«У Т В Е Р Ж Д А Ю»
Ректор Худжандского государственного университета им. Б.Гафурова
____________ А.Т. Максудов
«___» *июня 2015 г.*

О Т З Ы В

ведущей организации на диссертацию Темурбековой Софии Давронбековны «Приближение дифференцируемых в смысле Вейля функций и значение поперечников некоторых функциональных классов», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Теория приближения функций в настоящее время представляет собой весьма обширную часть математического анализа, посвящённую изучению зависимости между различными структурными свойствами функций и характером возможного приближения их алгебраическими и тригонометрическими многочленами или другими простыми в конструктивном отношении функциями. В основе этого исследования лежат классическая аппроксимационная теорема К.Вейерштрасса и известные идеи П.Л.Чебышёва о наилучшем равномерном приближении функций многочленами. Дальнейшее развитие теории приближения функций в начале прошлого века в значительной мере определили работы А.Лебега, Ш.Ж.Валле-Пуссена, Д.Джексона, С.Н.Бернштейна, А.Н.Колмогорова, Л.Хаара, А.Зигмунда, Ж.Фавара, Н.И.Ахиезера, М.Г.Крейна, С.М.Никольского, в которых были установлены разнообразные связи между структурными и конструктивными свойствами функций.

На сегодняшний день ведущее место в теории приближения занимают экстремальные задачи. Следует отметить, что задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций, во многих случаях являются задачами на экстремум: требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший метод приближения. В решении указанных экстремальных задач к настоящему времени имеются значительные успехи. В теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ в ряде важных случаев получены неулучшаемые результаты, то есть решение доведено до точных констант. В этой связи достаточно упомянуть работы Н.И.Черных, Л.В.Тайкова, А.А.Лигуна, В.А.Юдина, А.Г.Бабенко, В.И.Иванова, В.В.Шалаева, С.Н.Васильева, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, М.Г.Есмаганбетова и многих других математиков.

В диссертационной работе Темурбековой Софии Давронбековны получены новые результаты, обобщающие вышеуказанные результаты в этом направлении исследования. Рассматривается ряд экстремальных задач теории наилучших приближений 2π-периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими полиномами в метрике гильбертова пространства L_2. Следует отметить, что в пространстве непрерывных функций $\mathbb{C} := \mathbb{C}[0, 2\pi]$ задачами наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций ранее занимались Б.Надь, В.К.Дзядык, С.Б.Стечкин, Сунь Юн-Шень, С.А.Теляковский, В.Н.Малозёмов, которыми получен ряд окончательных результатов.

В первой главе диссертации доказывается ряд точных неравенств типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения тригонометрическими полиномами гладкой функции класса $L_2^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и L_p $(0 < p \leq 2)$-нормой модуля непрерывности m-го порядка её производной $f^{(\alpha)}$. Изучаются аппроксимативные свойства класса функций, у которых усреднённое значение L_p-норма модуля непрерывности имеет заданную мажоранту.

Приводим основной результат этой главы из второго параграфа, пользуясь принятыми в диссертационной работе обозначениями.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}_+$; $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$; $\varphi(t) \geq 0$ – *произвольная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Если при некотором* $\alpha \geq 1, 1/\alpha < p \leq 2$ *при всех* $t \in [0, h]$ *выполняется дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0,$$

то справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^m n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}.$$

Из приведённого результата при различных значениях указанных в нём параметров, в частности, вытекает ряд известных результатов Н.И.Черных, Л.В.Тайкова, А.А.Лигуна, В.В.Шалаева, Х.Юссефа, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, М.Г.Есмаганбетова.

В третьем параграфе, воспользуясь неравенством типа Колмогорова из доказанной автором работы для дробных производных

$$\|f^{(\gamma)}\|_2 \le \|f\|_2^{1-\gamma/\alpha}\|f^{(\alpha)}\|_2^{\gamma/\alpha}, \ \ 0<\gamma<\alpha,$$

и вытекающего из неё в качестве следствия неравенства

$$E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})_{L_2} \le (E_{n-1}(f))_{L_2}^{\gamma/\alpha}(E_{n-1}(f^{\alpha}))_{L_2}^{1-\gamma/\alpha}, \ \ 0<\gamma<\alpha,$$

теорема 1.2.2 обобщается на случай одновременного приближения функции и её последовательных производных в смысле Вейля:

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$; $0<p\le 2$; $0<h\le\pi/n;\gamma,\alpha\in\mathbb{R}_+$; $0<\gamma\le\alpha$, φ *— неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\ne const}} \frac{n^\gamma E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(\alpha)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

