Академия наук Республики Таджикистан
Институт математики имени А.Джураева

На правах рукописи

УДК 517.5

Темурбекова София Давронбековна

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ ФУНКЦИЙ И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик АН Республики
Таджикистан, доктор физ.-мат.
наук, профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Теория приближения функций – одна из наиболее интенсивно развивающихся областей современной математики. Особое место в теории приближения занимают экстремальные задачи оптимизационного содержания. Наиболее существенные результаты окончательного характера в этом направлении получены в задачах наилучшего полиномиального приближения дифференцируемых периодических функций.

Хорошо известно, что основным объектом теории приближения функций являются задачи, связанные с необходимостью заменить сложные функции линейными суммами конечного числа более простых функций, так чтобы возникающая при этом погрешность была наименьшей. Если о функции нам известны лишь некоторые общие свойства, то целесообразно рассматривать задачу приближения класса таких функций. Как правило, при приближении классов функций предпочтение отдавалось алгебраическим или тригонометрическим полиномам.

В 1936 году А.Н.Колмогоров сформулировал задачу о поперечниках, в которой впервые выбор аппарата приближения был поставлен в зависимость от цели приближения. С этого времени задача приближения классов функций подвергалась изучению с новой точки зрения. Следует отметить, что вопросы наилучшего равномерного приближения периодических дифференцируемых функций рассматривались А.Н.Колмогоровым [18], Ж.Фаваром [48, 49], Н.И.Ахиезером и М.Г.Крейном [3], С.М.Никольским [28, 29], С.Б.Стечкиным [34], Н.П.Корнейчуком [20,21], Б.Надом [27], А.В.Ефимовым [16], Н.И.Черных [51, 52], В.П.Моторным [26], Л.В.Тайковым [37, 39], В.И.Ивановым [17], С.Б.Вакарчуком [6–11], М.Ш.Шабозовым [54, 55] и многими другими.

Вопросами наилучшего равномерного приближения периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в разное время занимались B.Nagy [27], В.К.Дзядык [13, 14], С.Б.Стечкин [34], Сунь Юн-шен [36], С.А.Теляковский [40], В.Н.Малоземов [24] и другие.

В данной работе рассматриваются экстремальные задачи на конкретных классах функций периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций, принадлежащих гильбертову пространству $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Специфика гильбертова пространства обеспечивает возможность получить более полные результаты по сравнению с другими банаховыми пространствами.

Приводим краткое содержание диссертационной работы.

В первом параграфе первой главы приводятся необходимые обозначения и определения, нужные для дальнейшего, а также излагаются история вопроса и известные результаты. Всюду далее, мы придерживаемся следующими обозначениями: $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Через $L_p := L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$ обозначим множество 2π-периодических суммируемых в p-й степени функций f с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[0,2\pi]} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{если } 1 \le p < \infty \\ ess \sup \{|f(x)| : 0 \le x \le 2\pi\} < \infty, \ \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ обозначим множество 2π-периодических суммируемых с квадратом в смысле Лебега действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Под $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ $(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2)$ будем понимать множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ $(r \in \mathbb{N})$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2. Множество всевозможных тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x) = \dfrac{\alpha_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ порядка $n-1$ обозначим $\mathcal{T}_{2n-1}$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)\,, \tag{0.0.1}$$

величина её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\{\|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где

$$S_{n-1}(f,x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right)$$

– n-я частная сумма ряда Фурье функции $f \in L_2$, $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$.

В соответствии с введёнными обозначениями, всюду далее под $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+$) будем понимать множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$, определяемая равенством [40]

$$f^{(\alpha)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right). \qquad (0.0.2)$$

Пусть $W^{(\alpha)} := W^{(\alpha)}[0, 2\pi]$ – класс непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, имеющих α-ю производную в смысле Вейля, удовлетворяющую условию $ess\sup\left\{|f^{(\alpha)}(x)| : \ 0 \le x \le 2\pi\right\} \le 1$, а $\widetilde{W}^{(\alpha)}$ ($\alpha > 0$) – класс непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, для которых $ess\sup\left\{|\widetilde{f}^{(\alpha)}(x)| : \ 0 \le x \le 2\pi\right\} \le 1$, где

$$\widetilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(-a_k(f)\sin kx + b_k(f)\cos kx\right)$$

– функция, тригонометрически сопряжённая с $f(x)$.

Хорошо известно [34], что функция $f(x) \in W^{(\alpha)}$ в том и только том случае, если она представляется в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_\alpha(t - x)\varphi(t)dt,$$

где

$$K_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$ess\sup\{|\varphi(t)|:\ 0\le t\le 2\pi\}\le 1,\quad \int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0.$$

Аналогичным образом будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $\widetilde{W}^{(\alpha)}$, если она представляется в виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\widetilde{K}_\alpha(t-x)\varphi(t)dt,$$

где

$$\widetilde{K}_\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}\sin\left(kt-\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$ess\sup\{|\varphi(t)|:\ 0\le t\le 2\pi\}\le 1,\quad \int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0.$$

Задача о нахождение точного значения величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(\alpha)})_{C[0,2\pi]}=\sup\left\{E_{n-1}(f)_C:\ f\in W^{(\alpha)}\right\},\qquad(0.0.3)$$

где

$$E_{n-1}(f)_C=\inf\left\{\|f-T_{n-1}\|_{C[0,2\pi]}:\ T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}\right\}$$

впервые рассматривалась Ж.Фаваром в 1936 г. при целом $\alpha\in\mathbb{N}$. Ж.Фавар [48, 49] доказал, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(\alpha)})_{C[0,2\pi]}=\sup\left\{\|f\|_C:\ f\in W^{(\alpha)},f\perp T_{n-1}\right\}=\frac{4\mathcal{K}_\alpha}{\pi n^\alpha}$$

$$(n=1,2,3,\ldots,\alpha=1,2,3,\ldots),$$

где $f\perp T_{n-1}$ означает, что

$$\int\limits_0^{2\pi}f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{Bmatrix}dt=0\quad(k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

а константа $\mathcal{K}_\alpha$ определяется равенством

$$\mathcal{K}_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(\alpha-1)}}{(2\nu+1)^{\alpha+1}},$$

причём при целых α нетрудно подсчитать, что

$$\mathcal{K}_0 = 1,\ \mathcal{K}_1 = \pi/2,\ \mathcal{K}_2 = \pi^2/8,\ \mathcal{K}_3 = \pi^3/24, \ldots$$

$$1 = \mathcal{K}_0 < \mathcal{K}_2 < \cdots < 4/\pi < \cdots \mathcal{K}_3 < \mathcal{K}_1 = \pi/2.$$

Ж.Фаваром [49] и независимо от него Н.И.Ахиезером и М.Г.Крейном [3] было также найдено точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\widetilde{W})^{(\alpha)})_{C[0,2\pi]} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_C :\ f \in \widetilde{W}^{(\alpha)}\right\} \tag{0.0.4}$$

при целом α. Эти исследования были продолжены Б.Надем [27], С.М.Никольским [28,29], В.К.Дзядыком [13,14], С.Б.Стечкиным [33–35], Сунь Юн-шеном [36], С.А.Теляковским [40], В.Н.Молоземовым [24,25] и др. Первый результат, относящийся к задаче (0.0.3) при дробном α $(0 < \alpha < 1)$ принадлежит В.К.Дзядыку [13], который доказал, что если $f \in W^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha < 1)$, то

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(\alpha)})_{C[0,1]} = \sup\left\{\|f\|_{C[0,2\pi]} : f \in W^{(\alpha)}, f \perp T_{n-1}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K_\alpha)_L = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mathcal{K}_\alpha}{n^\alpha},$$

где

$$E_{n-1}(K_\alpha)_L = \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int_0^{2\pi} |K_\alpha(t) - T_{n-1}(t)| dt,$$

а константа

$$\mathcal{K}_\alpha = \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{\alpha+1}} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Объединяя оба случая (0.0.3) и (0.0.4), С.Б.Стечкин [34] ввел в рассмотрение класс $W^{(r)}(\alpha)$ всех непрерывных периодических функций f, представимых в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(t-x)\varphi(t)dt,$$

где

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

$r > 0$, α – любое вещественное число, а $\varphi(t)$ – существенно ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая тем же самым условиям:

$$ess\sup\{|\varphi(t)| : 0 \le t \le 2\pi\} \le 1, \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)dt = 0.$$

Легко видеть, что $W^{(r)}(r) = W^{(r)}$, а $W^{(r)}(r+1) = \widetilde{W}^{(r)}$.

Рассматривая случай $0 < r \le \alpha \le 2 - r$, где $0 < r < 1$, С.Б.Стечкин доказал, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}(\alpha))_{C[0,2\pi]} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{C[0,2\pi]} : f \in W^{(r)}(\alpha)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\|f\|_{C[0,2\pi]} : f \in W^{(r)}(\alpha), f \perp T_{n-1}\right\} = \frac{1}{\pi}E_{n-1}(K)_L =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\mathcal{K}_{r,\alpha}}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots; \;\; 0 < r < 1, \;\; 0 < r \le \alpha \le 2 - r),$$

где

$$\mathcal{K}_{r,\alpha} = \sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Некоторые точные результаты наилучших приближений дифференцируемых в смысле Вейля периодических функций тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ в пространстве L_2 получены М.Г.Есмаганбетовым [15]. Воспользуясь соотношением (0.0.2), при помощи равенства Парсеваля в силу свойств ортогональности тригонометрической системы легко получить равенство [15]

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) := E(f^{(\alpha)}; \mathcal{T}_{2n-1}) =$$

$$= \inf\left\{\left\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\right\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2}, \tag{0.0.5}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$. При изучении экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации функций $f \in L_2$ на протяжении всей диссертации результат (0.0.5) является нашим основным инструментом.

Всюду далее для характеризации структурных свойств функции $f \in L_2$, мы пользуемся понятием модуля непрерывности порядка m. Равенством

$$\omega_m(f; t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : \ |h| \leq t\Big\}, \tag{0.0.6}$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

– конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h, определим модуль непрерывности порядка m функции $f \in L_2$. Воспользуясь разложением (0.0.1) и равенством Парсеваля, легко доказать, что для нормы разности порядка m справедливо равенство

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 := \left\|\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(\cdot + (m-k)h)\right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(2\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m} = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m.$$

Отсюда, учитывая определение (0.0.6) модуля непрерывности, получаем

$$\omega_m^2(f; t) = \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 : \ |h| \leq t\Big\} =$$

$$= 2^m \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m:\ |h|\le t\right\}.$$

Во втором параграфе первой главы решена задача о нахождении точных неравенств типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими полиномами посредством модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(\alpha)};t)$ в пространстве Гильберта L_2 и даны некоторые её приложения.

Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина в пространстве L_2 понимают соотношения вида

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\gamma}{n}\right)_{L_2},\quad f\in L_2^{(r)},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \gamma>0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через модуль непрерывности m-го порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной, а константа χ зависит от r и m, но не зависит от n и функции f. Исследуя задачу отыскания точных значений константы χ в неравенстве Джексона – Стечкина, Н.И.Черных [51] отметил, что для характеристики величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)};\pi/n)_2$, а функционал

$$\Phi_m(f^{(r)};\pi/n) = \left\{\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\omega_m^2(f^{(r)},t)\sin nt dt\right\}^{1/2},$$

поскольку для этого функционала выполняется соотношение

$$\Phi_m(f^{(r)};\pi/n) = \left\{\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\omega_m^2(f^{(r)},t)\sin nt dt\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\frac{n}{2}\cdot\omega_m^2(f^{(r)};\pi/n)\cdot\int_0^{\pi/n}\sin nt dt\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{n}{2}\cdot\omega_m^2(f^{(r)};\pi/n)\cdot\frac{2}{n}\right\}^{1/2} = \omega_m(f^{(r)};\pi/n).$$

Таким образом, функционал $\Phi_m(f^{(r)};\pi/n)$ предпочтительнее джексоновского функционала $\omega_m(f^{(r)};\pi/n)$. Поэтому с целью оптимизации констант в неравенствах Джексона – Стечкина, как правило, вводят в рассмотрение различные аппроксимационные характеристики, содержащие усреднённые значения с некоторым весом модулей непрерывности m-го порядка. Докажем одно утверждение, в котором появление весовой функции $\varphi(t) := \dfrac{2}{h^2}(h-t)$, $0 \le t \le h$ в усреднённом значении модуля непрерывности m-го порядка от производной $f^{(\alpha)}(t)$ является неизбежным.

Теорема 1.2.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого числа h, удовлетворяющего условию $0 < h \le \pi/n$, справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m/2}} = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}.$$

Основным результатом второго параграфа является

Теорема 1.2.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$; $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \le 2$; $\varphi(t) \ge 0$ – произвольная суммируемая на отрезке $[0,h]$ $(0 < h \le \pi/n)$ функция. Если при некотором $\alpha \ge 1, 1/\alpha < p \le 2$ при всех $t \in [0,h]$ выполняется дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi^{'}(t) \ge 0, \tag{0.0.7}$$

то справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\displaystyle\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{0.0.8}$$

Существует функция $f_0(x) \in L_2^{(\alpha)}$, $f_0^{(\alpha)}(x) \ne const$, которая реализует верхнюю грань в (0.0.8).

Отметим, что равенство (0.0.8) в разное время при различных значениях указанных в нём параметров изучали многие математики, наиболее важные результаты которых перечислим в следующем порядке:

1) Н.И.Черных [51]:

а) при $m = 1$, $p = 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $h = \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) = \sin nt$;

б) $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $p = 2$, $\alpha = 0$, $h = \pi/(2n)$, $\varphi(t) = \sin(nt/2) + (\sin nt)/2$;

2) Л.В.Тайков [37–39]:

а) $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2$, $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/(2n)$;

б) $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $p = 1$, $h = \pi/n$, $\varphi(t) \equiv 1$,

в) $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2$, $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/n$;

3) А.А. Лигун [23]:

а) $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$;

4) Н. Айнуллоев [1]: $\varphi(t) = \sin^\gamma \beta t$; $0 \leq t \leq h$; $0 \leq \gamma \leq 2r - 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $0 < \beta h \leq \pi$; $p = 2$;

4) В.В. Шалаев [57]: $\varphi(t) = \sin nt$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2/m$, $0 < t \leq \pi/n$;

5) Х. Юссеф [58]: $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2$, $\varphi(t) = \sin(\pi t/h)$; $0 < t \leq h$; $0 < h \leq \pi/n$;

6) М.Ш. Шабозов [54]: $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$; $0 < p \leq 2$; $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq h$; $0 < h \leq \pi/n$;

7) М.Ш. Шабозов, О.Ш. Шабозов [53]:

$\varphi(t) = \sin^\gamma(\pi t/h)$, $\alpha, m, n \in \mathbb{N}$, $1/\alpha < p \leq 2$, $0 < \gamma \leq \alpha p - 1$;

8) С.Б. Вакарчук [8]: $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}+$, $p = 2/m$, $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/(2n)$;

9) М.Г. Есмаганбетов [15]: $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < \beta \leq \pi$; $0 < \gamma \leq \alpha p - 1$; $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/\delta)$, $0 < t \leq \pi/n$;

10) М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов [55]: $\alpha, m, n \in \mathbb{N}$, $1/\alpha < p \leq 2$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$.

Из доказанной теоремы 1.2.2 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.2.1. *Пусть* $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 \leq \gamma \leq \alpha p - 1$, $1/\alpha < p \leq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \geq 1$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) \sin^\gamma(\beta t/h) dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \left(\frac{\beta t}{h} \right) dt \right)^{-1/p}. \qquad (0.0.9)$$

Равенство (0.0.9) ранее другим путём получено в работе [15].

