УТВЕРЖДАЮ
Ректор Вологодского
государственного университета,
профессор Л.И. Соколов
30-09-2015

Отзыв ведущей организации
на диссертационную работу Солиева Сафарбека Курбонхоловича
«Невырожденность некоторых краевых задач типа Штурма-Лиувилля
для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка
и их функция Грина», представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертационная работа Солиева С.К. посвящена исследованию невырожденности и построению функции Грина, в основном, для двух классов краевых задач. Первый класс задач представляет собой двухточечную краевую задачу для дифференциального уравнения

(1) $(p(x)y''(x))''-(q(x)y(x)')'=f(x), \quad x\in(a,b)$,

заданного на интервале (a,b), с граничными условиями вида

(2) $\alpha_0 y(a)+\alpha_3 D_3 y(a)=0, \qquad \alpha_1 y'(a)-\alpha_2 y''(a)=0$,

(3) $\beta_0 y(b)-\beta_3 D_3 y(b)=0, \qquad \beta_1 y'(b)+\beta_2 y''(b)=0$,

где выражение $D_3 y(x)\equiv(p(x)y''(x))'-q(x)y'(x)$ означает третью квазипроизводную. В этой задаче известными считаются функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, заданные на интервале (a,b), и вещественные числа α_i, β_i, $i=0,1,2,3$. Предполагается, что они удовлетворяют следующим условиям:

(4) $p(x)\in C^2[a,b], \qquad q(x)\in C^1[a,b], \qquad f(x)\in C[a,b]$,

(5) $p(x)>0$ и $q(x)\geq 0$ при любом $x\in[a,b]$,

(6) $\alpha_i\geq 0, \quad \beta_i\geq 0, \quad i=0,1,2,3$,

(7) $\alpha_0+\alpha_3>0, \quad \alpha_1+\alpha_2>0, \quad \beta_0+\beta_3>0, \quad \beta_1+\beta_2>0$.

Условия (4)-(7) называются условиями знакосогласованности коэффициентов.

Второй класс задач состоит из дифференциального уравнения

(8) $(p(x)y''(x))''-(q(x)y(x)')'=f(x)$,

заданного на цепочке интервалов $\Gamma_0=(a_0,a_1)\cup(a_1,a_2)\cup\ldots\cup(a_{m-1},a_m)$, где $m\geq 2$, граничных условий

(9) $\alpha_0 y(a_0)+\alpha_3 D_3 y(a_0)=0, \qquad \alpha_1 y'(a_0)-\alpha_2 y''(a_0)=0$,

(10) $\beta_0 y(a_m)-\beta_3 D_3 y(a_m)=0, \qquad \beta_1 y'(a_m)+\beta_2 y''(a_m)=0$,

и условий связи во внутренних точках $a_1, \ldots, a_{m-1}$:

(11) $y(a_i-0)=y(a_i+0), \qquad y''(a_i-0)=y''(a_i+0)=0, \quad i=1,\ldots,m-1$,

(12) $D_3 y(a_i-0)-D_3 y(a_i+0)=\chi(a_i)y(a_i), \quad i=1,\ldots,m-1$.

Предполагается, что функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и вещественные числа α_i, β_i, $i=0,1,2,3$, $\chi(a_i)$, $i=1,\dots,m-1$ известны и удовлетворяют следующим условиям знакосогласованности:

(13) $p(x)\in C^2[\Gamma_0]$, $q(x)\in C^1[\Gamma_0]$, $f(x)\in C[\Gamma_0]$,

(14) $p(x)>0$ и $q(x)\ge 0$ при любых $x\in[\Gamma_0]$,

(15) $\alpha_i\ge 0$, $\beta_i\ge 0$, $i=0,1,2,3$,

(16) $\alpha_0+\alpha_3>0$, $\alpha_1+\alpha_2>0$, $\beta_0+\beta_3>0$, $\beta_1+\beta_2>0$,

(17) $\chi(a_i)\ge 0$, $i=1,\dots,m-1$.

Задача (8)-(12) есть многоточечная краевая задача или краевая задача на геометрическом графе Γ с множеством ребер Γ_0 и множеством вершин $\{a_0,\dots,a_m\}$. Данная задача в диссертации называется нестандартной краевой задачей типа Штурма-Лиувилля. В этой задаче неизвестной является функция $y(x)\in C[a_0,a_m]\cap C^4(\Gamma_0)$.

В терминологии диссертации двухточечная краевая задача (1)-(3), или нестандартная краевая задача (8)-(12), называется невырожденной, если при $f(x)\equiv 0$ соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение. Для исследуемых краевых задач из невырожденности следует их однозначная разрешимость для любой непрерывной на $[a_0,a_m]$ функции $f(x)$. Поэтому в условиях невырожденности, следуя неклассическому определению, диссертант называет функцией Грина всякую функцию $G(x,s)$, с помощью которой можно выразить единственное решение $y(x)$ краевой задачи формулой

(18) $$y(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)ds,$$

где в случае краевой задачи (8)-(12) $a=a_0$ и $b=a_m$.

