосогласованности, причём* $q(x) \not\equiv 0$ *при* $x \in \Gamma$ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$. *Тогда функция* $G(x,s)$, *определенная равенством* (2.4.16), *является функцией Грина краевой задачи* (2.4.1) – (2.4.5), *которая является единственной в классе непрерывных на* $[b_1, b_2] \times \Gamma$ *функций.*

Доказательство. В силу лемм 2.4.1 и 2.4.2 слагаемые, входящие в формулу (2.4.16), непрерывны на каждом прямоугольнике γ_{ij} $(i,j = 1,2,\dots,m)$. Покажем, что функцию $G(x,s)$ можно доопределить до непрерывной на $[b_1, b_2] \times \Gamma$ функции. Для этого следует показать, что для любой точки $a_i \in A$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to a_i-0} G(x,s) = \lim_{x\to a_i+0} G(x,s) \quad (i = 1,2,\dots,m-1). \qquad (2.4.17)$$

Применим по переменной x к обеим частям равенства (2.4.17) соответствующий функционал l_j, который порождает условие непрерывности в точках $a_i \in A$.

$$\lim_{x\to a_i-0} G(x,s) - \lim_{x\to a_i+0} G(x,s) = l_j\big(G(\cdot,s)\big) =$$

$$= l_j\big(K(\cdot,s)\big) - \sum_{i=1}^{k} l_i\big(K(\cdot,s)\big) l_j\big(\varphi_i(\cdot)\big).$$

Так как в силу выбора фундаментальной системы решений $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ $l_j(\varphi_i) = \delta_{ij}$, то в группе слагаемых под знаком суммы ненулевым будет лишь одно, получаемое при $i = j$. Поэтому $l_j\big(G(\cdot,s)\big) = l_j\big(K(\cdot,s)\big) - -l_j\big(K(\cdot,s)\big) = 0$, что и означает (2.4.17).

Покажем теперь, что при каждом $s \in \Gamma$ функция $G(x,s)$ удовлетворяет по x на множестве A условиям (2.4.2) и (2.4.3), а в точках b_1, b_2-граничным условиям (2.4.4). и (2.4.5).

Из равенства (2.4.16) при каждом $j = 1,2, \dots, k$ имеем

$$l_j\big(G(x,s)\big) = l_j\big(K(x,s)\big) - \sum_{i=1}^{k} l_i\big(K(x,s)\big) l_j\big(\varphi_i(x)\big).$$

В силу выбора фундаментальной системы решений имеем $l_j(\varphi_i) = \delta_{ij}$. Поэтому в группе слагаемых под знаком суммы имеется одно ненулевое, соответствующее индексу $i = j$. Следовательно,

$$l_j\big(G(x,s)\big) = l_j\big(K(x,s)\big) - l_j\big(K(x,s)\big) = 0.$$

Значит, функция $y(x)$, определяемая формулой (2.4.13), является решением краевой задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$. Это, в силу определения 2.4, означает, что функция $G(x,s)$ является функцией Грина краевой задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$.

Покажем единственность функции Грина $G(x,s)$. Пусть существуют две функции Грина $G_1(x,s)$ и $G_2(x,s)$ такие, что решение $y(x)$ задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$ может быть записано так

$$y(x) = \int\limits_{\Gamma} G_1(x,s) f(s) ds, \qquad y(x) = \int\limits_{\Gamma} G_2(x,s) f(s) ds$$

для любой $f(\cdot) \in C(\Gamma)$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} [G_1(x,s) - G_2(x,s)] f(s) ds = 0,$$

т.е. интегральный оператор с непрерывным на $[b_1, b_2] \times \Gamma$ ядром, переводит любую непрерывную на Γ функцию $f(\cdot)$ в тождественный нуль. Поэтому $G_1(x,s) - G_2(x,s) \equiv 0$ $\big((x,s) \in [b_1, b_2] \times \Gamma\big)$, значит $G_1(x,s) \equiv G_2(x,s)$ на $[b_1, b_2] \times \Gamma$.