Следствие 1.2.2. *Пусть* $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 < p \leq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m n^{\alpha - 1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p (f^{(\alpha)}; t) dt \right)^{1/p}} = \left\{ \int_0^{nh} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \qquad (0.0.10)$$

В частности, из (0.0.10) при $h = \pi/n$ *следует равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m n^{\alpha - 1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/n} \omega_m^p (f^{(\alpha)}; t) dt \right)^{1/p}} = \left\{ \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[p]{4\sqrt{\pi}}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1 \right)}{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2} \right)} \right\}^{1/p},$$

где $\Gamma(u)$ *– известная гамма-функция Эйлера.*

Отметим, что равенство (0.0.10) при целых α ранее получено в работе М.Ш.Шабозова [54]. Указанное равенство при $p = 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$ ещё ранее было установлено Н.Айнуллоевым [2].

Следствие 1.2.3. *Пусть выполнены все условия следствия 1.2.2. Тогда при* $p = 1/m$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^{2m} n^{\alpha - m} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^{1/m} (f^{(\alpha)}; t) dt \right)^m} = \left(1 - \cos \frac{nh}{2} \right)^{-m}.$$

Из этого равенства, в частности при $h = \pi/n$, имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\alpha-m}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)};t)dt\right)^m} = \frac{1}{4^m}.$$

Следствие 1.2.4. *Пусть $\varphi(t) \equiv t$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 < p \leq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{2^m n^{\alpha-2/p}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{h} t\,\omega_m^{p}(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

Отсюда, в частности полагая $h = \pi/n$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\alpha-2m}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} t\,\omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)};t)dt\right)^m} = \frac{1}{8^m}.$$

В третьем параграфе первой главы доказывается неравенство Колмогорова для дробных производных и даются некоторые его применения.

В 1939 г. А.Н.Колмогоров [19] сформулировал и решил следующую задачу: даны положительные числа A_0 и A_r, требуется найти точную верхнюю грань норм $\|f^{(k)}\|_C(1 \leq k \leq r-1)$ по всем функциям $f \in L^{(r)}(-\infty, +\infty)$, для которых выполняются неравенства

$$\|f\|_C := \|f\|_{C(-\infty,+\infty)} \leq A_0, \quad \|f^{(r)}\|_\infty := \|f^{(r)}\|_{L_\infty(-\infty,+\infty)} \leq A_r$$

Решение сформулированной задачи даёт

Теорема Колмогорова [19]. *Для любой функции $f \in L^{(r)}(-\infty, +\infty)$ $(r = 2, 3, \ldots)$, у которой норма $\|f\|_C$ конечна, при каждом $k = 1, 2, \ldots, r-1$ выполняется неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_C \leq C_{r,k}\|f\|_C^{1-k/r}\|f^{(r)}\|_\infty^{k/r}, \tag{0.0.11}$$

где
$$C_{rk}=K_{r-k}/K_r^{1-k/r},\quad K_m=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(m+1)}}{(2\nu+1)^{m+1}}$$

– константы Фавара. Неравенство (0.0.11) обращается в равенство для функции
$$f(t)=\gamma\cdot\frac{4}{\pi\lambda^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\lambda(t+a)-\pi r/2\right]}{(2\nu+1)^{r+1}},$$

где a,γ – любые числа, а λ – любое положительное число.

В пространстве $L_1^{(r)}(-\infty,+\infty)$ $(r=2,3,\ldots)$ неулучшаемый аналог неравенства (0.0.11) доказал Е.М.Стейн [31]
$$\|f^{(k)}\|_{L_1[0,2\pi]}\leq C_{r,k}\|f\|_{L_1[0,2\pi]}^{1-k/r}\|f^{(r)}\|_{L_1[0,2\pi]}^{k/r},$$

$k=1,2...,r-1$, где C_{rk} определена в (0.0.11), $C_{r,k}=K_{r-k}/K_r^{1-k/r}$.

В диссертационной работе аналогичное неравенство доказано для произвольной функции $f\in L_2^{(\alpha)}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, с точной константой $C_{\alpha k}\equiv 1$.

Теорема 1.3.1. *Пусть функция $f\in L_2^{(\alpha)}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$ и пусть $\gamma>0$ – произвольное число, удовлетворяющее условию $0<\gamma<\alpha$.*

Тогда имеет место неравенство
$$\|f^{(\gamma)}\|_2\leq\|f\|_2^{1-\gamma/\alpha}\|f^{(\alpha)}\|_2^{\gamma/\alpha}. \tag{0.0.12}$$

Знак равенства здесь имеет место для функций вида $f(t)=b\cos n(t+a)$.

Непосредственным вычислением проверяется, что для функции
$$f(t)=b\cos n(t+a),\ n\in\mathbb{N},\ a,b\in\mathbb{R}$$

в (0.0.12) имеет место знак равенства. Из теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *Для произвольной функции $f\in L_2^{(\alpha)}$ при $0<\gamma<\alpha$, $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}_+$ справедливо неравенство*
$$E_{n-1}(f^{(\gamma)})_{L_2}\leq\left(E_{n-1}(f)\right)_{L_2}^{1-\gamma/\alpha}\left(E_{n-1}(f^{(\alpha)})\right)_{L_2}^{\gamma/\alpha}. \tag{0.0.13}$$

Дадим некоторые применения доказанных неравенств (0.0.12) и (0.0.13). Так как для функции $f\in L_2^{(\alpha)}$ $(\alpha\in\mathbb{R}_+)$ все дробные производные $f^{(\gamma)}$

$(0 < \gamma \leq \alpha)$ или $f^{(\alpha-\gamma)}(0 < \gamma \leq \alpha)$ принадлежать согласно неравенству (0.0.13) пространству L_2, то представляет несомненный интерес изучение поведения величины $E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})$ на классе $L_2^{(\alpha)}$. Заметим, что если в неравенстве (0.0.13) число γ поменять на $\alpha-\gamma$, то мы получим

$$E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})_{L_2} \leq \left(E_{n-1}(f)\right)_{L_2}^{\gamma/\alpha}\left(E_{n-1}(f^{\alpha})\right)_{L_2}^{1-\gamma/\alpha} \qquad (0.0.13)'$$

С использованием неравенства $(0.0.13)'$ легко доказывается

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$; $0 < h \leq \pi/n; \gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$; $0 < \gamma \leq \alpha$, φ – *неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} \qquad (0.0.14)$$

а) если, в частности, $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 1/m$, $0 < h \leq \pi/n$, $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < \gamma \leq \alpha$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m}} = \left(\frac{2}{n}\sin^2\frac{nh}{4}\right)^{-m}. \qquad (0.0.15)$$

В частности,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma-m}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m}} = 1;$$

б) если $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2/m$, $0 < h \leq \pi/n$, $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < \gamma \leq \alpha$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m}} = \left\{\frac{n}{nh-\sin nh}\right\}^{m}. \qquad (0.0.16)$$

В частности,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^{\gamma-m}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^m}=\frac{1}{\pi^m}.$$

Равенства (0.0.15) и (0.0.16) из правой части (0.0.14) получаются непосредственным вычислением при $p=1/m$, $p=2/m$ $(m\in\mathbb{N})$ и $\varphi(t)\equiv 1$. Аналогичные результаты имеют место при $p=1/m$, $p=2/m$ $(m\in\mathbb{N})$ и $\varphi(t)\equiv t$.

Следует отметить, что из равенства (0.0.14), в частности, вытекают результаты М.Ш.Шабозова [54], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [55] в случае $\alpha\equiv\gamma\in\mathbb{N}$ и с произвольным неотрицательным суммируемым весом $\varphi(t)$, $0\le t\le h$ $(0<h\le\pi/n)$. Равенство (0.0.16) является своеобразным обобщением результата С.Б.Вакарчука [7], ранее доказанном для множества функций $f\in L_2^{(\alpha)}$ и значений $\alpha\in\mathbb{N}$.

Четвёртый завершающий параграф первой главы посвящён вычислению верхних граней наилучших полиномиальных приближений некоторых классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве L_2.

В экстремальных задачах теории приближения периодических функций $f\in L_2$ с заданным классом функций $\mathfrak{M}=\{f\}\subset L_2$ часто связывают следующие его характеристики аппроксимации:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}:=E(\mathfrak{M};\mathcal{T}_{2n-1})=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f-T_{n-1}\|_{L_2} \tag{0.0.17}$$

— наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$;

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}=\sup\left\{\|f\|_{L_2}: f\in\mathfrak{M}_n^{\perp}\right\}, \tag{0.0.18}$$

где $\mathfrak{M}_n^{\perp}$ — множество функций $f\in\mathfrak{M}$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi}f(t)\begin{Bmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{Bmatrix}dt=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Помимо величин (0.0.17) и (0.0.18), часто будет полезным отыскание величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A \in \mathscr{L}_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2}, \qquad (0.0.19)$$

где $\mathscr{L}_n$ – совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы порядка $n-1$.

Из приведённых выше аппроксимационных величин сразу следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \leq \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \leq \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}).$$

Задача состоит в отыскании значения величин (0.0.17) - (0.0.19) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждения теорем и их следствий в предыдущем параграфе 1.2.

Пусть $\Phi(t),\ 0 \leq t < \infty$ — непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $\alpha > 0$ и $0 < h \leq 2\pi$. Введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{m,p}^{(\alpha)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq 1 \right\},$$

$$W_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h) \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq 1 \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h) \right\},$$

$$\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)=\left\{f\in L_2^{(\alpha)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)_{L_2}dt\right)^{m/2}\leq 1\right\},$$

$$\bar{W}_m^{(\alpha)}(h,\Phi)=\left\{f\in L_2^{(\alpha)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)_{L_2}dt\right)^{m/2}\leq \Phi(h)\right\}.$$

Имеет место следующая общая

Теорема 1.4.1 *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\alpha>0$ *и* $0<p\leq 2$. *Тогда при любом* $h\in(0,\pi/n]$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=2^{-m/2}n^{-\alpha}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}\Phi(h).$$

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=2^{-m}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h)=$$

$$=2^{-m-1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh/2}\sin^{mp}tdt\right)^{-1/p}\Phi(h);$$

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=2^{-m}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h)=$$

$$= 2^{-m-2/p} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh/2} t \sin^{mp} t dt \right)^{-1/p} \Phi(h),$$

Из утверждения теоремы 1.4.1 немедленно следует

Следствие 1.4.1. *При выполнении всех условий теоремы 1.4.1 имеют место равенства*

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}\left(\frac{\pi}{n},\Phi\right)\right)_{L_2} = 2^{-m} n^{-\alpha} \pi^{1/2p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция Эйлера. Аналогичным образом имеем

$$E_{n-1}\left(W_{m,1/m}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,1/m}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,1/m}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \left\{ \frac{8}{(nh)^2} \left(\sin\frac{nh}{2} - \frac{nh}{2}\cos\frac{nh}{2} \right) \right\}^{-m} \Phi(h), \ 0 < nh \leq \pi.$$

В частности, при $h = \pi/n$ имеем

$$E_{n-1}\left(W_{m,1/m}^{(\alpha)}(\pi/n,\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,1/m}^{(\alpha)}(\pi/n,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,1/m}^{(\alpha)}(\pi/n,\Phi)\right)_{L_2} = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^m \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Напомним, что в 1910 году А.Лебегом [22] было впервые дано понятие модуля непрерывности ω для функций $f \in C[0, 2\pi]$ и в терминах указанной характеристики гладкости получены оценки коэффициентов Фурье $a_k := a_k(f)$ и $b_k := b_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций в различных пространствах рассматривались в работах многих математиков (см., например, [32] и приведённую там литературу). Для классов функций, введённых в четвёртом параграфе, данный вопрос также представляет определённый интерес. В самом деле, из утверждения теоремы 1.4.1 сразу получаем

Следствие 1.4.2 *Если выполнены все условия теоремы 1.4.1, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right\}=$$

$$=2^{-m}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h), \tag{0.0.20}$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right\}=$$

$$=2^{-m+1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h), \tag{0.0.21}$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ – соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f. В частности, при $h=\pi/n$ из (0.0.20) и (0.0.21) вытекают равенства

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W_{m,p}^{(\alpha)}(\pi/n,\Phi)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W_{m,p}^{(\alpha)}(\pi/n,\Phi)\right\}=$$

$$=2^{-m}n^{-\alpha}\pi^{1/(2p)}\left\{\frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)}\right\}^{1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right);$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}_{m,1/m}^{(\alpha)}(\pi/n,\Phi)\right\}=$$

$$=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}_{m,1/m}^{(\alpha)}(\pi/n,\Phi)\right\}=\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^m\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Вторая глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих L_2.

В первом параграфе приводятся необходимые определения и факты, нужные нам в последующем изложения дальнейших результатов.

Пусть X – банахово пространство, S – единичный шар в нём, $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $L_n \subset X$ – n-мерное линейное подпространство, $L^n \subset X$ – подпространство коразмерности n, $\Lambda : X \to L_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n, $\Lambda^{\perp} : X \to L_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования X на подпространство L_n. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{\inf\Big\{\|f-\varphi\|_X :\ \varphi \in L_n\Big\} :\ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X \overset{def}{=} \inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\Lambda(f)\|_X :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} :\ \Lambda X \subset L_n\Big\} \qquad (0.0.22)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор Λ^*, $\Lambda^* X \subset L_n$, если он существует, реализующий в (0.0.22) точную нижнюю грань, то есть такой, что

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\Big\{\|f-\Lambda^*(f)\|_X :\ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} :\ L_{n+1} \subset X\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{E(\mathfrak{M}, L_n) :\ L_n \subset X\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_X :\ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\right\} :\ L^n \subset X\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X\right\}$$

называют соответсвенно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, линейным и проекционным n-поперечниками.*

Указанные аппроксимационные величины монотонно убывают по n и между ними в пространстве L_2 выполняются соотношения [21, 30]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \le d^n(\mathfrak{M}; L_2) \le d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2).$$

Полученные во втором и четвёртом параграфах первой главы результаты обеспечивают возможность вычисления точных значений всех перечисленных выше n-поперечников для классов функций $\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)$, $W_{m,p}^{(\alpha)}(h)$ и $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$.

Во втором параграфе второй главы рассматривается задача об отыскании точной константы в обобщённом неравенсве Джексона – Стечкина.

Пусть $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ функция. Через $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi; h)_p$, где $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \le \pi$, обозначим среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности $\omega_m(f^{(\alpha)}; t) := \omega_m(f^{(\alpha)}; t)_{L_2[0,2\pi]}$ порядка m от дробной производной $f^{(\alpha)}(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ с неотрицательным суммируемым весом $\varphi(t)$:

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)\varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (0.0.23)$$

При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \chi n^{-\alpha}\omega_m(f^{(\alpha)}, t/n), \qquad (0.0.24)$$

где $t > 0$, $f \in L_2^{(\alpha)}$, $m \in \mathbb{N}$, $f^{(0)} \equiv f$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, многими математиками в разное время рассматривались различные экстремальные характеристики, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ при $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (см., например, [1, 2, 4–12, 15, 17, 23, 38, 39, 51–55, 57, 58]) и приведенную там литературу.

В связи с отысканием точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина (0.0.24), следуя замечаниям Н.И.Черных [51], отметим, что поскольку функционал (0.0.23) меньше джексоновского функционала $\omega_m(f^{(\alpha)}; t)$, то есть

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)\varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p} \le$$

$$\leq \left(\omega_m^p(f^{(\alpha)};h)\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p} = \omega_m(f^{(\alpha)};h), \qquad (0.0.25)$$

то, по-видимому, для оценки экстремальных аппроксимационных характеристик, вводимых нами далее, и для выявления структурных величин наилучших полиномиальных приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций f в L_2 функционал (0.0.23) более естественен. Так, например, в работах $[1, 15, 55]$ в подтверждение гипотезы Черных в качестве веса была рассмотрена функция $\varphi(t) = \sin^\gamma \dfrac{\beta}{h}t$ $(0 < \beta \leq \pi;\ 0 < h \leq \pi/n,\ n \in \mathbb{N};\ 0 \leq \gamma \leq \alpha p - 1;\ \alpha, p \in \mathbb{R}_+,$ $\alpha p \geq 1)$ и осреднённая экстремальная характеристика использовалась для получения точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина. Различные весовые функции также рассматривались в работах $[2, 6, 8, 11, 12, 23, 55, 57, 58]$.

