На правах рукописи

Темурбекова София Давронбековна

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ ФУНКЦИЙ И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

Работа выполнена в Институте математики имени А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор **Шабозов Мирганд Шабозович**

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Переверзев Сергей Вячеславович,** доктор физико-математических наук, профессор, Австрийская Академия наук, Институт вычислительной и прикладной математики им. Й.Радона, главный научный сотрудник отдела прикладной математики

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, доцент, Таджикский национальный университет, доцент кафедры математического анализа и теории функций

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: - Худжандский государственный университет имени академика Б.Г.Гафурова

Защита состоится *30 июня 2015г. в 14 ч. 00 мин.* на заседании диссертационного совета Д 047.007.02, при Институте математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, по адресу: 734063, г.Душанбе, ул Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://www.mitas.tj Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан.

Автореферат разослан "___" ____________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета **Каримов У.Х.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Хорошо известно, что основным объектом теории приближения функций являются задачи, связанные с необходимостью заменить сложные функции линейными суммами конечного числа более простых функций, так чтобы возникающая при этом погрешность была наименьшей. Если о функции нам известны лишь некоторые общие свойства, то целесообразно рассматривать задачу приближения класса таких функций. Как правило, при приближении классов функций предпочтение отдавалось алгебраическим или тригонометрическим полиномам.

В 1936 году А.Н.Колмогоров сформулировал задачу о поперечниках, в которой впервые выбор аппарата приближения был поставлен в зависимость от цели приближения. С этого времени задача приближения классов функций подвергалась изучению с новой точки зрения. Наиболее существенные результаты окончательного характера получены в задачах наилучшего полиномиального приближения периодических функций. Следует отметить, что вопросы наилучшего равномерного приближения периодических дифференцируемых функций рассматривались А.Н.Колмогоровым, Ж.Фаваром, Н.И.Ахиезером и М.Г.Крейном, С.М.Никольским, Б.Надом, С.Б.Стечкиным, Н.П.Корнейчуком, А.В.Ефимовым, Н.И.Черных, В.П.Моторным, Л.В.Тайковым, В.И,Ивановым, С.Б.Вакарчуком, М.Ш.Шабозовым и многими другими.

Задачами наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в разное время занимались Б.Надь[1], В.К.Дзядык[2],[3], С.Б.Стечкин[4], Сунь Юн-шень[5], С.А.Теляковский[6], В.Н.Малоземов[7] и другие.

В диссертационной работе рассматриваются задачи вычисления верхних граней наилучших приближений и отыскания точных значений поперечни-

[1]Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I // Peridischer Fall. Berichte der meth.–phys. Kl. Akad. d. Wiss. zu Leipzig. 1938. V.90. P.103-134.

[2]Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$, // Известия АН СССР. Сер. мат. 1953. Т.17. С.135-162.

[3]Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука. 1977. 511 с.

[4]Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР, сер. матем. 1956. Т.20. С.643-648.

[5]Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т.23. №1. С.67-92.

[6]Теляковский С.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейла, суммами Валле-Пуссена // ДАН СССР. 1960. Т.131. №2. С.259-262.

[7]Малоземов В.Н. Обобщённое дифференцирование периодических функций // Вестник ЛГУ, 7. Серия матем. 1965. №2. С.164-167.

ков некоторых классов периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Полученные результаты дополняют и продолжают исследование указанных выше авторов в этом направлении.

Цель работы

1. Найти точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка в пространстве L_2.
2. Вычислить точные значения различных поперечников на классах функций, задаваемых усреднёнными значениями модулей непрерывности высших порядков производных.

Метод исследования. В диссертационной работе применяются современные методы функционального анализа оптимизационного содержания и методы решения экстремальных задач теории приближения функций.

Научная новизна исследований. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка.
- Вычислены точные значения различных поперечников на классах функций, задаваемых усреднёнными значениями модулей непрерывности высших порядков производных.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут послужить основой для проведения теоретических исследований в других банаховых пространствах, например в пространстве L_p, $1 \le p \le \infty$.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2011-2015 гг), на международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций“(Душанбе, 29-30 июня 2012 г.), на международной научной конференции „Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений“ (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.), на международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания”, посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.).

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты, полученные автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-7]. В совместной работе [1] научному руководителю М.Ш.Шабозову принадлежит постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 58 наименований, занимает 95 страниц машинописного текста и набрана на LATEX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Приводим краткое содержание диссертации с указанием основных результатов. Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты работы.

