На правах рукописи

Воситова Дилором Абдурасуловна

# ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы

и оптимальное управление

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе 2015

Работа выполнена в Худжандском государственном университете
имени академика Б. Гафурова

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук
**Байзаев Саттор**

**Официальные оппоненты:** **Сакс Ромэн Семенович,**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБУН Институт
математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской
АН, ведущий научный сотрудник;

**Каримов Олимжон Худойбердиевич,**
кандидат физико-математических наук,
Институт математики имени А. Джураева
Академии наук Республики Таджикистан,
заведующий отделом теории функций и
функционального анализа

**Ведущая организация:** Таджикский национальный университет.

Защита состоится 30 июня в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Институте математики имени А. Джураева АН Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан «_____» ___________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047. 007.02 Каримов У.Х

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Основополагающими работами в теории уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными и систем таких уравнений являются работы С.Н.Бернштейна, И.Г.Петровского, М.А. Лаврентьева, И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Л. Берса, А.Д. Джураева, их учеников и последователей.

Одной из актуальных проблем в теории уравнений и систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными представляется исследование задач о решениях, принадлежащих пространствам функций, определенных во всей плоскости и, удовлетворяющих условиям типа ограниченности, периодичности, степенного роста и др. Задачи об ограниченных во всей плоскости (полуплоскости) решениях и решениях степенного роста, т.е. решений, определенных во всей плоскости (полуплоскости) и растущих на бесконечности не быстрее степенной функции, указанных систем относятся к классу сингулярных задач и, как правило, могут быть не нётеровыми.

Вопросам о решениях, определённых во всем пространстве (полупространстве) изменения независимых переменных, уравнений и систем уравнений с частными производными посвящены работы В.С.Виноградова, Э.Мухамадиева, С.Байзаева, В.П.Паламодова, Н.Е.Товмасяна, Д.Сафарова, А.П.Солдатова, М.Отелбаева, К.Н.Оспанова, А.И.Янушаускаса и др. Здесь получен ряд важных результатов, связанных с построением соответствующих решений и вычислением размерности пространства этих решений, нахождением критериев нормальной разрешимости, нётеровости и вычислению индекса рассматриваемых задач и др.

Исследование задач о решениях, ограниченных во всей плоскости и решениях степенного роста новых классов систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными представляется важной и актуальной.

**Цель работы.** В диссертации рассматриваются системы линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными вида

$$A_1(x, y)U_x + A_2(x, y)U_y + A_3(x, y)U = F(x, y), \tag{1}$$

где $U = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – искомая вектор-функция, $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$, $A_3(x, y)$ – вещественные матрицы порядка $n$, $F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ – заданная вектор-функция, а также исследуется эллиптическая система вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}} + A(z)\overline{w} = f(z), \tag{2}$$

где $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ – искомая комплекснозначная вектор-функция, $A(z)$ – комплексная матрица-функция порядка $n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ – комплекснозначная вектор-функция.

Через $C_\alpha$ обозначим банахово пространство комплекснозначных функций $w(z)$, ограниченных и равномерно непрерывных по Гёльдеру во всей комплексной плоскости $C$ с показателем $\alpha \in (0, 1)$ с нормой

$$\| w \|_\alpha = \sup_z | w(z) | + H_\alpha(w),$$

где

$$H_\alpha(w) = \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} | w(z_1) - w(z_2) |,$$

а через $C_\alpha^1$ – банахово пространство функций $w(z)$ такие, что $w, w_z, w_{\bar{z}} \in C_\alpha$ с нормой

$$\| w \|_{\alpha, 1} = \| w \|_\alpha + \| w_{\bar{z}} \|_\alpha + \| w_z \|_\alpha .$$

Такие же обозначения будем использовать и для пространств вектор-функций.

Для систем вида (1) в случае постоянных коэффициентов исследуются следующие задачи и вопросы:

- найти многообразие всех решений;
- найти многообразие решений из пространства $S'$;

- многообразие решений степенного роста и размерность пространства таких решений;
- изучить вопрос о существовании периодических решений.

Для систем вида (1) в случае переменных коэффициентов изучить вопрос о справедливости принципа экстремума.