Таким образом, осреднённый в p-й степени модуль непрерывности m-го порядка (0.0.23) является наиболее общим функционалом при отыскании точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина (0.0.24). Всюду далее в этом параграфе $L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)$ – множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, для которых выполняется неравенство $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq 1$.

Очевидно, что в силу свойства монотонности модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(\alpha)}; t)$ для произвольной суммируемой весовой функции $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$ с учётом (0.0.25) из (0.0.23) вытекает неравенство

$$C\omega_m(f^{(\alpha)}; h) \leq W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq \omega(f^{(\alpha)}; h),$$

где $C = C(m, \alpha, p, h)$ – положительная константа, которая зависит только от значений указанных параметров в скобке.

Отыскание наименьшей константы в неравенстве Джексона – Стечкина (0.0.24) равносильно задаче вычисления точной верхней грани

$$\chi_{m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathcal{T}_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f, \mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)}\right\}. \qquad (0.0.26)$$

Приведём решение задачи о минимизации величины (0.0.26) по всем подпространствам $\mathcal{T}_N$ размерности N, то есть вычислим значения инфимума величины (0.0.26) относительно всего множества приближающихся подпространств $\mathcal{T}_N \subset L_2$ размерности N :

$$\chi_{N,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \inf\left\{\chi_{m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathcal{T}_N\right) : \mathcal{T}_N \subset L_2\right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{E(f, \mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)} \right\} : \mathcal{T}_N \subset L_2 \right\}.$$

Положим также

$$E_{N-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h, \varphi), L_2\right) = \sup\left\{\|f - S_{N-1}(f)\| : f \in L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)\right\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть* $h, p \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\chi_{m,n,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = d_n\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi), L_2\right).$$

Теорема 2.2.2 *Пусть весовая функция* φ, *заданная на отрезке* $[0, h]$, *является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой. Если при некоторых* $\alpha \geq 1$, $1/\alpha \leq p \leq 2$ *и любых* $t \in [0, h]$ *выполнено неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - \varphi'(t) \geq 0,$$

то при всех $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < h \leq \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\chi_{2n,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \chi_{2n-1,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = E_n\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi), L_2\right) =$$

$$= \lambda_{2n}\left(L_2^{(\alpha)}(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi) L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi), L_2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^\alpha}\left\{\int_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^h \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *и* $\Pi_n(\cdot)$. *Все* n*-поперечники реализуются частными суммами Фурье* $S_{n-1}(f; t)$.

Из теоремы 2.2.2 в качестве следствия получаем ряд утверждений.

Следствие 2.2.1. *Пусть* $\varphi(t) = \sin^\gamma \dfrac{\beta}{h}t$; $0 \leq \gamma \leq \alpha p - 1$, $\alpha \geq 1$, $1/\alpha < p \leq 2$. *Тогда имеют место равенства [15]*

$$\chi_{2n,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \chi_{2n-1,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) =$$

$$= \lambda_{2n}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-\alpha}\left(\int\limits_0^h \sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p},$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников.

В третьем параграфе второй главы приведено решение задачи С.Б.Стечкина для класса функций $\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H^{\omega_m}$.

Пусть $W_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m} := W_p^{(\alpha)}H^{\omega_m}(\varphi;h)$ – множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ таких, что для произвольной неотрицательной весовой функции $\varphi(t)$ $(0 \le t \le h$, $0 < h \le \pi/n)$ выполнялось условие

$$W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p = \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p} \le \omega(h),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неотрицательная неубывающая полуаддитивная на $[0,\pi]$ функция такая, что $\omega(0) = 0$. Очевидно, что существует константа $C = C(m,\alpha,p)$, зависящая от указанных в скобке чисел m,α,p такая, что

$$C\omega_m(f^{(\alpha)};h) \le W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p \le \omega_m(f^{(\alpha)};h).$$

Последнее неравенство лишь указывает на то, что выше введенный класс $W_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m}$ отличается от класса

$$\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m} = \left\{f \in L_2^{(\alpha)} : \omega_m(f^{(\alpha)};h) \le \omega(h)\right\}$$

только на некоторое постоянное число, а потому функционал $W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p$ в экстремальных задачах теории приближений более предпочтительнее для характеристики наилучших приближений функций.

Задача о вычислении поперечников класса $\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m}$ была поставлена С.Б.Стечкиным на Международной конференции по теории приближений функций в 1975 г. в городе Калуге (см. Труды Международной конференции по теории приближения функций. Калуга, 24-28 июля 1975 г. Из-во "Наука". М.:Наука, 1977, стр.431).

В следующей теореме приводится решение задачи С.Б.Стечкина для модуля непрерывности $\omega(f^{(\alpha)},t)_2$ в L_p - норме ($1/\alpha < p \le 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$).

Теорема 2.3.1 *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, $N = 2n-1$ *или* $N = 2n$. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi};L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi};L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m};L_2\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\omega(h),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников Бернштейна* $b_n(\cdot)$, *Гельфанда* $d^n(\cdot)$, *Колмогорова* $d_n(\cdot)$, *линейного* $\delta_n(\cdot)$, *проекционного* $\Pi_n(\cdot)$.

Из теоремы 2.3.1 в качестве следствия можно вывести ряд утверждений.

Следствие 2.3.1 *Пусть* $\varphi_*(t) = \sin^\gamma \frac{\beta}{h}t;\ 0 < t \le h,\ 0 < h \le \pi/n, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 1,\ 1/\alpha < p \le 2$. *Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi_*};L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi_*};L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi_*}\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha}\cdot\left(\frac{\int\limits_0^h \sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt}\right)^{1/p}\omega(h). \quad (0.0.27)$$

В частности, из (0.0.27) при $h = \pi/n$, $\beta = \pi$ *имеем:*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*};L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*};L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^{\pi/n}\sin^\gamma nt dt}{\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma nt dt}\right)^{1/p}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{mp}{2}+\gamma+1\right)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(\frac{mp+\gamma+1}{2}\right)}\right)^{1/p}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (0.0.28)$$

где $\Gamma(u)$ *– гамма-функция Эйлера.*

В свою очередь, из равенства (0.0.28) для весовой функции $\varphi_*(t) = \sin nt$, *то есть когда* $\gamma = 1,\ p = 2$, *получаем*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}; L_2\right) =$$
$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}\right) = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теперь приводим обобщение теоремы 2.2.1 для класса $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi}$, то есть когда величина

$$W_m(f^{(\alpha)};\varphi)_{p,h} = \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p} \le \omega(h).$$

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ 1/\alpha < p \le 2,\ 0 < h \le \pi/n$ *и выполняется дифференциальное неравенство (0.0.7). Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,p,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,p,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$
$$= \lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,h}H^{\omega_m}_{\varphi}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,h}H^{\omega_m}_{\varphi}, L_2\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников.*

Следствие 2.3.2. *Пусть* $m \ge 1,\ \alpha \ge 0, p = 2/m, 0 < h \le \pi/n, N = 2n-1$ *или* $N = 2n, \varphi_{**} = \sin nt, 0 \le t \le h$. *Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$

$$= \lambda_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,h}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,h}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) =$$

$$= \left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{-m/2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot \omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (0.0.29)$$

В частности, из (0.0.29) при $h = \pi/n$ *имеем:*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$

$$= \lambda_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,\pi/n}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,\pi/n}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Следствие 2.3.3. *Пусть* $m \geq 1,\ \alpha \geq 0, p = 2/m, 0 < h \leq \pi/n, N = 2n-1$ *или* $N = 2n, \varphi_{***} = \cos nt, 0 \leq t \leq h$. *Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$

$$= \lambda_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,h}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,h}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{\sin^2(nh/2)}\right)^{m/2} \frac{1}{n^\alpha}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (0.0.30)$$

В частности, из (0.0.30) при $h = \pi/n$ *имеем:*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$

$$= \lambda_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,\pi/n}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{2/m,\pi/n}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) = \frac{(\sqrt{3})^m}{n^\alpha}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В четвёртом параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников классов функций $\bar{W}^{(\alpha)}_m(h)$, $W^{(\alpha)}_{m,p}(h)$, $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h)$. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.4.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $0 < p \leq 2$ *и для числа* h *выполнено условие* $0 < nh \leq \pi$. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\bar{W}^{(\alpha)}_m(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\bar{W}^{(\alpha)}_m(h), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-\alpha} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2},$$

$$\lambda_{2n-1} \left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2 \right) = \lambda_{2n} \left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2 \right) =$$

$$= 2^{-m-1/p} n^{-\alpha} \left(\frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh/2} (\sin t)^{mp} dt \right)^{-1/p},$$

$$\lambda_{2n-1} \left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2 \right) = \lambda_{2n} \left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2 \right) =$$

$$= 2^{-m-2/p} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh/2} (\sin t)^{mp} dt \right)^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из поперечников* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

ГЛАВА I

Наилучшее полиномиальное приближение дифференцируемых периодических функций в L_2

§1.1. Обозначения и предварительные факты, используемые в дальнейшем

Всюду далее примем следующие обозначения: $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ – множество всех действительных чисел; $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ – множество положительных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Через $L_p := L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$ обозначим множество 2π-периодических суммируемых в p-й степени функций f с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[0,2\pi]} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty, & \text{если } 1 \le p < \infty \\ ess\sup\{|f(x)| : 0 \le x \le 2\pi\} < \infty, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ обозначим множество 2π-периодических суммируемых с квадратом в смысле Лебега действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Под $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ $(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2)$ будем понимать множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ $(r \in \mathbb{N})$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2. Множество всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$ (размерности $\le 2n-1$) обозначим

$$\mathcal{T}_{2n-1} := \left\{T_{n-1} : \ T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \tag{1.1.1}$$

величина её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := E(f, \mathcal{T}_{2n-1}) = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\| :\ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)\right\}^{1/2}, \qquad (1.1.2)$$

где

$$S_{n-1}(f,x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2$.

В дальнейшем, полагая $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f), k \geq n$, соотношение (1.1.2) запишем в более удобной для нас форме

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}.$$

В соответствии с введёнными обозначениями, всюду далее под $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+$) будем понимать множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$ $(f^{(0)} = f)$, определяемая равенством

$$f^{(\alpha)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right). \qquad (1.1.3)$$

Пусть $W^{(\alpha)} := W^{(\alpha)}[0,2\pi]$ – класс непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, имеющих α-ю производную в смысле Вейля, удовлетворяющих условию $ess\sup\left\{|f^{(\alpha)}(x)| :\ 0 \leq x \leq 2\pi\right\} \leq 1$, а $\widetilde{W}^{(\alpha)}$ $(\alpha > 0)$ – класс непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, для которых $ess\sup\left\{|\widetilde{f}^{(\alpha)}(x)| : 0 \leq x \leq 2\pi\right\} \leq 1$, где

$$\widetilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(-a_k(f)\sin kx + b_k(f)\cos kx\right)$$

– функция, тригонометрически сопражённая с $f(x)$.

Хорошо известно [34], что функция $f(x)$ принадлежит классу $W^{(\alpha)}$ в том и только том случае, если она представляется в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} K_\alpha(t-x)\varphi(t)dt,$$

где ядро $K_\alpha(t)$ определяется равенством

$$K_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$ess\sup\{|\varphi(t)|:\ 0 \le t \le 2\pi\} \le 1, \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)dt = 0.$$

Аналогичным образом будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $\widetilde{W}^{(\alpha)}$, если она представляется в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{K}_\alpha(t-x)\varphi(t)dt,$$

где

$$\widetilde{K}_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\sin\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$ess\sup\{|\varphi(t)|:\ 0 \le t \le 2\pi\} \le 1, \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)dt = 0.$$

Задача о нахождении точного значения величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(\alpha)})_{C[0,2\pi]} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_C:\ f \in W^{(\alpha)}\right\}, \tag{1.1.4}$$

где

$$E_{n-1}(f)_C = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_{C[0,2\pi]}:\ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\}$$

впервые рассматривалась Ж.Фаваром в 1936 г. при целом α. Именно для целого α Ж.Фавар [48, 49] доказал, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(\alpha)})_{C[0,2\pi]} = \sup\left\{\|f\|_C:\ f \in W^{(\alpha)}, f \perp T_{n-1}\right\} = \frac{4\mathcal{K}_\alpha}{\pi n^\alpha}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots, \alpha = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $f \perp T_{n-1}$ означает, что

$$\int_0^{2\pi} f(t) \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} dt = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

а константа $\mathcal{K}_\alpha$ определяется равенством

$$\mathcal{K}_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(\alpha-1)}}{(2\nu+1)^{\alpha+1}},$$

причём при целых α нетрудно подсчитать, что

$$\mathcal{K}_0 = 1,\ \mathcal{K}_1 = \pi/2,\ \mathcal{K}_2 = \pi^2/8,\ \mathcal{K}_3 = \pi^3/24, \ldots$$

$$1 = \mathcal{K}_0 < \mathcal{K}_2 < \cdots < 4/\pi < \cdots \mathcal{K}_3 < \mathcal{K}_1 = \pi/2.$$

Ж.Фаваром [49] и независимо от него Н.И.Ахиезером и М.Г.Крейном [3] было также найдено точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\widetilde{W})^{(\alpha)})_{C[0,2\pi]} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_C :\ f \in \widetilde{W}^{(\alpha)}\right\}, \tag{1.1.5}$$

снова при целом α. Эти исследования были продолжены Б.Надем [27], С.М.Никольским [28,29], В.К.Дзядыком [13,14], С.Б.Стечкиным [33–35], Сунь Юн-шеном [36]. Первый результат, относящийся к задаче (1.1.4), при дробном α $(0 < \alpha < 1)$ принадлежит В.К.Дзядыку [13], который доказал, что если $f \in W^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha < 1)$, то

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(\alpha)})_{C[0,1]} = \sup\left\{\|f\|_{C[0,2\pi]} : f \in W^{(\alpha)}, f \perp T_{n-1}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K_\alpha)_L = \frac{4\mathcal{K}_\alpha}{\pi n^\alpha},$$

где

$$E_{n-1}(K_\alpha)_L = \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int_0^{2\pi} |K_\alpha(t) - T_{n-1}(t)| dt,$$

а константа

$$\mathcal{K}_\alpha = \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{\alpha+1}} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Объединяя оба случая (1.1.4.) и (1.1.5), С.Б.Стечкин [34] ввёл в рассмотрение класс $W^{(r)}(\alpha)$ всех непрерывных периодических функций f, представимых в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(t-x)\varphi(t)dt,$$

где

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

$r > 0$, α – любое вещественное число, а $\varphi(t)$ – существенно ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая тем же самым условиям:

$$ess\sup\{|\varphi(t)| : 0 \le t \le 2\pi\} \le 1, \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)dt = 0.$$

Легко видеть, что $W^{(r)}(r) = W^{(r)}$, а $W^{(r)}(r+1) = \widetilde{W}^{(r)}$. Рассматривая случай $0 < r \le \alpha \le 2 - r$, где $0 < r < 1$, С.Б.Стечкин доказал, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}(\alpha))_{C[0,2\pi]} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{C[0,2\pi]} : f \in W^{(r)}(\alpha)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\|f\|_{C[0,2\pi]} : f \in W^{(r)}(\alpha), f \perp T_{n-1}\right\} = \frac{1}{\pi}E_{n-1}(K)_L =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\mathcal{K}_{r,\alpha}}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots; \quad 0 < r < 1, \quad 0 < r \le \alpha \le 2 - r)$$

где

$$\mathcal{K}_{r,\alpha} = \sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Отметим, что в некоторых задачах теории функций важную роль играют интегралы дробного порядка, которые впервые были введены Риманом, а затем обобщены Лиувиллем. Указанные интегралы вводятся следующим образом: если $f(x)$ – интегрируемая функция в некотором конечном интервале

(a, b), то формула

$$\mathcal{J}_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

представляет собой оператор, который при натуральном α является α-кратным интегралом от функции $f(x)$, в пределах от a до x. При нецелом $\alpha > 0$ этот оператор принимают за определение интеграла нецелого порядка. Заметим, что

$$\mathcal{J}'_\alpha f(x) = \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt.$$

Другой более удобный, способ рассмотренный нами выше, как мы отметили, принадлежит Вейлю. В этом способе, кроме интегрируемости функции $f(x)$, приходится требовать, чтобы её ряд Фурье не содержал свободного члена, то есть если

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) dt \equiv 0.$$

В таком случае, сохраняя прежнее обозначение для дробного оператора $\mathcal{J}_\alpha f(x)$, при любом $\alpha > 0$ полагаем

$$\mathcal{J}_\alpha f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{(ik)^\alpha} e^{ikx}. \tag{1.1.6}$$

При натуральном α функция (1.1.6) представляет собой α-кратный интеграл от $f(x)$, поскольку

$$\mathcal{J}_\alpha^{(\alpha)} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad \alpha \in \mathbb{N},$$

и нормированная тем, что её среднее значение по периоду равнялось нулю. В этом случае интегральное представление оператора (1.1.6) имеет вид:

$$\mathcal{J}_\alpha f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Phi_\alpha(x-t) f(t) dt, \tag{1.1.7}$$

где ядро $\Phi_\alpha(x)$ определяется равенством

$$\Phi_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos\left(kx - \frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Из представления (1.1.7) при целом $\alpha = r$ и $\alpha = r+1$ сразу получается тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right) \tag{1.1.8}$$

и сопряженный к нему ряд

$$\widetilde{f}(x) \sim \frac{b_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k(f)\cos kt - a_k(f)\sin kt\right). \tag{1.1.9}$$

Отметим, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) < \infty, \quad a_0 \equiv b_0$, то в этом случае ряды (1.1.8) и (1.1.9) являются рядами Фурье функций из $L_2[0, 2\pi]$, причём $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$, то есть мы имеем некоторый унитарный оператор, переводящий функцию $f(t)$ в её сопряжённый вид $\widetilde{f}(t)$.

