Министерство образования и науки Республики Таджикистан
Худжандский государственный университет
имени академика Б. Гафурова

На правах рукописи

ВОСИТОВА ДИЛОРОМ АБДУРАСУЛОВНА

ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Байзаев С.

ХУДЖАНД – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основополагающими работами в теории уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными и систем таких уравнений являются работы С.Н. Бернштейна, И.Г. Петровского, М.А. Лаврентьева, И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Л. Берса, А.Д. Джураева, их учеников и последователей (см., например, [1, 14, 15, 16, 17, 21, 39, 41, 47, 66, 85, 86, 91, 94]).

Одной из актуальных проблем в теории уравнений и систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными представляется исследование задач о решениях, принадлежащих пространствам функций, определенных во всей плоскости и удовлетворяющих условиям типа ограниченности, периодичности, степенного роста и др. Задачи об ограниченных во всей плоскости (полуплоскости) решениях и решениях степенного роста, т.е. решений, определенных во всей плоскости (полуплоскости) и растущих на бесконечности не быстрее степенной функции, указанных систем относятся к классу сингулярных задач и, как правило, могут быть не нётеровыми.

Вопросам о решениях, определенных во всем пространстве (полупространстве) изменения независимых переменных, уравнений и систем уравнений с частными производными посвящены работы В.С. Виноградова, Э. Мухамадиева, С. Байзаева, В.П. Паламодова, Н.Е. Товмасяна, Д. Сафарова, А.П.Солдатова, М. Отелбаева, К.Н. Оспанова, А.И. Янушаускаса и др. (см., например, [2, 4, 13, 18, 20, 22, 23, 30 – 34, 36, 40, 42, 45, 46, 49 – 52, 54 – 64, 68 – 83, 87, 90, 93, 94]). Здесь получены ряд важных результатов, связанных с построением соответствующих решений и вычислением размерности пространства этих решений, нахождением критериев нормальной разрешимости, нётеровости и вычислению индекса рассматриваемых задач и др.

Исследование задач о решениях, ограниченных во всей плоскости и решениях степенного роста новых классов систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными представляется важной и актуальной.

В диссертации рассматриваются системы линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными вида

$$A_1(x, y)U_x + A_2(x, y)U_y + A_3(x, y)U = F(x, y), \qquad (1)$$

где $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ – искомая вектор-функция, $A_1(x, y),\ A_2(x, y),$ $A_3(x, y)$ – вещественные матрицы порядка n, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – заданная вектор-функция, а также исследуется эллиптическая система вида

$$Lw \equiv w_{\bar z} + A(z)\overline{w} = f(z), \qquad (2)$$

где $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ – искомая комплекснозначная вектор-функция, $A(z)$ – комплексная матрица-функция порядка n, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – комплекснозначная вектор-функция.

Через C_α обозначим банахово пространство комплекснозначных функций $w(z)$, ограниченных и равномерно непрерывных по Гёльдеру во всей комплексной плоскости C с показателем $\alpha \in (0, 1)$ с нормой

$$\| w \|_\alpha = \sup_z | w(z) | + H_\alpha(w),$$

где

$$H_\alpha(w) = \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} | w(z_1) - w(z_2) |,$$

а через C_α^1 – банахово пространство функций $w(z)$ такие, что $w, w_z, w_{\bar z} \in C_\alpha$ с нормой

$$\| w \|_{\alpha, 1} = \| w \|_\alpha + \| w_{\bar z} \|_\alpha + \| w_z \|_\alpha .$$

Такие же обозначения будем использовать и для пространств вектор-функций.

Для систем вида (1) в случае постоянных коэффициентов исследуются следующие задачи и вопросы:

- найти многообразие всех решений;

- найти многообразие решений из пространства S';

- найти многообразие решений степенного роста и размерность пространства таких решений;

- изучить вопрос о существовании периодических решений.

Для систем вида (1) в случае переменных коэффициентов изучить вопрос о справедливости принципа экстремума.

Для систем вида (2) с ограниченными во всей плоскости коэффициентами исследовать следующие задачи:

- о нормальной разрешимости в гёльдеровом пространстве C_α^1;

- о нётеровости оператора $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$.

Перейдем к краткому изложению содержания диссертации. Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 94 источника. Объем диссертации составляет 114 страницы машинописного текста.

Глава 1 носит вспомогательный характер.

В §1 приведен краткий обзор основных понятий о функциональных пространствах и операторах, используемых в диссертационной работе. Сформулированы также ряд свойств этих пространств и операторов (леммы 1.1 – 1.3 и теоремы 1.1 – 1.2).

В §2 приведены систематически используемые в работе сведения об операторе Векуа (теоремы 2.1 – 2.3).

В §3 приведены некоторые свойства решений систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными.

В §4 дается постановка задач, исследуемых в диссертационной работе.

Глава II посвящена системам линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными вида (1). Для таких систем рассмотрены задачи о многообразии всех решений, решений из пространства умеренно растущих обобщенных функций S', а также решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции.

В §1 для случая, когда $n=2$, коэффициенты системы (1) являются постоянными и сама система является эллиптической, исследована задача о нахождении решений этой системы из пространства S'.

Однородную систему соответствующую (1) можно привести к следующему виду

$$U_x + AU_y + BU = 0, \tag{3}$$

где $A = A_1^{-1}A_2, \quad B = A_1^{-1}A_3.$

Через M обозначим многообразие решений системы (3) из пространства S'. Одна из теорем, полученных в этом параграфе следующая

Теорема 1. *Пусть* $n=2$ *и система (3) является эллиптической. Тогда многообразие* M *состоит:*

а) из нулевой функции при $\det B < 0$,

б) из многочленов относительно x, y *при* $\det B = 0$,

в) из квазимногочленов вида

$$U(x, y) = e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k,\, j \ge 0,\, k+j \le m} a_{kj} x^k y^j + e^{-i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k,\, j \ge 0,\, k+j \le m} b_{kj} x^k y^j$$

при $\det B > 0$*, здесь* a_{kj}, b_{kj} *− постоянные векторы из* R^2*,* m *− целое неотрицательное число.*

Отметим, что в этой теореме число m равно порядку функции $U(x, y)$, рассматриваемую как обобщенную функцию из S' и этот порядок является конечным.

В §2 для случая $n=2$ исследована задача о нахождении решений системы (3), определенных во всей плоскости и растущих при $|x|+|y| \to \infty$ не быстрее степенной функции, то есть решений $U(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$\|U(x,\ y)\| \le K(1 + |x|^N + |y|^N), \tag{4}$$

где $\|U\| = |u_1| + |u_2|$, N − целое неотрицательное число, K − постоянная, зависящая от U. Многообразие таких решений образует линейное вещественное пространство, которое обозначим через P_N. В этом параграфе разработана схема нахождения всех решений задачи (3) – (4). Оказывается структура линейного пространства P_N зависит от матрицы B и это пространство может быть нулевым, состоят из многочленов относительно x, y степени не выше N или квазимногочленов относительно x, y (см. теорему 1). Подсчитана размерность пространства P_N и она определяется следующим образом:

$$\dim P_N = \begin{cases} 0 \quad при \quad \det B < 0. \\ N+1 \ при \ \det B = 0,\ B \neq 0, \\ 2(N+1) \quad при \ B = 0, \\ 2(N+1) \quad при \ \det B > 0. \end{cases}$$

В работах В.С. Виноградова, Д. Сафарова (см. например, [22, 71]) рассмотрена задача о решениях степенного роста для эллиптической системы

$$w_{\bar{z}} + \mathrm{A}\overline{w} = 0, \tag{5}$$

где A – комплексная матрица второго порядка. Для более общего случая, а именно, когда A – комплексная матрица n-го порядка в работах С. Байзаева [2, 4] изучена задача в пространстве S'.

В § 3 при произвольном n исследована задача о нахождении всех решений системы (3). Здесь рассматриваются как эллиптический случай, так и гиперболический случай. При условии, что матрицы A и B являются перестановочными найдено многообразие всех решений таких систем. Отметим, что в рассматриваемом случае множество систем вида (3) не охватывает системы вида (5), кроме случая A=0 и охватывает системы вида $w_{\bar{z}} + \mathrm{A}w = 0$.

Вначале рассматривается случай, когда все собственные значения матрицы A являются простыми. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям. Так как матрицы A и B перестановочны, то $z_1, z_2, \ldots, z_n$ будут собственными векторами и матрицы B. Через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ обозначим собственные значения матрицы B, которым соответствуют собственные векторы $z_1, z_2,\dots,z_n$, а через C – матрицу, столбцы которой это векторы $z_1, z_2,\dots,z_n$.

При этих предположениях установлено (п. 3.1), что многообразие всех решений системы (3) определяется формулой

$$U(x,\ y)=C(e^{-\mu_1 x}\varphi_1(\lambda_1 x-y),\dots,\ e^{-\mu_n x}\varphi_n(\lambda_n x-y))^T,$$

где φ_j − произвольные вещественные функции класса C^1, если все λ_j вещественные (гиперболический случай) и произвольные аналитические функции комплексной переменной, если все λ_j комплексные (эллиптический случай).

Если система (3) является эллиптической, то при выше сделанных предположениях показано (п. 3.2), что многообразие всех решений этой системы можно определить и следующей формулой

$$U(x,\ y)=C(e^{-i\operatorname{Re}(\lambda_1\bar{\mu}_1 x-\mu_1 y)/\operatorname{Im}\lambda_1}\psi_1(\lambda_1 x-y),\dots,\ e^{-i\operatorname{Re}(\lambda_n\bar{\mu}_n x-\mu_n y)/\operatorname{Im}\lambda_n}\psi_n(\lambda_n x-y))^T, \qquad (6)$$

где $\psi_j(z)-$ произвольные аналитические по z функции. Эта формула удобна для нахождения решений степенного роста.

Далее рассматривается случай, когда у матрицы A есть кратные собственные значения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2,\dots,\lambda_m -$различные собственные значения матрицы A $(m\le n)$ и $C-$матрица, приводящая матрицу A к канонической форме Жордана $J=diag[J_1(\lambda_1),\dots,\ J_m(\lambda_m)]$. Через s_k обозначим порядок жордановой клетки $J_k(\lambda_k)$. Тогда $s_1+\dots+s_m=n$. Установлено (п. 3.2), что многообразие всех решений системы (3) определяется формулой

$$U(x,\ y)=e^{-Bx}CV(x,y), \qquad (7)$$

где

$$V=(V_1,\dots,V_m)^T,\ V_k=(v_{1,k},\dots,v_{s_k,k}),\ k=1,\dots,m,$$

$$v_{l,k}=\sum_{j=0}^{s_k-l} x^{s_k-l-j}\varphi_{j,k}^{(s_k-l-j)}(\lambda_k x-y),\quad l=1,\dots,s_k,$$

$\varphi_{j,k}$ – произвольные вещественные функции класса $C^{s_k - j - 1}$, если все λ_k вещественные (гиперболический случай) и произвольные аналитические функции комплексной переменной, если все λ_k комплексные (эллиптический случай).

В гиперболическом случае найдено (п. 3.3) многообразие всех решений неоднородной системы

$$U_x + AU_y + BU = f(x, y). \tag{8}$$

Для функции $h(x, y)$ положим

$$L_\lambda h = \int_{\lambda x - y}^{x} h[t,\ \lambda(t - x) + y]dt.$$

Пусть

$$C^{-1}e^{Bx} f = (g_1, \dots, g_m)^T,\ g_k = (h_{1,k}, \dots, h_{s_k,k}),\ k = 1, \dots, m,$$

Тогда частное решение неоднородной системы (8) можно найти по формуле (7), в которой компоненты вектора V определяются формулами

$$v_{l,k} = L_{\lambda_k}\left\{h_{l,k} - \frac{\partial}{\partial y}\left[L_{\lambda_k} h_{l-1,k} - L_{\lambda_k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(L_{\lambda_k} h_{l-2,k} - \dots\right)\right)\right]\right\},\ l = 1, \dots, s_k.$$

В п. 3.4 и п. 3.5 рассмотрена задача о решениях системы (3), определённых во всей плоскости и удовлетворяющих при $|x| + |y| \to \infty$ условию роста

$$\|U(x,\ y)\| \le K(1 + |x|^N + |y|^N), \tag{9}$$

где $\|U\| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$, N – целое неотрицательное число, K – постоянная, зависящая от U. Многообразие таких решений образует вещественное линейное пространство, которое обозначим через P_N.

В эллиптическом случае, исходя из формулы (6) показано (п. 3.4), что решения задачи (3), (9) имеют вид

$$U(x,\ y) = C(e^{-i\,\mathrm{Re}(\lambda_1\bar{\mu}_1 x - \mu_1 y)/\mathrm{Im}\,\lambda_1} p_{1N}(\lambda_1 x - y), \dots, e^{-i\,\mathrm{Re}(\lambda_n\bar{\mu}_n x - \mu_n y)/\mathrm{Im}\,\lambda_n} p_{nN}(\lambda_n x - y))^T,$$

где $p_{jN}(z)$ полиномы относительно z степени не выше N, причем пространство P_N будет конечномерным и его размерность равна $(N+1)n$.

В гиперболическом случае показано (п. 3.5), что если все собственные значения матрицы B ненулевые, то пространство P_N является нулевым, если же у матрицы B есть нулевое собственное значение, то пространство P_N будет бесконечномерным.

В **главе III** рассматриваются вопросы нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических систем первого порядка вида (2) в гёльдеровых пространствах, а также исследуются вопросы о справедливости принципа экстремума и о периодических решениях для одного класса эллиптических систем.

В этой главе под C_α и C_α^1 понимаются гёльдеровы пространства вектор-функций с соответствующими нормами.

В §1 (п. 1.1) вначале рассматривается однородная система с постоянными коэффициентами вида

$$w_{\bar{z}} + A\overline{w} = 0. \tag{10}$$

Для таких систем изучена задача о регулярных, то есть принадлежащих классу C^1 решениях, растущих при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть в системе (10) матрица A симметрическая и невырожденная. Тогда задача о регулярных решениях этой системы, растущих при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция, имеет только нулевое решение.*

В п. 1.2 исследована задача о нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических систем вида (2) в гёльдеровых пространствах.

Пусть в системе (2) столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат пространству C_α. Тогда оператор L будет ограниченным и действует из пространства C_α^1 в пространство C_α.

Функция $f \in C_\alpha$ называется *слабо осциллирующейся на бесконечности*, если выполняется соотношение

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{|\varsigma - z|\le 1} |f(z) - f(\varsigma)| = 0.$$

Относительно нётеровости оператора $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ установлена следующая

Теорема 3. *Пусть элементы матрицы $A(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдётся такое число $R_0 > 0$, что при $|z| > R_0$ матрица $A(z)$ является симметрической. Тогда оператор $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ будет нётеровым в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$\underline{\lim}_{z\to\infty} |\det A(z)| > 0.$$

В §2 в случае, когда $n = 2$ и система (3) является эллиптической, рассматривается вопрос о принципе экстремума для решений этой системы.