Для систем вида (2) с ограниченными во всей плоскости коэффициентами исследовать следующие задачи:

- о нормальной разрешимости в гёльдеровом пространстве $C_{\alpha}^{1}$;
- о нётеровости оператора $L: C_{\alpha}^{1} \to C_{\alpha}$.

**Методы исследования.** В работе применяются методы функционального анализа, методы теории функций комплексной переменной и теории обобщенных функций и преобразование Фурье.

**Научная новизна**. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Для систем вида (1) в случае постоянных коэффициентов при соответствующих условиях найдено многообразие всех решений.

2. При $n = 2$, постоянных коэффициентов и эллиптичности системы найдены множество всех решений из пространства $S'$, многообразие решений степенного роста и периодических по переменным $x$ и $y$ решений соответствующей однородной системы; вычислена размерность пространства решений степенного роста.

3. Для решений систем вида (1) в случае $n = 2$ и переменных коэффициентов установлены утверждения типа принципа экстремума.

4. Для однородной системы соответствующей (2) с постоянной и симметрической матрицей $A$ получено утверждение о тривиальной разрешимости в пространстве $S'$.

5. Получены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора $L: C_{\alpha}^{1} \to C_{\alpha}$.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа является теоретической. В ней исследованы задачи о многообразии всех решений, а также умеренно растущих решений и решений степенного роста, рассматриваемых систем уравнений с частными производными.

Полученные результаты могут найти применение при исследовании краевых задач в неограниченных областях для систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными.

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения", посвященной 70-летию академика АН РТ Н. Раджабова, сентябрь 2008 г., Душанбе;
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения", посвященной 70-летию члена-корреспондента АН РТ Э.М. Мухамадиева, 28 – 30 июня 2011 г., Душанбе;
- международной научной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященной 80-летию со дня рождения академика РАН М.М. Лаврентьева , 5 – 12 августа 2012 г., Новосибирск;
- международной школе-семинаре "Нелинейный анализ и спектральные задачи ", 4 – 6 апреля 2012 г., Уфа;
- общеинститутском семинаре Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан (2015 г);
- семинарах кафедр дифференциальных уравнений и математического анализа Худжандского госуниверситета (2010 – 2012 гг.);
- семинарах кафедры высшей математики и моделирования Таджикского госуниверситета права, бизнеса и политики (2007 – 2011 гг.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в семи статьях и в материалах научных конференций, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах, написанных с С. Байзаевым, последнему принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов. Работы [1], [2] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 94 источника. Работа изложена на 114 страницах компьютерного набора.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дается краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемам, обосновывается актуальность выбранной темы, определяются цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Приводятся основные результаты диссертации.

**Глава 1** носит вспомогательный характер.

В первом параграфе приведен краткий обзор основных понятий о функциональных пространствах и операторах, используемых в диссертации. Сформулирован также ряд свойств этих пространств и операторов (леммы 1.1 – 1.3 и теоремы 1.1 – 1.2).

Во втором параграфе приведены систематически используемые в работе сведения об операторе Векуа (теоремы 2.1 – 2.3).

В третьем параграфе приведены некоторые свойства решений систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными.

В четвертом параграфе дается постановка задач, исследуемых в диссертации.

**Глава II** посвящена системам линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными вида (1). Для таких систем рассмотрены задачи о многообразии всех решений, решений из пространства умеренно растущих обобщенных функций $S'$, а также решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции.

В §1 для случая, когда $n = 2,$ коэффициенты системы (1) являются постоянными и система является эллиптической, исследована задача о нахождении решений этой системы из пространства $S'$.

В эллиптическом и гиперболическом случаях однородную систему соответствующую (1) можно привести к следующему виду

$$U_x + AU_y + BU = 0, \tag{3}$$

где $A = A_1^{-1}A_2, \quad B = A_1^{-1}A_3.$

Через $M$ обозначим многообразие решений системы (3) из пространства $S'$. Одна из теорем, полученных в этом параграфе, следующая

**Теорема 1.** *Пусть $n = 2$ и система (3) является эллиптической. Тогда многообразие $M$ состоит:*

*а) из нулевой функции при* $\det B < 0,$

*б) из многочленов относительно $x,\ y$ при* $\det B = 0,$

*в) из квазимногочленов вида*

$$U(x,\ y) = e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k,\ j \ge 0, k+j \le m} a_{kj} x^k y^j + e^{-i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k,\ j \ge 0, k+j \le m} b_{kj} x^k y^j$$

*при* $\det B > 0$*, здесь $a_{kj}, b_{kj}$ – постоянные векторы из $R^2$, $m$ – целое неотрицательное число.*

Отметим, что в этой теореме число $m$ равно порядку функции $U(x, y)$, рассматриваемую как обобщенную функцию из $S'$ и этот порядок является конечным.