Теорема 2.4.1 доказана.

Отметим, что утверждение теоремы 2.4.1 для случая общего геометрического графа Г было доказано ранее в работах [1], [21].

В процессе построения функции Грина в виде $(2.4.16)$ мы установили, что необходимым и достаточным условием её существования является невырожденность соответствующей краевой задачи. Невырожденность краевой задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$ следует из соответствующих теорем §4 главы I. Например, невырожденность краевой задачи $(2.4.1) - (2.4.5)$ в условиях теоремы 2.4.1 обеспечивается условиями знакосогласованности коэффициентов при $q(x) \not\equiv 0$ на Г и $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ (см. теорему 1.4.2 главы I).

Если в условиях теоремы 2.4.1 допустить, что коэффициент $q(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$, то в силу теоремы 1.4.3 главы I, соответствующая краевая задача является невырожденной, если в условиях связи (2.4.3) коэффициенты $q_i(a_i) \neq 0$ для всех $a_i \in A$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ и $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, либо, если $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$.

Если же $q_i(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$, то невырожденность соответствующей краевой задачи обеспечивается условиями $\chi_i(a_i) \neq 0$ $(a_i \in A)$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ и $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, либо, если $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$. (см. теорему 1.4.4 главы I). Поэтому справедливо утверждение

Теорема 2.4.2. *Пусть коэффициенты краевой задачи* $(2.4.1) - (2.4.5)$ *обладает свойством знакосогласованости и* $q(x) \equiv 0$ *при* $x \in \Gamma$. *Тогда, если в условиях связи* $(2.4.3)$ *коэффициенты* $q(a_i)$ *и* $\chi(a_i)$ *удовлетворяют условиям* $q(a_i) + \chi(a_i) > 0$ *для всех* $a_i \in A$, $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, либо, если $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$, *то существует единственная функция Грина* $G(x,s)$ *соответствующей краевой задачи, которая является непрерывной по совокупности переменных на* $[b_1, b_2] \times \Gamma$ *и, которая может быть представлена в виде* $(2.4.16)$.

Если в условиях теоремы 1.4.4 главы I все коэффициенты $\chi(a_i) = 0$ $(a_i \in A)$ и $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то в силу замечания к этой теореме, соответствующая краевая задача является вырожденной и размерность пространства её решений равна $m-1$. Если же $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, то рассматриваемая краевая задача является невырожденной лишь в случае, когда $m \leq 3$. Отсюда следует

Теорема 2.4.3. *Пусть коэффициенты краевой задачи* $(2.4.1)-(2.4.5)$ *обладают свойством знакосогласованости, причём* $q(x) \equiv 0$ *при* $x \in \Gamma, q(a_i) = \chi(a_i) = 0$ *для всех* $a_i \in A$. *Тогда для существования функции Грина соответствующей краевой задачи достаточно, чтобы было* $m \leq 3$ *и, чтобы в граничных условиях* $(2.4.5)$*, коэффициенты удовлетворяли условию* $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ *и* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$.

С помощью представления $(2.4.14)$ для функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи $(2.4.1)-(2.4.5)$ на множестве Γ можно получить все её основные свойства, аналогичные свойствам функции Грина скалярной задачи (см. §3 настоящей главы).

Лемма 2.4.3. *Пусть* $G(x,s)$ *функции Грина краевой задачи* $(2.4.1)-(2.4.5)$ *на множестве* (b_1, b_2). *Тогда при каждом фиксированном* $s = s_0 \in \Gamma$*, функция* $g(x) = G(x, s_0)$ *удовлетворяет*