Точные результаты наилучших приближений дифференцируемых в смысле Вейля периодических функций тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, за исключением работ [15, 34, 36], нам не известны. Воспользовавшись соотношением (1.1.3), при помощи равенства Парсеваля в силу свойств ортогональности тригонометрической системы легко получить равенство

$$\begin{gathered} E_{n-1}(f^{(\alpha)}) := E(f^{(\alpha)}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \\ = \inf\left\{\left\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\right\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} = \\ = \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2}, \end{gathered} \tag{1.1.10}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$.

При изучении экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации функций $f \in L_2$ на протяжении всей диссертации результат (1.1.10) является нашим основным инструментом. Всюду далее, для характеризации структурных свойств функции $f \in L_2$, мы пользуемся понятием модуля непрерывности порядка m. Равенством

$$\omega_m(f;t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|: \ |h| \le t\Big\}, \tag{1.1.11}$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

– конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h, определим модуль непрерывности порядка m функции $f \in L_2$.

Воспользуясь разложением (1.1.1) и равенством Парсеваля, легко доказать, что для нормы разности порядка m справедливо равенство

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 := \left\|\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(\cdot + (m-k)h)\right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(2 \sin \frac{kh}{2}\right)^{2m} = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m.$$

Отсюда, учитывая определение (1.1.11) модуля непрерывности, получаем

$$\omega_m^2(f;t) = \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2: \ |h| \le t\Big\},$$

$$= 2^m \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m: \ |h| \le t\right\}. \tag{1.1.12}$$

Для функции $f_0(x) = a\cos(nx + b)$ из (1.1.12) сразу следует, что

$$\omega_m^2(f_0;t) = \begin{cases} 2^m |a|^2 (1 - \cos nh)^m, & \text{если } \ 0 \le nh \le \pi, \\ 2^{2m} |a|^2, & \text{если } \ nh > \pi. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Аналогичным образом из (1.1.12) для $g_0(x) = a\cos(nx+b) + c\sin(nx+d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\omega_m^2(g_0;t) = \begin{cases} 2^m(a^2+c^2)(1-\cos nh)^m, & \text{если} \ \ 0 \le nh \le \pi, \\ 2^{2m}(a^2+c^2), & \text{если} \ \ nh > \pi. \end{cases}$$

Функции $f_0(x)$ и $g_0(x)$ в дальнейшем используются в качестве экстремалей в решении экстремальных задач в пространстве $L_2[0,2\pi]$. Заметим, что

$$g_0^{(r)}(x) = n^r \left(a\cos\left(nx + b + \frac{r\pi}{2}\right) + c\sin\left(nx + d + \frac{r\pi}{2}\right)\right),$$

и

$$\omega_m^2(g_0^{(r)};t) = \begin{cases} 2^m n^{2r}(a^2+c^2)(1-\cos nh)^m, & \text{если} \ \ 0 \le nh \le \pi, \\ 2^{2m} n^{2r}(a^2+c^2), & \text{если} \ \ nh > \pi. \end{cases}$$

§1.2. Наилучшее полиномиальное приближение функций дифференцируемых в смысле Вейля

В этом параграфе мы решим задачу о нахождении точных неравенств между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими полиномами посредством модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(\alpha)};t)$ в пространстве Гильберта L_2, а также дадим некоторые её приложения.

Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина в пространстве L_2 понимают соотношения вида

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\gamma}{n}\right)_{L_2}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \gamma > 0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через модуль непрерывности m-го порядка самой приближаемой функции или некоторой её производной, а константа χ зависит от r и m, но не зависит от n и функции f. Исследуя задачу отыскания точного значения константы χ в неравенстве Джексона – Стечкина, Н.И.Черных [51] отметил, что для характеристики величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)};\pi/n)_2$, а функционал

$$\Phi_m(f^{(r)};\pi/n) = \left\{\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^2(f^{(r)},t)\sin nt dt\right\}^{1/2},$$

поскольку для этого функционала выполняется соотношение

$$\Phi_m(f^{(r)};\pi/n) = \left\{\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^2(f^{(r)},t)\sin nt dt\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\frac{n}{2}\cdot\omega_m^2(f^{(r)};\pi/n)\cdot\int\limits_0^{\pi/n}\sin nt dt\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{n}{2}\cdot\omega_m^2(f^{(r)};\pi/n)\cdot\frac{2}{n}\right\}^{1/2} = \omega_m(f^{(r)};\pi/n).$$

Таким образом, функционал $\Phi_m(f^{(r)};\pi/n)$ предпочтительнее джексоновского функционала $\omega_m(f^{(r)};\pi/n)$. Поэтому с целью оптимизации констант в неравенствах Джексона – Стечкина, как правило, вводят в рассмотрение различные аппроксимационные характеристики, содержащие усреднённые значения с некоторым весом модулей непрерывности m-го порядка. Докажем одно утверждение, в котором появление весовой функции $\varphi(t) := \dfrac{2}{h^2}(h-t)$, $0 \le t \le h$ в усреднённом значении модуля непрерывности m-го порядка от производной $f^{(\alpha)}(t)$ является неизбежным.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m,n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тогда для любого числа* h, *удовлетворяющего условию* $0 < h \le \pi/n$, *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m/2}} = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \quad (1.2.1)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ получаем

$$\left\|\Delta_t^m(f^{(\alpha)})\right\|^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2\alpha}(1-\cos kt)^m. \quad (1.2.2)$$

Применив, с учётом соотношения (1.2.2), к правой части равенства

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\cos kt = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)(1-\cos kt) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{2-2/m}(f)\rho_k^{2/m}(f)(1-\cos kt)$$

неравенство Гёльдера и используя определение модуля непрерывности m-го порядка, имеем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\cos kt \le \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right)^{1-1/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(1-\cos kt)^m\right)^{1/m} \le$$

$$\le \left(E_{n-1}^2(f)\right)^{1-1/m} \left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(1-\cos kt)^m\right)^{1/m} \le$$

$$\leq \left(E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\right)\cdot\frac{\|\Delta_t^m(f^{(\alpha)})\|^{2/m}}{2n^{2\alpha/m}} \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\cdot\frac{\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)}{2n^{2\alpha/m}}.$$

Таким образом, для произвольной $f\in L_2^{(\alpha)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f)-\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\cos kt \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\cdot\frac{1}{2n^{2\alpha/m}}\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t). \tag{1.2.3}$$

Интегрируя полученное неравенство по аргументу t от 0 до τ, имеем

$$\tau E_{n-1}^2(f)-\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\frac{\sin k\tau}{k} \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\cdot\frac{1}{2n^{2\alpha/m}}\int_0^\tau\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt.$$

Проинтегрировав полученное неравенство ещё раз по переменному τ в пределах от 0 до h, приходим к неравенству

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(f)-\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\frac{1-\cos kh}{k^2}\leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\cdot\frac{1}{2n^{2\alpha/m}}\int_0^h\int_0^\tau\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dtd\tau. \tag{1.2.4}$$

Используя легко доказываемое равенство

$$\int_0^h\int_0^\tau\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dtd\tau=\int_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt,$$

запишем неравенство (1.2.4) в виде

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(f)\leq\frac{h^2}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\left(\frac{2\sin^2(kh/2)}{k}\right)\leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)\cdot\frac{1}{2n^{2\alpha/m}}\int_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt.$$

Умножив на $2/h^2$ обе части последнего неравенства, будем иметь

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(\frac{2}{kh} \sin \frac{kh}{2}\right)^2 \leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f) \cdot \frac{1}{n^{2\alpha/m}} \cdot \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)dt. \tag{1.2.5}$$

В [37] доказано, что

$$\sup\left\{\frac{\sin x}{x} : \ \frac{nh}{2} \leq x < \infty\right\} = \frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2},$$

используя которой, из (1.2.5) находим

$$E_{n-1}(f) \leq$$

$$\leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2} \cdot \frac{1}{2^{m/2} n^{\alpha}} \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)dt\right)^{m/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{2^{m/2} n^{\alpha} E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)dt\right)^{m/2}} \leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.2.6}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части (1.2.6), рассмотрим функцию $f_0(x) := \sin nx \in L_2^{(\alpha)}$. Поскольку

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega_m(f_0^{(\alpha)}, t) = 2^m n^{\alpha} \sin^m \frac{nt}{2}, \quad 0 \leq t \leq \pi/n,$$

непосредственным вычислением убедимся, что

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f_0^{(\alpha)},t)dt\right)^{m/2}=2^{m/2}n^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2},$$

воспользуясь которой, получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}}\frac{2^{m/2}n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m/2}}\geq$$

$$\geq\frac{2^{m/2}n^{\alpha}E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f_0^{(\alpha)},t)dt\right)^{m/2}}=$$

$$=\frac{2^{m/2}n^{\alpha}}{2^{m/2}n^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{m/2}}=\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.2.7}$$

Сопоставляя оценку сверху (1.2.6) и оценку снизу (1.2.7), получаем требуемое равенство (1.2.1).

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{R}_+$; $m,n\in\mathbb{N}$; $0<p\leq 2$; $\varphi(t)\geq 0$ – *произвольная суммируемая на отрезке* $[0,h]$ $(h\in\mathbb{R}_+)$ *функция. Если при некотором* $\alpha\geq 1, 1/\alpha<p\leq 2$ *при всех* $t\in[0,h]$ *выполняется дифференциальное неравенство,*

$$(\alpha p-1)\varphi(t)-t\varphi^{'}(t)\geq 0, \tag{1.2.8}$$

то справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}}\frac{2^m n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.2.9}$$

Существует функция $f_0(x) \in L_2^{(\alpha)}$, $f_0^{(\alpha)}(x) \neq const$, которая реализует верхнюю грань в (1.2.9).

Доказательство. Воспользуемся следующим упрощённым вариантом неравенства Минковского [50, с.32]:

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_0^h |f_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right)^{1/p},$$

где $h > 0,\ 0 < p \leq 2$, и имея в виду, что для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(f^{(\alpha)};t)_2 = 2^m\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(1-\cos kt)^m\right\} \geq$$

$$\geq 2^m\left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(1-\cos kt)^m\right\},$$

получаем

$$\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{\int_0^h \left[2^m\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(1-\cos kt)^m\right]^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int_0^h \left(2^m\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(1-\cos kt)^m[\varphi(t)]^{2/p}\right)^{p/2} dt\right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{2^m\sum_{k=n}^{\infty}\left(k^{\alpha p}\rho_k^p\int_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{2^m\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\left[k^{\alpha p}\int_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right]^{2/p}\right\}^{1/2} :=$$

$$= 2^{m/2}\cdot\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\left[A_{k,m.\alpha,p}(h;\varphi)\right]^2\right\}^{1/2}, \qquad (1.2.10)$$

где
$$A_{k,m.\alpha,p}(h;\varphi)\stackrel{def}{=}\left(k^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p},\quad k\geq n.$$
Теперь докажем, что функция натурального аргумента
$$y(k)=k^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt$$
при выполнении дифференциального неравенства (1.2.8) для значения $k\geq n$ является монотонно возрастающей, а потому
$$\min\Big\{y(k):\ k\geq n\Big\}=y(n)=n^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt. \tag{1.2.11}$$
В самом деле, дифференцируя функцию
$$y(x)=x^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt,$$
имеем:
$$y^{'}(x)=\alpha px^{\alpha p-1}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt+$$
$$+x^{\alpha p}\int\limits_0^h\frac{d}{dx}(1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt. \tag{1.2.12}$$
Легко проверить, что
$$\frac{d}{dx}(1-\cos xt)^{mp/2}=\frac{t}{x}\cdot\frac{d}{dt}(1-\cos xt)^{mp/2}. \tag{1.2.13}$$
Воспользовавшись элементарным тождеством (1.2.13), из соотношения (1.2.12) интегрированием по частям, с учётом неравенства (1.2.8), получаем
$$y'(x)=\alpha px^{\alpha p-1}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt+$$
$$+x^{\alpha p-1}\int\limits_0^h\frac{d}{dt}(1-\cos xt)^{mp/2}t\varphi(t)dt=$$

$$= \alpha p x^{\alpha p-1}\int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt + x^{\alpha p-1}\Bigg\{h\varphi(h)(1-\cos hx)^{mp/2} -$$

$$-\int\limits_0^h (1-\cos tx)^{mp/2} d(t\varphi(t))\Bigg\} = x^{\alpha p-1}\Bigg\{\{(1-\cos hx)^{mp/2}h\varphi(h) +$$

$$+\int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp/2}\Big[\alpha p\varphi(t) - \frac{d}{dt}(t\varphi(t))\Big]dt\Bigg\} = x^{\alpha p-1}\times$$

$$\times\left\{(1-\cos hx)^{mp/2}h\varphi(h) + \int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp/2}\left[(\alpha p-1)\varphi(t) - t\varphi^{'}(t)\right]dt\right\} \geq 0,$$

откуда сразу следует равенство (1.2.11). Теперь, учитывая (1.2.11), из неравенства (1.2.10) имеем следующую неулучшаемую оценку снизу:

$$\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq 2^{m/2}\cdot\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left[A_{k,m.\alpha,p}(h;\varphi)\right]^2\right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq 2^{m/2}\cdot A_{n,m.\alpha,p}(h;\varphi)\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}\left(n^{\alpha p}\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p} E_{n-1}(f) =$$

$$= 2^m n^\alpha E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \qquad (1.2.14)$$

Из неравенства (1.2.14) следует, что для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ имеет место неравенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leq \left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \quad (1.2.15)$$