В §2 для случая $n = 2$ исследована задача о нахождении решений системы (3), определенных во всей плоскости и растущих при $|x| + |y| \to \infty$ не быстрее степенной функции, то есть решений $U(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$\| U(x,\ y) \| \le K(1 + |\,x\,|^N + |\,y\,|^N), \tag{4}$$

где $\| U \| = |\,u_1| + |\,u_2|$, $N$ – целое неотрицательное число, $K$ – постоянная, зависящая от $U$. Многообразие таких решений образует линейное вещественное пространство, которое обозначим через $P_N$. В этом параграфе разработана схема нахождения всех решений задачи (3) – (4). Оказывается структура пространства $P_N$ зависит от матрицы $B$ и это пространство может быть нулевым, состоит из многочленов относительно $x, y$ степени не выше $N$ или квазимногочленов относительно $x, y$ (см. теорему 1). Подсчитана размерность пространства $P_N$ и она определяется следующим образом:

$$\dim P_N = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \det B < 0. \\ N+1 \ \text{при} \ \det B = 0,\ B \neq 0, \\ 2(N+1) \quad \text{при} \ B = 0, \\ 2(N+1) \quad \text{при} \ \det B > 0. \end{cases}$$

Отметим, что для случая $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ полученные утверждения дополняют результаты В.С.Виноградова относительно задачи о решениях, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции, обобщенной системы Коши – Римана.

В §3 при произвольном $n$ исследована задача о нахождении всех решений системы (3). Здесь рассматриваются как эллиптический случай, так и гиперболический случай. При условии, что матрицы $A$ и $B$ являются перестановочными найдено многообразие всех решений таких систем. Отметим, что в рассматриваемом случае множество систем вида (3) не охватывает системы вида

$$w_{\bar z} + A\overline{w} = 0, \tag{5}$$

кроме случая $A = 0$ и охватывает системы вида $w_{\bar z} + Aw = 0$. В работах В.С. Виноградова и Д. Сафарова рассмотрена задача о решениях степенного роста для системы (5) в случае матрицы второго порядка. Для более общего случая, а именно, когда $A-$комплексная матрица $n$-го порядка в работах С. Байзаева изучены задачи в пространствах функций степенного роста и $S'$.

В начале (п. 3.1.1) рассматривается случай, когда все собственные значения матрицы $A$ являются простыми. Пусть собственные значения

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы $A$ различны и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ − собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям. Так как матрицы $A$ и $B$ перестановочны, то $z_1, z_2, \ldots, z_n$ будут собственными векторами и матрицы $B$. Через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ обозначим собственные значения матрицы $B$, которым соответствуют собственные векторы $z_1, z_2, \ldots, z_n$, а через $C$ – матрицу, столбцы которой это векторы $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

При этих предположениях установлено, что многообразие всех решений системы (3) определяется формулой

$$U(x, y) = C(e^{-\mu_1 x}\varphi_1(\lambda_1 x - y), \ldots, e^{-\mu_n x}\varphi_n(\lambda_n x - y))^T,$$

где $\varphi_j$ − произвольные вещественные функции класса $C^1$, если все $\lambda_j$ вещественные (гиперболический случай) и произвольные аналитические функции комплексной переменной, если все $\lambda_j$ комплексные (эллиптический случай).

Если система (3) является эллиптической, то при выше сделанных предположениях показано (п. 3.2), что многообразие всех решений этой системы можно определить и следующей формулой

$$U(x, y) = C(e^{-i\,\mathrm{Re}(\lambda_1 \overline{\mu_1} x - \mu_1 y)/\ \mathrm{Im}\lambda_1}\psi_1(\lambda_1 x - y), \ldots, e^{-i\,\mathrm{Re}(\lambda_n \overline{\mu_n} x - \mu_n y)/\ \mathrm{Im}\lambda_n}\psi_n(\lambda_n x - y))^T, \quad (6)$$

где $\psi_j(z)$ – произвольные аналитические по $z$ функции. Эта формула удобна для нахождения решений степенного роста.