В диссертации Солиева С.К. затрагиваются, в основном, две проблемы:

1) исследование условий, при которых имеет место невырожденность краевых задач (1)-(3) и (8)-(12);

2) построение функций Грина краевых задач (1)-(3) и (8)-(12) в условиях невырожденности.

Эти проблемы актуальны в силу следующих причин:

1. В отличие от известных работ профессора Ю.В. Покорного и его учеников, в краевых задачах (1)-(3) и (8)-(12) рассматриваются более общие граничные условия. Эти граничные условия возникают в прикладных задачах, в частности, в строительной механике. На основе известных научных результатов, что-либо сказать о невырожденности и построении функции Грина краевых задачах (1)-(3) и (8)-(12) весьма затруднительно.

2. Исследование невырожденности и построение функции Грина краевых задач (1)-(3) и (8)-(12) требует применения и развития идей и методов исследования многоточечных краевых задач.

3. В настоящее время существуют подходы для построения функции Грина для краевых задач на графах, например, метод редукции, разработанный профессором Ю.В. Покорным и его учениками. Но для каждого класса краевых задач приходится разрабатывать свой алгоритм построения функции Грина.

Отметим основные научные результаты диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения и двух глав. В первой главе исследована проблема невырожденности для краевых задач (1)-(3) и (8)-(12).

В первом параграфе первой главы приводятся основные определения и общие теоремы о невырожденности двухточечных краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Во втором параграфе исследована невырожденность краевой задачи (1)-(3) в случае, когда функция $q(x)$ тождественно равна нулю. Невырожденность краевой задачи исследована с помощью явно выписанной фундаментальной системы решений однородного уравнения. Доказана теорема 1.2.1 о невырожденности краевой задачи (1)-(3) при $q(x)\equiv 0$ и выполнении условий знакосогласованности коэффициентов, причём $\alpha_0+\beta_0>0$, если $\alpha_1+\beta_1>0$, и $\alpha_0\beta_0>0$, если $\alpha_1=\beta_1=0$.

В третьем параграфе невырожденность краевой задачи (1)-(3) исследована в общем случае, когда $q(x)\neq 0$ при $x\in[a,b]$. В общем случае явно выписать фундаментальную систему решений однородного уравнения невозможно. Поэтому для исследования невырожденности краевой задачи применяется принцип максимума из монографии [1]. Суть принципа состоит в доказательстве монотонности непостоянного решения однородного уравнения на отрезке $[a,b]$, если решение удовлетворяет лишь граничным условиям

$$\alpha_1 y'(a+0)-\alpha_2 y''(a+0)=0,\quad \beta_1 y'(b-0)+\beta_2 y''(b-0)=0.$$

Доказаны теоремы 1.3.1-1.3.3 о свойствах монотонности однородного уравнения с соответствующими условиями. На основе этих теорем и принципа максимума выведена теорема 1.3.4 о невырожденности краевой задачи (1)-(3). Согласно теореме 1.3.4 краевая задача (1)-(3) невырождена, если выполнены условия знакосогласованности коэффициентов и либо коэффициент $q(x)\neq 0$ при $x\in(a,b)$ и $\alpha_0+\beta_0>0$, либо выполнены условия теоремы 1.2.1.

В четвертом параграфе первой главы исследована невырожденность нестандартной краевой задачи (8)-(12) при выполнении условий знакосогласованности коэффициентов (13)-(17). Здесь опять применяется принцип максимума из выше упомянутой монографии [1]. Исследуя поведение решения $y(x)$ однородного уравнения (8) при $f(x)\equiv 0$, доказаны леммы 1.4.1-1.4.3 о монотонности $y(x)$ на ребрах графа Γ_0. На основе этих лемм доказаны теоремы 1.4.2-1.4.4 о невырожденности краевой задачи (8)-(12). В теореме 1.4.2 невырожденность краевой задачи (8)-(12) доказана при условиях, когда коэффициент $q(x)$ тождественно не равен нулю на ребрах графа Γ и $\alpha_0+\beta_0>0$.

В теоремах 1.4.3 и 1.4.4 доказана невырожденность краевой задачи (8)-(12) в том случае, когда коэффициент $q(x)$ тождественно равен нулю на ребрах графа Γ. В данном случае предполагается, что в условиях связи (12) числа $q(a_1),\ \ldots,\ q(a_{m-1})$ является неотрицательными. Доказано, что краевая задача (8)-(12) невырождена, если $\alpha_0+\beta_0>0$ при $\alpha_1+\beta_1>0$, $\alpha_0\beta_0>0$ при $\alpha_1=\beta_1=0$ и либо $q(a_i)>0$ при всех $i=1,\ldots,m-1$ (теорема 1.4.3), либо $\chi(a_i)>0$ при всех $i=1,\ldots,m-1$ (теорема 1.4.4).

Во второй главе диссертации исследована проблема построения и анализа свойств функции Грина для краевых задач (1)-(3) и (8)-(12) в условиях невырожденности этих задач.