1) *на каждом интервале* γ_i *однородному уравнению* $(2.4.8)$ *при* $x \neq s_0$*;*
2) *условиям связи* $(2.4.2), (2.4.3)$ *в точках* $a_i \in A$*;*
3) *краевым условиям* $(2.4.4), (2.4.5)$ *в граничных точках* b_1, b_2*;*
4) *при* $x = s_0$ *условию*

$$D_3 g(s_0 - 0) - D_3 g(s_0 + 0) = -1.$$

Доказательство. Зафиксируем $s = s_0 \in \Gamma$. Тогда функция

$$g(x) = G(x, s_0) = K(x, s_0) - \sum_{i=1}^{k} l_i\big(K(\cdot, s_0)\big)\varphi_i(x),$$

очевидно, удовлетворяет при $x \neq s_0$ на каждом интервале γ_i однородному уравнению $(2.4.8)$, так как $K(x,s)$- функция Коши, а $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$- фундаментальная система решений уравнения $(2.4.8)$.

Пусть l_j- функционал, порождающий одно из условий, перечисленных в свойствах 2) и 3). Применим его к функции $g(x)$:

$$l_j(g) = l_j\big(G(\cdot, s_0)\big) = l_j\big(K(\cdot, s_0)\big) - \sum_{i=1}^{k} l_i\big(K(\cdot, s_0)\big) l_j(\varphi_i) = 0,$$

так как $l_j(\varphi_i) = \delta_{ij}$.

В точках $(x, s) \in \gamma_{ii}$ функция $G(x, s)$ совпадает с функцией Грина $G_i(x, s)$ соответствующей скалярной задачи на отрезке γ_i. Поэтому свойство 4) леммы означает скачёк третьей квазипроизводной по переменной x функции $G_i(x, s)$ в точках диагонали $x = s$.

Лемма 2.4.3 доказана.

Установим ещё одно свойство функции Грина $G(x, s)$, порождаемое спецификой задачи.

Пусть a_i- некоторая точка множества A. Функцию

$$g^i(x) = \lim_{s \to a_i - 0} G(x, s)$$

называют *предельной срезкой* [11] функции Грина.

Лемма 2.4.4. *Предельная срезка* $g^i(x)$ *функции Грина* $G(x, s)$ *краевой задачи* $(2.4.1) - (2.4.5)$ *обладает свойствами:*

1) при $x \neq a_i$ *свойствами 1) - 3) леммы 2.4.3;*

2) при $x = a_i$ *имеет место равенство*

$$D_3 g^i(a_i - 0) - D_3 g^i(a_i + 0) = \chi(a_i) g^i(a_i) - 1. \qquad (2.4.18)$$

Доказательство Пользуясь определением функции Коши, и представлением (2.4.16), получаем

$$g^i(x) = \lim_{s \to a_i - 0} G(x, s) = -\sum_{j=1}^{k} \psi_j^i \varphi_j(x) \ + \begin{cases} \lim\limits_{s \to a_i - 0} Q_i(x, s) & x \in \gamma_i, \\ 0, & x \,\overline{\in}\, \gamma_i, \end{cases}$$

где $\psi_j^i = \lim\limits_{s \to a_i - 0} l_j\big(K(\cdot, s)\big)$. Так как $\{\varphi_j(x)\}$- фундаментальная система решений однородного уравнения (2.4.8), а $Q_i(x, s)$- функция Грина соответствующей скалярной задачи на отрезке γ_i, то функция $g^i(x)$, очевидно, удовлетворяет уравнению (2.4.8) на Г.

Пусть $x \neq a_i$ и функционал l_μ соответствует одному из условий непрерывности, гладкости или связи в точках множества A, либо граничным условиям в граничных точках b_1, b_2. Применим его к функции $g^i(x)$:

$$l_\mu(g^i) = l_\mu\left(\lim_{s \to a_i - 0} G(x,s)\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{k} \psi_j^i l_\mu(\varphi_j) \ + \begin{cases} l_\mu\left(\lim_{s \to a_i - 0} Q_i(x,s)\right), & x \in \gamma_i, \\ 0, & x \overline{\in} \gamma_i, \end{cases}$$