Докажем, что в неравенстве (1.2.15) на самом деле имеет место знак равенства. Рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(\alpha)}$, для которой

$$E_{n-1}(f_0) = \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\| = \|f_0\| = 1,$$

и согласно (1.1.13) при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$\omega_m(f_0^{(\alpha)};t)_2 = \begin{cases} 2^m n^\alpha \left(\dfrac{\sin nh}{2}\right)^m & \text{если} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ 2^m n^\alpha, & \text{если} \quad nh > \pi, \end{cases}$$

а потому мы имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \neq const}} \frac{2^m \cdot n^\alpha \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{2^m \cdot n^\alpha \cdot E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f_0^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{2^m \cdot n^\alpha \cdot 1}{\left(2^{mp} n^{\alpha p} \int\limits_0^h \left(\sin\dfrac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{2^m \cdot n^\alpha}{2^m n^\alpha \left(\int\limits_0^h \left(\sin\dfrac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \quad (1.2.16)$$

Требуемое равенство (1.2.9) следует из сопоставления неравенств (1.2.15) и (1.2.16), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

Отметим,что равенство (1.2.9) в разное время для разных значений параметра изучали многие математики, наиболее важные результаты которых перечислим в следующем порядке:

1) Н.И.Черных [51]:

а) при $m = 1$, $p = 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $h = \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) = \sin nt$;

б) $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $p = 2$, $\alpha = 0$, $h = \pi/(2n)$, $\varphi(t) = \sin(nt/2) + (\sin nt)/2$;

2) Л.В.Тайков [37–39]:

а) $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2$, $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/(2n)$;

б) $m=1$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, $p=1$, $h=\pi/n$, $\varphi(t)\equiv 1$,

в) $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p=2$, $\varphi(t)\equiv 1$, $0<t\leq\pi/n$;

3) А.А. Лигун [23]:

а) $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, $p=2$, $\varphi(t)\geq 0$, $0<t\leq h$, $0<h\leq\pi/n$;

4) Н. Айнуллоев [1]: $\varphi(t)=\sin^{\gamma}\beta t$; $0\leq t\leq h$; $0\leq\gamma\leq 2r-1$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $\beta>0$, $0<\beta h\leq\pi$; $p=2$;

4) В.В. Шалаев [57]: $\varphi(t)=\sin nt$, $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, $p=2/m$, $0<t\leq\pi/n$;

5) Х. Юссеф [58]: $m=1$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, $p=2$, $\varphi(t)=\sin(\pi t/h)$; $0<t\leq h$; $0<h\leq\pi/n$;

6) М.Ш. Шабозов [54]: $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+$; $0<p\leq 2$; $\varphi(t)\equiv 1$, $0<t\leq h$; $0<h\leq\pi/n$;

7) М.Ш. Шабозов, О.Ш. Шабозов [53]:

$\varphi(t)=\sin^{\gamma}(\pi t/h),\ \alpha,m,n\in\mathbb{N},\ 1/\alpha<p\leq 2,\ 0<\gamma\leq\alpha p-1$;

8) С.Б. Вакарчук [8]: $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}+$, $p=2/m$, $\varphi(t)\equiv 1$, $0<t\leq\pi/(2n)$;

9) М.Г. Есмаганбетов [15]: $m\in\mathbb{Z}_+,\ n\in\mathbb{N},\ 0<p\leq 2,\ 0<\beta\leq\pi$; $0<\gamma\leq\alpha p-1$; $\varphi(t)=\sin^{\gamma}(\beta t/\delta)$, $0<t\leq\pi/n$;

10) М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов [55]: $\alpha,m,n\in\mathbb{N}$, $1/\alpha<p\leq 2$, $\varphi(t)\geq 0$, $0<t\leq h$, $0<h\leq\pi/n$.

Из доказанной теоремы 1.2.2 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.2.1. *Пусть* $\varphi(t)=\sin^{\gamma}(\beta t/h)$, $0<\beta\leq\pi$, $0<t\leq h$, $0<h\leq\pi/n$, $0\leq\gamma\leq\alpha p-1$, $1/\alpha<p\leq 2$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\geq 1$.

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}}\frac{2^m n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\sin^{\gamma}(\beta t/h)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\left(\frac{\beta t}{h}\right)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.2.17)$$

Равенство (1.2.17) является основным результатом работы М.Г.Есмаганбетова [15].

Следствие 1.2.2. *Пусть* $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \le h$, $0 < h \le \pi/n$, $0 < p \le 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \ne const}} \frac{2^m n^{\alpha - 1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{nh} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.2.18}$$

В частности, из (1.2.18) при $h = \pi/n$ *следует равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \ne const}} \frac{2^m n^{\alpha - 1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{\pi} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[p]{4\sqrt{\pi}}} \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)}\right\}^{1/p},$$

где $\Gamma(u)$ *– известная гамма-функция Эйлера.*

Отметим, что равенство (1.2.18) при целых α ранее получено в работе М.Ш.Шабозова [54]. Указанное равенство при $p = 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$ ещё ранее было установлено Н.Айнуллоевым [2].

Следствие 1.2.3. *Пусть выполнены все условия следствия 1.2.2. Тогда при* $p = 1/m$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \ne const}} \frac{2^{2m} n^{\alpha - m} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)}; t) dt\right)^{m}} = \left(1 - \cos\frac{nh}{2}\right)^{-m}.$$

Из этого равенства, в частности, при $h = \pi/n$ *имеем*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \ne const}} \frac{n^{\alpha - m} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)}; t) dt\right)^{m}} = \frac{1}{4^m}.$$

В случае $m=1$ и $\alpha\in\mathbb{N}$ получаем равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}}\frac{n^{\alpha-1}E_{n-1}(f)}{\int\limits_0^{\pi/n}\omega(f^{(\alpha)};t)dt}=\frac{1}{4},$$

полученное ранее непосредственным вычислением Л.В.Тайковым [37].

Следствие 1.2.4. *Пусть $\varphi(t)\equiv t$, $0<t\leq h$, $0<h\leq\pi/n$, $1/\alpha<p\leq 2$, $\alpha\geq 1$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}}\frac{2^m n^{\alpha-2/p}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\,\omega_m^p(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^{nh}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.2.19)$$

Из равенства (1.2.19), в частности, при $h=\pi/n$, имеем:

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}}\frac{2^{m+2/p}n^{\alpha-2/p}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} t\,\omega_m^p(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^{\pi/2}t\left(\sin t\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}.$$

Отсюда, полагая $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}}\frac{n^{\alpha-2m}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} t\,\omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)};t)dt\right)^{m}}=\frac{1}{2^{3m}}. \qquad (1.2.20)$$

В свою очередь, при $m=1$ и $\alpha\in\mathbb{N}$ из (1.2.20) следуют равенства:

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}}\frac{n^{\alpha-2}E_{n-1}(f)}{\int\limits_0^{\pi/n}t\,\omega(f^{(\alpha)};t)dt}=\frac{1}{8}.$$

Приведенные равенства в следующем параграфе обеспечивают возможность вычислить значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка производной $f^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}_+)$.

§1.3. Неравенство Колмогорова для дробных производных и некоторые его применения

В 1939 г. А.Н.Колмогоров [19] сформулировал и решил следующую задачу: даны положительные числа A_0 и A_r, требуется найти точную верхнюю грань норм $\|f^{(k)}\|_C(1 \le k \le r-1)$ по всем функциям $f \in L^{(r)}(-\infty, +\infty)$, для которых выполняются неравенства

$$\|f\|_C := \|f\|_{C(-\infty,+\infty)} \le A_0, \quad \|f^{(r)}\|_\infty := \|f^{(r)}\|_{L_\infty(-\infty,+\infty)} \le A_r$$

Решение сформулированной задачи даёт

Теорема Колмогорова [19]. *Для любой функции* $f \in L^{(r)}(-\infty, +\infty)$ $(r = 2, 3, \ldots)$, *у которой норма* $\|f\|_C$ *конечна, при каждом* $k = 1, 2, \ldots, r-1$ *выполняется неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_C \le C_{r,k}\|f\|_C^{1-k/r}\|f^{(r)}\|_\infty^{k/r}, \tag{1.3.1}$$

где

$$C_{rk} = K_{r-k}/K_r^{1-k/r},$$

а

$$K_m = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(m+1)}}{(2\nu+1)^{m+1}}$$

– константы Фавара. Неравенство (1.3.1) обращается в равенство для функции

$$f(t) = \gamma \cdot \frac{4}{\pi\lambda^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\lambda(t+a) - \pi r/2\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

где a, γ *– любые числа, а* λ *– любое положительное число.*

В пространстве $L_1^{(r)}(-\infty, +\infty)$ $(r = 2, 3, \cdots)$ неулучшаемый аналог неравенства (1.3.1) доказал Е.М.Стейн [31]

$$\|f^{(k)}\|_{L_1[0,2\pi]} \le C_{r,k}\|f\|_{L_1[0,2\pi]}^{1-k/r}\|f^{(r)}\|_{L_1[0,2\pi]}^{k/r},$$

$k = 1, 2..., r-1$, где C_{rk} определена в (1.3.1), $C_{r,k} = K_{r-k}/K_r^{1-k/r}$.

Здесь мы докажем, аналогичное неравенство для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, с точной константой $C_{\alpha k} \equiv 1$.

Теорема 1.3.1. *Пусть функция* $f \in L_2^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *и пусть* $\gamma > 0$ – *произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \gamma < \alpha$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|f^{(\gamma)}\|_2 \leq \|f\|_2^{1-\gamma/\alpha}\|f^{(\alpha)}\|_2^{\gamma/\alpha}. \tag{1.3.2}$$

Знак равенства здесь имеет место для функций вида $f(t) = b\cos n(t+a)$.

Доказательство. Соотношение (1.3.2) вытекает из равенства Парсеваля и неравенства Гёльдера для рядов, имеющего вида

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{'} b_\nu^{'} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{'p}\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^{'q}\right)^{1/q}, p \geq 1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1.3.3}$$

Действительно, если $f \in L_2^{(\alpha)}$ и

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t\right),$$

то

$$\|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right),$$

$$\|f^{(\gamma)}\|_2^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2\gamma}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right).$$

Полагаем

$$\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)^{1-\gamma/\alpha} = a_\nu^{'}, \quad \left[\nu^{2\alpha}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)\right]^{\gamma/\alpha} = b_\nu^{'},$$

в силу (1.3.3) при $p = \alpha/(\alpha-\gamma)$ имеем

$$\|f^{(\gamma)}\|_2^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2\gamma}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)^{1-\gamma/\alpha}\left[\nu^{2\alpha}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)\right]^{\gamma/\alpha} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)^{\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\nu^{2\alpha}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)\right]^{\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\alpha}{\gamma}}\right)^{\gamma/\alpha} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)\right)^{1-\gamma/\alpha} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2\alpha}\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)\right)^{\gamma/\alpha} =$$

$$= \|f\|_2^{1-\gamma/\alpha}\|f^{(\alpha)}\|_2^{\gamma/\alpha}.$$

Непосредственным вычислением проверяется, что для функции

$$f(t) = b\cos n(t+a),\ n\in\mathbb{N},\ a,b\in\mathbb{R},$$

имеет место знак равенства. Из доказанной теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *Для произвольной функции* $f\in L_2^{(\alpha)}$ *при* $0<\gamma<\alpha$, $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}_+$, *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(\gamma)})_{L_2} \le (E_{n-1}(f))_{L_2}^{1-\gamma/\alpha}\left(E_{n-1}(f^{(\alpha)})\right)_{L_2}^{\gamma/\alpha}. \qquad (1.3.4)$$

В самом деле, неравенство (1.3.4) вытекает из соотношения

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\nu^{2\gamma}\left(a_\nu^2+b_\nu^2\right) \le \left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\left(a_\nu^2+b_\nu^2\right)\right)^{1-\gamma/\alpha}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\nu^{2\alpha}\left(a_\nu^2+b_\nu^2\right)\right)^{\gamma/\alpha}.$$

Дадим некоторые применения доказанных неравенств (1.3.2) и (1.3.4). Так как для функции $f\in L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha\in\mathbb{R}_+$) все дробные производные $f^{(\gamma)}$ ($0<\gamma\le\alpha$) или $f^{(\alpha-\gamma)}(0<\gamma\le\alpha)$ принадлежат согласно неравенству (1.3.4) пространству L_2, то представляет несомненный интерес изучение поведения величины $E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})$ на классе $L_2^{(\alpha)}$. Заметим, что если в неравенстве (1.3.4) число γ менять на $\alpha-\gamma$, то мы получаем

$$E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})_{L_2} \le (E_{n-1}(f))_{L_2}^{\gamma/\alpha}\left(E_{n-1}(f^{\alpha})\right)_{L_2}^{1-\gamma/\alpha}. \qquad (1.3.4)'$$

Из результатов предыдущего параграфа выведём следующее утверждение.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$; $0<p\le 2$; $0<h\le\pi/n; \gamma,\alpha\in\mathbb{R}_+$; $0<\gamma\le\alpha$, φ – *неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\ne const}}\frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} \qquad (1.3.5)$$

а) если, в частности, $m,n\in\mathbb{N}$, $p=1/m$, $0<h\le\pi/n$, $\gamma,\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<\gamma\le\alpha$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\ne const}}\frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^m}=\left(\frac{2}{n}\sin^2\frac{nh}{4}\right)^{-m}. \qquad (1.3.6)$$

В частности,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\ne const}}\frac{n^{\gamma-m}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^m}=1.$$

б) если $m,n\in\mathbb{N}$, $p=2/m$, $0<h\le\pi/n$, $\gamma,\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<\gamma\le\alpha$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\ne const}}\frac{n^{\gamma}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^m}=\left\{\frac{n}{nh-\sin nh}\right\}^{m}. \qquad (1.3.7)$$

В частности,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\ne const}}\frac{n^{\gamma-m}E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^m}=\frac{1}{\pi^m}.$$

Доказательство. Не уменьшая общности, покажем справедливость соотношения (1.3.5), поскольку равенства (1.3.6) и (1.3.7) из него вытекают как следствие. Для произвольной $f\in L_2$ при $\alpha\equiv 0$ из (1.2.9) получаем

$$E_{n-1}(f)\le\frac{1}{2^m}\left\{\frac{\int\limits_0^h\omega_m^p(f,t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (1.3.8)$$

Параллельно мы доказали, что для любой функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2^m n^\alpha} \left\{ \frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt} \right\}^{1/p}.$$

В то же время из (1.3.8) заменой f на $f^{(\alpha)}$ имеем:

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) \leq \frac{1}{2^m} \left\{ \frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt} \right\}^{1/p}$$

Воспользуясь доказанным неравенством между наилучшими приближениями дробных производных $(1.3.4)'$ функции $f \in L_2^{(\alpha)}$, получаем

$$\frac{2^m n^\gamma E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leq \left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.3.9)$$

Рассмотрим функцию $f_1(x) = \cos nx$, для которой

$$E_{n-1}(f_1^{(\alpha-\gamma)}) = n^{\alpha-\gamma}, \quad \omega_m^2\left(f_1^{(\alpha)}, t\right) = 2^m n^{2\alpha}(1-\cos nt)^m,$$

где $0 < t \leq \pi n$. Поскольку для $f_1 \in L_2^{(\alpha)}$

$$\frac{2^m n^\gamma E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f_1^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

то мы имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{2^m n^\gamma E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq \frac{2^m n^\gamma E_{n-1}(f_1)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f_1^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int_0^h (1-\cos nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} = \left(\int_0^h \left(2\sin^2 \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} =$$

$$= 2^m \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{2mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} . \qquad (1.3.10)$$

Требуемое равенство (1.3.5) получаем из сопоставления неравенств (1.3.9) и (1.3.10). Равенства (1.3.6) и (1.3.7) из правой части (1.3.5) получаются непосредственным вычислением при $p = 1/m$, $p = 2/m$ и $\varphi(t) \equiv 1$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.2.