В первом параграфе второй главы приведена и обоснована схема построения функции Грина для двухточечной краевой задачи для неоднородного линейного обык-

---

[1] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровскнх А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: Физматлит, 2004. - 268 с.

новенного дифференциального уравнения произвольного порядка на отрезке с однородными граничными условиями общего вида. Суть схемы заключается в том, что с помощью заданной фундаментальной системы решений однородного уравнения строится функция Коши. Функция Коши – это ядро линейного интегрального оператора, которым можно выразить решение неоднородного уравнения при любой непрерывной правой части. Затем, прибавляя к функции Коши линейную комбинацию фундаментальных решений с подходящими коэффициентами, строится функция Грина краевой задачи. Данная схема в работах профессора Ю.В. Покорного и его учеников совершенствуется и применяется для построения функции Грина краевых задач на графах. Применение этой схемы к краевым задачам (1)-(3) и (8)-(12) не тривиально и требует дополнительного исследования.

Во втором параграфе получены явные формулы для функций Коши и Грина краевой задачи (1)-(3) в случае, когда коэффициент $q(x)$ тождественно равен нулю. На основе полученных формул доказаны теорема 2.2.1 о существовании и единственности функции Грина и теорема 2.2.2 о свойствах функции Грина.

В третьем параграфе построены функции Коши и Грина краевой задачи (1)-(3) в общем случае. Доказаны теоремы 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 о существовании, единственности и свойствах функции Грина в условиях невырожденности соответствующей краевой задачи.

В четвертом параграфе для нестандартной краевой задачи (8)-(12) построены функции Коши и Грина. При построении функции Коши (лемма 2.4.1) используется метод редукции из монографии [1] и схема построения функций Коши и Грина из первого параграфа данной главы. Далее, по функции Коши, развивая схему построения функции Грина на одном отрезке, построена функция Грина краевой задачи (8)-(12). Доказаны теоремы 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 о существовании и единственности функции Грина краевой задачи (8)-(12). Кроме того, доказаны три теоремы о свойствах функции Грина краевой задачи (8)-(12). Эти теоремы показывают достоинство неклассического (неаксиоматического) подхода к построению функции Грина: свойства функции Грина меняются в зависимости от специфики краевой задачи и по каким-то заранее задаваемым свойствам (аксиомам) построить функцию Грина весьма затруднительно.

По оформлению и содержанию диссертации и автореферата можно сделать следующие замечания.

1. Теоремы и леммы во введении диссертации приведены сквозной нумерацией, а в главах диссертации и в автореферате пронумерованы по номерам глав и параграфов. Такое несоответствие нумераций создает неудобства при чтении и сопоставлении автореферата и диссертации.

2. Теоремы 1.4.2 и 1.4.4 из первой главы диссертации в автореферате приведены как теоремы 1.4.1 и 1.4.2. При этом теорема 1.4.4 в автореферате не полностью соответствует теореме 1.4.4 в диссертации. В формулировке теоремы 1.4.2. в автореферате пропущено условие, без которого утверждение этой теоремы становится неверным.

3. В формулировке теоремы 1.4.2 из первой главы диссертации четко не прописано, что коэффициент $q(x)$ должен быть тождественно не равным нулю на всех ребрах графа Γ; без этого условия теорема была бы неверной.

4. В формулировке теоремы 1.3.4 пропущено условие $\alpha_0 + \beta_0 > 0$. Без этого условия теорема неверна.

5. В диссертации объясняется физический смысл граничных условий и условий связи. Но не приводится ни одного примера модельной краевой задачи, где возникают указанные условия, и можно было бы применять доказанные теоремы.

Проведенное в диссертации исследование основано на работах научного руководителя диссертанта – доктора физико-математических наук, профессора Р. Мустафокулова. Диссертанту удалось освоить математический аппарат воронежской школы по дифференциальным уравнениям на графах и применять его к исследованию новых краевых задач. Полученные в диссертации результаты по исследованию невырожденности и построению функции Грина краевых задач типа Штурма-Лиувилля являются новыми, представляют научный интерес и могут быть использованы в теории краевых задач и при решении прикладных задач, в частности, строительной механики.

Из выше изложенного можно сделать вывод: диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне, обладает научной новизной и практической значимостью, соответствует требованиям Положения ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации о присуждении ученых степеней, а С.К. Солиев заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании научного семинара по дифференциальным уравнениям и на заседании кафедры информационных систем и технологий Вологодского государственного университета (протокол № 1 от 11.09.2015 г.).

Заведующий кафедрой
информационных систем и технологий,
доктор физико-математических наук,
профессор — В.А. Горбунов

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры информационных
систем и технологий — А.Н. Наимов

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
Менеджер по персоналу
отдела кадров
Управления делами
Горбунова и Наимова
/ВИ Фуракова
30.09.2015

Контактная информация ведущей организации:
Вологодский государственный университет,
160000, Россия, г. Вологда, улица Ленина, 15,
сайт: www.vstu.edu.ru
телефон: (8172) 72 50 33
e-mail: kanz@mh.vstu.edu.ru