Далее рассматривается случай, когда у матрицы $A$ есть кратные собственные значения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ − различные собственные значения матрицы $A$ $(m \le n)$ и $C$ − матрица, приводящая матрицу $A$ к канонической форме Жордана $J = diag[J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m)]$. Через $s_k$ обозначим порядок жордановой клетки $J_k(\lambda_k)$. Тогда $s_1 + \ldots + s_m = n$. Установлено (п. 3.2), что многообразие всех решений системы (3) определяется формулой

$$U(x, y) = e^{-Bx}CV(x, y), \quad (7)$$

где

$$V=\left(V_1,\dots,V_m\right)^T,\ V_k=\left(v_{1,k},\dots,v_{s_k,k}\right),\ k=1,\dots,m,$$

$$v_{l,k}=\sum_{j=0}^{s_k-l}x^{s_k-l-j}\varphi_{j,k}^{(s_k-l-j)}\left(\lambda_k x-y\right),\quad l=1,\dots,s_k,$$

$\varphi_{j,k}$ – произвольные вещественные функции класса $C^{s_k-j-1}$, если все $\lambda_k$ вещественные (гиперболический случай) и произвольные аналитические функции комплексной переменной, если все $\lambda_k$ комплексные (эллиптический случай).

В гиперболическом случае найдено (п. 3.3) многообразие всех решений неоднородной системы

$$U_x+AU_y+BU=f(x,y). \tag{8}$$

Для функции $h(x,y)$ положим

$$L_\lambda h=\int_{\lambda x-y}^{x}h\left[t,\ \lambda(t-x)+y\right]dt.$$

Пусть

$$C^{-1}e^{Bx}f=\left(g_1,\dots,g_m\right)^T,\ g_k=\left(h_{1,k},\dots,h_{s_k,k}\right),\ k=1,\dots,m,$$

Тогда частное решение неоднородной системы (8) можно найти по формуле (7), в которой компоненты вектора $V$ определяются формулами

$$v_{l,k}=L_{\lambda_k}\left\{h_{l,k}-\frac{\partial}{\partial y}\left[L_{\lambda_k}h_{l-1,k}-L_{\lambda_k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(L_{\lambda_k}h_{l-2,k}-\dots\right)\right)\right]\right\},\ l=1,\dots,s_k.$$

В п. 3.4 и п. 3.5 рассмотрена задача о решениях системы (3), определенных во всей плоскости и, удовлетворяющих при $|x|+|y|\to\infty$ условию роста

$$\|U(x,\ y)\|\le K(1+|x|^N+|y|^N), \tag{9}$$

где $\|U\|=|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|$, $N-$целое неотрицательное число, $K-$постоянная, зависящая от $U$. Многообразие таких решений образует вещественное линейное пространство, которое обозначим через $P_N$.

В эллиптическом случае, исходя из формулы (6), показано (п. 3.4), что решения задачи (3), (9) имеют вид

$$U(x,\ y)=C(e^{-i\operatorname{Re}(\lambda_1\bar{\mu}_1x-\mu_1y)/\operatorname{Im}\lambda_1}p_{1N}(\lambda_1x-y),\dots,e^{-i\operatorname{Re}(\lambda_n\bar{\mu}_nx-\mu_ny)/\operatorname{Im}\lambda_n}p_{nN}(\lambda_nx-y))^T,$$

где $p_{jN}(z)$ полиномы относительно $z$ степени не выше $N$, причем пространство $P_N$ будет конечномерным и его размерность равна $(N+1)n$.

В гиперболическом случае показано (п. 3.5), что если все собственные значения матрицы $B$ ненулевые, то пространство $P_N$ является нулевым, если же у матрицы $B$ есть нулевое собственное значение, то пространство $P_N$ будет бесконечномерным.

В **главе III** рассматриваются вопросы нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических систем первого порядка вида (2) в гёльдеровых пространствах, а также исследуются вопросы о справедливости принципа экстремума и о периодических решениях для одного класса эллиптических систем.

В этой главе под $C_\alpha$ и $C_\alpha^1$ понимаются гёльдеровы пространства вектор-функций с соответствующими нормами.