Относительно системы (3) справедлив принцип экстремума в следующей форме.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты системы (3) являются постоянными. Пусть $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ является ненулевым решением этой системы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

А) если $\det B < 0$, то функции u и v не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов;

Б) если $\det B = 0$, то функции u и v не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда U является тождественно постоянной.

В п. 2.2 рассматривается случай, когда матрица A является постоянной, а матрица B – переменной, то есть

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ c(x,y) & d(x,y) \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что элементы матрицы B определены в области G и имеют непрерывные по Гёльдеру частные производные первого порядка.

Введём обозначения:

$$E(x,\ y)=\det B+a_x(x,\ y)+a_4a_y(x,\ y)-a_2c_y(x,\ y)$$
$$F(x,y)=b_x(x,\ y)+a_4b_y(x,\ y)-a_2d_y(x,\ y).$$
$$E_1(x,\ y)=\det B+d_x(x,\ y)+a_1d_y(x,\ y)-a_3b_y(x,\ y),$$
$$F_1(x,y)=c_x(x,\ y)+a_1c_y(x,\ y)-a_3a_y(x,\ y).$$

В этом случае относительно системы (3) справедлив принцип экстремума в следующей форме.

Теорема 5. *Пусть* $U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *– решение системы (3) в области* G.

А) Если выполнены условия:

$$\text{1)}\quad E(x,\ y)\le 0\ \ \forall(x,\ y)\in G;\quad \text{2)}\ F(x,\ y)\equiv 0\ \ \forall(x,\ y)\in G,$$

то функция $u(x,y)$ *не имеет локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов в области* G, *кроме случая, когда она является тождественно постоянной.*

Б) Если выполнены условия:

$$\text{3)}\,E_1(x,\ y)\le 0\ \ \forall(x,\ y)\in G;\quad \text{4)}\ F_1(x,\ y)\equiv 0\ \ \forall(x,\ y)\in G,$$

то функция $v(x,y)$ *не имеет локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов в области* G, *кроме случая, когда она является тождественно постоянной.*

В) Если выполнены условия 1) – 4), то функции $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов в области* G, *кроме случая, когда* U *является тождественно постоянной.*

Рассмотрим случай, когда в системе (3) коэффициенты имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad B=2\alpha(x,\, y)\begin{pmatrix}\cos m\varphi & \sin m\varphi\\ \sin m\varphi & -\cos m\varphi\end{pmatrix}$$

где $\alpha(x,\, y)-$функция класса C^1, причём $0\le\alpha\le1$, $\alpha=0$ при $x^2+y^2<\dfrac{1}{2}$, $\alpha=1$ при $x^2+y^2>1$, $\varphi-$полярный угол.

В этом случае для системы (3) справедлив следующий принцип максимума для нормы решения.

Теорема 6. *Пусть вектор-функция* $U=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ *является ненулевым решением системы (3) во всей плоскости. Тогда функция* $\omega=\sqrt{u^2+v^2}$ *при* $x^2+y^2>1$ *не имеет локальных максимумов.*

В § 3 в случае, когда $n=2$ для системы (3) изучен вопрос о существовании 2π – периодических по переменным x и y решений.

Найдены необходимые и достаточные условия существования ненулевых 2π – периодических по переменным x и y решений системы (3). Эти условия выражаются в виде некоторых соотношений, выписываемых через коэффициенты системы, то есть через элементы матриц A и B. При выполнении соответствующих условий выписываются $2\pi-$ периодические по переменным x и y решения системы (3).

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю С.Байзаеву за неоценимую помощь в работе.

Глава I

Вспомогательные утверждения. Постановка задачи

§1. Основные функциональные пространства и операторы

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые классы функций и функциональные пространства, которые используются в дальнейшем.

1.1. Функциональные пространства.

Ниже будут использоваться следующие обозначения (см., например, [4, 21, 24]):

C – комплексная плоскость;

$w_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(w_x + iw_y\right),\ w_z = \frac{1}{2}\left(w_x - iw_y\right)$ - операции комплексного дифференцирования;

C_0 – пространство непрерывных во всей плоскости C комплекснозначных функций;

C_α – банахово пространство комплекснозначных функций $w(z)$, ограниченных и равномерно непрерывных по Гельдеру во всей комплексной плоскости C с показателем $\alpha \in (0,1)$ с нормой

$$\| w \|_\alpha = \sup_z | w(z) | + H_\alpha(w),$$

где

$$H_\alpha(w) = \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \, | w(z_1) - w(z_2) |;$$

C_α^1 – банахово пространство функций $w(z)$ такие, что $w, w_z, w_{\bar z} \in C_\alpha$ с нормой

$$\| w \|_{\alpha,1} = \| w \|_\alpha + \| w_{\bar z} \|_\alpha + \| w_z \|_\alpha .$$

Такие же обозначения будем использовать и для пространств вектор - функций.

$C_\alpha(r,\ z_0)$ – банахово пространство функций, определённых и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0,1)$ в круге $\{z : |z - z_0| \le r\}$; норма в $C_\alpha(r,\ z_0)$ определяется аналогично норме в C_α.

$C_\alpha^1(r,\ z_0)$ – банахово пространство функций, определённых и равномерно непрерывных вместе с частными производными первого порядка по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0,1)$ в круге $\{z : |z - z_0| \le r\}$; норма в $C_\alpha^1(r,\ z_0)$ определяется аналогично норме в C_α^1.

$D = D(G) -$ пространство основных функций, $G -$ ограниченная область с кусочно-гладкой границей в R^2;

$D' = D'(G) -$ пространство обобщённых функций (распределений);

$S = S(C) -$ пространство быстро убывающих функций;

$S' = S'(C) -$ пространство медленно растущих обобщённых функций (распределений);

$L_p -$ банахово пространство измеримых, $p -$ суммируемых функций в области G с нормой

$$\| w \|_{L_p} = \left(\iint\limits_G |w(z)|^p \, dxdy \right)^{1/p}, \quad p \geq 1;$$

$C^p(G) -$ множество функций f, непрерывных вместе с частными производными порядка p в области G;

$C^p(\overline{G}) -$ функции из класса $C^p(G)$, у которых все частные производные порядка q $(q \leq p)$, допускают непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$.

$D_{1,p}(G) -$ класс функций, имеющих внутри G обобщённые производные первого порядка, принадлежащие $L_p(G)$, $p \geq 1$;

$H^s -$ пространство Соболева порядка s, то есть множество распределений $u \in S'$, для которых конечен интеграл

$$\iint\limits_C \hat{u}(\varsigma)\left(1 + |\varsigma|^2\right)^{s/2} d\xi \, d\eta,$$

где $\hat{u}(\varsigma) -$ преобразование Фурье функции u, $\varsigma = \xi + i\eta$. Величина этого интеграла равна квадрату нормы u в H^s, которая обозначается $\| u \|_s$.

Функция $f \in C_\alpha$ называется *слабо осциллирующейся на бесконечности*, если выполняется соотношение

$$\lim_{z \to \infty} \sup_{|\varsigma - z| \leq 1} \left| f(z) - f(\varsigma) \right| = 0.$$

Обобщённая функция $f(x,\ y)$, у которой носитель есть точка $(x_0,\ y_0)$, единственным способом представляется в виде

$$f(x,\ y)=\sum_{k,\ j\geq 0,\ k+j\leq m} C_{kj}\frac{\partial^{k+j}\delta(x-x_0,\ y-y_0)}{\partial x^k \partial y^j},$$

где C_{kj} – постоянные.

1.2. Вспомогательные утверждения.

Приведём некоторые понятия и факты из теории линейных операторов (см., например, [37]).

$L(E,\ F)$ – пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахово пространства E в банахово пространство F;

Оператор $A\in L(E,\ F)$ называют *нормально разрешимым*, если область значений $R(A)$ этого оператора является замкнутым подпространством пространства F: $R(A)=\overline{R(A)}$.

Нормально разрешимый оператор A называют $n-$*нормальным* **(**$d-$ *нормальным*), если его ядро $KerA$ (коядро $Co\ker = F/R(A)$) конечномерно.

Оператор A называют *нётеровым*, если он $n-$нормальный и $d-$нормальный.

Число

$$indA=\dim KerA-\dim Co\ker A$$

называют *индексом* оператора A.

Для $d-$нормального оператора A справедливо равенство

$$\dim Co\ker A=\dim KerA^*,$$

где A^* – сопряжённый оператор $A^*: F^*\to E^*$.

Приведём несколько нужных в дальнейшем утверждений (см. [5]).

Лемма 1.1. *Пусть* A $n-$*нормальный оператор и* $E_0\subset E$ *такое замкнутое подпространство, что* $E_0\cap KerA=\{0\}$. *Тогда образ* AE_0 *подпространства* E_0 *является замкнутым в* F.

Лемма 1.2. *Пусть* $\{w_n\} \subset C_\alpha$ (C_α^1) *ограниченная последовательность. Тогда из неё можно выделить подпоследовательность* $\{w_{n_j}\}$, *равномерно (вместе с частными производными первого порядка) сходящуюся на каждом компакте к некоторой функции* $w_0 \in C_\alpha$ (C_α^1).

С уменьшением α пространства C_α^1 расширяются. Из следующего утверждения следует, что функции $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_{\alpha,1}$ переменной $\alpha \in (0,1)$ являются непрерывными слева.

Лемма 1.3. *Для любых* $f \in C_\alpha$ *и* $g \in C_\alpha^1$ *справедливы равенства*

$$\lim_{\alpha' \to \alpha - 0} \|f\|_{\alpha'} = \|f\|_\alpha, \quad \lim_{\alpha' \to \alpha - 0} \|g\|_{\alpha',1} = \|g\|_{\alpha,1}.$$

Для функций $f, g \in C_\alpha$ имеет место неравенство (см. [21]):

$$\|fg\|_\alpha \le \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha.$$

Справедливы следующие теоремы (см. [34]).

Теорема 1.1. *Для каждого линейного непрерывного функционала* $f(u)$ *над пространством* H^s *найдётся единственный элемент* $v \in H^{-s}$, *что*

$$f(u) = \iint_C u(x, y) v(x, y) dxdy.$$

Теорема 1.2. *Если* $u \in H^s$ *при* $s > k+1$, *где* $k \ge 0$ *– целое число, то* u *совпадает почти всюду с функцией* v *из класса* $C^k = C^k(C)$, *при этом*

$$\|v\|_{C^k} \le A \|u\|_s,$$

где постоянная A *не зависит от* u.

§2. Некоторые интегральные операторы и их основные свойства

2.1. Преобразование Фурье и его свойства.

Если функция f интегрируема по R^2, то [24] ее преобразование Фурье определяется формулой

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \iint_{R^2} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dxdy.$$

Если $\hat{f} \in L_1$, то можно выразить f через $\hat{f}$, используя обратное преобразование Фурье:

$$f(x, y) = (2\pi)^{-2} \iint_{R^2} \hat{f}(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Приведённые формулы, естественно, справедливы для функции из пространства S.

Свойство 1. *Если $f \in S$, то $\hat{f} \in S$. При этом для преобразований Фурье частных производных функции f справедливы равенства:*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} = -i\xi \hat{f}(\xi, \eta), \qquad \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = -i\eta \hat{f}(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} = -\xi^2 \hat{f}(\xi, \eta), \qquad \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2} = -\eta^2 \hat{f}(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x \partial y} = -\xi\eta \hat{f}(\xi, \eta).$$

Свойство 2. *Преобразование Фурье сдвига:*

$$\hat{f}(\xi - x_0, \ \eta - y_0) = e^{i(x_0 \xi + y_0 \eta)} \hat{f}(\xi, \eta)$$

Аналогичные свойства верны и для обобщённых функций из пространства S'.

2.2. Оператор Векуа и его свойства.

Пусть $\Phi(z)$ аналитическая функция. Тогда (см. [21])

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Phi'(z).$$

Первое из этих равенств является комплексной записью системы Коши - Римана, а второе – представляет собой производную от аналитической функции по комплексному аргументу.

Пусть G – ограниченная область в C с кусочно-гладкой границей Γ, а $w \in C^1(\overline{G})$. Тогда имеют место следующие формулы:

$$\iint_G \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)\,dz,$$
$$\iint_G \frac{\partial w}{\partial z} dx\,dy = -\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)\,d\bar{z}.$$

Эти формулы остаются в силе, если функция w принадлежит классу $C^1(G)$ и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$.

Если $\varsigma -$фиксированная точка области G и $w \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, то справедливы формулы

$$w(\varsigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(z)dz}{z-\varsigma} - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dxdy}{z-\varsigma}, \tag{1.1}$$
$$w(\varsigma) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(z)d\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\varsigma}} - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\partial w(z)}{\partial z} \frac{dxdy}{\bar{z}-\bar{\varsigma}}.$$

Используя формулу (1.1) решение уравнения $w_{\bar{z}} = f(z)$, непрерывное в области $\overline{G}$ можно представить в виде:

$$w(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z} \equiv \Phi(z) + Tf,\ \ \varsigma = \xi + i\eta\ ,$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \qquad Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\varsigma - z}.$$

Определение оператора T_G. Для функции $f \in L_p(\overline{G})$ оператор Векуа определяются следующим образом:

$$Tf \equiv T_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\varsigma - z}\ .$$

Теорема 2.1. *Пусть* $G -$*ограниченная область. Если* $f \in L_p(\overline{G}),\ p > 2$, *то функция* $g = T_G f$ *удовлетворяет условиям*

$$|g(z)| \le M_1 \| f \|_{Lp},\ z \in C,$$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le M_2 \| f \|_{Lp} |z_1 - z_2|^\alpha,\ \ \alpha = \frac{p-2}{p},$$

где z_1 *и* z_2 *– произвольные точки плоскости, а* M_1 *и* M_2 *– постоянные, причём* M_1 *зависит от* p *и* G*, а* M_2 *– только от* p.

Теорема 2.2. *Если* $f \in D_{1,\,p}(G)$, $p > 2$*, то* Tf *принадлежит классу* $C_{\frac{p-2}{2}}$ *внутри* G.

Теорема 2.3. *Пусть граница области* G *является гладкой и* $f(z) \in C_\alpha(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда функция* $h(z) = T_G f$ *принадлежит классу* $C_\alpha^1(\overline{G})$*, причём* $T_G f$ *– вполне непрерывный оператор в* $C_\alpha(\overline{G})$. *Кроме того,*

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = i\Pi f,$$

где

$$\Pi f \equiv \Pi_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Этот особый интеграл существует в смысле главного значения по Коши и принадлежит классу $C_\alpha(\overline{G})$.

Кроме того, Πf представляет собой линейный ограниченный оператор в $C_\alpha(\overline{G})$, отображающий это пространство в себя.

§3. Некоторые свойства решений систем уравнений с частными производными

3.1. Эллиптические и гиперболические системы.

Рассмотрим систему линейных уравнений с частными производными вида

$$A_1(x, y)U_x + A_2(x, y)U_y + A_3(x, y)U = F(x,\ y), \qquad (3.1)$$

где $U = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – искомая вектор-функция, $A_1(x, y),\ A_2(x, y),$ $A_3(x, y)$ – вещественные матрицы порядка n, $F = (f_1,\ f_2, ...,\ f_n)^T$ – заданная вектор-функция; элементы матриц $A_j(x, y)$ ($j = 1, 2, 3$) и функции $f_k(x, y)$ ($k = 1, 2, ..., n$) определены в некоторой области $G \subset R^2$.