Следует отметить, что из равенства (1.3.5), в частности, вытекают результаты М.Ш.Шабозова [54], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [55] в случае $\alpha \equiv \gamma \in \mathbb{N}$ при произвольном неотрицательном с суммируемым весом $\varphi(t)$, $0 \le t \le h$ $(0 < h \le \pi/n)$, . Равенство (1.3.7) является своеобразным обобщением результата С.Б.Вакарчука [7], ранее доказанном для множества функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, для значений $\alpha \in \mathbb{N}$.

§1.4. Вычисление верхних граней наилучших приближений тригонометрическими полиномами некоторых классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве L_2

Содержание этого параграфа связано с исследованием экстремальных задач теории приближения 2π-периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Решение этих задач в конкретных ситуациях, как правило, требует применение современных методов функционального анализа, основанных на получении некоторого точного неравенства для нормы или какой-либо другой аппроксимационной характеристики, таких как, например, верхней грани наилучшего приближения заданного класса функций.

Хорошо известно, что в экстремальных задачах теории приближения периодических функций $f \in L_2$ с заданным классом функций $\mathfrak{M} = \{f\} \subset L_2$, часто связывают его следующие характеристики аппроксимации:

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := E(\mathfrak{M}; \mathcal{T}_{2n-1}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \tag{1.4.1}$$

— наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$;

$$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\}, \tag{1.4.2}$$

где $\mathfrak{M}_n^{\perp}$ — множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(t) \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Помимо величин (1.4.1) и (1.4.2) часто будет полезным отыскание величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \inf_{A \in \mathscr{L}_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - Af\|_{L_2}, \tag{1.4.3}$$

где $\mathscr{L}_n$ – совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы порядка $n-1$.

Из приведённых выше аппроксимационных величин сразу следует, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} \le \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}). \tag{1.4.4}$$

Очевидно, что второе неравенство в цепочке (1.4.4) вытекает из того факта, что если $f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}$, то $Af \equiv 0$, и поэтому мы имеем

$$\sup\left\{\|f\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}_n^{\perp}\right\} \leq \sup\left\{\|f - Af\|_{L_2} : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_2} \leq \sup_{f\in\mathfrak{M}_n^{\perp}} \|f\|_{L_2} = \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}.$$

Из этих двух неравенств, сразу получаем цепочку неравенств (1.4.4). Далее покажем, что в ряде важных случаев, для конкретных классов функций, все введённые выше аппроксимационные характеристики совпадают.

Задача состоит в отыскании значения величин (1.4.1) - (1.4.3) для некоторых классов функций, естественно возникающих из утверждения теорем и их следствий в предыдущем параграфе 1.2.

Пусть $\Phi(t),\ 0 \leq t < \infty$ — непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $\alpha > 0$ и $0 < h \leq 2\pi$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{m,p}^{(\alpha)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq 1 \right\},$$

$$W_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h) \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h t\omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq 1 \right\},$$

$$\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h t\omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h) \right\},$$

$$\bar{W}_m^{(\alpha)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \ \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{m/2} \leq 1 \right\},$$

$$\bar{W}_m^{(\alpha)}(h, \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \ \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)_{L_2} dt \right)^{m/2} \leq \Phi(h) \right\}.$$

Для введённых классов функций справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4.1 *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$ *и* $0 < p \leq 2$. *Тогда при любом* $h \in (0, \pi/n]$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2} = 2^{-m/2} n^{-\alpha} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin\frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}, \qquad (1.4.5)$$

$$E_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h, \Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h, \Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h, \Phi)\right)_{L_2} = 2^{-m/2} n^{-\alpha} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin\frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2} \Phi(h). \quad (1.4.6)$$

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2} = 2^{-m} \cdot n^{-\alpha} \left(\frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh} \left(\sin\frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-m-1/p} n^{-\alpha} \left(\frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh/2} \sin^{mp} t dt \right)^{-1/p}; \qquad (1.4.7)$$

$$E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=2^{-m}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h)=$$

$$=2^{-m-1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh/2}\sin^{mp}t\,dt\right)^{-1/p}\Phi(h); \qquad (1.4.8)$$

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)\right)_{L_2}=2^{-m}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}=$$

$$=2^{-m-2/p}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh/2}t\sin\frac{t}{2}^{mp}t\,dt\right)^{-1/p}; \qquad (1.4.9)$$

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=\gamma_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=\mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right)_{L_2}=2^{-m}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h)=$$

$$=2^{-m-2/p}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh/2}t\sin^{mp}t\,dt\right)^{-1/p}\Phi(h), \qquad (1.4.10)$$

Доказательство. Все равенства (1.4.5) – (1.4.10) доказываются одним и тем же способом и только лишь небольшими вычислениями отличаются в идейном отношении. Поэтому мы докажем только цепочку равенств (1.4.10).

Очевидно, для справедливости равенство (1.4.10) достаточно доказать, что оценка сверху и оценка снизу в точности совпадают. Так как в пространстве L_2 совокупность всех линейных операторов, переводящих любую функцию $f \in L_2$ в тригонометрические полиномы порядка $n-1$ совпадают с частными суммами $S_{n-1}(f,x)$ порядок $n-1$ ряда Фурье, то имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_2} = E_{n-1}(f)_{L_2} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{L_2}.$$

Используя определение класса $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)$ из соотношения (1.2.19), для произвольной функции $f \in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)$ запишем

$$\mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \sup\left\{\|f - S_{n-1}(f)\|_{L_2}:\ f \in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{f\in\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)}\left\{2^{-m+1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{2}{(h)^2}\int\limits_0^{h} t\omega_m^p(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{1/p}dt\right\} \leq$$

$$\leq 2^{-m+1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h). \tag{1.4.11}$$

Для получения оценки снизу величины $E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right)$ введём в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = 2^{-m+1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h)\cos nx.$$

Очевидно, что $f_0(x) \in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)$ и так как $S_{n-1}(f_0,x) \equiv 0$, то

$$\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|_{L_2} \equiv \|f_0\|_{L_2} =$$

$$= 2^{-m+1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h). \tag{1.4.12}$$

Таким образом, с учётом равенства (1.4.12) получаем

$$E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right) \geq \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\| =$$

$$= 2^{-m+1/p} n^{-\alpha} \left(\frac{1}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi(h). \qquad (1.4.13)$$

Требуемые равенства (1.4.10) вытекают из сравнения оценки сверху (1.4.11) и оценки снизу (1.4.13), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Из утверждения теоремы 1.4.1 немедленно следует

Следствие 1.4.1. *При выполнении всех условий теоремы 1.4.1 имеют место равенства*

$$E_{n-1} \left(W_{m,p}^{(\alpha)} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)_{L_2} = \gamma_{n-1} \left(W_{m,p}^{(\alpha)} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,p}^{(\alpha)} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)_{L_2} = 2^{-m} n^{-\alpha} \pi^{1/2p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1 \right)}{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2} \right)} \right\}^{1/p};$$

$$E_{n-1} \left(W_{m,p}^{(\alpha)} \left(\frac{\pi}{n}, \Phi \right) \right)_{L_2} = \gamma_{n-1} \left(W_{m,p}^{(\alpha)} \left(\frac{\pi}{n}, \Phi \right) \right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,p}^{(\alpha)} \left(\frac{\pi}{n}, \Phi \right) \right)_{L_2} = 2^{-m} n^{-\alpha} \pi^{1/2p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1 \right)}{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2} \right)} \right\}^{1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n} \right),$$

где $\Gamma(u)$ *– гамма-функция Эйлера.*

$$E_{n-1} \left(\widetilde{W}_{m,1/m}^{(\alpha)}(h) \right)_{L_2} = \gamma_{n-1} \left(\widetilde{W}_{m,1/m}^{(\alpha)}(h) \right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1} \left(\widetilde{W}_{m,1/m}^{(\alpha)}(h) \right)_{L_2} = \left\{ \frac{8}{(nh)^2} \left(\sin \frac{nh}{2} - \frac{nh}{2} \cos \frac{nh}{2} \right) \right\}^{-m}, \ 0 < nh \le \pi.$$

В частности, при $h = \pi/n$ *имеем*

$$E_{n-1} \left(\widetilde{W}_{m,1/m}^{(\alpha)}(\pi/n) \right)_{L_2} = \gamma_{n-1} \left(\widetilde{W}_{m,1/m}^{(\alpha)}(\pi/n) \right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n)\right)_{L_2} = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^m.$$

Аналогичным образом имеем

$$E_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{m,1/m}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{m,1/m}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{m,1/m}(h,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \left\{\frac{8}{(nh)^2}\left(\sin\frac{nh}{2} - \frac{nh}{2}\cos\frac{nh}{2}\right)\right\}^{-m}\Phi(h),\ 0 < nh \le \pi.$$

В частности, при $h = \pi/n$ имеем

$$E_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n,\Phi)\right)_{L_2} = \gamma_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n,\Phi)\right)_{L_2} = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^m \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Напомним, что в 1910 году А.Лебегом [22] было впервые дано понятие модуля непрерывности ω для функций $f \in C[0,2\pi]$ и в терминах указанной характеристики гладкости получил оценки коэффициентов Фурье a_k и b_k $(k = 0,1,2,\ldots)$.

В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций в различных пространствах рассматривались в работах многих математиков (см., например, [32]). Для классов функций введённых в этом параграфе, данный вопрос также представляет определённый интерес. В самом деле, из утверждения теоремы 1.4.1 сразу получаем

Следствие 1.4.2 *Если выполнены все условия теоремы 1.4.1, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W^{(\alpha)}_{m,p}(h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W^{(\alpha)}_{m,p}(h)\right\} =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}, \qquad (1.4.14)$$

$$\sup \left\{ |a_n(f)| : \ f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) \right\} = \sup \left\{ |b_n(f)| : \ f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) \right\} =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi(h), \qquad (1.4.15)$$

$$\sup \left\{ |a_n(f)| : \ f \in \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h) \right\} = \sup \left\{ |b_n(f)| : \ f \in \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h) \right\} =$$

$$= 2^{-m+1/p} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}, \qquad (1.4.16)$$

$$\sup \left\{ |a_n(f)| : \ f \in \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) \right\} = \sup \left\{ |b_n(f)| : \ f \in \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h, \Phi) \right\} =$$

$$= 2^{-m+1/p} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi(h), \qquad (1.4.17)$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ – соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f. В частности, при $h = \pi/n$ из (1.4.14) – (1.4.17) вытекают равенства

$$\sup \left\{ |a_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(\pi/n) \right\} = \sup \left\{ |b_n(f)| : f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(\pi/n) \right\} =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \pi^{1/(2p)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p};$$

$$\sup \left\{ |a_n(f)| : \ f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(\pi/n, \Phi) \right\} = \sup \left\{ |b_n(f)| : \ f \in W_{m,p}^{(\alpha)}(\pi/n, \Phi) \right\} =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \pi^{1/(2p)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+1}{2}\right)} \right\}^{1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right);$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n)\right\} =$$
$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n)\right\} = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^m;$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n,\Phi)\right\} =$$
$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,1/m}(\pi/n,\Phi)\right\} = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^m \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. Не уменьшая общности, докажем равенство (1.4.17) для косинус-коэффициента $a_n(f)$. Учитывая ортогональность частичной суммы $(n-1)$-го порядка $S_{n-1}(f,x)$ функции $\cos nx$, запишем равенство

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{f(x) - S_{n-1}(f,x)\}\cos nx dx. \qquad (1.4.18)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского из (1.4.18) и соотношение (1.4.10), получаем оценку сверху

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right\} \le$$
$$\le \sup\left\{\|f - S_{n-1}(f)\| : f\in \widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right\} = E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)\right) =$$
$$= 2^{-m+1/p} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2}\int_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p} \Phi(h). \qquad (1.4.19)$$

Введём в рассмотрение функцию

$$g_0(x) = 2^{-m+1/p} n^{-\alpha} \left(\frac{2}{(nh)^2}\int_0^{nh} t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p} \Phi(h)\cos nx$$

Элементарным вычислением легко показать, что функция $g_0(x)$ принадлежит классу $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)$, а потому мы имеем:

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f\in\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h,\Phi)\right\}\geq|a_n(g_0)|=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}g_0(x)\cos nx dx\right|=$$

$$=2^{-m+1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 nx dx=$$

$$=2^{-m+1/p}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh}t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(h). \qquad (1.4.20)$$

Равенство (1.4.17) для косинус-коэффициента $a_n(f)$ вытекает из сопоставления оценки сверху (1.4.19) и оценки снизу (1.4.20). Аналогичным образом доказываются остальные равенства (1.4.14) – (1.4.16), чем и завершаем доказательство следствия 1.4.2.

Глава II
Точные значения n-поперечников некоторых классов функций в L_2
§2.1. Определение n-поперечников и классов функций

В этом параграфе приводим необходимые определения и факты, нужные нам в дальнейшем для изложения наших последующих результатов.

Пусть X – банахово пространство, S – единичный шар в нём, $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $L_n \subset X$ – n-мерное линейное подпространство, $L^n \subset X$ – подпространство коразмерности n, $\Lambda : X \to L_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n, $\Lambda^{\perp} : X \to L_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования X на подпространство L_n. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X \overset{def}{=} \sup\Big\{ \inf\Big\{\|f-\varphi\|_X : \ \varphi \in L_n\Big\} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X \overset{def}{=} \inf\Big\{ \sup\Big\{\|f-\Lambda(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \ \Lambda X \subset L_n\Big\}$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0; \ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \ L_{n+1} \subset X\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{E(\mathfrak{M}, L_n) : \ L_n \subset X\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap L^n\right\} : \ L^n \subset X\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\right\}$$

называют соответсвенно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, линейным и проекционным n-поперечниками.*

Указанные аппроксимационные величины монотонно убывают по n и между ними в пространстве L_2 выполняются соотношения [30, 47]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \le d^n(\mathfrak{M}; L_2) \le d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \qquad (2.1.1)$$

Полученные в параграфах 1.2 и 1.4 результаты обеспечивают возможность вычислить точные значения всех перечисленных выше n-поперечников для классов функций $\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)$, $W_{m,p}^{(\alpha)}(h)$ и $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$.

В параграфе 2.2 нами решена задача отыскания точной константы в обобщённом неравенстве Джексона – Стечкина, а в параграфе 2.3 решается задача С.Б.Стечкина о вычислении точных значений n-поперечников класса $\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H^{\omega_m}$. В завершающем четвёртом параграфе найдены точные значения n-поперечников классов $\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)$, $W_{m,p}^{(\alpha)}(h)$ и $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$.

§2.2. Об отыскании наименьшей константы в обобщённом неравенсве Джексон – Стечкина

Пусть $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция. Через $W_m(f^{(\alpha)};\varphi;h)_p$, где $m\in\mathbb{N}$, $\alpha,p\in\mathbb{R}_+$, $0<h\leq\pi$ обозначим среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности $\omega_m(f^{(\alpha)};t):=\omega_m(f^{(\alpha)};t)_{L_2[0,2\pi]}$ порядка m от дробной производной $f^{(\alpha)}(x)$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$ с неотрицательной суммируемой весом $\varphi(t)$:

$$W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p=\left(\frac{\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}\right)^{1/p}. \qquad (2.2.1)$$

При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)\leq\chi n^{-\alpha}\omega_m(f^{(\alpha)},t/n), \qquad (2.2.2)$$

где $t>0$, $f\in L_2^{(\alpha)}$, $m\in\mathbb{N}$, $f^{(0)}\equiv f$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, многими математиками в разное время рассматривались различные экстремальные характеристики, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ при $\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ (см., например, [1, 2, 4–12, 15, 17, 23, 38, 39, 51–55, 57, 58]) и приведённую там литературу.