В § 1 (п. 1.1) вначале рассматривается однородная система с постоянными коэффициентами вида

$$w_{\bar{z}} + A\overline{w} = 0. \tag{10}$$

Для таких систем изучена задача о регулярных, то есть принадлежащих классу $C^1$ решениях, растущих при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция.

Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть в системе (10) матрица A симметрическая и невырожденная. Тогда задача о регулярных решениях этой системы, растущих при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция, имеет только нулевое решение.*

В п. 1.2 исследована задача о нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических систем вида (2) в гёльдеровых пространствах.

Пусть в системе (2) столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат пространству $C_\alpha$. Тогда оператор $L$ будет ограниченным и действует из пространства $C_\alpha^1$ в пространство $C_\alpha$.

Функция $f \in C_\alpha$ называется *слабо осциллирующейся на бесконечности*, если выполняется соотношение

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{|\varsigma - z|\le 1} \left| f(z) - f(\varsigma) \right| = 0.$$

Относительно нётеровости оператора $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ установлена следующая

**Теорема 3.** *Пусть элементы матрицы $A(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдется такое число $R_0 > 0$, что при $|z| > R_0$ матрица $A(z)$ является симметрической. Тогда оператор $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ будет нётеровым в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$\varliminf_{z\to\infty} |\det A(z)| > 0.$$

В §2 в случае, когда $n = 2$ и система (3) является эллиптической, рассматривается вопрос о принципе экстремума для решений этой системы.

Относительно системы (3) справедлив принцип экстремума в следующей форме.

**Теорема 4.** *Пусть коэффициенты системы (3) являются постоянными. Пусть $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ является ненулевым решением этой системы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*А) если $\det B < 0$, то функции $u$ и $v$ не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов;*

*Б) если $\det B = 0$, то функции $u$ и $v$ не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда $U$ является тождественно постоянной.*

В п. 2.2 рассматривается случай, когда матрица $A$ является постоянной, а матрица $B$ – переменной, то есть

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ c(x,y) & d(x,y) \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что элементы матрицы $B$ определены в области $G$ и имеют непрерывные по Гёльдеру частные производные первого порядка.

Введем обозначения:

$$E(x,\ y)=\det B+a_x(x,\ y)+a_4a_y(x,\ y)-a_2c_y(x,\ y)$$
$$F(x,y)=b_x(x,\ y)+a_4b_y(x,\ y)-a_2d_y(x,\ y).$$
$$E_1(x,\ y)=\det B+d_x(x,\ y)+a_1d_y(x,\ y)-a_3b_y(x,\ y),$$
$$F_1(x,y)=c_x(x,\ y)+a_1c_y(x,\ y)-a_3a_y(x,\ y).$$

В этом случае относительно системы (3) справедлив принцип экстремума в следующей форме.

**Теорема 5**. *Пусть* $U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *– решение системы (3) в области* $G$.

*А) Если выполнены условия:*

*1)* $E(x,\ y)\le 0\ \ \forall(x,\ y)\in G$; *2)* $F(x,\ y)\equiv 0\ \ \forall(x,\ y)\in G$,

*то функция* $u(x,y)$ *не имеет локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов в области* $G$, *кроме случая, когда она является тождественно постоянной.*

*Б) Если выполнены условия:*

*3)* $E_1(x,\ y)\le 0\ \ \forall(x,\ y)\in G$; *4)* $F_1(x,\ y)\equiv 0\ \ \forall(x,\ y)\in G$,

*то функция* $v(x,y)$ *не имеет локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов в области* $G$, *кроме случая, когда она является тождественно постоянной.*

*В) Если выполнены условия 1) – 4), то функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов в области* $G$, *кроме случая, когда* $U$ *является тождественно постоянной.*

Рассмотрим случай, когда в системе (3) коэффициенты имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ \ B=2\alpha(x,\,y)\begin{pmatrix}\cos m\varphi & \sin m\varphi\\ \sin m\varphi & -\cos m\varphi\end{pmatrix}$$

где $\alpha(x,\,y)-$функция класса $C^1$, причем $0\le\alpha\le 1$, $\alpha=0$ при $x^2+y^2<\dfrac{1}{2}$, $\alpha=1$ при $x^2+y^2>1$, $\varphi-$полярный угол.