В первом параграфе первой главы приводятся необходимые обозначения и определения, нужные для дальнейшего, а также излагаются история вопроса и известные результаты. Через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ обозначим множество 2π-периодических суммируемых с квадратом в смысле Лебега действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Под $L_2^{(r)}$ будем понимать множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а $f^{(r)} \in L_2$. Множество всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$ обозначим $\mathcal{T}_{2n-1}$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \right),$$

величина её наилучшего приближения в L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $S_{n-1}(f,x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2$, $\rho_k^2(f) = a_k^2(f)+b_k^2(f)$. Под $L_2^{(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$ будем понимать множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$:

$$f^{(\alpha)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right). \qquad (1)$$

Воспользуясь соотношением (1), при помощи равенства Парсеваля в силу свойств ортогональности тригонометрической системы получаем равенство

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) = \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2}. \qquad (2)$$

При изучении экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации функций $f \in L_2$ на протяжении всей диссертации результат (2) является нашим основным инструментом. Всюду далее для характеризации структурных свойств функции $f \in L_2$, мы пользуемся понятием модуля непрерывности порядка m. Равенством

$$\omega_m(f;t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : \ |h| \le t\Big\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+(m-k)h)$$

– конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h, определим модуль непрерывности порядка m функции $f \in L_2$.

Во втором параграфе решена задача о нахождении точных неравенств типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими полиномами посредством модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(\alpha)};t)$ в пространстве Гильберта L_2 и даны некоторые её приложения.

Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина в пространстве L_2 понимают соотношения вида

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\gamma}{n}\right)_{L_2}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \ \gamma > 0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через модуль непрерывности m-го порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной, а константа χ зависит от r и m, но не зависит от n и функции f. С целью оптимизации констант в неравенствах Джексона – Стечкина, как правило, вводят в рассмотрение различные аппроксимационные характеристики, содержащие усреднённые значения с некоторым весом модулей непрерывности m-го порядка. Приводим одно утверждение, в котором появление весовой функции $\varphi(t) := \dfrac{2}{h^2}(h-t),\ 0 \le t \le h$ в усреднённом значении модуля непрерывности m-го порядка от производной $f^{(\alpha)}(t)$ является неизбежным. Отметим, что указанный вес при решении задачи о точном неравенстве Джексона-Стечкина сыграл ключевую роль в работе Фокарта, Крякина и Шадрина.[8]

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тогда для любого числа* h, *удовлетворяющего условию* $0 < h \le \pi/n$, *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)dt\right)^{m/2}} = \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}.$$

Основным результатам второго параграфа является

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}_+;\ m \in \mathbb{Z}_+;\ n \in \mathbb{N};\ 0 < p \le 2;\ \varphi(t) \ge 0$ – *произвольная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Если при некотором* $\alpha \ge 1, 1/\alpha < p \le 2$ *при всех* $t \in [0, h]$ *выполняется дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0, \tag{3}$$

то справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\displaystyle\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{4}$$

Отметим, что равенство (4) в разное время при различных значени-

[8] Foucart S., Kryakin Yu and Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 2009. V.29. P. 157-179.

ях указанных в нём параметров изучали Н.И.Черных[9], Л.В.Тайков[10],[11],[12], А.А.Лигун[13], Н. Айнуллоев[14], В.В.Шалаев[15], Х.Юссеф[16], М.Ш.Шабозов[17], С.Б.Вакарчук[18], М.Г.Есмаганбетов[19], М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов.[20]

Из теоремы 1.2.2 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.2.1. *Пусть* $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 < \beta \le \pi$, $0 < t \le h$, $0 < h \le \pi/n$, $0 \le \gamma \le \alpha p - 1$, $1/\alpha < p \le 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \ge 1$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \ne const}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\sin^\gamma(\beta t/h)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma\left(\frac{\beta t}{h}\right)dt\right)^{-1/p}. \qquad (5)$$

Равенство (5) ранее было получено М.Г.Есмаганбетовым[19].

Следствие 1.2.2. *Пусть* $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \le h$, $0 < h \le \pi/n$, $0 < p \le 2$,

[9] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т.2, №5. С. 513-522.

[10] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т.20, №3. С. 433-438.

[11] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. 1977. Т.22, №4. С. 535-542.

[12] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. 1979. Т.25, №2. С. 217-223.

[13] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т.24, №6. С. 785-792.

[14] Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН ТаджССР. 1985. Т.28, №6. С.309-313.