Пусть (x, y) фиксированная точка области G.

Выражение

$$P_0(x, y; \xi, \eta) = i\,\xi A_1(x, y) + i\eta A_2(x, y)$$

называют *главным символом* системы (3.1), а выражение

$$P(x, y; \xi, \eta) = i\,\xi A_1(x, y) + i\eta A_2(x, y) + A_3(x, y)$$

символом системы (3.1).

Как известно (см., например, [83, 84]), система (3.1) называется *эллиптической* в точке (x, y), если его главный символ $P_0(x, y; \xi, \eta)$ является невырожденным при $(\xi,\ \eta) \neq (0,\ 0)$, то есть

$$Q(x, y;\ \xi,\ \eta) \equiv \det(\xi A_1 + \eta A_2) \neq 0 \quad \forall(\xi,\ \eta) \neq (0, 0). \qquad (3.2)$$

Система (3.1) называется *гиперболической* в точке (x, y), если для каждого $\eta \in R$ все решения уравнения $Q(x, y; \xi,\ \eta) = 0$ относительно ξ будут действительными.

3.2. Теорема о гладкости решения эллиптических систем.

Пусть коэффициенты системы (3.1) определены в области G и система является в этой области эллиптической.

Из работ И.Г. Петровского (см., например, [64, 65]) следует утверждение.

Теорема аналитичности. *Если коэффициенты системы (3.1) и правая часть f являются вещественными аналитическими функциями, то все решения этой системы также являются вещественными аналитическими функциями.*

Теорема о непрерывности по Гёльдеру ([1], [15]). *Если коэффициенты и правая часть эллиптического уравнения (системы)* $Lu = f$ *порядка* m *удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* $\alpha \in (0, 1)$ *(принадлежат классу* C_α*), то производные порядка* m *любого решения этого уравнения (системы) также удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем. Если же коэффициенты и правая часть имеют производные до порядка* s*, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем* $\alpha \in (0, 1)$ *(принадлежат классу* C_α^s*), то каждое решение уравнения (системы) имеет производные до порядка* $s + m$ *и эти производные тоже удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* α.

Единственность продолжения. Эллиптические уравнения и системы обладают свойством единственности продолжения в слабом смысле: *всякое решение однородного уравнения* $Lu = 0$*, равное нулю на открытом множестве, тождественно равняется нулю.*

Говорят, что эллиптическое уравнение обладает свойством единственности продолжения в сильном смысле, если каждое решение этого уравнения, которое имеет в некоторой точке нуль бесконечного порядка, тождественно равняется нулю.

Теорема о единственности продолжения в сильном смысле справедлива и для эллиптической системы (3.1).

3.3. Принцип максимума для эллиптических уравнений.

Для эллиптического оператора второго порядка с двумя независимыми переменными вида

$$Lu = Mu + a(x, y)u,$$

где

$$M = A(x, y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

справедлив принцип максимума (см., например, [15]), который содержится в следующих четырёх теоремах.

Теорема 3.1. *Если* $Mu \geq 0$ *в ограниченной области* G *и функция* $u(x, y)$ *достигает своего максимума во внутренней точке, то* $u(x, y)$ *постоянна.*

Теорема 3.2. *Если* $a \leq 0, Lu \geq 0$ *в области* G, *функция* $u(x, y)$ *достигает своего максимума во внутренней точке области* G *и этот максимум положителен, то* $u(x, y)$ *постоянна.*

Теорема 3.3. *Пусть* $Mu \geq 0$ *в области* G, *а функция* $u(x, y)$ *принимает наибольшее значение в некоторой точке* (x_0, y_0) *на границе* Γ *области* G. *Предположим, что существует такой замкнутый круг, целиком лежащий в* $\overline{G}$, *что точка* (x_0, y_0) *лежит на его границе. Тогда либо* $u(x, y)$ *постоянна, либо производная этой функции в точке* (x_0, y_0) *по направлению внешней нормали* du/dN *положительна.*

Теорема 3.4. *Пусть* $a \leq 0, Lu \geq 0$ *в области* G, *а функция* $u(x, y)$ *достигает максимума в некоторой точке* (x_0, y_0) *на границе* Γ. *Предположим, что это точка удовлетворяет условию, сформулированному в теореме 3.3. Если максимум* $u(x, y)$ *положителен, то либо* $u(x, y)$ *постоянна, либо производная в точке* (x_0, y_0) *по направлению внешней нормали* du/dN *положительна.*

3.4. Априорные оценки шаудеровского типа.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lw = w_{\bar{z}} + A(z)\overline{w},$$

где $w-$вектор-функция, $A-$матрица-функция порядка n.

При условии, что компоненты вектор-функции w принадлежат C_α^1 и элементы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α, это дифференциальное выражение порождает линейный непрерывный оператор L, действующий из пространства вектор-функций C_α^1 в пространство вектор-функций C_α.

Аналогично как в [5]можно установить справедливость ниже приводимых априорных оценок.

Лемма 3.1. *Пусть элементы матрицы* $A(z)$ *принадлежат пространству* C_α. *Тогда для любой вектор-функции* $w \in C^1_\alpha$ *справедлива оценка*

$$\| w \|_{\alpha,\,1} \le M_1 \left(\| Lw \|_\alpha + \sup_z \| w(z) \| \right),$$

где постоянная M_1 *зависит только от* α *и нормы матрицы* A *в пространстве* C_α, $\|\cdot\|$ *– норма в комплексном* n*-мерном пространстве* C^n.

В предположении, что элементы матрицы A принадлежат пространству C_α, справедлива внутренняя априорная оценка шаудеровского типа

$$\| w \|_{C^1_\alpha(1,\,z_0)} \le M \left(\| Lw \|_{C_\alpha(2,\,z_0)} + \max_{|z-z_0|\le 2} \| w(z) \| \right)$$

где $w \in C^1_\alpha(2,\, z_0)$, M – постоянная, зависящая только от α и нормы матрицы $A(z)$ в пространстве C_α.

§4. Постановка задачи

В диссертации рассматриваются системы линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными вида

$$A_1(x,\,y)U_x + A_2(x,\,y)U_y + A_3(x,\,y)U = F(x,\,y), \tag{4.1}$$

где $U = (u_1,\, u_2,\ldots,u_n)^T$ – искомая вектор-функция, $A_1(x,\,y)$, $A_2(x,\,y)$, $A_3(x,\,y)$ – вещественные матрицы порядка n, $F = (f_1,\, f_2,\,\ldots,\, f_n)^T$ – заданная вектор-функция; элементы матриц $A_j(x,\,y)$ ($j = 1,\,2,3$) и функции $f_k(x,\,y)$ ($k = 1,2,\ldots,n$) определены в некоторой области $G \subset R^2$, а также эллиптическая система вида

$$Lw \equiv w_{\bar z} + A(z)\overline{w} = f(z) \tag{4.2}$$

где $w = (w_1,\, w_2,\ldots,w_n)^T$ – искомая комплекснозначная вектор-функция, $A(z)$ – комплекснозначная матрица-функция порядка n, $f = (f_1,\, f_2,\,\ldots,\, f_n)^T$ – комплекснозначная вектор-функция.

Для систем вида (4.1) в случае постоянных коэффициентов исследуются следующие задачи и вопросы:

- найти многообразие всех решений;

- найти многообразие решений из пространства S';

- найти многообразие решений степенного роста и размерность пространства таких решений;

- изучить вопрос о существовании периодических решений.

Для систем вида (4.1) в случае переменных коэффициентов изучить вопрос о справедливости принципа экстремума.

Для систем вида (4.2) с ограниченными во всей плоскости коэффициентами исследовать следующие задачи и вопросы:

- о нормальной разрешимости в гёльдеровом пространстве C_α^1;

- о нётеровости оператора $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$.

Глава II

Многообразие решений систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными

В этой главе рассматриваются системы линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными. Для таких систем рассмотрены задачи о многообразии всех решений, решений из пространства умеренно растущих обобщённых функций S', а также решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции.

§ 1. Разрешимость эллиптических систем в пространстве S'

Рассмотрим систему линейных уравнений с частными производными вида

$$Lu \equiv A_1 U_x + A_2 U_y + A_3 U = F(x,\ y), \tag{1.1}$$

где $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ – искомая вектор-функция, $A_1,\ A_2,\ A_3$ – постоянные вещественные матрицы порядка n, $F = (f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n)^T$ – заданная вектор-функция.

Напомним (см., глава 1, §3), что выражение $P_0(\xi, \eta) = i\,\xi A_1 + i\eta A_2$ называется главным символом, а выражение $P(\xi, \eta) = i\,\xi A_1 + i\eta A_2 + A_3$ символом системы (1.1). Система (1.1) называется эллиптической, если его главный символ является невырожденным при $(\xi,\ \eta) \neq (0,\ 0)$, то есть

$$Q(\xi,\ \eta) \equiv \det(\xi A_1 + \eta A_2) \neq 0 \quad \forall (\xi,\ \eta) \neq (0, 0). \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что система (1.1) эллиптическая. Покажем, что в этом случае $\det A_1 \neq 0$ и $\det A_2 \neq 0$.

Действительно, если $\eta = 0$, то $Q(\xi, 0) = \det(\xi A_1) \neq 0 \ \ \forall \xi \neq 0$. Отсюда $\det A_1 \neq 0$. Точно также можно установить, что $\det A_2 \neq 0$.

Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\det A_1 \neq 0$, $\det A_2 \neq 0$. Используя условие $\det A_1 \neq 0$, умножая обе стороны системы (1.1) на A^{-1}, получим

$$U_x + A_1^{-1} A_2 U_y + A_1^{-1} A_3 U = A_1^{-1} F(x,\ y).$$

В связи с этим в дальнейшем систему (1.1) будем записывать в следующем виде

$$U_x + AU_y + BU = f(x,\ y), \qquad (1.3)$$

где $A = A_1^{-1}A_2,\quad B = A_1^{-1}A_3,\quad f = A_1^{-1}F$.

Так как коэффициенты системы (1.3) постоянные, то символ и главный символ этой системы имеют вид:

$$P_0(\xi,\eta) = i\,\xi E + i\eta A,\quad P(\xi,\eta) = i\,\xi E + i\eta A + B.$$

Из эллиптичности системы (1.3) вытекает, что $\det P_0(\xi,\ \eta) \neq 0$ $\forall(\xi,\ \eta) \neq 0$. Если $\eta = 0$, то $\det P_0(\xi, 0) = (i\xi)^n \neq 0$ для любого $\xi \neq 0$. Пусть $\eta \neq 0$, тогда $\det P_0(\xi,\eta) = (i\eta)^n \det\left(A + \dfrac{\xi}{\eta}E\right)$. Отсюда видно, что условие эллиптичности системы (1.3) можно представить в виде

$$\det\left(\mathrm{A} + \frac{\xi}{\eta}\mathrm{E}\right) \neq 0 \text{ для любых } \xi \in R, \eta \neq 0. \qquad (1.4)$$

Обозначая $\dfrac{\xi}{\eta} = -\lambda$, условие (1.4) перепишем в виде

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) \neq 0 \quad \forall\ \lambda \in R.$$

Поэтому условие эллиптичности системы (1.3) эквивалентно тому, что матрица A не должна иметь вещественных собственных значений.

Всюду в дальнейшем будем предполагать последнее условие выполненным. Так как у матрицы нечётного порядка хотя бы одно собственное значение вещественное, то матрица A имеет чётный порядок. Отметим, что матрица A не может быть симметрическим, потому что, собственные значения вещественной симметрической матрицы вещественны (см. [28]).

Итак, в эллиптической системе (1.3) количество уравнений чётное, матрица A не может бить симметрической.

Рассмотрим случай $n=2$. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Тогда система (1.3) имеет вид

$$U_x + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} U_y + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} U = 0 \qquad (1.5)$$

Для этого случая будем исследовать задачу о решениях в пространстве умеренно растущих обобщённых функций S' (пространство Шварца). В работах В.С. Виноградова, Д. Сафарова (см. например, [22, 70]) рассмотрена задача о решениях степенного роста для эллиптической системы

$$w_{\bar{z}} + \mathrm{A}\overline{w} = 0,$$

где A – комплексная матрица второго порядка. Для более общего случая, а именно, когда A – комплексная матрица n- го порядка в работах С. Байзаева [2, 4] изучена задача в пространстве S'.

Выразим условие эллиптичности системы (1.5) на языке элементов матрицы A. Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$\lambda^2 - (a_1 + a_4)\lambda + a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0. \tag{1.6}$$

Чтобы корни характеристического уравнения (1.6) были комплексными, его дискриминант Δ должен быть отрицательным:

$$\Delta = (a_1 + a_4)^2 - 4\det A < 0 \tag{1.7}$$

или

$$\Delta = (a_1 - a_4)^2 + 4a_2 a_3 < 0. \tag{1.8}$$

Условие (1.7) или (1.8) является условием эллиптичности системы (1.5). В дальнейшем будем предполагать выполненным условие (1.8). Из условий (1.7) и (1.8) следует, что $\det A > 0$ и $a_2 a_3 < 0$.

Совершая преобразование Фурье от системы (1.5) переходим к системе функциональных уравнений

$$\left(i\xi \mathrm{E} + i\eta \mathrm{A} + \mathrm{B}\right)\hat{U}(\xi, \eta) = 0, \tag{1.9}$$

или

$$P(\xi, \eta)\hat{U}(\xi, \eta) = 0,$$

где $\hat{U}(\xi, \eta)$ – преобразование Фурье функции $U(x, y)$.

Если $\det P(\xi, \eta) \neq 0 \ \ \forall (\xi,\eta) \in R^2$, то из (1.9) следует, что $\hat{U}(\xi,\eta) = 0$. Если же $\det P(\xi,\eta) = 0$ на каком-нибудь множестве $\Gamma \subset R^2$, то $\hat{U}$ будет обобщённой функцией с носителем на Г (см. [24, 87]).