В силу выбора фундаментальной системы решений $\{\varphi_j(x)\}$, в группе слагаемых под знаком суммы остаётся лишь одно, получаемое при $j = \mu$. Поэтому для завершенная доказательства свойства 1) достаточно показать, что при $x \neq a_i$ для любого из перечисленных выше функционалов l_μ было справедливо равенство

$$\psi_\mu^i = \begin{cases} l_\mu\left(\lim_{s \to a_i - 0} Q_i(x,s)\right), & x \in \gamma_i, \\ 0, & x \overline{\in} \gamma_i. \end{cases} \tag{2.4.19}$$

Итак, пусть $x \neq a_i$ и функционал l_μ порождает, например, условие гладкости (2.4.3) в точке $a_* \in A$:

$$l_\mu(y) = D_3 y(a_* - 0) - D_3 y(a_* + 0) - \chi(a_*) y(a_*).$$

В левой части равенства (2.4.19) имеем

$$\psi_\mu^i = \lim_{s \to a_i - 0} l_\mu\big(K(\cdot, s)\big) = \lim_{s \to a_i - 0} D_3 K(a_* - 0, s) - \lim_{s \to a_i - 0} D_3 K(a_* + 0, s) -$$

$$-\chi(a_*) \lim_{s \to a_i - 0} K(a_*, s).$$

Если $a_* \neq a_i$, то $K(a_*, s) \equiv 0$ для всех $x \in \gamma_i$. Если же $a_* = a_i$, то $K(a_*, s) = Q_i(a_*, s)$. Поэтому

$$\psi_\mu^i = \lim_{s \to a_i - 0} D_3 Q_i(a_i - 0, s) - \lim_{s \to a_i - 0} D_3 Q_i(a_i + 0, s) - \chi(a_i) \lim_{s \to a_i - 0} Q_i(a_i, s).$$

Отсюда, в силу совокупной непрерывности функции Грина $Q_i(x,s)$ скалярной задачи на $\bar{\gamma}_{ii}$, а также в силу леммы 2.4.2 имеем

$$\psi_j^i = D_3\left(\lim_{s\to a_i-0} Q_i(a_i-0,s)\right) - D_3\left(\lim_{s\to a_i-0} Q_i(a_i+0,s)\right) -$$

$$-\chi(a_i)\lim_{s\to a_i-0} Q_i(a_i,s),$$

что и означает равенство (2.4.19), а значит и выполнение условия 1) леммы.

Справедливость условия 1) в случаях, когда функционал l_μ соответствует другим условиям $(2.4.2)-(2.4.5)$, показывается аналогично.

Установим свойство 2) для точки $a_i \in A$. Пусть γ_i - примыкающий к a_i промежуток и $s \in \gamma_i$. Обозначим через $G_i(x,s)$ сужение по переменной x функции Грина $G(x,s)$ на промежуток γ_i. Тогда в силу свойств 2) леммы 2.4.3 имеем

$$D_3G_i(a_i-0,s) - D_3G_i(a_i+0,s) - \chi(a_i)G_i(a_i,s) = 0 \qquad (2.4.20)$$

С другой страны, в силу свойства 4) леммы 2.4.3 имеет место равенство

$$D_3G_i(s-0,s) - D_3G_i(s+0,s) = -1, \qquad (2.4.21)$$

где через $u'(s\pm 0,s)$ обозначены производные по x функции $u_i(x,s)$, посчитанные в точке $x=s$ при ориентации γ_i в противоположных от s направлениях.

