ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Темурбековой Софии Давронбековны «Приближение дифференцируемых в смысле Вейля функций и значение поперечников некоторых функциональных классов», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

К настоящему времени в экстремальных задачах отыскания точных значений n-поперечников классов дифференцируемых функций одного действительного переменного получен ряд окончательных результатов. В этом направлении после классической работы А.Н.Колмогорова 1936 г., где дано само понятие поперечника, следует упомянуть работы В.М.Тихомирова, Н.П.Корнейчука, Ю.И.Маковоза, А.А.Лигуна, В.П.Моторного, В.И.Рубана о точных значениях колмогоровских поперечников соболевских классов функций с ограниченной по норме пространства L_p $(1 \le p \le \infty)$ r-й $(r \in \mathbb{N})$ производной и классов функций, задаваемых модулями непрерывности r-й $(r \in \mathbb{N})$ производной в равномерной метрике. Однако наиболее полные результаты получены в метрике гильбертова пространства L_2 для классов функций с интегральными модулями непрерывности. Здесь следует отметить результаты Л.В.Тайкова, Н.Айнуллоева, В.В.Шалаева, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и многих других математиков.

Диссертационная работа Темурбековой Софии Давронбековны продолжает исследования вышеуказанных авторов и посвящена решению ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций, дифференцируемых в смысле Вейля, тригонометрическими полиномами в метрике гильбертова пространства $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Отметим, что для классов функций, имеющих производные дробного порядка $f^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, точные результаты для некоторых значений α $(0 < \alpha < 2)$ ранее получены В.К.Дзядыком, С.Б.Стечкиным, Сунь Юн-Шеном, С.А.Теляковским и В.Н.Малозёмовым.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы. Во введении приводится краткий обзор результатов, имеющих непосредственное отношение к теме диссертационной работы, и излагаются основные результаты, полученные в работе. Необходимые факты, основные обозначения и определения из общей теории аппроксимации в пространстве L_2 излагаются в первом параграфе первой главы. Во втором параграфе приводится ряд утверждений, касающихся задачи об отыскании точных неравенств типа Джексона-Стечкина, между величиной наилучшего приближения тригонометрическими полиномами и интегралами, содержащими усреднённое значение модулей непрерывности высших порядков α-ых производной Вейля с заданной суммируемой весовой функцией.

Основным результатом второго параграфа является теорема 1.2.2, где точно вычислена верхняя грань отношения величины наилучшего приближения к упомянутым усреднённым значениям модулей непрерывности с весом. Из этой теоремы, в частности, при конкретном выборе веса и натуральных α, вытекают ранее полученные результаты Л.В.Тайкова, А.А.Лигуна, С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова. В третьем параграфе приводится ряд точных результатов об одновременном приближении функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ и их последовательные дробные производные $f^{(\alpha-\gamma)}$ $(0 < \alpha < \gamma)$ тригонометрическими полиномами, структурные свойства которых характеризуются модулем непрерывности $\omega_m(f^{(\alpha)}, t)_{L_2}$ в пространстве L_2.

Приведём основной результат этого параграфа.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $\alpha \in \mathbb{R}_+$; $1/\alpha < p \le 2$; $0 < h \le \pi/n$; $\gamma \in \mathbb{R}_+$; $0 < \gamma \le \alpha$ *и весовая функция* φ *при любом* $t \in (0, h]$ *удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^\gamma E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} : \qquad (1)$$

а) если, в частности, $m,n\in\mathbb{N}$, $p=1/m$, $0<h\le\pi/n$, $\gamma,\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<\gamma\le\alpha$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^\gamma E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m}} = \left(\frac{2}{n}\sin^2\frac{nh}{4}\right)^{-m};$$

б) если $m,n\in\mathbb{N}$, $p=2/m$, $0<h\le\pi/n$, $\gamma,\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<\gamma\le\alpha$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\neq const}} \frac{n^\gamma E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m}} = \left\{\frac{n}{nh-\sin nh}\right\}^{m/2}. \qquad (2)$$

Отметим, что из равенства (1), в частности, вытекают результаты М.Ш.Шабозова, М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова в случае $\alpha\equiv\gamma\in\mathbb{N}$. Равенство (2) является обобщением результата С.Б.Вакарчука, ранее доказанном для множества функций $f\in L_2^{(\alpha)}$, $\alpha\in\mathbb{N}$.

Четвёртый параграф первой главы посвящён вычислению точных верхних граней классов дифференцируемых в смысле Вейля функций следующих аппроксимационных величин:

$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ – наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов T_{n-1} порядка $n-1$;

$\gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ – множество функций $f\in\mathfrak{M}$, ортогональных $T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$;

$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2}$ – наилучшее приближение функций $f\in\mathfrak{M}$ линейными операторами, переводящими f в $T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$.

Основной результат этого параграфа выражается равенством

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \gamma_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}),$$

где $\mathfrak{M}$ – любой из классов $W^{(\alpha)}_{m,p}(h)$, $W^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)$, $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h)$, $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h,\Phi)$, $\bar{W}^{(\alpha)}_{m}(h)$, $\bar{W}^{(\alpha)}_{m}(h,\Phi)$, естественно возникающих из теорем, доказанных во втором и третьем параграфах. Из приведённого результата в качестве следствия выводятся точные значения верхних граней коэффициентов Фурье на указанных классах функций.

Вторая глава диссертации посвящена вычислению точных значений бернштейновского, гельфандовского, колмогоровского, линейного и проекционного n-поперечников классов функций $W^{(\alpha)}_{m,p}(h)$, $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{m,p}(h)$, $\bar{W}^{(\alpha)}_{m}(h)$, а также для класса функций $\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi}$, который возникает в ходе оптимизации неравенств Джексона-Стечкина в третьем параграфе второй главы. Одним из основных результатов данной главы является

Теорема 2.3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$ и весовая функция $\varphi(t)$ при любом $t \in (0,h]$ удовлетворяет дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0.$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}_{\varphi}; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}^{(\alpha)}_{p,h}H^{\omega_m}; L_2\right) = \frac{1}{2^m n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p} \omega(h),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников Бернштейна $b_n(\cdot)$, Гельфанда $d^n(\cdot)$, Колмогорова $d_n(\cdot)$, линейного $\delta_n(\cdot)$, проекционного $\Pi_n(\cdot)$.

Отметим, что из этой теоремы, в частности, при $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 < \beta \le \pi$, $0 < t \le h$, $0 < h \le \pi/n$, $0 \le \gamma \le \alpha p - 1$, $1/\alpha < p \le 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \ge 1$ вытекает результат М.Г.Есмаганбетова.

К диссертационной работе имеются следующие замечания:

1) на стр.54 последнее предложение в условиях теоремы 1.3.1 надо написать курсивом;

2) в неравенстве (1.3.8) на стр.56 вместо $\frac{1}{2^m}$ должно быть $\frac{1}{2^{m/2}}$.

Несмотря на сделанные замечания, приведённые в диссертации результаты, являются, с нашей точки зрения, научно достоверными и строго математически обоснованными. Основные результаты диссертации являются новыми, либо являются существенным обобщением ранее известных результатов. Содержание автореферата правильно отражает основные научные положения диссертации.

Считаю, что диссертационная работа С.Д.Темурбековой «Приближение дифференцируемых в смысле Вейля функций и значение поперечников некоторых функциональных классов» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Российской Федерации к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры математического анализа
и теории функций ТНУ **М.Р.Лангаршоев**

Подпись М.Р.Лангаршоева заверяю,
начальник отдел кадров
Таджикского национального
университета **Эмомали С.**