Поэтому, будем изучать множество корней уравнения $\det P(\xi, \eta) = 0$. Так как

$$\det P(\xi, \eta) = \left| i\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\eta \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right| =$$
$$= -\xi^2 - (a_1 + a_4)\xi\eta - \det A\eta^2 + \det B +$$
$$i(b_1 + b_4)\xi + i(a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3)\eta,$$

то последнее уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{cases} \xi^2 + (a_1 + a_4)\xi\eta + \det A\eta^2 - \det B = 0 & (1.10) \\ (b_1 + b_4)\xi + (a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3)\eta = 0 & (1.11) \end{cases}$$

Множество решений уравнения (1.10) обозначим через Γ_1, а – уравнения (1.11) через Γ_2. Тогда множество решений системы (1.10)-(1.11) будет равно $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть система (1.5) является эллиптической. Тогда:*

1) при $\det B < 0$ *множество* Γ *будет пустым;*

2) при $\det B = 0$ *множество* Γ *состоит из одной точки* $\{0,0\}$;

3) при $\det B > 0$ *множество* Γ_1 *является эллипсом,* Γ_2 *– прямой и множество* Γ *состоит из двух точек* $(\pm\xi_0, \pm\eta_0)$ *– точки пересечения прямой* Γ_2 *с эллипсом* Γ_1.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1.1, выясним, что из себя представляют уравнения (1.10) и (1.11) на плоскости (ξ, η). Найдём дискриминант Δ и дискриминант δ старших членов (см. [66]) уравнения (1.10):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1 + a_4}{2} & 0 \\ \frac{a_1 + a_4}{2} & \det A & 0 \\ 0 & 0 & -\det B \end{vmatrix} = -\det B \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1 + a_4}{2} \\ \frac{a_1 + a_4}{2} & \det A \end{vmatrix} =$$

$$-\det B\left(\det A - \frac{(a_1 + a_4)^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\det B((a_1 + a_4)^2 - 4\det A);$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1 + a_4}{2} \\ \frac{a_1 + a_4}{2} & \det A \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}((a_1 + a_4)^2 - 4\det A)$$

Так как из условия эллиптичности системы (1.5) следует неравенство (1.7), то $\delta > 0$ и знак Δ противоположен знаку $\det B$. Возможны следующие случаи: 1) $\det B < 0$; 2) $\det B = 0$; 3) $\det B > 0$. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

Случай 1: $\det B < 0$. Тогда $\Delta > 0$ и уравнение (1.10) определяет мнимый эллипс. Поэтому множество вещественных решений уравнения (1.10) является пустым, то есть $\Gamma_1 = \varnothing$. Следовательно, в этом случае $\Gamma = \varnothing$.

Случай 2: $\det B = 0$. Тогда $\Delta = 0$ и уравнение (1.10) определяет одну точку $O(0, 0)$. Точка $(0, 0)$ принадлежит множеству Γ_2. Поэтому в этом случае множество Γ состоит из одной точки $(0, 0)$.

Случай 3: $\det B > 0$. Тогда $\Delta < 0$ и уравнение (1.10) определяет эллипс, то есть Γ_1 – эллипс.

Покажем, что коэффициенты уравнения (1.11) одновременно не могут обращаться в нуль. Предположим противное. Пусть

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = 0 & (1.12) \\ a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0 & (1.13) \end{cases}$$

Отсюда $b_1 = -b_4$ и

$$(a_1 - a_4)b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 0\,. \tag{1.14}$$

Так как $b_1 b_4 - b_2 b_3 > 0$, то $-b_1^2 - b_2 b_3 > 0$ или

$$b_2 b_3 + b_1^2 < 0\,. \tag{1.15}$$

Отсюда следует, что

$$b_2 b_3 < 0. \tag{1.16}$$

Проверим, что $b_1 \neq 0$. Если $b_1 = 0$, то из (1.14) следует, что $a_3 b_2 + a_2 b_3 = 0$. Но, так как числа $a_2 b_3$ и $a_3 b_2$ в силу неравенств $a_2 a_3 < 0$ и (1.16) имеют одинаковый знак, то равенство $a_3 b_2 + a_2 b_3 = 0$ невозможно. Это противоречие показывает, что $b_1 \neq 0$.

Теперь переписывая условие эллиптичности (1.8) в виде

$$(a_1 - a_4)^2 < 4(-a_2 a_3)$$

и умножая обе части последнего неравенства на b_1^2, с учётом (1.14) имеем:

$$(a_2 b_3 + a_3 b_2)^2 = b_1^2 (a_1 - a_4)^2 < 4 b_1^2 (-a_2 a_3)\,. \tag{1.17}$$

В силу (1.15) $b_1^2 < -b_2 b_3$, поэтому усиливая правую часть (1.17), получим неравенство

$$(a_2 b_3 + a_3 b_2)^2 < 4(-b_2 b_3)(-a_2 a_3)\,,$$

которое эквивалентно следующему

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 < 0\,,$$

что невозможно. Следовательно, при $\det B > 0$ равенства (1.12) и (1.13) одновременно не могут выполняться.

Так как уравнение (1.11) является линейным уравнением первого порядка, то множество решений этого уравнения является прямой, то есть Γ_2 является прямой, проходящей через точку $(0, 0)$.

Поэтому множество Γ как пересечение эллипса Γ_1 и прямой Γ_2 состоит из двух точек $(\pm\xi_0, \pm\eta_0)$.

Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. *Решение системы функционалных уравнений (1.9) имеет вид:*

а) при $\det B < 0$

$$\hat{U}(\xi,\eta) \equiv 0;$$

б) при $\det B = 0$

$$\hat{U}(\xi,\eta) = \sum_{k,j\geq 0,k+j\leq m} c_{kj} \frac{\partial^{k+j}\delta(\xi,\eta)}{\partial\xi^k \partial\eta^j},$$

где c_{kj} *– постоянные векторы из* R^2;

в) при $\det B > 0$

$$\hat{U}(\xi,\eta) = \sum_{k,j\geq 0,\ k+j\leq m} [c_{kj} \frac{\partial^{k+j}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)}{\partial\xi^k \partial\eta^j} +$$

$$+ d_{kj} \frac{\partial^{k+j}\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)}{\partial\xi^k \partial\eta^j}],$$

где c_{kj}, d_{kj} *– постоянные векторы из* R^2.

Отметим, что в случаях б) и в) число m равен порядку обобщенной функции $\hat{U}(\xi,\eta)$, который конечен в силу компактности носителя $\hat{U}(\xi,\eta)$ (см. [24]).

Доказательство. В случае $\det B < 0$ определитель $\det P(\xi,\eta)$ системы (1.9) отличен от нуля. Поэтому эта система имеет только нулевое решение $\hat{U}(\xi,\eta) \equiv 0$.

В случае $\det B = 0$ функция $\hat{U}(\xi,\eta)$ является обобщённой функцией, носитель которой состоит из одной точки $(0, 0)$. Поэтому в силу теоремы о структуре обобщенных функций с точечным носителем, имеем

$$\hat{U}(\xi,\eta) = \sum_{k,j\geq 0,k+j\leq m} c_{kj} \frac{\partial^{k+j}\delta(\xi,\eta)}{\partial\xi^k \partial\eta^j},$$

где c_{kj} – постоянные векторы из R^2, m – порядок обобщенной функции $\hat{U}$, который мы должны задать сами.

В случае $\det B > 0$ функция $\hat{U}(\xi, \eta)$ является обобщённой функцией, носитель которой состоит из двух точек, а именно точек $(\pm\xi_0, \pm\eta_0)$. Поэтому она имеет вид

$$\hat{U}(\xi, \eta) = \sum_{k, j \geq 0,\ k+j \leq m} [c_{kj} \frac{\partial^{k+j} \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)}{\partial \xi^k \partial \eta^j} +$$

$$+ d_{kj} \frac{\partial^{k+j} \delta(\xi + \xi_0, \eta + \eta_0)}{\partial \xi^k \partial \eta^j}],$$

где c_{kj}, d_{kj} − постоянные векторы из R^2, m − порядок обобщенной функции $\hat{U}(\xi, \eta)$.

Теорема 1.2 доказана.

Через M обозначим многообразие решений эллиптической системы (1.5) из пространства S'. Из теоремы 1.2 следует

Теорема 1.3. *Многообразие* M *состоит:*

а) из нулевой функции при $\det B < 0$;

б) из многочленов относительно x, y *при* $\det B = 0$;

в) из квазимногочленов вида

$$U(x, y) = e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k, j \geq 0, k+j \leq m} a_{kj} x^k y^j + e^{-i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k, j \geq 0, k+j \leq m} b_{kj} x^k y^j$$

при $\det B > 0$*, здесь* a_{kj}, b_{kj} *− постоянные векторы из* R^2*,* m *− целое неотрицательное число.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.2.

В случае $\det B < 0$ система (1.9) имеет только нулевое решение $\hat{U}(\xi, \eta) \equiv 0$. Поэтому $U(x, y) \equiv 0$, то есть многообразие M состоит из нулевой функции.

В случае $\det B = 0$ решение системы функционалных уравнений (1.9) имеет вид

$$\hat{U}(\xi, \eta) = \sum_{k, j \geq 0, k+j \leq m} c_{kj} \frac{\partial^{k+j} \delta(\xi, \eta)}{\partial \xi^k \partial \eta^j},$$

где c_{kj} – постоянные векторы из R^2, m – порядок обобщенной функции $\hat{U}(\xi, \eta)$.

Совершая в этом равенстве обратное преобразование Фурье, в силу свойств этого преобразования (см. глава 1, § 2, п. 2.1) находим, что решения системы (1.5) в пространстве S' представляют собой многочлены относительно $x,\ y$.

$$U(x,\ y) = \sum_{k,\, j\geq 0,\, k+j\leq m} p_{kj} x^k y^j,$$

где p_{kj} – постсоянные векторы из R^2, $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

В случае $\det B > 0$ функция $\hat{U}(\xi, \eta)$ имеет вид

$$\hat{U}(\xi, \eta) = \sum_{k,\, j\geq 0,\, k+j\leq m} [c_{kj} \frac{\partial^{k+j} \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)}{\partial \xi^k \partial \eta^j} +$$

$$+ d_{kj} \frac{\partial^{k+j} \delta(\xi + \xi_0, \eta + \eta_0)}{\partial \xi^k \partial \eta^j}],$$

где c_{kj}, d_{kj} – постоянные векторы из R^2, m – порядок обобщенной функции $\hat{U}(\xi, \eta)$.

Совершая в этом равенстве обратное преобразование Фурье, с учётом его свойств находим, что решения системы (1.5) в пространстве S' являются квазимногочленами вида

$$U(x,\ y) = e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k,\, j\geq 0,\, k+j\leq m} a_{kj} x^k y^j + e^{-i(\xi_0 x + \eta_0 y)} \sum_{k,\, j\geq 0,\, k+j\leq m} b_{kj} x^k y^j,$$

где a_{kj}, b_{kj} – постоянные векторы из R^2, $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Теорема 1.3 доказана.

§ 2. Полиномиальные решения эллиптических систем

Рассмотрим для эллиптической системы (1.5) задачу о полиномиальных решениях, то есть о решениях, определённых во всей плоскости и удовлетворяющих условию

$$\|U(x,\ y)\| \le K(1+|x|^N+|y|^N),$$

где $\|U\|=|u_1|+|u_2|$, $N-$целое неотрицательное число, $K-$постоянная, зависящая от U.

Многообразие таких решений образует линейное вещественное пространство, которое обозначим через P_N. Так как $P_N \subset S'$, то для определения P_N будем использовать результаты первого параграфа.

Рассмотрим три возможных случая: 1) $\det B<0$; 2) $\det B=0$; 3) $\det B>0$.

Случай 1. Пусть $\det B<0$. В этом случае в силу теоремы 1.3 система (1.5) в пространстве S' имеет только нулевое решение $U(x,\ y)\equiv 0$. Следовательно, пространство P_N является нулевым.

Случай 2. Пусть $\det B=0$. Согласно теореме 1.3 пространство P_N состоит из многочленов относительно $x,\ y$ порядка не выше N.

Для нахождения коэффициентов этих многочленов удобнее решение системы (1.5) искать в виде однородных по x, y форм :

$$U(x,y)=\sum_{j=0}^{N} P_j(x,y),$$

где $P_j(x,\ y)=\sum_{k=0}^{j} p_{kj}x^{j-k}y^k$; $p_{kj}-$векторы из R^2. Подставим эти выражения в систему (1.5)

$$\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x}+A\frac{\partial P_j}{\partial y}+BP_j\right)=0. \qquad (2.1)$$

Вначале рассмотрим случай $B\neq 0$. Из (2.1) имеем $BP_N=0$, то есть

$$\sum_{k=0}^{N} Bp_{kN}x^{N-k}y^k=0$$

Поэтому $Bp_{kN}=0$ $(k=\overline{0,N})$, то есть p_{kN} – собственный вектор матрицы *B,* отвечающий нулевому собственному значению. Если q_0 – какой-нибудь собственный вектор матрицы B, отвечающий нулевому собственному значению, то

$$p_{kN}=c_{kN}q_0, \tag{2.2}$$

где c_{kN} – вещественные числа, $k=\overline{0,\mathrm{N}}$.

Теперь равенство (2.1) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x}+A\frac{\partial P_j}{\partial y}+BP_{j-1}\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial P_j}{\partial x}+A\frac{\partial P_j}{\partial y}+BP_{j-1}=0;\quad j=\overline{1,N}.$$

Подставляя производные функций P_j и выражение для P_{j-1} в последнее равенство, имеем

$$\sum_{k=0}^{j}\left[(j-k)p_{kj}x^{j-k-1}y^k+kAp_{kj}x^{j-k}y^{k-1}\right]+B\sum_{k=0}^{j-1}p_{k,j-1}x^{j-1-k}y^k=0$$

или

$$\sum_{k=0}^{j-1}(j-k)p_{kj}x^{j-k-1}y^k+\sum_{k=1}^{j}kAp_{kj}x^{j-k}y^{k-1}+\sum_{k=0}^{j-1}Bp_{k,j-1}x^{j-k-1}y^k=0.$$

Заменяя во второй сумме индекс суммирования k на $k+1$, и объединяя все суммы, получим

$$\sum_{k=0}^{j-1}\left[(j-k)p_{kj}+(k+1)Ap_{k+1,j}+Bp_{k,j-1}\right]x^{j-k-1}y^k=0.$$

Отсюда

$$(j-k)p_{kj}+(k+1)Ap_{k+1,j}+Bp_{k,j-1}=0;\quad j=\overline{1,N};\ k=\overline{0,\ j-1}. \tag{2.3}$$

Так как B ненулевая матрица и $\det B=b_1b_4-b_2b_3=0$, то возможны следующие случаи:

2.1. $b_2b_3\neq 0$; 2.2. $b_2b_3=0$

Случай 2.1.Тогда $b_1 b_4 \neq 0$, поэтому $\frac{b_1}{b_3} = \frac{b_2}{b_4} = \frac{1}{\mu}$, ($\mu \neq 0$). Следовательно, имеем: $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \mu b_1 & \mu b_2 \end{pmatrix}$. Найдём собственный вектор $q_0 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ матрицы B:

$$\begin{cases} b_1 \nu_1 + b_2 \nu_2 = 0 \\ \mu b_1 \nu_1 + \mu b_2 \nu_2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что $b_1 \nu_1 + b_2 \nu_2 = 0$ и в качестве q_0 можно взять вектор $\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$. Поэтому (2.2) примет вид

$$p_{kN} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} c_{kN} \; ; \quad c_{kN} \in R, \;\; k = \overline{0, N} \, .$$

В дальнейшем будем изучать систему (2.3). Подставим в эту систему $j = N$:

$$(N-k) p_{KN} + (k+1) A p_{k+1,N} + B p_{k,N-1} = 0; \; k = \overline{0, N-1}.$$

Отсюда

$$B p_{k,N-1} = -(N-k) p_{kN} - (k+1) A p_{k+1,N} \, . \tag{2.4}$$

Обозначив правую часть этой системы через $\begin{pmatrix} b_{kN} \\ d_{kN} \end{pmatrix}$, а вектор $p_{k,N-1}$ – через $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, уравнение (2.4) перепишем в виде

$$\begin{cases} b_1 q_1 + b_2 q_2 = b_{kN} \\ \mu b_1 q_1 + \mu b_2 q_2 = d_{kN} \end{cases} \tag{2.5}$$

Условие разрешимости этой системы имеет вид: $\mu b_{kN} = d_{kN}$, то есть

$$\begin{aligned} &-\mu (N-k) b_2 c_{kN} - \mu (k+1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_{k+1,N} = \\ &= (N-k) b_1 c_{kN} - (k+1)(a_3 b_2 - a_4 b_1) c_{k+1,N} \, . \end{aligned}$$

Упростим это соотношение:

$$\begin{aligned} &-(N-k)(\mu b_2 + b_1) c_{kN} = \\ &= (k+1)\left[\mu (a_1 b_2 - a_2 b_1) - (a_3 b_2 - a_4 b_1)\right] c_{k+1,N} \, . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Возможны два случая: а) $b_1+\mu b_2 \neq 0$; б) $b_1+\mu b_2=0$.