Третья квазипроизводная $D_3G(x,s)$ непрерывна по совокупности переменных на каждом из замкнутых треугольников, на которые разбивает квадрат $\bar{\gamma}_{ii}$ прямая $x=s$. Поэтому

$$\lim_{s\to a_i-0} D_3G_i(s-0,s) = D_3G_i(a_i-0,a_i),$$

$$\lim_{s\to a_i-0} D_3G_i(s+0,s) = \lim_{s\to a_i-0} D_3G_i(a_i-0,s).$$

Отсюда, в силу (2.4.21) получаем

$$\lim_{s\to a_i-0} D_3G_i(a_i-0,s) = \lim_{s\to a_i-0} D_3G_i(s+0,s) = 1 + \lim_{s\to a_i-0} D_3G_i(s-0,s) =$$

$$= 1 + D_3G_i(a_i-0,a_i),$$

$$\lim_{s\to a_i-0} D_3G_i(a_i+0,s) = D_3G_i(a_i+0,a_i).$$

Переходя теперь к пределу в равенстве $(2.4.20)$ при $s \to a_i - 0$, имеем с учётом последних равенств

$$1 + D_3G_i(a_i - 0, a_i) - D_3G_i(a_i + 0, a_i) - \chi(a_i)G_i(a_i, a_i) = 0.$$

Отсюда, если обозначить $g^i(x) = \lim\limits_{s\to a_i-0} G_i(x,s)$, то

$$D_3g^i(a_i - 0) - D_3g^i(a_i + 0) - \chi(a_i)g^i(a_i) = -1,$$

т.е. имеет место равенство $(2.4.18)$.

Лемма 2.4.4 доказана.

Таким образом, из лемм 2.4.3 и 2.4.4 вытекает

Теорема 2.4.4 *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1. Тогда функция Грина* $G(x,s)$ *краевой задачи* $(2.4.1) - (2.4.5)$ *обладает следующими свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s = s_0 \in \Gamma$ *функция* $g(x) = G(x, s_0)$ *удовлетворяет однородному уравнению* $(2.4.8)$ *на* $[b_1, b_2]\backslash\{s_0\}$, *условиям непрерывности, гладкости и связи* $(2.4.2), (2.4.3)$ *в точках* $a_i \in A$, *краевым условиям* $(2.4.4), (2.4.5)$ *на границах* b_1 *и* b_2, *а при* $x = s_0 \in \gamma_i$, *сумма третьих квазипроизводных* $D_3g(x)$ *в точке* $x = s_0$ *(посчитанных в обоих направлениях от* s_0*) равна 1;*

2) если $s_0 \in A$ *и* γ_i*- один из интервалов, примыкающих к* s_0, *то функция*

$$g^i(x) = \lim_{\substack{s\to s_0 \\ s\in\gamma_i}} G(x,s) \qquad (2.4.22)$$

при $x \neq s_0$ *удовлетворяет однородному уравнению* $(2.4.8)$ *на* $[b_1, b_2]\backslash\{s_0\}$, *краевым условиям* $(2.4.4), (2.4.5)$ *в точках* b_1 *и* b_2 *условиям* $(2.4.2), (2.4.3)$ *в точках* $a \in A$, $a \neq s_0$, *а в точке* $a = s_0$ *выполняется* $(2.4.2)$ *и вместо* $(2.4.3)$*- условие* $(2.4.18)$.

Отметим, что аналогичные утверждения были установлены ранее для дифференциальных уравнений на геометрическом графе; для дифференциального уравнения 2-го порядка в [11], а для дифференциального уравнения 4-го порядка при некоторых других краевых условиях в [34].

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент $q(x) \equiv 0$ $(x \in \Gamma)$. Для этого случая существование функции Грина $G(x, s)$ соответствующей краевой задачи обеспечивает теорема 2.4.2. Легко видеть, что для функции $G(x, s)$, в этом случае также остаются справедливыми утверждения лемм 2.4.3 и 2.4.4. Поэтому имеет место

Теорема 2.4.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.2. Тогда функция Грина* $G(x, s)$ *соответствующей краевой задачи обладают следующими свойствами:*