[15] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т.43, №1. С.125-129.

[16] Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сб. научн. трудов. Калининский гос. ун-т, Калинин. 1988. С.100-114.

[17] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

[18] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

[19] Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. 1999. Т.65, №6. С.816-820.

[20] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

$\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{2^m n^{\alpha-1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{nh}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}. \tag{6}$$

В частности, из (6) при $h=\pi/n$ следует равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{2^{m-2/p} n^{\alpha-1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{1/p}} = \pi^{-1/(2p)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)}\right\}^{1/p},$$

где $\Gamma(u)$ – известная гамма-функция Эйлера.

Равенство (6) при $p=2$, $\alpha\in\mathbb{N}$ было установлено Н.Айнуллоевым[21].

Следствие 1.2.3. *Пусть выполнены все условия следствие 1.2.2. Тогда при $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{2^{2m} n^{\alpha-m} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{h} \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{m}} = \left(1-\cos\frac{nh}{2}\right)^{-m}.$$

Следствие 1.2.4. *Пусть $\varphi(t)\equiv t$, $0<t\leq h$, $0<h\leq\pi/n$, $1/\alpha<p\leq 2$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\geq 1$. Тогда справедливо равенство*

[21]Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет, 1986. С.3-10.

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{2^m n^{\alpha-2/p}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

В третьем параграфе первой главы доказывается неравенство Колмогорова для дробных производных и даются некоторые его применения.

Теорема 1.3.1. *Пусть функция* $f \in L_2^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *и пусть* $\gamma > 0$ *— произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \gamma < \alpha$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|f^{(\gamma)}\|_2 \leq \|f\|_2^{1-\gamma/\alpha}\|f^{(\alpha)}\|_2^{\gamma/\alpha}.$$

Знак равенства здесь имеет место для функций вида $f(t) = b\cos n(t+a)$.

Следствие 1.3.1. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(\alpha)}$ *при* $0 < \gamma < \alpha$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+$ *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})_{L_2} \leq \left(E_{n-1}(f)\right)_{L_2}^{\gamma/\alpha}\left(E_{n-1}(f^{\alpha})\right)_{L_2}^{1-\gamma/\alpha}. \tag{7}$$

С использованием неравенства (7) легко доказывается

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$; $0 < h \leq \pi/n; \gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$; $0 < \gamma \leq \alpha$, φ *— неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^{h}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} \tag{8}$$

а) если, в частности, $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 1/m$, $0 < h \leq \pi/n$, $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < \gamma \leq \alpha$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m}} = \left(\frac{2}{n}\sin^2\frac{nh}{4}\right)^{-m};$$

б) если $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2/m$, $0 < h \leq \pi/n$, $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < \gamma \leq \alpha$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^m} = \left\{\frac{n}{nh-\sin nh}\right\}^m. \tag{9}$$

Следует отметить, что из равенства (8), в частности, вытекают результаты М.Ш.Шабозова[17], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[20] в случае $\alpha \equiv \gamma \in \mathbb{N}$ и с произвольным неотрицательным суммируемым весом $\varphi(t)$, $0 \le t \le h$ $(0 < h \le \pi/n)$. Равенство (9) является обобщением результата С.Б.Вакарчука[18], ранее доказанном для множества функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Четвёртый завершающий параграф первой главы посвящён вычислению верхних граней наилучших полиномиальных приближений некоторых классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве L_2.

В экстремальных задачах теории приближения периодических функций с заданным классом функций $\mathfrak{M} = \{f\} \subset L_2$ часто связывают следующие его характеристики аппроксимации:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := E(\mathfrak{M}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \tag{10}$$

— наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$;

$$\gamma_{2n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\}, \tag{11}$$

где $\mathfrak{M}_n^{\perp}$ — множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Кроме величин (10) и (11), часто будет полезным отыскание величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A\in\mathscr{L}_n} \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2}, \tag{12}$$

где $\mathscr{L}_n$ – совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы порядка $n-1$.

Из приведённых выше аппроксимационных величин сразу следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}).$$

Задача состоит в отыскании значения величин (10) – (12) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждения теорем и их следствий в предыдущем параграфе 1.2.