Рассмотрим случай а). В этом случае задаём произвольным образом c_{NN}, остальные c_{kN} $(k=\overline{0,\ N-1})$ найдём из (2.6).

Таким образом, в определении p_{kN} имеется один произвол. Далее условие разрешимости системы (2.5), то есть условие (2.6) будем считать выполненным.

Пусть $\begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix}$ – частное решение системы (2.5). Тогда общее решение этой системы имеет вид

$$p_{k,N-1}=\begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix}+\alpha_{k,N-1}\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix};\ \ k=\overline{0,N-1}, \tag{2.7}$$

где $\alpha_{k,N-1}$ – произвольные вещественные числа.

Далее в уравнении (2.3) подставим $j=N-1$:

$$(N-1-k)\,p_{k,N-1}+(k+1)Ap_{k+1,N-1}+Bp_{k,N-2}=0$$

или

$$Bp_{k,N-2}=-(N-1-k)\,p_{k,N-1}-(k+1)Ap_{k+1,N-1}\ \ ;\ \ k=\overline{0,N-2}. \tag{2.8}$$

Условие разрешимости этой системы аналогично условию разрешимости системы (2.5): $\mu b_{k,N-1}=d_{k,N-1}$, где через $\begin{pmatrix} b_{k,N-1} \\ d_{k,N-1} \end{pmatrix}$ обозначена правая часть системы (2.8). Следовательно, учитывая (2.7) имеем

$$\begin{aligned}&-\mu(N-1-k)(q_1^0+\alpha_{k,N-1}b_2)-\mu(k+1)\left[(a_1q_1^0+a_2q_2^0)+\alpha_{k+1,N-1}(a_1b_2-a_2b_1)\right]=\\&=-(N-1-k)\left[q_2^0-\alpha_{k,N-1}b_1\right]-(\kappa+1)\left[a_3q_1^0+a_4q_2^0+\alpha_{k+1,N-1}(a_3b_2-a_4b_1)\right]\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&-(N-1-k)(\mu b_2+b_1)\alpha_{k,N-1}=(k+1)\left[\mu(a_1b_2-a_2b_1)-(a_3b_2-a_4b_1)\right]\alpha_{k+1,N-1}+\\&\mu(k+1)\left[\left(a_1q_1^0+a_2q_2^0\right)-\left(a_3q_1^0+a_4q_2^0\right)\right]+(N-1-k)\left(\mu q_1^0-q_2^0\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

Отсюда видно, что $\alpha_{K,N-1}$ линейно выражается через $\alpha_{k+1,N-1}$, $k=\overline{0,N-2}$. Следовательно, произвольной остаётся только $\alpha_{N-1,N-1}$, а остальные $\alpha_{k,N-1}$ выражаются через неё. Итак, в определении $p_{k,\,N-1}$ имеется также один произвол.

Общее решение системы (2.8) имеет

$$p_{k,N-2}=\begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{pmatrix}+\beta_{k,N-2}\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix},\ \ k=\overline{0,N-2},$$

где $\begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{pmatrix}$ – частное решение этой системы, а $\beta_{k,N-2}$ – произвольные вещественные числа. При продолжении этого процесса имеем, что в определении $\beta_{k,N-2}$ возникает один произвол.

Таким образом, на каждом шаге появляется одна произвольная постоянная. Следовательно, в случае *а*) размерность пространства P_{N} равна $N+1$, то есть $\dim P_N = N+1$.

Рассмотрим случай б), то есть $b_1+\mu b_2=0$ и $b_2\neq 0$. Тогда условие разрешимости системы (2.3), то есть соотношение (2.6) примет вид:

$$\left[\mu(a_1b_2-a_2b_1)-(a_3b_2-a_4b_1)\right]c_{k+1,N}=0;\ k=\overline{0,N-1}$$

или с учётом $b_1=-\mu b_2$ и $b_2\neq 0$

$$\left[\mu(a_1+\mu a_2)-(a_3+\mu a_4)\right]c_{k+1,N}=0;\ \ k=\overline{0,N-1}. \qquad (2.10)$$

Обозначим: $\alpha(\mu)\equiv\mu(a_1+\mu a_2)-(a_3+\mu a_4)$. Используя условие эллиптичности системы (1.5) покажем, что $\alpha(\mu)\neq 0\ \ \forall\,\mu\neq 0$.

Пусть, напротив $\alpha(\mu)=0$, для некоторого значения $\mu\neq 0$. Тогда $\mu(a_1-a_4)+\mu^2a_2-a_3=0$ или

$$a_1-a_4=-(\mu a_2-\frac{1}{\mu}a_3).$$

Но, с другой стороны по условию эллиптичности $(a_1-a_4)^2<-4a_2a_3$. Поэтому

$$(\mu a_2-\frac{1}{\mu}a_3)^2<-4a_2a_3$$

или после преобразования

$$(\mu a_2 + \frac{1}{\mu} a_3)^2 < 0.$$

Получили противоречие. Следовательно, выполняется неравенство $\alpha(\mu) \neq 0$ $\forall\, \mu \neq 0$. Тогда из (2.10) следует, что $c_{k+1,N} = 0$, то есть $p_{kN} = 0$, $k = \overline{0, N-1}$, причём c_{0N} – произвольная постоянная. Система (2.9) примет вид: $Bp_{k,N-1} = 0$. Отсюда

$$p_{k,N-1} = \alpha_{k,N-1} \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{k,N-1}$ – произвольные вещественные числа.

Далее, полагая в уравнение (2.7) $j = N-1$ аналогично, как и при доказательстве соотношений $c_{k+1,N} = 0$, можно установить, что $\alpha_{k+1,N-1} = 0$, причём $\alpha_{0,N-1}$ – произвольная постоянная.

Таким образом, в случае б) также на каждом шаге возникает одна произвольная постоянная. Следовательно, размерность пространства P_N равна $N+1$, то есть $\dim P_N = N+1$.

Остаётся рассмотреть случай 2.2, то есть случай когда $b_2 b_3 = 0$. Тогда $b_1 b_4 = 0$, и следовательно, матрица B может иметь один из таких видов:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, рассмотрим случай

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $|b_2| + |b_4| > 0$. Найдём собственный вектор $q_0 = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$ – матрицы B, отвечающий нулевому собственному значению. Так как

$$Bq_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 v_2' \\ b_4 v_2' \end{pmatrix},$$

и $Bq_0 = 0$, то

$$\begin{cases} b_2 v_2' = 0 \\ b_4 v_2' = 0 \end{cases}.$$

Так как $|b_2| + |b_4| > 0$, то $v_2' = 0$, причём v_1' произвольная. Возьмём $v_1' = 1$. Тогда $q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Поэтому соотношение (2.2) примет вид

$$p_{kN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_{kN},\ c_{kN} \in R,\ k = \overline{0,\ N}\ .$$

Подставим в систему (2.3) $j = N$.

$$(N-k)\,p_{kN} + (k+1)Ap_{k+1,N} + Bp_{k,N-1} = 0;\ k = \overline{0,\ N-1}.$$

Отсюда

$$Bp_{k,N-1} = -(N-k)\,p_{kN} - (k+1)Ap_{k+1,N}\,.$$

Пусть $p_{k,N-1} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, тогда $Bp_{k,N-1} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 q_2 \\ b_4 q_2 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\begin{cases} b_2 q_2 \equiv -(N-1)C_{kN} - (k+1)a_1 C_{k+1,N} \\ b_4 q_2 = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Если $b_4 \neq 0$, то $q_2 = 0$ и из первого уравнения системы (2.11) получаем, что

$$(N-1)C_{kN} + (k+1)a_1 C_{k+1,N} = 0\,. \tag{2.12}$$

Задавая c_{NN} можно найти остальные c_{kN} $(k = \overline{0,\ N-1})$ из (2.12).

Далее в уравнение (2.3) подставим $j = N-1$:

$$(N-1-k)\,p_{k,N-1} + (k+1)Ap_{k+1,N-1} + Bp_{k,N-2} = 0;\ k = \overline{0,\ N-2}.$$

$$Bp_{k,N-2} = -(N-1-k)\,p_{k,N-1} - (k+1)Ap_{k+1,N-1}\,.$$

Повторяя выше проведённую процедуру, приходим к заключению, что задавая $c_{N-1,N-1}$ можно найти остальные $c_{k,N-1}$, $k=\overline{0,\ N-2}$.

Продолжая этот процесс, заметим, что на каждом шаге появляется одна произвольная постоянная. Следовательно, размерность пространства P_N равна $N+1$, то есть $\dim P_N = N+1$.

Точно так же можно рассмотреть случай $b_4 = 0$ и получить, что $\dim P_N = N+1$.

Наконец, в случае $B=0$ равенство (2.3) примет вид:

$$(j-k)p_{kj} + (k+1)Ap_{k+1,j} = 0\ ,\ j=\overline{1,N}\ ; k=\overline{0,\ j-1}. \tag{2.13}$$

Аналогично, рассмотренному выше можно шаг за шагом определить p_{kj}, причём на каждом шаге возникают две произвольные постоянные. Поэтому $\dim P_N = 2(N+1)$, причём, задавая p_{jj} $\left(j=\overline{0,N}\right)$, остальные p_{kj} можно определить из соотношения (2.13).

Случай 3. Пусть $\det B > 0$. В этом случае в силу теоремы 1.3 предыдущего параграфа $U(x,\ y)$ является квазимногочленом, которого можно представить в виде

$$U(x,y) = \sum_{j=0}^{n} [e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} P_j(x,y) + e^{-i(\xi_0 x + \eta_0 y)} Q_j(x,y)],$$

где

$$P_j(x,y) = \sum_{k=0}^{j} p_{kj} x^{j-k} y^k,\ Q_j(x,y) = \sum_{k=0}^{j} q_{kj} x^{j-k} y^k.$$

Если p_{kj} и q_{kj} – комплексные векторы, то, в общем, получаем комплексные решения. Если взять $q_{kj} = \overline{p}_{kj}$, то получаем вещественные решения.

Найдем вещественные решения. Подставляя U и её частные производные в систему (1.5), после приведения подобных коэффициентов, получаем

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{N}\left(i\xi_0 P_j + \frac{\partial P_j}{\partial x} + A\left(i\eta_0 P_j + \frac{\partial P_j}{\partial y}\right) + BP_j \right) = 0, & (2.14) \\ \sum_{j=0}^{N}\left(-i\xi_0 Q_j + \frac{\partial Q_j}{\partial x} + A\left(-i\eta_0 Q_j + \frac{\partial Q_j}{\partial y}\right) + BQ_j \right) = 0. & (2.15) \end{cases}$$

Из уравнения (2.14) следует, что

$$\sum_{j=0}^{N}\left(i\xi_0 P_j + i\eta_0 AP_j + BP_j\right) + \sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + A\frac{\partial P_j}{\partial y}\right) = 0 .$$

Заменяя во второй сумме j на $j+1$, объединяя обе суммы и приравнивая к нулю слагаемые одинаковой однородности, получаем:

$$\left(i\xi_0 E + i\eta_0 A + B\right)P_N = 0, \tag{2.16}$$

$$\left(i\xi_0 E + i\eta_0 A + B\right)P_j = -\frac{\partial P_{j+1}}{\partial x} - A\frac{\partial P_{j+1}}{\partial y}, \ \ 0 \le j \le N-1. \tag{2.17}$$

Обозначая матрицу $i\xi_0 E + i\eta_0 A + B$ через $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, подставляя в (2.16) и (2.17) вместо P_j её выражение, получаем

$$Cp_{kN} = 0, \ \ k = \overline{0, N}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=0}^{j} Cp_{kj}x^{j-k}y^k = -\sum_{k=0}^{j+1}\left(p_{k,j+1}(j+1-k)x^{j-k}y^k + Akp_{k,j+1}x^{j+1-k}y^{k-1}\right); \ j = \overline{0, N-1}.$$

Отсюда в свою очередь имеем рекуррентные соотношения для коэффициентов p_{kj} функций P_j:

$$Cp_{kj} = -(j+1-k)p_{k,j+1} - (k+1)Ap_{k+1,j+1}, \ k = \overline{0, j}, \ j = \overline{0, N-1}. \tag{2.19}$$

Покажем, что $rangC = 1$. Действительно, если $rangC = 0$, то

$$\begin{cases} i\xi_0 + i\eta_0 + b_1 = 0 \\ i\eta_0 a_3 + b_3 = 0 \\ i\eta_0 a_2 + b_2 = 0 \\ i\xi_0 + i\eta_0 a_4 + b_4 = 0. \end{cases}$$

Так как по условию эллиптичности $a_2 a_3 \ne 0$, $\left(\xi_0, \eta_0\right) \ne (0,0)$, то из этой системы следует, что $b_j = 0$, то есть $B = 0$, что невозможно. Отсюда $rangC = 1$.

Поэтому множество решений системы (2.18) образует одномерное линейное пространство над полем комплексных чисел. Следовательно,

$$p_{kN} = \phi_{kN} q_0,$$

где ϕ_{kj} – комплексные числа, $q_0 = \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор матрицы C, отвечающий нулевому собственному значению.

В дальнейшем будем изучать систему (2.19). Обозначив правую часть системы (2.19) при $j = N-1$ через $\begin{pmatrix} g_{kN} \\ h_{kN} \end{pmatrix}$, а $p_{k,N-1}$ – через $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, имеем

$$\begin{cases} c_1 q_1 + c_2 q_2 = g_{kN}, \\ \mu c_1 q_1 + \mu c_2 q_2 = h_{kN}. \end{cases} \tag{2.20}$$

В предположении, что $c_j \neq 0$, условие разрешимости этой системы имеет вид $\mu g_{kN} = h_{kN}$ или

$$-\mu(N-k)c_2\phi_{kN} - \mu(k+1)(a_1c_2 - a_2c_1)\phi_{k+1,N} =$$
$$= (N-k)c_1\phi_{kN} - (k+1)(a_3c_2 - a_4c_1)\phi_{k+1,N},$$

где $\mu = c_3/c_1$. Упростим это соотношение

$$\begin{gathered} -(N-k)(\mu c_2 + c_1)\phi_{kN} = (k+1) \\ \left[\mu(a_1c_2 - a_2c_1) - (a_3c_2 - a_4c_1)\right]\phi_{k+1,N}. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Возможны два случая: *а*) $c_1 + \mu c_2 \neq 0$; *б*) $c_1 + \mu c_2 = 0$.