а) если, в частности, $m,n\in\mathbb{N}$, $p=1/m$, $0<h\le\pi/n$, $\gamma,\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<\gamma\le\alpha$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f^{(\alpha)}\ne const}} \frac{n^\gamma E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{1/m}(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{m}} = \left(\frac{2}{n}\sin^2\frac{nh}{4}\right)^{-m};$$

б) если $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2/m$, $0 < h \le \pi/n$, $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < \gamma \le \alpha$ и $\varphi(t) \equiv 1$, то

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f^{(\alpha)} \ne const}} \frac{n^{\gamma} E_{n-1}(f^{(\alpha-\gamma)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(\alpha)}, t)dt\right)^m} = \left\{\frac{n}{nh - \sin nh}\right\}^m.$$

Последнее равенство, в частности, содержит результаты Л.В.Тайкова и С.Б.Вакарчука, доказанные для натуральных α и γ.

Вторая глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений различных производных классов функций, у которых L_p-норма модуля непрерывности ограничена единицей. Во втором параграфе второй главы рассматривается задача отыскания наименьшей константы в обобщённом неравенстве Джексона-Стечкина и попутно решена задача о минимизации констант в указанном неравенстве по всем подпространствам фиксированной размерности N. Доказывается, что эта величина равна значению различных поперечников класса $L_2^{(\alpha)}(m; p, h, \varphi) \subset L_2$. Положим

$$\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m} = \left\{ f \in L_2^{(\alpha)} : \ \omega_m(f^{(\alpha)}; h) \le \omega(h) \right\},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $1/\alpha < p \le 2$, $\varphi \ge 0$ – суммируемая на $[0, h]$ функция, $\omega(h)$ – заданный модуль непрерывности. Для указанного класса приводится решение задачи Стечкина об отыскании точных значений n-поперечников в пространстве L_p $(1/\alpha < p \le 2,\ \alpha \in \mathbb{R}_+)$ в следующем утверждении

Теорема 2.3.1 *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$. Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}; L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H_{\varphi}^{\omega_m}; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\widetilde{W}_{p,h}^{(\alpha)} H^{\omega_m}; L_2\right) = \frac{1}{2^m n^{\alpha}} \left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \omega(h),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников Бернштейна, $b_n(\cdot)$, Гельфанда $d^n(\cdot)$, Колмогорова $d_n(\cdot)$, линейного $\delta_n(\cdot)$, проекционного $\Pi_n(\cdot)$.

Из этой теоремы, в частности, вытекают многие ранее полученные результаты для конкретных весовых функций.

В завершающем четвёртом параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников классов функций $\bar{W}_m^{(\alpha)}(h)$, $W_{m,p}^{(\alpha)}(h)$, $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$. Приводим полученный результат для класса $\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1/\alpha < p \leq 2$ и для числа h выполнено условие $0 < nh \leq \pi$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_{2n-1}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) = \lambda_{2n}\left(\widetilde{W}_{m,p}^{(\alpha)}(h), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m-2/p}\, n^{-\alpha}\left(\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.

Отметим, что диссертационная работа хорошо оформлена и отредактирована. Однако по диссертационной работе имеется ряд замечаний:

1. в стр.19 при формулировке теоремы 1.4.1 и стр.60 при определении классов функций, стр.61 включение $r \in \mathbb{Z}_+$ излишнее, поскольку оно нигде не используется.
2. после формулировки следствия 2.2.1 на стр.26 диссертации следовало бы указать, что в частном случае это следствие ранее при $h = \pi/n$ и $\beta = \pi$ было получено М.Г.Есмаганбетовым.

Несмотря на сделанные замечания, результаты, приведённые в диссертации, являются новыми, научно достоверными и строго математически обоснованными. Содержание автореферата правильно отражает основные научные положения диссертации. Результаты, полученные в диссертации, а также использованные в ней методы могут найти дальнейшее применение, связанное с отысканием точных верхних граней наилучших приближений в других банаховых пространствах, например в пространстве L_p, $p \geq 1$ и при отыскании точных значений n-поперечников в этом пространстве.

Всё сказанное выше даёт основание считать, что диссертационная работа Темурбековой Софии Давронбековны «Приближение дифференцируемых в смысле Вейля функций и значение поперечников некоторых функциональных классов» удовлетворяет всем требованиям ВАК России, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв составил доцент
кафедры математического анализа ХГУ К.Тухлиев

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа математического факультета Худжандского государственного университета им. Б. Гафурова 08.06.2015 г.

Зав. кафедрой математического
анализа математического факультета
Худжандского государственного
университета им. Б.Гафурова
доктор физ.-мат. наук **А. Мухсинов**

Подписи К.Тухлиева и А.Мухсинова
подтверждаю. Начальник ОК ХГУ
им. Б.Гафурова **З.Н.Ашрапова**

Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон
Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Бобоҷон Ғафуров
ШУЪБАИ КАДРҲО