Пусть $\Phi(t)$, $0 \le t < \infty$ — непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $\alpha > 0$ и $0 < h \le 2\pi$. Введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\},$$

$$\bar{W}_{m}^{(\alpha)}(h,\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \ \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{m/2} \le \Phi(h) \right\}.$$

При $\Phi(h) \equiv 1$ соответствующие классы обозначим $W_{m,p}^{(\alpha)}(h)$, $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$, $\bar{W}_{m}^{(\alpha)}(h)$. В данном параграфе вычислены точные значения величин (10) – (12) и доказано их совпадение. В частности, например, для класса $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)$ справедлива следующая

Теорема 1.4.1 *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ и $1/\alpha < p \le 2$. Тогда при любом $h \in (0, \pi/n]$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t \left(\sin\frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi(h) =$$

$$= 2^{-m-2/p} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh/2} t \sin^{mp} t dt \right)^{-1/p} \Phi(h),$$

В конце параграфа рассматривается вопрос вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье. Из утверждения теоремы 1.4.1 получаем

Следствие 1.4.2 *Если выполнены все условия теоремы 1.4.1, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{ |a_n(f)| : \ f \in \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi) \right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-m+1/p} n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h), \qquad (13)$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ — соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f. В частности, при $h=\pi/n$ из (13) вытекает равенство

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n,\Phi)\right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n,\Phi)\right\} = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^m \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Вторая глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих L_2.

В первом параграфе второй главы приводятся необходимые определения и факты, нужные для изложения дальнейших результатов. Пусть X – банахово пространство, S – единичный шар в нём, $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $L_n\subset X$ – n-мерное линейное подпространство, $L^n\subset X$ – подпространство коразмерности n, $\Lambda : X\to L_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n, $\Lambda^\perp : X\to L_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования X на подпространство L_n. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M}\subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется соотношением

$$E(\mathfrak{M},L_n)_X \overset{def}{=} \sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_X:\ \varphi\in L_n\right\}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}.$$

Величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M},L_n)_X \overset{def}{=} \inf\left\{\sup\left\{\|f-\Lambda(f)\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:\ \Lambda X\subset L_n\right\}$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $L_n\subset X$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M},X) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0;\ \varepsilon S\cap L_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\ L_{n+1}\subset X\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M},X) = \inf\left\{E(\mathfrak{M},L_n):\ L_n\subset X\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M},X) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\cap L^n\right\}:\ L^n\subset X\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M},X) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M},L_n)_X:\ L_n\subset X\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\right\}$$

называют соответсвенно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, линейным и проекционным n-поперечниками.*

Во втором параграфе второй главы рассматривается задача об отыскании точной константы в обобщённом неравенсве Джексона – Стечкина.

Пусть $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ функция. Через $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi; h)_p$, где $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi$, обозначим среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности $\omega_m(f^{(\alpha)}; t)$ порядка m от дробной производной $f^{(\alpha)}(x)$ с неотрицательным суммируемым весом $\varphi(t)$:

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)\varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{14}$$

При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \chi n^{-\alpha}\omega_m(f^{(\alpha)}, t/n), \ t > 0, \ f \in L_2^{(\alpha)}, \ m \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{R}_+, \tag{15}$$

многими математиками в разное время рассматривались различные экстремальные характеристики, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ. В связи с отысканием точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина (15), для оценки экстремальных аппроксимационных характеристик и выявления структурных величин наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций f в L_2, функционал (14) более естественен. Таким образом, осреднённый в p-й степени модуль непрерывности m-го порядка (14) является наиболее общим функционалом при отыскании точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина (15).

Пусть $L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)$ – множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, для которых выполняется неравенство $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq 1$. Для произвольной суммируемой весовой функции $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$ из (14) вытекает неравенство

$$C\omega_m(f^{(\alpha)}; h) \leq W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq \omega(f^{(\alpha)}; h), \tag{16}$$

где $C = C(m, \alpha, p, h)$ – положительная константа, зависящая только от значений указанных в скобке параметров. Отыскание наименьшей константы в неравенстве (15) равносильно задаче вычисления точной верхней грани

$$\chi_{m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathcal{T}_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f, \mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)}\right\}. \tag{17}$$

Приведём решение задачи о минимизации величины (17) по всем подпространствам $\mathcal{T}_N$ размерности N, то есть вычислим значения инфимума величины (17) относительно всего множества приближающихся подпространств $\mathcal{T}_N \subset L_2$ размерности N :

$$\chi_{N,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \inf\left\{\chi_{m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathcal{T}_N\right) : \mathcal{T}_N \subset L_2\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\frac{E(f,\mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)}\right\} : \mathcal{T}_N \subset L_2\right\}.$$