Рассмотрим случай *а*). В этом случае задаём произвольным образом ϕ_{NN}, остальные ϕ_{kN} $(k = \overline{0, N-1})$ найдём из (2.21). Таким образом, в определении p_{kN} имеется один произвол. Далее условие разрешимости системы (2.26) будем считать выполненным.

Пусть $\begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix}$ - частное решение системы (2.20). Тогда ее общее решение имеет вид

$$p_{k,N-1} = \begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix} + \varphi_{k,N-1}\begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix}; \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{2.22}$$

где $\varphi_{k,N-1}$ - произвольные комплексные числа. Далее в уравнении (2.19) подставим $j = N-2$:

$$Cp_{k,N-2} = -(N-1-k)\,p_{k,N-1} - (k+1)Ap_{k+1,N-1} \ ;\ k = \overline{0, N-2}. \qquad (2.23)$$

Условие разрешимости этой системы аналогично условию разрешимости системы (2.20): $\mu\, g_{k,N-1} = h_{k,N-1}$, где через $\begin{pmatrix} g_{k,N-1} \\ h_{k,N-1} \end{pmatrix}$ обозначена правая часть системы (2.23). Следовательно, учитывая (2.22) имеем

$$-(N-1-k)(\mu c_2 + c_1)\varphi_{k,N-1} = (k+1)\left[\mu(a_1c_2 - a_2c_1) - (a_3c_2 - a_4c_1)\right]\varphi_{k+1,N-1} +$$
$$\mu(k+1)\left[\left(a_1q_1^0 + a_2q_2^0\right) - \left(a_3q_1^0 + a_4q_2^0\right)\right] + (N-1-k)\left(\mu q_1^0 - q_2^0\right)$$

Отсюда видно, что $\varphi_{K,N-1}$ линейно выражается через $\varphi_{k+1,N-1}$ ($k = \overline{0, N-2}$). Следовательно, произвольным остаётся только $\varphi_{N-1,N-1}$, а остальные $\varphi_{k,N-1}$ выражаются через него. Итак, в определении $p_{k,N-1}$ имеется также один произвол.

Общее решение системы (2.23) имеет вид

$$p_{k,N-2} = \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{pmatrix} + \gamma_{k,N-2}\begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix},\ \ k = \overline{0, N-2},$$

где $\begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{pmatrix}$ – частное решение этой системы, а $\gamma_{k,N-2}$ – произвольные комплексные числа. При продолжении этого процесса имеем, что в определении $\gamma_{k,N-2}$ возникает один произвол.

Таким образом, на каждом шаге появляется одна произвольная постоянная. Следовательно, в случае *а*) размерность пространства P_N как вещественное линейное пространство равна $2(N+1)$.

Рассмотрим случай *б*), то есть $c_1 + \mu c_2 = 0$ и $c_2 \neq 0$. Тогда условие разрешимости системы (2.19), то есть соотношение (2.21) примет вид:

$$\left[\mu(a_1c_2 - a_2c_1) - (a_3c_2 - a_4c_1)\right]\phi_{k+1,N} = 0;\ k = \overline{0, N-1}$$

или с учётом $c_1 = -\mu c_2$ и $c_2 \neq 0$

$$\left[\mu(a_1+\mu a_2)-(a_3+\mu a_4)\right]\phi_{k+1,N}=0;\quad k=\overline{0,N-1}. \tag{2.24}$$

Обозначим: $\sigma(\mu)\equiv\mu(a_1+\mu a_2)-(a_3+\mu a_4)$. Используя условие эллиптичности системы (1.5), аналогично как в случае 2 можно показать, что

$$\sigma(\mu)\neq 0\ \ \forall\,\mu\neq 0.$$

Тогда из (2.24) следует, что $\phi_{k+1,N}=0$, т. е. $p_{kN}=0$, $k=\overline{0,N-1}$, причём ϕ_{0N} – произвольная постоянная. Система (2.19) при $j=N-1$ примет вид: $Cp_{k,N-1}=0$. Отсюда

$$p_{k,N-1}=\varphi_{k,N-1}\begin{pmatrix} c_2\\ -c_1\end{pmatrix},$$

где $\varphi_{k,N-1}$ –произвольные комплексные числа.

Далее, полагая в уравнение (2.19) $j=N-1$, аналогично, как и при доказательстве соотношений $\phi_{k+1,N}=0,\ k=\overline{0,N-1}$, можно установить, что $\varphi_{k+1,N-1}=0$, причём $\varphi_{0,N-1}$ –произвольная постоянная.

Таким образом, в случае *б*) также на каждом шаге возникает одна произвольная постоянная. Следовательно, размерность пространства P_N равна $2(N+1)$.

Аналогично можно рассматривать случай, когда у матрицы C есть нулевые элементы, причем в таких случаях размерность пространства P_N будет равна $2(N+1)$.

Таким образом, в каждом из трёх возможных случаев мы определили структуру пространства P_N и её размерность. Относительно размерности пространства P_N получили следующую

Теорема 2.1. *Пусть система (1.5) является эллиптической. Тогда*

$$\dim P_N=\begin{cases}0 & при\ \ \det B<0.\\ N+1 & при\ \ \det B=0,\ B\neq 0,\\ 2(N+1) & при\ \ B=0,\\ 2(N+1) & при\ \ \det B>0.\end{cases}$$

§ 3. Многообразие решений одного класса систем

В этом параграфе для системы вида

$$A_1 U_x + A_2 U_y + A_3 U_y = F(x,\ y), \qquad (3.1)$$

исследуются задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. Вопросам о решениях, определенных во всей плоскости эллиптических уравнений и систем посвящены работы Виноградова В.С., Мухамадиева Э., Паламодова В.П., Товмасяна Н.Е., Сафарова Д. и др. (см., например, [13, 23, 62, 70, 75]). Для эллиптических систем вида (1) при $n = 2$ в параграфах 1 и 2 этой главы были изучены задачи об умеренно растущих решениях и решениях степенного роста.

3.1. Общее решение системы.

Если система (3.1) является эллиптической, то, используя результаты первого параграфа этой главы, систему можно переписать в виде:

$$U_x + AU_y + BU = f(x,\ y), \qquad (3.2)$$

где $A = A_1^{-1} A_2$, $B = A_1^{-1} A_3$, $f = A_1^{-1} F$.

Покажем, что и в гиперболическом случае систему (3.1) можно представить в виде (3.2).

Пусть система (3.1) является гиперболической. Через $Q(\xi,\eta)$ обозначим определитель главного символа этой системы:

$$Q(\xi,\eta) = \det(i\xi A_1 + i\eta A_2).$$

$Q(\xi,\eta)$ является многочленом порядка n по ξ и η.

Согласно определению гиперболичности (см. [15]) для любого $\eta \in R$ все решения уравнения $Q(\xi,\eta) = 0$ относительно ξ будут действительными. Проверим, что $\det A_1 \neq 0$. Действительно, если $\eta = 0$, то $Q(\xi,0) = \det(i\xi A_1) = (i\xi)^n \det A_1$ и если $\det A_1 \neq 0$, то уравнение $Q(\xi,0) = 0$ имеет только действительный корень $\xi = 0$. Если же $\det A_1 = 0$, то любое комплексное число ξ будет решением уравнения $Q(\xi,0) = 0$. Поэтому система (3.1) при $\det A_1 = 0$ не будет гиперболическим.

Итак, $\det A_1 \neq 0$. Поэтому приходим к системе (3.2) и в гиперболическом случае.

Предположим, что матрицы A и B перестановочны, то есть $AB = BA$. В системе (3.2) произведём замену искомой функции $U = e^{-Bx}CV$, где C – невырожденная матрица. Тогда имеем

$$-e^{-Bx}BCV + e^{-Bx}CV_x + Ae^{-Bx}CV_y + Be^{-Bx}CV = f(x,\ y)$$

или

$$V_x + C^{-1}e^{Bx}Ae^{-Bx}CV_y = C^{-1}e^{Bx}f(x,\ y). \tag{3.3}$$

В силу перестановочности матриц A и B имеет место равенство $e^{Bx}Ae^{-Bx} = A$. Поэтому система (3.3) примет вид

$$V_x + C^{-1}ACV_y = g(x,\ y), \tag{3.4}$$

где $g(x, y) = C^{-1}e^{Bx}f(x,\ y)$.

В качестве C возьмём матрицу, приводящую матрицу A к канонической форме Жордана (см., например, [28]). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ – различные собственные значения матрицы A. Тогда система (3.4) распадается на системы меньшей размерности

$$\frac{\partial V_k}{\partial x} + \Lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial y} = g_k(x,\ y),\ k = 1,\ \ldots,\ m, \tag{3.5}$$

где

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

- жордановая клетка порядка s_k, $s_1 + s_2 + \ldots + s_m = n$, $[V_1,\ V_2,\ \ldots, V_m]^T = V$, $[g_1,\ g_2, \ldots, g_m]^T = g$.

Для удобства координаты вектора V_k обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ $(\nu = s_k)$, а координаты вектора g_k –через $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$. Тогда систему (3.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = h_1(x, y), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = h_2(x, y), \tag{3.7}$$

....

$$\frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial y} = h_{\nu-1}(x, y), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_\nu}{\partial y} = h_\nu(x, y). \tag{3.9}$$

3.1.1. Случай простых собственных значений.

Пусть матрица A имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ соответствующие собственные векторы. Если матрицы A и B перестановочны, то, как известно (см., например, [28]), $z_1, z_2, \ldots, z_n$ будут собственными векторами и матрицы B. Через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ обозначим собственные значения матрицы B, которым соответствуют собственные векторы $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Справедлива следующая

Теорема 3. 1. *Пусть матрица A имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ соответствующие собственные векторы. Пусть матрицы A и B перестановочны. Тогда общее решение однородной системы*

$$U_x + AU_y + BU = 0 \tag{3.10}$$

имеет вид

$$U(x, y) = C(e^{-\mu_1 x}\varphi_1(\lambda_1 x - y), \ldots, e^{-\mu_n x}\varphi_n(\lambda_n x - y))^T, \tag{3.11}$$

где C-матрица, столбцы которой это собственные векторы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *матрицы* A, μ_j *собственные значения матрицы* B, *указанные выше,* φ_j – *произвольные вещественные функции класса* C^1, *если все* λ_j *вещественные (гиперболический случай) и произвольные аналитические функции комплексной переменной, если все* λ_j *комплексные (эллиптический случай).*

Доказательство. Так как $C=[z_1, z_2, \ldots, z_n]$, то замена $U=e^{-Bx}CV$ систему (3.10) приводит к виду

$$V_x+\Lambda V_y=0,$$

где $\Lambda=diag\ [\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$. В силу леммы 3.1 (см. ниже) общее решение последней системы имеет вид

$$V(x, y)=[\varphi_1(\lambda_1 x-y),\ldots,\varphi_n(\lambda_n x-y)]^T,$$

где φ_j – произвольные вещественные функции класса C^1, если все λ_j вещественные (гиперболический случай) и произвольные аналитические функции комплексной переменной, если все λ_j комплексные (эллиптический случай). Поэтому

$$U(x, y)=e^{-Bx}C\,[\varphi_1(\lambda_1 x-y),\ldots,\varphi_n(\lambda_n x-y)]^T. \tag{3.12}$$

Так как $z_1, z_2, \ldots, z_n$ собственные векторы матрицы B, соответствующие собственным значениям $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, то матрица C приводит матрицу B к диагональному виду $M=diag\ [\mu_1,\ldots,\mu_n]$, то есть $C^{-1}BC=M$. Следовательно, в силу свойств экспоненциала матрицы справедливо равенство

$$e^{-Bx}C=e^{-CMC^{-1}x}C=Ce^{-Mx}=Cdiag\ \ [e^{-\mu_1 x},\ldots,e^{-\mu_n x}]$$

Отсюда и из (3.12) получим формулу

$$U=Cdiag\ \ [e^{-\mu_1 x},\ldots,e^{-\mu_n x}][\varphi_1(\lambda_1 x-y),\ldots,\varphi_n(\lambda_n x-y)]^T$$

из которой следует (3.11).

Теорема доказана.

Рассмотрим уравнение вида

$$u_x + \lambda u_y = h\,(x, y), \tag{3.13}$$

где $\lambda -$ вещественное или комплексное число, $h(x,\ y)$ заданная функция.

Лемма 3.1. *Общее решение однородного уравнения*

$$u_x + \lambda u_y = 0 \tag{3.14}$$

имеет вид

$$u\,(x,\ y) = \varphi(\lambda x - y), \tag{3.15}$$

где φ является произвольной вещественной функцией класса C^1 в случае вещественного λ и произвольной аналитической функцией комплексной переменной в случае комплексного λ.

Доказательство. Случай вещественного λ является очевидным. Рассмотрим случай комплексного λ. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ и $\varphi(z)$ произвольная аналитическая по z функция. Для функции $u\,(x,\ y) = \varphi(\lambda x - y)$ имеем

$$u_x = \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\lambda x - y) = \lambda \varphi_z(\lambda x - y),$$

$$u_y = \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\lambda x - y) = -\varphi_z(\lambda x - y).$$

Отсюда следует, что функция $u\,(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению (3.14).

Теперь покажем, что каждое решение $u\,(x,\ y)$ уравнения (3.14) можно представить в виде (3.15) с аналитической функцией $\varphi(z)$. Пусть $\varsigma = \lambda x - y$. Тогда

$$x = \frac{1}{2i\beta}\left(\varsigma - \bar{\varsigma}\right),\ y = \frac{1}{2i\beta}\left(\bar{\lambda}\varsigma - \lambda\bar{\varsigma}\right)$$

и подставляя эти выражения в функцию $u\,(x,\ y)$, получаем функцию переменной $\varsigma : u(\varsigma) = u[x(\varsigma),\ y(\varsigma)]$. Вычислим производную $u_{\bar{\varsigma}}$:

$$u_{\bar{\varsigma}} = u_x \cdot x_{\bar{\varsigma}} + u_y \cdot y_{\bar{\varsigma}} = u_x\left(\frac{i}{2\beta}\right) + u_y\left(\frac{i\lambda}{2\beta}\right) = \frac{i}{2\beta}\left(u_x + \lambda u_y\right).$$

Так как $u(x, y)$ – решение уравнения (3.14), то $u_{\bar{\varsigma}}=0$, то есть функция $u(\varsigma)$ является аналитической по ς. Поэтому найдётся аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $u=\varphi(\varsigma)\equiv\varphi(\lambda x-y)$. Это и требовалось показать.

Лемма 3.1 доказана.

3.1.2. Случай кратных собственных значений.

Рассмотрим случай, когда у матрицы A есть кратные собственные значения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – различные собственные значения матрицы A $(m\le n)$, C – матрица, приводящая матрицу A к канонической форме Жордана и s_k – порядок жордановой клетки $J_k(\lambda_k)$.