1) при каждом фиксированном $s = s_0 \in \Gamma$ *функция* $g(x) = G(x, s_0)$ *удовлетворяет однородному уравнению*

$$(p(x)y'')'' = 0 \qquad (2.4.23)$$

на $[b_1, b_2]\backslash\{s_0\}$, *условиям* $(2.4.2), (2.4.3)$ *в точках множества А, краевым условиям* $(2.4.4), (2.4.5)$ *в граничных точках* b_1,b_2 *при* $x \neq s_0$, *а при* $x = s_0 \in \Gamma$;

$$(py'')'(s_0 + 0) - (py'')'(s_0 - 0) = -1;$$

2) если $s_0 \in A$ *и* γ_i*- один из интервалов, примыкающая к* s_0, *то функция* $(2.4.22)$ *при* $x \neq s_0$ *удовлетворяет однородному уравнению* $(2.4.23)$ *на* $[b_1, b_2]\backslash\{s_0\}$, *условия* $(2.4.2), (2.4.3)$ *в точках множества* A*- краевым условиям* $(2.4.4), (2.4.5)$ *в граничных точках* b_1,b_2, *а в точке* $x = s_0$ *выполняется* $(2.4.2)$ *и, вместо* $(2.4.3)$ *- условие* $(2.4.18)$.

Отметим, что в условиях теоремы 2.4.2 предполагается, что коэффициенты $q(a_i) + \chi(a_i) > 0$ для всех $a_i \in A$ в условиях $(2.4.3)$. Если же $q(a_i) = \chi(a_i) = 0$ для всех $a_i \in A$, то, в силу теоремы 2.4.3, для соответствующей краевой задачи существует функция Грина только в том случае, когда $m \leq 3$ и, чтобы в граничных условиях $(2.4.5)$ коэффициенты $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ и α_0+$\beta_0 > 0$. Поэтому имеет место утверждение

Теорема 2.4.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.3, причём* $\chi(a_i) = 0$ *для всех* $a_i \in A$, *но* $m \leq 3$ *и в* $(2.4.5)$ *коэффициенты* $\alpha_1 \cdot \beta_1 > 0$ и $\alpha_0 + \beta_0 > 0$. *Тогда функция Грина соответствующей краевой задачи обладает свойствами 1) и 2) теоремы 2.4.5, причём для предельной срезки* $g^i(x)$ *в точке* $x = a$ *вместо* $(2.4.18)$ *выполняется*

$$D_3 g^i(a - 0) - D_3 g^i(a + 0) = -1.$$

Результаты данного параграфа опубликованы в работах [26], [39].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровских А.В., Мустафокулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети //Доклады Российской АН, 1995, т.345, №6. с.730-732.

2. Боровских А.В., Лазарев К.П. Математическая модель стержневой системы // Тезисы докладов школы “Современные проблемы механики, математик. физики”, Воронеж, 1994 - с.17.

3. Боровских А. В., Перов А. И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - Москва - Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2003, 540с

4. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. - М.: Гостехиздат, 1950.

5. Гантмахер Ф.Р. О несимметрических ядрах Келлога // Доклады. АН СССР, 1936,т.1., №10. с. 3-5.

6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962.

7. Dekoninck B., Nicaise S. The eigenvalue problem for networks of beams. Linear Algebra and its Applications. 2000 - v. 314. - P. 165-189.

8. Дерр В.Я. О спектре задачи с комбинированными краевыми условиями // Функционально - дифференциальные уравнения.: Межвузовский сб. научных трудов. Пермь, 1987, с. 105-112.

9. Калафати П.Д. О функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР, 1940. т. 26, №6, с. 535-539.

10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1965.

11. Карелина Н.Г., Покорный Ю.В. О функции Грина краевой задачи на графе // Дифференциальные уравнения., 1994. т. 30. №1. с. 41-47.

12. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи математических наук, 1971, 24: 4, с. 15-47.

13. Kellogg O. Interpolatio properties of orthogonal sets of solutions of differential equation // Anur. Y. math. 1918., N 40, p. 220-234.

14. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений - М.: ИЛ, 1958.

15. Коллатц Л. Задачи на собственные значения - М. : Наука, 1968

16. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа – М.: Наука, 1975.