В связи с отысканием точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина (2.2.2), следуя замечанием Н.И.Черных [51], отметим, что поскольку функционал (2.2.1) меньше джексоновского функционала $\omega_m(f^{(\alpha)};t)$, то есть

$$W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p=\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\leq$$

$$\leq\left(\omega_m^p(f^{(\alpha)};h)\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p}=\omega_m(f^{(\alpha)};h), \qquad (2.2.3)$$

то, по-видимому, для оценки экстремальных аппроксимационных характеристик, вводимых нами далее, и для выявлении структурных величин наилучших полиномиальных приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций f в L_2, функционал (2.2.1) более естественен. Так, например, а работах [1, 15, 55] в подтверждение гипотезы Черных в качестве веса была рассмотрена функция $\varphi(t) = \sin^\gamma \dfrac{\beta}{h} t$ ($0 < \beta \leq \pi$; $0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq \gamma \leq \alpha p - 1$; $\alpha, p \in \mathbb{R}_+$, $\alpha p \geq 1$) и осреднённая экстремальная характеристика использовалась для получения точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина. Различные весовые функции также рассматривались в работах [2, 6, 8, 11, 12, 23, 55, 57, 58].

Таким образом, осреднённый в p-й степени модуль непрерывности m-го порядка (2.2.1) является наиболее общим функционалом при отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина (2.2.2). Всюду далее, в этом параграфе, $L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)$ – множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, для которых выполняется неравенство

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq 1.$$

Очевидно, что в силу свойства монотонности модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(\alpha)}; t)$ для произвольной суммируемой весовой функции $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$ с учётом (2.2.3) из (2.2.1) вытекает неравенство

$$C\omega_m(f^{(\alpha)}; h) \leq W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq \omega(f^{(\alpha)}; h),$$

где $C = C(m, \alpha, p, h)$ – положительная константа, которая зависит только от значений указанных параметров в скобке.

Отыскание наименьшей константы в неравенстве Джексона – Стечкина (2.2.2) равносильно задаче вычисления точной верхней грани

$$\chi_{m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathcal{T}_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f, \mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)}\right\}. \tag{2.2.4}$$

В монографии В.И.Иванова и О.И.Смирнова [17], в частности, отмечается, что „Интерес к точным константам, сложившиеся вокруг неравенства типа Джексона – Стечкина (2.2.2), возможно, не был бы столь оправданным, если бы каждый новый случай не требовал привлечения новых идей и методов, которые затем оказывались полезными и при решении других экстремальных задач теории приближения". Здесь мы приведём решение задачи о минимизации величины (2.2.4) по всем подпространствам $\mathcal{T}_N$ размерности N, то есть вычислим значения инфимума величины (2.2.4) относительно всего множества приближающихся подпространств $\mathcal{T}_N \subset L_2$ размерности N :

$$\chi_{N,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \inf\left\{\chi_{m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathcal{T}_N\right) : \mathcal{T}_N \subset L_2\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\frac{E(f,\mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)}\right\} : \mathcal{T}_N \subset L_2\right\}.$$

Положим также

$$E_{N-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h,\varphi), L_2\right) = \sup\left\{\|f - S_{N-1}(f)\| : f \in L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi)\right\}.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть* $h, p \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \geq 0,\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\chi_{m,n,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = d_n\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2\right).$$

Доказательство. Следуем схеме рассуждения, приведенной в [21, с.385]. Пусть $f \in L_2^{(\alpha)}$ и $W_m(f^{(\alpha)},\varphi)_{p,h} = u > 0$. Тогда, положив $f_1(x) = u^{-1}f(x)$, получим $W_m(f_1^{(\alpha)},\varphi)_{p,h} = 1$, то есть $f_1 \in L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi)$. Учитывая положительную однородность функционалов $E(f,\mathcal{T}_N)$ и $W_m(f^{(\alpha)},\varphi)_{p,h}$, при фиксированном h, имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{E\left(f,\mathcal{T}_N\right)}{W_m\left(f^{(\alpha)};\varphi\right)_{p,h}} \leq \sup_{f \in L_2^{(\alpha)}(p,h,m;\varphi)} E\left(f,\mathcal{T}_N\right). \tag{2.2.5}$$

Переходя в неравенстве (2.2.5) к нижним граням по всем подпространствам $\mathcal{T}_N \subset L_2$ размерности N, получаем

$$\chi_{m,n,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) \leq d_n\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2\right). \tag{2.2.6}$$

С другой стороны, для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}(p,h,m;\varphi)$ в силу определения класса $L_2^{(\alpha)}(p,h,m;\varphi)$ имеем:

$$E\left(f,\mathcal{T}_N\right) \leq \frac{E\left(f,\mathcal{T}_N\right)}{W_m\left(f^{(\alpha)};\varphi\right)_{p,h}}.$$

Последнее неравенство верно для любого подпространства $\mathcal{T}_N \subset L_2$, а потому верно неравенство

$$d_n\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) \leq \chi_{m,n,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)},L_2\right). \qquad (2.2.7)$$

Утверждение теоремы 2.2.1 вытекает из сопоставления (2.2.6) и (2.2.7).

Теорема 2.2.2 *Пусть весовая функция* φ, *заданная на отрезке* $[0,h]$, *является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой. Если при некоторых* $\alpha \geq 1$, $1/\alpha \leq p \leq 2$ *и любых* $t \in [0,h]$ *выполнено неравенство*

$$(\alpha p-1)\varphi(t)-\varphi'(t) \geq 0,$$

то при всех $m,n \in \mathbb{N}$ *и* $0<h\leq \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\chi_{2n,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)},L_2\right)=\chi_{2n-1,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)},L_2\right)=E_n\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi),L_2\right)=$$

$$=\lambda_{2n}\left(L_2^{(\alpha)}(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi)L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi),L_2\right)=$$

$$=\frac{1}{n^\alpha}\left\{\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h\left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *и* $\Pi_n(\cdot)$. *Все* n*-поперечники реализуются частными суммами Фурье* $S_{n-1}(f;t)$.

Доказательство. В самом деле, при выполнении дифференциального неравенства $(\alpha p-1)\varphi(t)-t\varphi^{'}(t) \geq 0$ в теореме 2.2.1 доказали, что имеет место следующее экстремальное равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}}\frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (2.2.8)$$

Из равенства (2.2.8) вытекает, что

$$\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p} \geq 2^m n^\alpha\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}E_{n-1}(f).$$

Из последнего неравенства сразу следует, что для произвольной $f \in L_2^{(\alpha)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2^m n^\alpha} \left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt} \right)^{1/p}. \qquad (2.2.9)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что равенство в (2.2.9) достигается для функции $f_0(t) = \sin nt \in L_2^{(\alpha)}$. Поскольку $S_{n-1}(T_{n-1}; t) \equiv T_{n-1}(t)$ для любого $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, а также $S_{n-1}(f; x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ для любого $f \in L_2$, то для проекционного поперечника класса $L_2^{(\alpha)}(m, p, h, \varphi)$ получаем оценку сверху

$$\Pi_{2n}\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi), L_2\right) \leq \Pi_{2n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi), L_2\right) \leq$$

$$\leq E_{n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)\right) \leq 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \cdot \varphi(t)dt} \right)^{1/p} =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt} \cdot \frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt} \right)^{1/p} =$$

$$
= 2^{-m}n^{-\alpha}W_m(f^{(\alpha)};\varphi,h)\left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right\}^{-1/p} \le
$$

$$
\le 2^{-m}n^{-\alpha}\left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} \tag{2.2.10}
$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника класса $L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi)$ ввдём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар

$$
\mathbb{B}_{2n+1} =
$$

$$
= \left\{T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}:\ \|T_n\| \le 2^{-m}n^{-\alpha}\left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\right\}
$$

в подпространстве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n+1}$. Для завершения доказательства теоремы 2.2.2 нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.2.1. *Для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1}$ и произвольного число $\alpha \in \mathbb{R}_+$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$
\omega_m(T_n^{(\alpha)};t) \le 2^m n^\alpha \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m \|T_n\|, \quad 0 < nt \le \pi. \tag{2.2.11}
$$

Неравенство (2.2.11) обращается в равенство для полинома

$$
q_n(t) = a\cos nt + b\sin nt,\ a,b \in \mathbb{R},\ 0 < nt \le \pi.
$$

Доказательство. Пусть

$$
T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt) \in \mathcal{T}_{2n+1}.
$$

Тогда, согласно определению производной Вейля, имеем

$$T_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\left(\alpha_k \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \beta_k \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right).$$

Отсюда, обозначая $\rho_k^2(T_n) = \alpha_k^2 + \beta_k^2,\ k = 1, 2, \cdots, n$ и применяя формулу (1.1.12), запишем

$$\omega_m^2(T_n^{(\alpha)}; t) = 2^m \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}\rho_k^2(T_n)\cdot(1-\cos kh)^m : |h| \le t\right\}. \qquad (2.2.12)$$

Воспользуясь тем, что при любом k $(1 \le k \le n)$ имеет место неравенство $(1-\cos kh)^m \le (1-\cos nh)^m,\ 0 < nh \le \pi$ из (2.2.12), получаем

$$\omega_m^2(T_n^{(\alpha)}; t) \le 2^m(1-\cos nt)^m n^{2\alpha}\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2(T_n) =$$

$$= 2^{2m}n^{2\alpha}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{2m}\|T_n\|^2. \qquad (2.2.13)$$

Из неравенства (2.2.13) сразу следует (2.2.11) и непосредственным вычислением убедимся, что для полинома $q_n(t) = a\cos nt + b\sin nt$ оно обращается в равенство, чем и завершаем доказательство леммы 2.2.1.

Продолжим доказательство теоремы 2.2.2. Из неравенства (2.2.11) для произвольного полинома $T_n(x) \in \mathbb{B} \cap \mathcal{T}_{2n+1}$ получаем

$$\omega_m^p\left(T_n^{(\alpha)}; t\right) \le 2^{mp}n^{\alpha p}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\cdot\|T_n\|^p,\ 0 < nt \le \pi.$$

Из последнего неравенства непосредственно получаем

$$\left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(T_n^{(\alpha)}; t\right)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le 2^m n^{\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p}\|T_n\| \le 1,$$

а потому $\mathbb{B}_{2n+1} \in L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi)$. Отсюда, согласно определению бернштейновского поперечника, имеем оценки снизу

$$b_{2n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) \ge b_{2n}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) \ge b_{2n}\left(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2\right) =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\int\limits_0^h \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.2.14)$$

Сопоставляя неравенства (2.2.10) и (2.2.14), с учётом (2.1.1) завершаем доказательство теоремы 2.2.2.

Из доказанной теоремы 2.2.2 в качестве следствия получаем ряд утверждений.

Следствие 2.2.1. *Пусть* $\varphi(t) = \sin^\gamma \dfrac{\beta}{h} t$; $0 \le \gamma \le \alpha p - 1$, $\alpha \ge 1$, $1/\alpha < p \le 2$. *Тогда имеют место равенства*

$$\chi_{2n,m,\alpha,p,h} \left(L_2^{(\alpha)}, L_2 \right) = \chi_{2n-1,m,\alpha,p,h} \left(L_2^{(\alpha)}, L_2 \right) =$$

$$= \lambda_{2n} \left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2 \right) = \lambda_{2n-1} \left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2 \right) =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\int\limits_0^h \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \right)^{1/p} \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \right)^{-1/p}, \qquad (2.2.15)$$

где $\lambda_k(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* k*-поперечников.*

Отметим, что результат следствия 2.2.1 непосредственным вычислением ранее получен М.Г.Есмаганбетовым [15].

Если в (2.2.15) полагать $\beta = nh$ и сделать в подынтегральных выражениях замену переменной, то (2.2.15) приобретает вид:

$$\chi_{2n,m,\alpha,p,h} \left(L_2^{(\alpha)}, L_2 \right) = \chi_{2n-1,m,\alpha,p,h} \left(L_2^{(\alpha)}, L_2 \right) =$$

$$= \lambda_{2n} \left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h,\varphi), L_2 \right) = \lambda_{2n-1} \left(L_2^{(\alpha)}(m,p,h;\varphi), L_2 \right) =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha} \left(\int\limits_0^{nh} \sin^\gamma t dt \right) \cdot \left(\int\limits_0^{nh} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} \cdot \sin^\gamma t dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.2.16)$$

В частности, из (2.2.16) при $h = \pi/n$ получаем

$$\chi_{2n,m,\alpha,p,\pi/n}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \chi_{2n-1,m,\alpha,p,\pi/n}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) =$$

$$= \lambda_{2n}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,\pi/n;\varphi), L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m,p,\pi/n;\varphi), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha}\left(\int\limits_0^\pi \sin^\gamma t dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma t dt\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-m} n^{-\alpha}\left(\frac{2^{\gamma-1}}{n}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+1)}\right)^{1/p}\left(\frac{2^\gamma}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{mp+\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+\gamma+1\right)}\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-m-1/p}\left(\frac{\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+\gamma+1\right)}{\Gamma\left(\gamma+1\right)\Gamma\left(\dfrac{mp+\gamma+1}{2}\right)}\right)^{1/p}\cdot\frac{1}{n^\alpha}$$

§2.3. Решение задачи С.Б.Стечкина для класса функций $\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H^{\omega_m}$

Полученные в предыдущем параграфе результаты обеспечивают нам возможность вычислить точные значения всех перечисленных в начале второй главы n-поперечников на некоторых классов функций, которые определяются заданным модулем непрерывности.

Пусть $W_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m} := W_p^{(\alpha)} H^{\omega_m}(\varphi; h)$ — множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ таких, что для произвольной неотрицательной весовой функции $\varphi(t)$ $(0 \le t \le h,$ $0 < h \le \pi/n)$ выполнялось условие

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = \left\{ \frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)}; t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt} \right\}^{1/p} \le \omega(h),$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, то есть неотрицательная неубывающая полуаддитивная на $[0, \pi]$ функция такая, что $\omega(0) = 0$. В предыдущем параграфе мы отмечали, что существует константа $C = C(m, \alpha, p)$, зависящая от указанных в скобке чисел m, α, p такая, что

$$C\omega_m(f^{(\alpha)}; h) \le W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \le \omega_m(f^{(\alpha)}; h).$$

Последнее неравенство лишь указывает на то, что введенный выше класс $W_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}$ отличается от класса

$$\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m} = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \omega_m(f^{(\alpha)}; h) \le \omega(h) \right\}$$

только на некоторое постоянное число, а потому функционал $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p$ в экстремальных задачах теории приближений более предпочтительнее для характеристики наилучших приближений функций.

Задача о вычислении поперечников класса $\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}$ была поставлена С.Б.Стечкиным на Международной конференции по теории приближений функций в 1975 г. в городе Калуге (см. Труды Международной конференции по теории приближения функций. Калуга, 24-28 июля 1975 г. М.:Наука, 1977, стр.431).

В нижеследующей теореме приводится решение задачи С.Б.Стечкина для модуля непрерывности $\omega(f^{(\alpha)},t)_2$ в L_p-норме ($1/\alpha < p \le 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$).