Положим также

$$E_{N-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h,\varphi), L_2\right) = \sup\left\{\|f - S_{N-1}(f)\| : f \in L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi)\right\}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 2.2.2 *Пусть весовая функция φ, заданная на отрезке $[0,h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой. Если при некоторых $\alpha \geq 1,\ 1/\alpha \leq p \leq 2$ и любых $t \in [0,h]$ выполнено неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - \varphi'(t) \geq 0,$$

то при всех $m,n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \leq \pi/n$ справедливы равенства

$$\chi_{2n,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \chi_{2n-1,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = E_n\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) =$$

$$= \lambda_{2n}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi),\ L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^\alpha}\left\{\int_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^h\left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ и $\Pi_n(\cdot)$. Все n-поперечники реализуются частными суммами Фурье $S_{n-1}(f;t)$.

В третьем параграфе второй главы приведено решение задачи (17) для класса функций $\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H^{\omega_m}$. Пусть $W_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m} := W_p^{(\alpha)}H^{\omega_m}(\varphi;h)$ – множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ таких, что для произвольной неотрицательной весовой функции $\varphi(t)$ $(0 \leq t \leq h,\ 0 < h \leq \pi/n)$ выполнялось условие

$$W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p = \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p} \leq$$

$$\leq \omega_m(f^{(\alpha)}; h) \leq \omega(h),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неотрицательная неубывающая полуаддитивная на $[0,\pi]$ функция такая, что $\omega(0)=0$.

Заметим, что неравенство (16) указывает на то, что введенный выше класс $W_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}$ отличается от класса

$$\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m} = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \omega_m(f^{(\alpha)}; h) \leq \omega(h) \right\}$$

только на некоторое постоянное число. Одним из основных результатов третьего параграфа второй главы является

Теорема 2.3.1 *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $N = 2n-1$ *или* $N = 2n$. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H^{\omega_m}; L_2\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha} \left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\dfrac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt} \right)^{1/p} \omega(h),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников Бернштейна,* $b_n(\cdot)$, *Гельфанда* $d^n(\cdot)$, *Колмогорова* $d_n(\cdot)$, *линейного* $\delta_n(\cdot)$, *проекционного* $\Pi_n(\cdot)$.

Имеет место также следующая теорема, обобщающая теорему 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ *и выполняется дифференциальное неравенство (3). Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,p,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,p,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$
$$= \lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}, L_2\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников.*

Следствие 2.3.2. *Пусть* $m \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+, p = 2/m, 0 < h \leq \pi/n, N = 2n-1$ *или* $N = 2n, \varphi_{**} = \sin nt, 0 \leq t \leq h$. *Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$

$$= \lambda_{2n-1}\left(W_{2/m,h}^{(\alpha)} H_{\varphi_{**}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W_{2/m,h}^{(\alpha)} H_{\varphi_{**}}; L_2\right) =$$

$$= \left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{-m/2}\frac{1}{n^{\alpha}}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{18}$$

В частности, из (18) при $h = \pi/n$ имеем:

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$

$$= \lambda_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,\pi/n}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,\pi/n}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}\cdot\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В четвёртом параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников классов функций $\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)$, $W_{m,p}^{(\alpha)}(h)$, $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$. Приводим полученный результат для класса $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \le 2$ и для числа h выполнено условие $0 < nh \le \pi$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m-2/p}\,n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН РТ М.Ш.Шабозову за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. М.Ш. Шабозов, Темурбекова С.Д. Значения поперечников классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Известия ТулГУ. – 2012. – Вып.3. – С. 60-68.
2. Темурбекова С.Д. Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №4. – С. 281-285.
3. Темурбекова С.Д. О значениях поперечников функциональных классов в пространстве L_2 // ДАН РТ. – 2012. – Т.55. – №11. – С. 853-858.
4. Темурбекова С.Д. Неравенство типа Джексона-Стечкина для обобщённых модулей непрерывности и поперечники некоторых функциональных классов функций в пространстве L_2 // ДАН РТ. – 2013. – Т.56. – №4. – С. 273-278.
5. Темурбекова С.Д. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // ДАН РТ. – 2014. – Т.57. – №2. – С. 103-108.

В других изданиях:

6. Темурбекова С.Д. Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона для некоторых классов периодических функций в L_2. Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", 29-30 июня 2012. – Душанбе: „Дониш", 2012. – С. 151-154.
7. Темурбекова С.Д. Точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014. – Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. – С. 75-78.