17. Крейн М. Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук, 1948, т. 3, №1, с. 3-95.

18. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. - М.: Тостехизуит, 1933.

19. Левин А.Ю., Степанов Г.Д. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака // Сибирский математический журнал, 1976, т. 17, №3, с. 606-625; т. 17, №4, с. 813-830.

20. Мустафокулов Р. О корректности некоторых упругих задач на графе // Доклады. АН РТ, 1996, т. 39, № 9-10, с. 82-87.

21. Мустафокулов Р. О некоторых краевых задачах для одного класса дифференциальных уравнений четвёртого порядка на графе // Украинский математический журнал, 1996, т. 48, №4, с. 476-482.

22. Мустафокулов Р., Солиев С.К. Об одной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для уравнения 4-го порядка и её функция Грина

Материалы республиканской научно-практической конференции, посвященной 75-летию профессора Г. Собирова. Душанбе, 2011, с. 21-24.

23. Мустафокулов Р., Солиев С.К. Невырожденность краевой задачи типа Штурма для одного дифференциального уравнения 4-го порядка и её функция Грина // Вестник Таджикского национального университета. Научной журнал. Серия естественных наук, №1/2(81), Душанбе, 2012. с. 26-33.

24. Мустафокулов Р., Солиев С.К. Функция Грина импульсных задач Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева. Душанбе 2013, с. 43-45.

25. Мустафокулов Р., Солиев С.К. Невырожденность краевой задачи типа Штурма для одного дифференциального уравнения 4-го порядка Материалы международной научной конференции, посвященной 20-летию Конститутции Республики Таджикистан. Специальный выпуск №2(29), Худжанд, 2014. с. 184-187.

26. Мустафокулов Р., Солиев С.К. Об одной многоточечной краевой задачи // Доклады АН РТ, 2014, т.57 , № 9-10. с. 725-731.

27. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: “Наука”, 1969.

28. Павлов Б.С., Фаддеев М.Д. Модель свободных электронов и задачи рассеяния // ТМФ. - 1983, 55, №2. с. 257-269.

29. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О краевой задаче на графе // Дифференциальные уравнения, 1988, т. 24, №4, с. 701-703.

30. Пенкин О.М. О принципе максимума для эллиптических уравнений на двумерном клеточном комплексе // Доклады Российской АН. 1997. т 352, №4. с. 462-465.

31. Покорный Ю.В., Лазарев К.П. Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференциальные уравнения, 1987. т. 23, №4. с. 658-670.

32. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. Теоремы Штурма для уравнений на графах // Доклады АН СССР. 1989, т. 309, №6, с. 1306-1308.

33. Покорный Ю.В., Мустафокулов Р. О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения 4-го порядка // Дифференциальные уравнения, 1997. т. 33, №10. с. 1358-1365.

34. Покорный Ю.В., Мустафокулов Р. О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнения 4-го порядка на графе // Известия ВУЗ-ов. Математика. 1999, №2 (441). с 75-82.

35. Покорный Ю.В., Пенкин О. М., Прядиев В.Л., Боровскнх А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: Физматлит, 2004. - 268 с.

36. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений - М.: Физматлит, 1958. - 468с.

37. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: ИЛ, 1953.

38. Солиев С.К. Исследование краевой задачи типа Штурма для дифференциальных уравнений четвёртого порядка // Известия АН РТ. Отд. физ.- мат., хим, геол. и тех. наук, 2012, №2 (147), с. 22-28.

39. Солиев С.К. О функции Грина одной нестандартной краевой задачи //Вестник Таджикского национального университета. Научный журнал. Серия естественных наук, №1/2 (106), Душанбе, 2013. с. 60-66.

40. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. - М.: ИЛ, 1962.

41. Sturm J. Memoire sur les equations differentialles lineaire du second order // J. Math. Pures Appl. 1836, vol. 1. p. 106-186.