Теорема 2.3.1 *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, $N = 2n-1$ *или* $N = 2n$. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H^{\omega_m}; L_2\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p} \omega(h), \tag{2.3.1}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из* n*-поперечников Бернштейна,* $b_n(\cdot)$, *Гельфанда* $d^n(\cdot)$, *Колмогорова* $d_n(\cdot)$, *линейного* $\delta_n(\cdot)$, *проекционного* $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху для проекционного поперечника с учётом определения класса $\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H^{\omega_m}$ получаем из неравенства (2.2.9). В самом деле, из неравенства (2.2.9) для произвольной функции $f \in \widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}$, пользуясь тем, что модуль непрерывности $\omega_m^p(f^{(\alpha)},t)$ возрастает на отрезке $[0,h]$, имеем:

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\omega_m^p(f^{(\alpha)};h)\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\omega^p(h)\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p} =$$

$$=\frac{\omega(h)}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}.$$

Отсюда получаем

$$\Pi_{2n}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m};L_2\right)\le E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m}\right)_{L_2}=$$

$$=\sup\left\{E_{n-1}(f):f\in\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m}\right\}\le$$

$$\le\frac{\omega(h)}{2^m n^\alpha}\cdot\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}. \qquad (2.3.2)$$

Чтобы доказать оценку снизу для бернштейновского n-поперечника введём в рассмотрение шар

$$S_{2n+1}^*=\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\|T_n\|\le\frac{\omega(h)}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\right\}$$

в $(2n+1)$-мерном подпространстве $\mathcal{T}_{2n+1}$ тригонометрических полиномов. Покажем, что $S_{2n+1}^*\subset\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H^{\omega_m}$. Снова, воспользовавшись неравенством

$$\omega_m(T_n^{(\alpha)},t)\le 2^m n^\alpha\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m\|T_n\|,\quad 0<nt\le\pi,$$

справедливым для любого $T_n\in S_{2n+1}^*$, получаем

$$\left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(T_n^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le \left(2^{mp}n^{\alpha p}\|T_n\|^p \frac{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(2^{mp}n^{\alpha p}\omega^p(h)\, 2^{-mp}n^{-\alpha p}\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le \omega(h).$$

Последнее неравенство завершает доказательство справедливости включения $S_{2n+1}^* \subset \widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m}$. Поэтому, согласно определению бернштейновского n-поперечника, имеем:

$$b_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m}, L_2\right) \ge b_{2n}\left(W_{p,h}^{(\alpha)}H_\varphi^{\omega_m}, L_2\right) \ge b_{2n}\left(S_{2n+1}^*, L_2\right) \ge$$

$$\ge \frac{\omega(h)}{2^m\cdot n^\alpha}\cdot\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}. \qquad (2.3.3)$$

Требуемые равенства (2.3.1) получаем из сопоставления сценки сверху (2.3.2) и оценки снизу (2.3.3), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Из доказанной теоремы 2.3.1 в качестве следствия можно вывести ряд утверждений.

Следствие 2.3.1 *Пусть* $\varphi_*(t) = \sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t;\ 0 < t \le h,\ 0 < h \le \pi/n, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 1,\ 1/\alpha < p \le 2$. *Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_{\varphi_*}^{\omega_m}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)}H_{\varphi_*}^{\omega_m}; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi_*}\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha}\cdot\left(\frac{\int\limits_0^h \sin^\gamma\frac{\beta}{h}t dt}{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t dt}\right)^{1/p}\omega(h). \quad (2.3.4)$$

В частности, из (2.3.4) при $h = \pi/n$, $\beta = \pi$ имеем:

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^{\pi/n}\sin^\gamma nt dt}{\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma nt dt}\right)^{1/p}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{mp}{2}+\gamma+1\right)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(\frac{mp+\gamma+1}{2}\right)}\right)^{1/p}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (2.3.5)$$

где $\Gamma(u)$ — гамма-функция Эйлера.

В свою очередь, из равенства (2.3.5) для весовой функции $\varphi_*(t) = \sin nt$, то есть когда $\gamma = 1,\ p = 2$, получаем

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{2,\pi/n}H^{\omega_m}_{\varphi_*}\right) = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (2.3.6)$$

Теперь приводим обобщение теоремы 2.2.1 для класса $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi}$, то есть когда величина

$$W_m(f^{(\alpha)};\varphi)_{p,h} = \left\{\frac{\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}\right\}^{1/p} \le \omega(h).$$

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$ *и выполняется дифференциальное неравенство (1.2.8). Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,p,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,p,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$
$$= \lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{2,h}^{(\alpha)} H_\varphi^{\omega_m}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{2,h}^{(\alpha)} H_\varphi^{\omega_m}, L_2\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников.*

Доказательство. Пусть $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi)_{p,h} = u > 0$. Положим

$$f_1(x) = u^{-1} f(x)\omega(h).$$

Тогда очевидно, в силу положительной однородности $W_m(f_1^{(\alpha)}; h)_{p,h} = \omega(h)$, что означает $f_1 \in \widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_\varphi^{\omega_m}$. Снова, учитывая положительную однородность функционала $E(f, \mathcal{T}_N)$, где $N = 2n-1$ или $N = 2n$, при фиксированном h будем иметь

$$\sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{E(f, \mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}, \varphi)_{p,h}} \le \sup_{f \in \widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_\varphi^{\omega_m}} E(f, \mathcal{T}_N).$$

В этом неравенстве, переходя к нижнем граням по всем подпространствам $\mathcal{T}_N \subset L_2$ размерности N, получим неравенство

$$\chi_{N,m,p,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) \le d_N(\widetilde{W}_{p,h}^{\alpha} H_\varphi^{\omega_m}, L_2). \qquad (2.3.7)$$

С другой стороны, для произвольной функции $f \in \widetilde{W}_{p,h}^{\alpha} H_\varphi^{\omega_m}$ в силу определения класса $\widetilde{W}_{p,h}^{\alpha} H_\varphi^{\omega_m}$, имеем

$$E(f, \mathcal{T}_N) \le \frac{E(f, \mathcal{T}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}, \varphi)_{p,h}}.$$

Последнее неравенство, как мы знаем, верно для любого подпространства $\mathcal{T}_N \subset L_2$, а потому верно обратное неравенство

$$d_N(\widetilde{W}_{p,h} H_\varphi^{\omega_m}, L_2) \le \chi_{N,m,p,\alpha}(L_2^{(\alpha)}, L_2). \qquad (2.3.8)$$

Из сопоставления неравенств (2.3.7) и (2.3.8) вытекает равенство

$$\chi_{N,m,p,\alpha}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = d_N(\widetilde{W}_{p,h} H_\varphi^{\omega_m}, L_2)$$

и так как, согласно утверждению теоремы 2.3.1,

$$d_N(\widetilde{W}_{p,h}H_\varphi^{\omega_m}, L_2) = b_N(\widetilde{W}_{p,h}H_\varphi^{\omega_m}, L_2) = d^N(\widetilde{W}_{p,h}H_\varphi^{\omega_m}, L_2) =$$
$$= \delta_N(\widetilde{W}_{p,h}H_\varphi^{\omega_m}, L_2) = \Pi_N(\widetilde{W}_{p,h}H_\varphi^{\omega_m}, L_2),$$

то утверждения теоремы 2.3.2 полностью доказаны, чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.2.

Следствие 2.3.2. *Пусть* $m \geq 1,\ \alpha \geq 0, p = 2/m, 0 < h \leq \pi/n, N = 2n-1$ *или* $N = 2n, \varphi_{**} = \sin nt, 0 \leq t \leq h$. *Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$
$$= \lambda_{2n-1}\left(W_{2/m,h}^{(\alpha)}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W_{2/m,h}^{(\alpha)}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) =$$
$$= \left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{-m/2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot \omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.3.9}$$

В частности, из (2.3.9) при $h = \pi/n$ *имеем:*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$
$$= \lambda_{2n-1}\left(W_{2/m,\pi/n}^{(\alpha)}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W_{2/m,\pi/n}^{(\alpha)}H_{\varphi_{**}}; L_2\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Следствие 2.3.3. *Пусть* $m \geq 1,\ \alpha \geq 0, p = 2/m, 0 < h \leq \pi/n, N = 2n-1$ *или* $N = 2n, \varphi_{***} = \cos nt, 0 \leq t \leq h$. *Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$
$$= \lambda_{2n-1}\left(W_{2/m,h}^{(\alpha)}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W_{2/m,h}^{(\alpha)}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) =$$
$$= \left(\frac{3}{\sin^2\frac{nh}{2}}\right)^{m/2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \cdot \omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.3.10}$$

В частности, из (2.3.10) при $h = \pi/n$ *имеем:*

$$\chi_{2n-1,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) = \chi_{2n,m,2/m,\alpha,\pi/n}(L_2^{(\alpha)}, L_2) =$$
$$= \lambda_{2n-1}\left(W_{2/m,\pi/n}^{(\alpha)}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W_{2/m,\pi/n}^{(\alpha)}H_{\varphi_{***}}; L_2\right) =$$
$$= \frac{(\sqrt{3})^m}{n^\alpha} \cdot \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

§2.4. Точные значения n-поперечников классов функций

В теореме 1.3.1 первой главы мы вычислили верхние грани наилучших приближений тригонометрическими полиномами классов функций

$$\bar{W}_m^{(\alpha)}(h),\ W_{m,p}^{(\alpha)}(h),\ \widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h). \tag{2.4.1}$$

Полученные результаты обеспечивают возможность вычислить точные значения всех перечисленных в параграфе 2.1 n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ или $\Pi_n(\cdot)$ для указанных в (2.4.1) классов функций.

Теорема 2.4.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \leq 2$ и для числа h выполнено условие $0 < nh \leq \pi$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\bar{W}_m^{(\alpha)}(h), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-\alpha}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}, \tag{2.4.2}$$

$$\lambda_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(W_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m-1/p} n^{-\alpha}\left(\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p}, \tag{2.4.3}$$

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m-2/p} n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p}, \tag{2.4.4}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Не умаляя общности, докажем равенства (2.4.4), поскольку равенства (2.4.2) и (2.4.3) доказываются по аналогичной схеме. Оценку сверху для проекционного n-поперечника получаем из соотношения (2.1.1)

$$\Pi_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) \leq \Pi_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) \leq$$

$$\leq 2^{-m-2/p}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh/2}t(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p}. \qquad (2.4.5)$$

Для получения оценок снизу n-поперечников класса $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$ рассмотрим на множестве $\mathcal{T}_{2n+1}\cap L_2$ шар

$$\sigma_{2n+1}:=\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \|T_n\|\leq 2^{-m-2/p}n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh/2}t(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\right\}$$

и покажем, что выполняется включение $\sigma_{2n+1}\subset\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$.

Воспользуясь тем, что для произвольного полинома $T_n\in\sigma_{2n+1}$ выполняется неравенство

$$\omega_m(T_n^{(\alpha)};t)\leq 2^m n^\alpha\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m\|T_n\|,$$

при $0<h\leq\pi/n$ получаем

$$\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\omega_m^p(T_n^{(\alpha)};t)_{L_2}dt\leq$$

$$\leq\frac{2}{h^2}\cdot\int\limits_0^h t\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\cdot 2^2\cdot 2^{mp}\cdot n^{\alpha p}\cdot\|T_n\|^p\leq$$

$$\leq 2^{mp+2}\cdot n^{\alpha p}\cdot 2^{-mp-2}\cdot n^{-\alpha p}\left(\frac{2}{(nh^2)}\cdot\int\limits_0^{nh/2}t(\sin t)^{mp}dt\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2}{(nh)^2}\cdot\int\limits_0^{nh/2}t(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1}=1.$$

Последнее неравенство означает, что $\sigma_{2n+1}\subset\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$.

Используя соотношение (2.1.1) и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу для всех рассматриваемых нами n-поперечников

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h),L_2\right)\geq\lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h),L_2\right)\geq$$

$$\geq b_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h), L_2\right) \geq b_{2n}\left(\sigma_{2n+1}, L_2\right) \geq$$

$$= 2^{-m-2/p} \cdot n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2} \cdot \int\limits_0^{nh/2} t(\sin t)^{mp} dt\right)^{-1/p}. \qquad (2.4.6)$$

Сравнивая оценки сверху (2.4.5) и оценки снизу (2.4.6), получаем требуемые равенства (2.4.4), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

Список литературы

1. Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН ТаджССР. 1985. Т.28, №6. С.309-313.

2. Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. 1986. С.3-10.

3. Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // ДАН СССР. 1937. Т.15. С.107-112.

4. Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Мат. заметки. 2001. Т.70, №3. С.334-345.

5. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East Journal on Approx. 2004. V.10, №1-2, Pp.27-39.

6. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

7. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

8. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

9. Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. 2008. V.14, №4. P.29-39.

10. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2009. Т.86, №3. С.328-336.

11. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

12. Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т.385, №1. С.11-14.

13. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Известия АН СССР. Сер. мат. 1953. Т.17. С.135-162.

14. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука. 1977, 511 с.

15. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. 1999. Т.65, №6. С.816-820.

16. Ефимов А.В. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР, сер. матем. 1960. Т.24, №2. С.243-296.

17. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: ТулГУ. 1995, 192 с.

18. Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V.37. P.107-110.

19. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учёные записки МГУ, сер. матем. 1939. Т.3, вып.30. С.3-13.

20. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука. 1976, 320 с.

21. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. 1987, 424 с.

22. Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchỵee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. S.V.F., 1910. V.38. Pp.184-210.

23. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки, 1978. Т.24, №6. С.785-792.

24. Малоземов В.Н. Обобщённое дифференцирование периодических функций // Вестник ЛГУ, 7. Серия матем. 1965, №2. С.164-167.

25. Малоземов В.Н. О совместном приближении функции и её производных алгебраическими многочленами // ДАН СССР. 1966. Т.170, №4. С.773-775.

26. Моторный В.П. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Мат. заметки. 1974. Т.16, №1. С.15-26.

27. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. // Peridischer Fall. Berichte der meth.–phys. Kl. Akad. d. Wiss. zu Leipzig. 1938. V.90, 103-134p.

28. Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. МИАН СССР. 1945. Т.15. С.1-76.

29. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР, сер. матем. 1946. Т.10. С.295-332.

30. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo. 1985, 252 p.

31. Стейн Е.М. (Stein E.M.). Functions of exponential type // Annalen Math. 1957. V.65, №3. P.582-592.

32. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка. 1981, 340 с.

33. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами // УМН,. 1954. Т.9, №1. С.133-134.

34. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР, сер. матем. 1956. Т.20. С.643-648.

35. Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фавара // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1971. Т.109. С.26-34.

36. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т.23, №1. С.67-92.

37. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

38. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. 1977. Т.22, №4. С.535-542.

39. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

40. Теляковский С.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейла, суммами Валле-Пуссена // ДАН СССР. 1960. Т.131, №2. С.259-262.

41. Темурбекова С.Д. Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. 2012. Т.55, №4. С. 281-285.

42. Темурбекова С.Д. О значениях поперечников функциональных классов в пространстве L_2 // ДАН РТ. 2012. Т.55, №11. С. 853-858.

43. Темурбекова С.Д. Неравенство типа Джексона-Стечкина для обобщённых модулей непрерывности и поперечники некоторых функциональных классов функций в пространстве L_2 // ДАН РТ. 2013. Т.56, №4. С. 273-278.

44. Темурбекова С.Д. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // ДАН РТ. 2014. Т.57, №2. С. 103-108.

45. Темурбекова С.Д. Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона для некоторых классов периодических функций в L_2 // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", 29-30 июня 2012. – Душанбе: Изд-во „Дониш". 2012. С. 151-154.

46. Темурбекова С.Д. Точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ / Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014. – Худжанд: Изд-во „Меъроч". 2014. С. 75-78.

47. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: МГУ. 1976, 325 с.

48. Favard J. Application de la formule sommatoire d'Euler $\grave{a}$ la d$\acute{e}$monstration de quelques propri$\acute{e}$t$\acute{e}$s extr$\acute{e}$males des int$\acute{e}$grales des function p$\acute{e}$riodiques ou presquep$\acute{e}$riodiques // Matematisk Tidskrift K$\varnothing$benhavn. B.H. 1936. V.4, 81-94p.

49. Favard J. Sur les meilleurs prosedes d'approximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometriques // Bull Sci. Math. 1937. V.61, 209-224, 243-256.

50. Hardy G.G., Littlewood J.E., Polya G. Inequality. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press. 1952. 346 p.

51. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, №5. С. 513-522.

52. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Приближение функций в среднем. Сборник работ, Тр. МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

53. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О поперечниках классов периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. 2006. Т.49, №2. С.111-115.

54. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

55. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

56. Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. Значения поперечников классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Известия ТулГУ. 2012. Вып.3. С. 60-68.

57. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т.43, №1. С.125-129.

58. Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сб. научн. трудов. Калининский гос. ун-т, Калинин. 1988. С.100-114.