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть матрицы A и B перестановочны. Тогда общее решение однородной системы (3.10) определяется формулой*

$$U(x,\ y)=e^{-Bx}CV(x,y),$$

где

$$V=\left(V_1\ ,\ldots,V_m\right)^T,\ V_k=\left(v_{1,k},\ldots,v_{s_k,k}\right),\ k=1,\ldots,m,$$

$$v_{l,k}=\sum_{j=0}^{s_k-l}x^{s_k-l-j}\varphi_{j,k}^{(s_k-l-j)}\left(\lambda_k x-y\right),\quad l=1,\ldots,s_k, \tag{3.16}$$

$\varphi_{j,k}$ – *произвольные вещественные функции класса C^{s_k-j-1}, если все λ_k вещественные и произвольные аналитические функции комплексной переменной, если все λ_k комплексные.*

Доказательство. Так как система (3.10) распадается на однородные системы меньшей размерности вида

$$\frac{\partial V_k}{\partial x}+\Lambda_k\frac{\partial V_k}{\partial y}=0,\ k=1,\ \ldots,\ m, \tag{3.17}$$

а каждая из последних систем в развёрнутой форме имеет вид

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\lambda_k\frac{\partial\omega_1}{\partial y}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}=0, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = 0, \tag{3.19}$$

....

$$\frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial y} = 0, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_\nu}{\partial y} = 0, \tag{3.21}$$

где $\nu = s_k$, то достаточно найти общее решение системы уравнений (3.18) – (3.21). Из уравнения (3.21) в силу леммы 3.1, находим

$$\omega_\nu(x, y) = \varphi_\nu(\lambda_k x - y),$$

где φ_ν − произвольная вещественная функция класса C^1, если λ_k вещественное и произвольная аналитическая функция комплексной переменной, если λ_k комплексное. Тогда уравнение (3.20) примет вид

$$\frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial y} = \varphi'_\nu(\lambda_k x - y). \tag{3.22}$$

Функция $\omega = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y)$ является частным решением уравнения (3.22), здесь в случае вещественного λ_k мы предполагаем, что функция φ_ν принадлежит классу C^2. Поэтому общее решение уравнения (3.22) имеет вид

$$\omega_{\nu-1} = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-1}(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_{\nu-1}(z)$ − произвольная вещественная функция класса C^1, если λ_k вещественное и произвольная аналитическая функция комплексной переменной, если λ_k комплексное. Аналогично находим

$$\omega_{\nu-2} = x^2\varphi''_\nu(\lambda_k x - y) + x\varphi'_{\nu-1}(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-2}(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_{\nu-2}(z)$ − произвольная вещественная функция класса C^1, если λ_k вещественное и произвольная аналитическая функция комплексной переменной, если λ_k комплексное, здесь в случае вещественного λ_k предполагается, что $\varphi_\nu \in C^2$, $\varphi_{\nu-1} \in C^1$. Продолжая эту процедуру, находим $\omega_{\nu-3}, \dots, \omega_1$.

Приведённая схема решения систем (3.17) показывает, что компоненты вектор-функции $V(x,\ y)$ определяются по формулам (3.16).

Теорема доказана.

3.1.3. Случай эллиптической системы. Предположим, что система (3.2) является эллиптической. Покажем, что в этом случае общее решение соответствующей однородной системы (3.10) можно представить в виде

$$U(x,\ y) = C(e^{-i\operatorname{Re}(\lambda_1\overline{\mu_1}x-\mu_1 y)/\operatorname{Im}\lambda_1}\psi_1(\lambda_1 x - y),\dots, e^{-i\operatorname{Re}(\lambda_n\overline{\mu_n}x-\mu_n y)/\operatorname{Im}\lambda_n}\psi_n(\lambda_n x - y))^T, \quad (3.23)$$

где $\psi_j(z)$ аналитические по z функции.

Действительно, в формулу (3.11) полагая

$$\varphi_j(z) = e^{i\gamma_j z}\psi_j(z)$$

где $\gamma_j = -\operatorname{Re}\mu_j/\operatorname{Im}\lambda_j$, $\psi_j(z)$ – аналитические по z функции, получим

$$U(x,\ y) = C(e^{-\mu_1 x}\cdot e^{(\lambda_1 x - y)\cdot(-i\operatorname{Re}\mu_1/\operatorname{Im}\lambda_1)}\psi_1(\lambda_1 x - y),\dots,$$
$$e^{-\mu_n x}\cdot e^{(\lambda_n x - y)\cdot(-i\operatorname{Re}\mu_n/\operatorname{Im}\lambda_n)}\psi_n(\lambda_n x - y))^T$$

Покажем, что

$$e^{-\mu_j x}\cdot e^{(\lambda_j x - y)\cdot(-i\operatorname{Re}\mu_j/\operatorname{Im}\lambda_j)} = e^{-i\operatorname{Re}(\lambda_j\overline{\mu}_j x - \mu_j y)/\operatorname{Im}\lambda_j}. \quad (3.24)$$

Пусть

$$\lambda_j = a + ib, \qquad \mu_j = c + id.$$

Тогда имеем

$$\lambda_j\overline{\mu_j}x - \mu_j y = (a+ib)(c-id)x - (c+id)y =$$
$$acx - iadx + ibcx + bdx - cy - idy.$$

Отсюда

$$\frac{-i\operatorname{Re}(\lambda_j\overline{\mu_j}x - \mu_j y)}{\operatorname{Im}\lambda_j} = \frac{-i(acx + bdx - cy)}{b}.$$

Теперь преобразуем выражение: $-\mu_j x - i\dfrac{\operatorname{Re}\mu_j}{\operatorname{Im}\lambda_j}(\lambda_j x - y)$:

$$-\mu_j x - i\frac{\operatorname{Re}\mu_j}{\operatorname{Im}\lambda_j}(\lambda_j x - y) = -cx - idx - i\frac{c}{b}((a+ib)x - y) =$$

$$\frac{-cxb - ibdx - icax + cbx + icy}{b} = \frac{-i(bdx + cax - cy)}{b}$$

Отсюда следует равенство (3.24). Поэтому общее решение системы (3.10) даётся формулой (3.23). Эта формула удобна для нахождения решений степенного роста.

Воспользуясь леммой 3.1 можно найти общее решение однородной системы (3.10) и без предположения простоты собственных значений матрицы A.

3.1.4. Случай гиперболической системы.

Предположим, что система (3.2) является гиперболической. Тогда (см. глава 1, § 3) у матрицы A все собственные значения вещественны. В этом случае будем определять общее решение неоднородной системы (3.4). Так как система (3.4) распадается на системы вида (3.6)-(3.9), то достаточно решить последние системы.

Рассмотрим уравнение вида

$$U_x + \lambda U_y = h(x, y), \tag{3. 25}$$

где $\lambda -$вещественное число, $h(x, y)$ заданная вещественная функция.

Справедлива следующая

Лемма 3. 2. *Пусть λ вещественное число и функция $h(x, y)$ непрерывна по x и имеет непрерывную производную по y. Тогда общее решение уравнения (3.25) даётся формулой*

$$U(x, y) = \varphi(\lambda x - y) + \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h[t, \lambda(t - x) + y]dt, \tag{3.26}$$

где $\varphi -$произвольная функция класса C^1.

Доказательство. Очевидно, $U_0 = \varphi(\lambda x - y)$ является общим решением соответствующего (3.25) однородного уравнения. Обозначая интегральный член в (3.26) через $\omega(x, y)$, покажем, что функция $\omega(x, y)$ является частным решением неоднородного уравнения (3.25). С учётом правила дифференцирования интеграла с переменными пределами, имеем

$$\omega_x = h(x,\, y) - \lambda h[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] - \lambda \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h_y[\xi,\, \lambda(\xi - x) + y]d\xi,$$

$$\omega_y = h[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] + \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h_y[\xi,\, \lambda(\xi - x) + y]d\xi.$$

Отсюда получим

$$\omega_x + \lambda \omega_y = h(x,\, y),$$

то есть функция $\omega(x,\, y)$ является решением неоднородного уравнения (3.25). Поэтому формула (3.26) даёт общее решение неоднородного уравнения (3.25).

Лемма 3.2 доказана.

Используя эту лемму можно решить уравнение (3.9), то есть найти функцию $\omega_\nu(x,\, y)$. Для функции $h(x,\, y)$ из леммы 3.2 положим:

$$(L_\lambda h)(x,\, y) = \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h[t,\, \lambda(t - x) + y]dt\,.$$

Тогда из уравнения (3.9) имеем (предполагаем, что $h_\nu \in C_y^1$):

$$\omega_\nu(x, y) = \varphi_\nu(\lambda_k x - y) + (L_{\lambda_k} h_\nu)(x,\ y)\,, \tag{3.27}$$

где φ_ν – произвольная функция класса C^1.

Подставим $\dfrac{\partial \omega_\nu}{\partial y}$ в уравнение (3.8):

$$\begin{gathered}\frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial \omega_{\nu-1}}{\partial y} = h_{\nu-1}(x,\ y) - \varphi_\nu'(\lambda_k x - y) - \\ h_\nu[\lambda_k x - y,\, (\lambda_k - 1)(\lambda_k x - y)] + L_{\lambda_k}\left(\frac{\partial h_\nu}{\partial y}\right)\end{gathered} \tag{3.28}$$

Отсюда

$$\omega_{\nu-1}(x, y) = \varphi_{\nu-1}(\lambda_k x - y) + L_{\lambda_k} P_{\nu-1}\,, \tag{3.29}$$

где $\varphi_{\nu-1}$ – произвольная функция класса C^1, а $P_{\nu-1}$ –правая часть уравнения (3.28).

Продолжая эту процедуру, находим $\omega_{\nu-2},\ldots,\omega_1$. Нужно отметить, что при таком способе определения $\omega_1,\ldots,\omega_\nu$ следует предполагать, что функции $h_j(x,\,y)$ $(j=\overline{1,\nu})$ должны быть непрерывны по x и иметь непрерывную частную производную порядка $\nu-j+1$ по y, а функции φ_j должны быть выбраны из класса C^j.

Пусть в системе (3.4)

$$C^{-1}e^{Bx}f=\left(g_1,\ldots,g_m\right)^T,\; g_k=\left(h_{1,k},\ldots,h_{s_k,k}\right),\; k=1,\ldots,m.$$

Тогда по аналогии с формулами (3.27), (3.29) компоненты вектора V можно найти по формулам

$$v_{l,k}=L_{\lambda_k}\left\{h_{l,k}-\frac{\partial}{\partial y}\left[L_{\lambda_k}h_{l-1,k}-L_{\lambda_k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(L_{\lambda_k}h_{l-2,k}-\ldots\right)\right)\right]\right\},\; l=1,\ldots,s_k,$$

а частное решение системы (3.4) определить по формуле $U=e^{-Bx}CV$.

3.2. Решения полиномиального роста. В этом пункте будем находить решения однородной системы (3.10), растущие при $|x|+|y|\to\infty$ не быстрее степенной функции.

3.2.1. Полиномиальные решения эллиптической системы. Для однородной системы (3.10) рассмотрим задачу о решениях $U(x,\,y)$, определённых во всей плоскости и удовлетворяющих при $|x|+|y|\to\infty$ условию роста

$$\|U(x,\;y)\|\le K(1+|x|^N+|y|^N), \qquad (3.30)$$

где $\|U\|=|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|$, N –целое неотрицательное число, K –постоянная, зависящая от U. Многообразие таких решений образует линейное пространство, которое обозначим через P_N.

Пусть система (3.10) является эллиптической и выполнены условия теоремы 3.1. Из формулы (3.23) в силу (3.30) получим оценку

$$\left|\varphi_j(\lambda_j x - y)\right| \le K\left\|C^{-1}\right\|(1+|x|^N+|y|^N)$$

при $|x|+|y|\to\infty$. Так как функция $\varphi_j(z)$ аналитическая по z, то в силу теоремы Лиувилля она будет полиномом относительно z степени не выше N. Поэтому $\varphi_j(z)=p_{jN}(z)$, где $p_{jN}(z)$ полиномы относительно z степени не выше N. Следовательно, решения задачи (3.10), (3.30) имеют вид

$$U(x,\, y) = C(e^{-i\,\mathrm{Re}(\lambda_1\bar{\mu}_1 x-\mu_1 y)/\mathrm{Im}\lambda_1}\, p_{1N}(\lambda_1 x - y), \ldots, e^{-i\,\mathrm{Re}(\lambda_n\overline{\mu_n} x-\mu_n y)/\mathrm{Im}\lambda_n}\, p_{nN}(\lambda_n x - y))^T,$$

Тогда пространство P_N будет конечномерным и его размерность равна $n(N+1)$.

3.2.2. Полиномиальные решения гиперболической системы.

Рассмотрим задачу (3.10), (3.30) в случае гиперболичности системы (3.10).

Пусть система (3.10) является гиперболической и выполнены условия теоремы 3.1. Тогда числа λ_j, μ_j, $j=1,\ldots,n$ будут вещественными. Из формулы (3.11) в силу (3.30) получим оценку

$$\left|e^{-\mu_j x}\varphi_j(\lambda_j x - y)\right| \le K\left\|C^{-1}\right\|(1+|x|^N+|y|^N)$$

при $|x|+|y|\to\infty$. Отсюда при $x=0,\ |y|\to\infty$ имеем оценку

$$\left|\varphi_j(y)\right| \le K\left\|C^{-1}\right\|(1+|y|^N), \qquad (3.31)$$

а при $y=0,\ |x|\to\infty$ – оценку

$$\left|e^{-\mu_j x}\varphi_j(\lambda_j x)\right| \le K\left\|C^{-1}\right\|(1+|x|^N). \qquad (3.32)$$

Из оценки (3.31) следует, что функция $\varphi_j(t)$ при $t\to\infty$ растёт не быстрее степенной функции. Тогда из оценки (3.32) получаем, что либо $\mu_j=0$ либо $\varphi_j=0$. Поэтому в гиперболическом случае, если все собственные значения матрицы B ненулевые, то задача (3.10), (3.30) имеет только нулевое решение, если же какое-то собственное значение $\mu_{j_0}=0$, то взяв в формуле

(3.11) в качестве функции $\varphi_{j_0}(t)$ функцию класса C^1, растущую при $t \to \infty$ не быстрее степенной функции и полагая $\varphi_j = 0$ для $\mu_j \neq 0$, получим ненулевые решения задачи (3.10), (3.30). В этом случае пространство P_N будет бесконечномерным.

Таким образом, в случае, когда система (3.10) является гиперболическим, пространство решений полиномиального роста этой системы будет либо нулевым, либо бесконечномерным.

Глава III

Ограниченные во всей плоскости решения эллиптических систем первого порядка

В этой главе рассматриваются вопросы нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических систем первого порядка в гёльдеровых пространствах, а также принцип экстремума для одного класса эллиптических систем и задача о периодических решениях эллиптических систем.

§ 1. Нётеровость одного класса эллиптических систем

в гёльдеровых пространствах

1.1. Системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим комплексные эллиптические системы вида

$$w_{\bar z} + A\,\overline{w} = 0, \qquad (1.1)$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$, $A -$ постоянная комплексная матрица порядка n. Будем изучать вопрос об ограниченных во всей плоскости регулярных, то есть принадлежащих классу C^1 решениях этой системы.