В этом случае для системы (3) справедлив следующий принцип максимума для нормы решения.

**Теорема 6.** *Пусть вектор-функция* $U=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ *является ненулевым решением системы (3) во всей плоскости. Тогда функция* $\omega=\sqrt{u^2+v^2}$ *при* $x^2+y^2>1$ *не имеет локальных максимумов.*

В § 3 в случае, когда $n=2$ для системы (3) изучен вопрос о существовании $2\pi$ – периодических по переменным $x$ и $y$ решений.

Найдены необходимые и достаточные условия существования ненулевых $2\pi$ – периодических по переменным $x$ и $y$ решений системы (3). Эти условия выражаются в виде некоторых соотношений, выписываемых через коэффициенты системы, то есть через элементы матриц $A$ и $B$. При выполнении соответствующих условий выписываются $2\pi-$ периодические по переменным $x$ и $y$ решения системы (3).

В **заключении** анонсируются основные полученные результаты:

1. Для систем вида (1) в случае постоянных коэффициентов при соответствующих условиях найдено многообразие всех решений.

2. При $n=2$, постоянных коэффициентов и эллиптичности системы (1) найдено множество всех решений из пространства $S'$, многообразие решений степенного роста и периодических по переменным $x$ и $y$ решений соответствующей однородной системы; вычислена размерность пространства решений степенного роста.

3. Для решений систем вида (1) в случае $n = 2$ и переменных коэффициентов установлены утверждения типа принципа экстремума.

4. Для однородной системы соответствующей (2) с постоянной и симметрической матрицей $A$ получено утверждение о тривиальной разрешимости в пространстве $S'$.

5. Получены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора $L$ в гёльдеровых пространствах функций, определенных во всей плоскости.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В рецензируемых изданиях из списка ВАК Минобрнауки РФ

1. *Воситова Д.А.* О решениях умеренного роста одной эллиптической системы /Д.А. Воситова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2012. Т. 55, №1. – С. 23 – 29.

2. *Воситова Д.А.* О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Уфимский математический журнал. – 2013. Т. 5, № 2. – С. 12 – 17.

### В других изданиях

3. *Воситова Д.А.* О решениях умеренного роста одной эллиптической системы / С. Байзаев, Д.А. Воситова // Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 70-летию академика АН РТ Н. Раджабова 25 – 26 сентября 2008 г., Душанбе. – 2008. – С. 13 – 15.

4. *Воситова Д.А.* О решениях одной эллиптической системы в пространстве функций умеренного роста / С.Байзаев, Д.А. Воситова // Вестник Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики. – 2009. №1. – С. 92 – 96.

5. *Воситова Д.А.* Принцип максимума для одного класса эллиптических систем / С.Байзаев, Д.А. Воситова // Ученые записки Худжандского госуни-

верситета им. академика Б. Гафурова (естественные науки). – 2011. №4. – С. 3 – 10.

6. *Воситова Д.А.* Периодические решения одного класса системы первого порядка на плоскости / Д.А. Воситова // Ученые записки Худжандского госуниверситета им. академика Б. Гафурова (естественные науки). – 2012. № 3. – С. 3 – 8.

7. *Воситова Д.А.* О многообразии решений одного класса систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными / С. Байзаев, Д.А. Воситова // Тезисы докладов международной научной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. 5 – 12 августа 2012 г., Новосибирск: Сибирское научное издательство. – 2012. – С. 344.

8. *Воситова Д.А.* Нётеровость одного класса эллиптических систем в гёльдеровых пространствах / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Вестник Ошского государственного университета (естественные науки). – 2013, №1. – С. 95 – 100.

9. *Воситова Д.А.* Нормальная разрешимость эллиптических систем в гёльдеровых пространствах / С. Байзаев, Д.А. Воситова // Материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции «Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании» с международным участием. г. Сибай. 16 – 17 мая 2013. Уфа. РИЦ Баш ГУ, 2013. – С. 14 – 20.

10. *Воситова Д. А.* О нётеровости одного класса многомерных эллиптических систем в гёльдеровых пространствах / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Ученые записки Худжандского госуниверситета им. академика Б. Гафурова. – 2014, №2. Часть 1. – С. 135 – 136.