Пусть $w(z)$ регулярное решение системы (1.1). Тогда в силу теоремы о гладкости решений эллиптических систем (глава 1, § 3) функция $w(z)$ будет бесконечно дифференцируемой. Поэтому дифференцируя равенство

$$w_{\bar z}(z) + A\,\overline{w(z)} = 0 \qquad (1.2)$$

по z, получим

$$w_{z\bar z} + A\,\overline{w}_z = 0.$$

Так как $\overline{w}_z = \overline{(w_{\bar z})}$ и $w_{z\bar z} = \frac{1}{4}\Delta w$ (Δ - оператор Лапласа), то имеем

$$\frac{1}{4}\Delta w + A\overline{(w_{\bar z})} = 0.$$

Отсюда в силу (1.2) будем иметь

$$\Delta w - 4A\,\overline{A}\,w = 0. \qquad (1.3)$$

Итак, каждое регулярное решение системы (1.1) будет удовлетворять эллиптической системе второго порядка (1.3).

Будем исследовать систему (1.3). В этой системе произведём замену $w = B\omega$, где $\omega -$ новая искомая вектор-функция, $B -$ постоянная невырожденная матрица. Тогда имеем

$$B\Delta\omega - 4A\overline{A}B\omega = 0$$

или

$$\Delta\omega - 4B^{-1}A\overline{A}B\omega = 0. \qquad (1.4)$$

В качестве B возьмём матрицу, приводящую матрицу $A\overline{A}$ к каноничеcкой форме Жордана. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \le n) -$ различные собственные значения матрицы $A\overline{A}$. Тогда система (1.4) распадается на системы меньшей размерности. Действительно, пусть $\Lambda = diag\,[\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m] -$ каноническая форма Жордана матрицы $A\overline{A}$, где Λ_k $(k = \overline{1, m}) -$ жордановая клетка порядка s_k:

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & \ldots\lambda_k \; 1 \\ 0 & \ldots\ldots & 0 \;\; \lambda_k \end{pmatrix}, \; s_1 + s_2 + \ldots + s_m = n.$$

Перепишем систему (1.4) в виде

$$\Delta\omega - 4diag[\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m]\omega = 0. \qquad (1.5)$$

Вектор-функцию $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^T$ запишем в виде

$$\omega = (u_1, \; u_2, \ldots, u_m)^T,$$

где

$$u_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{s_1}), \; u_2 = (\omega_{s_1+1}, \ldots, \omega_{s_1+s_2}), \ldots, u_m = (\omega_{s_1+\ldots+s_{m-1}+1}, \ldots, \omega_n).$$

При этом система (1.5) распадается на m независимые системы:

$$\Delta u_k - 4\Lambda_k u_k = 0, \;\; k = \overline{1, m}. \qquad (1.6)$$

Эти системы относятся к системам вида

$$\Delta u - Mu = 0, \qquad (1.7)$$

где $u = (v_1, \ldots, v_N) -$ искомая вектор-функция, $M -$ квазидиагональная матрица порядка N вида

$$M = 4\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \mu & 1 \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots\mu & 1 \\ 0 & \dots\dots 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Систему (1.7) распишем в развёрнутом виде

$$\begin{cases} \Delta v_1 - 4\mu v_1 - 4v_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta v_{N-1} - 4\mu v_{N-1} - 4v_N = 0 \\ \Delta v_N - 4\mu v_N = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Для системы (1.8) рассмотрим задачу о регулярных решениях, определённых во всей плоскости и растущих при $z \to \infty$ не быстрее степенной функции, то есть удовлетворяющих условию

$$\left| v_j(z) \right| \le K(1+|z|^p), \quad j = \overline{1, N} \tag{1.9}$$

$p -$целое неотрицательное число, $K -$постоянная, зависящая от решения.

Справедлива следующая

Лемма 1.1. *Пусть* $\mu > 0$. *Тогда задача (1.8)-(1.9) имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть $v^0 = (v_1^0, \dots, v_N^0)$ решение задачи (1.8)-(1.9). Функция, растущая при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция, принадлежит пространству умеренно растущих функций $S' = S'(C)$. Поэтому функции $v_j^0(z)$ принадлежат пространству S'. В тождествах, получающихся при подстановке $v_j^0(z),\ j = \overline{1, N}$ в систему (1.8), переходя к образам Фурье, с учётом равенства $\widehat{\Delta w} = -|\varsigma|^2 \hat{w}$ [52], получим

$$\begin{cases} -\left(|\varsigma|^2+4\mu\right)\hat{v}_1^0-\hat{v}_2^0=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\left(|\varsigma|^2+4\mu\right)\hat{v}_{N-1}^0-\hat{v}_N^0=0, \\ -\left(|\varsigma|^2+4\mu\right)\hat{v}_N^0=0. \end{cases}$$

Так как $\mu>0$, то из последнего равенства следует, что $\hat{v}_N^0=0$, то есть $v_N^0(z)\equiv 0$. Тогда из предпоследнего равенства получим: $\hat{v}_{N-1}^0=0$, то есть $v_{N-1}^0(z)\equiv 0;$ и так далее получим $v_{N-2}^0=\ldots=v_2^0=v_1^0=0$.

Итак, мы получили, что $v_j^0(z)\equiv 0,$ то есть задача (1.8)-(1.9) имеет только нулевое решение.

Лемма 1.1 доказана.

Предположим, что в системе (1.1) матрица A является симметрической, то есть $A=A^T$. Покажем, что собственные значения матрицы $A\overline{A}$ являются неотрицательными. Действительно, пусть $\lambda-$собственное значение матрицы $A\overline{A}$ и e соответствующий собственный вектор:

$$A\overline{A}e=\lambda e.$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор e, имеем

$$(A\overline{A}e,\, e)=\lambda(e,\, e).$$

Но, $(A\overline{A}e,\, e)=(\overline{A}e,\, \overline{A}^T e)=(\overline{A}e,\ \overline{A}e)$; поэтому

$$\left(\overline{A}e,\, \overline{A}e\right)=\lambda\ (e,\, e)$$

или

$$\left\|\,\overline{A}e\right\|^2=\lambda\left\|e\right\|^2.$$

Отсюда $\lambda=\left\|\,\overline{A}e\right\|^2\Big/\left\|e\right\|^2$, то есть $\lambda\geq 0$.

Справедлива следующая теорема о задаче регулярных решений системы (1.1), растущих при $z\to\infty$ не быстрее чем степенная функция.

Теорема 1.1. *Пусть в системе (1.1) матрица* A *симметрическая и невырожденная. Тогда задача о регулярных решениях системы (1.1), растущих* *при $z \to \infty$ не быстрее чем степенная функция, имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть $w(z)$ регулярное решение системы (1.1), растущее при $z \to \infty$ не быстрее чем $|z|^p$, $p -$ целое неотрицательное число. Тогда эта функция будет решением системы (1.3), а функция $\omega = B^{-1} w$, где $B -$ матрица, приводящая матрицу A к канонической форме Жордана, удовлетворяет системе (1.5). Но, система (1.5) распадается на m систем вида (1.8), в которых число μ равно собственному значению матрицы $A\overline{A}$, а последние, как было установлено выше, положительные (в силу невырожденности матрицы A, у матрицы $A\overline{A}$ нет нулевого собственного значения). Поэтому в силу леммы 1.1 компоненты вектор-функции $\omega(z)$ тождественно равны нулю. Следовательно, $\omega(z) \equiv 0$, то есть $w(z) \equiv 0$.

Теорема 1.1 доказана.

2.2. Системы с переменными коэффициентами.

Рассмотрим эллиптические комплексные системы вида

$$w_{\bar{z}} + A(z)\, \overline{w} = f(z), \tag{1.10}$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$, $A(z) -$ комплексная матрица-функция порядка n, $f(z) -$ заданная вектор-функция.

Через C^n обозначим $n -$ мерное пространство комплексных векторов, а через C_α банахово пространство комплексных вектор-функций $w(z)$, ограниченных во всей комплексной плоскости C, равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$ с нормой

$$\|w\|_\alpha = \sup_{z \in C} \|w(z)\|_{C^n} + \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \|w(z_1) - w(z_2)\|_{C^n},$$

где $\|w(z)\|_{C^n}$ - норма в пространстве C^n. Через C_α^1 обозначим пространство таких вектор-функций $w(z)$, что $w, w_x, w_y \in C_\alpha$. Норма в C_α^1 определяется так

$$\|w\|_{\alpha,1} = \|w\|_\alpha + \|w_x\|_\alpha + \|w_y\|_\alpha,$$

с этой нормой C_α^1 превращается в банахово пространство.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что столбцы матрицы $A(z)$ и вектор-функция $f(z)$ принадлежат пространству C_α. Для вектор-функции $w(z)$ из C_α^1 положим

$$Lw = w_{\bar z} + A(z)\overline{w}\,.$$

Тогда $Lw \in C_\alpha$ и L является линейным (над полем вещественных чисел) оператором, действующим из пространства C_α^1 в пространство C_α. Покажем, что этот оператор является ограниченным. Действительно, для $w \in C_\alpha$ учитывая, что $w_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(w_x + iw_y\right)$, имеем

$$\| Lw\|_\alpha \le \| w_{\bar z}\|_\alpha + \|A(z)\overline{w}\|_\alpha \le \frac{1}{2}\left(\|w_x\|_\alpha + \|w_y\|_\alpha\right) + \|A(z)\overline{w}\|_\alpha \tag{1.11}$$

Так как столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат пространству C_α, то отображение $w \to A(z)\overline{w}$ из C_α^1 в C_α является линейным и ограниченным, то есть найдётся такая постоянная $k > 0$, что

$$\| A(z)\overline{w}\|_\alpha \le k\| w\|_{\alpha,\,1}$$

(в качестве постоянной k можно взять какую-нибудь матричную норму матрицы $A(z)$). Отсюда и из (1.11) следует, что

$$\|Lw\|_\alpha \le \frac{1}{2}\left(\| w_x\|_\alpha + \| w_y\|_\alpha\right) + k\| w\|_{\alpha,\,1}.$$

Усиливая правую часть, получим

$$\|Lw\|_\alpha \le \| w\|_\alpha + \| w_x\|_\alpha + \| w_y\|_\alpha + k\| w\|_{\alpha,1} = (k+1)\| w\|_{\alpha,\,1},$$

то есть

$$\| Lw\|_\alpha \le (k+1)\| w\|_{\alpha,\,1},$$

где постоянная k не зависит от вектор-функции w. Следовательно, оператор $L\colon C_\alpha^1 \to C_\alpha$ является ограниченным.

Будем изучать вопрос о нётеровости этого оператора. Как показано в работах С. Байзаева (см., например, [4]), в общем случае оператор $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ не будет нётеровым. Отметим, что если рассмотреть оператор L в гёльдеровых пространствах вектор-функций, определённых в ограниченной области, то он будет нётеровым (см., например, [19]).

Справедлива следующая

Теорема 1.2. *Пусть элементы матрицы $A(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдётся такое число $R_0 > 0$, что при $|z| > R_0$ матрица $A(z)$ является симметрической. Тогда оператор $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ будет нётеровым в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$\varliminf_{z\to\infty} |\det A(z)| > 0. \tag{1.12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ является нётеровым. Для систем вида (1.10) справедлива теорема о единственности продолжения (см. глава 1, § 3). Поэтому подпространство

$$E = \{w : w \in C_\alpha^1,\ w(z) = 0\ при\ |z| \le 1\}$$

пересекается с ядром $KerL$ оператора L только в нуле, то есть $E_0 \cap KerL = \{0\}$. Тогда в силу леммы 1.1 главы 1 образ $F = LE$ подпространства E замкнут в C_α, то есть F является подпространством в C_α.

Таким образом, линейный ограниченный оператор L переводит подпространство E пространства C_α^1 на подпространство F пространства C_α и является взаимно однозначным. Следовательно, из теоремы Банаха об обратном операторе получаем, что оператор $L: E \to F$ имеет ограниченный обратный $L^{-1}: F \to E$, то есть найдётся такая постоянная $k > 0$, что для всех $g \in F$ справедливо неравенство

$$\| L^{-1} g \|_{\alpha,1} \le K \| g \|_\alpha .$$

Полагая в этом неравенстве $g = Lw$, где w произвольная вектор-функция из E, получим

$$\| Lw \|_{\alpha} \geq m \| w \|_{\alpha,1}, \ w \in E, \tag{1.13}$$

где $m = K^{-1}$.

Пусть $w \in C^1_{\alpha}$ −произвольная вектор-функция с компактным носителем и $\{h_n\} \subset C$ −произвольная последовательность, стремящаяся к бесконечности, $h_n \to \infty$. Тогда при больших значениях n носитель вектор-функции $(S_{-h_n} w)(z) = w(z - h_n)$ не пересекается с единичным кругом $\{z : |z| \leq 1\}$ и поэтому для таких значений n вектор-функции $S_{-h_n} w$ принадлежат подпространству E. Поэтому для больших n из неравенства (1.13) получим

$$\left\| L(S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha} \geq m \left\| S_{-h_n} w \right\|_{\alpha,1}. \tag{1.14}$$

В силу свойств оператора S_{-h_n} для $w \in C^1_{\alpha}$ имеем следующие равенства

$$\left\| S_{-h_n} w \right\|_{\alpha,1} = \| w \|_{\alpha,1}, \ \left\| S_{h_n} L(S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha} = \left\| L(S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha}.$$

Тогда неравенство (1.14) можно переписать в виде

$$\left\| S_{h_n} L(S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha} \geq m \| w \|_{\alpha,1}. \tag{1.15}$$

Так как $C_{\alpha} \subset C_{\alpha'}$, $C^1_{\alpha} \subset C^1_{\alpha'}$ при $\alpha' < \alpha$ (см. глава 1, § 1), то оператор L можно рассматривать и в пространстве $C^1_{\alpha'}$, причём L будет действовать из пространства $C^1_{\alpha'}$ в пространство $C_{\alpha'}$ и по теореме о гладкости решений эллиптических систем (см. глава 1, § 1) оператор $L : C^1_{\alpha'} \to C_{\alpha'}$ будет $n-$нормальным. Поэтому, аналогично, тому, как было получено неравенство (1.15), можно установить, что для любой вектор-функции $w \in C^1_{\alpha'}$ с компактным носителем справедливо неравенство

$$\| g_n \|_{\alpha'} \geq m' \| w \|_{\alpha',1}, \tag{1.16}$$

где m' −постоянная, не зависящая от w и n, а $g_n = S_{h_n} L(S_{-h_n} w)$.

Легко увидеть, что

$$g_n = w_{\bar{z}} + A(z + h_n)\overline{w}.$$

В силу того, что столбцы матрицы A принадлежать пространству C_α (см. глава 1, § 1), из последовательности $\{A(z+h_n)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{A(z+h_{n_i})\}$, которая равномерно сходится на каждом компакте плоскости к некоторой матрице A_0. Так как элементы матрицы $A(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности, то нетрудно показать, что предельная матрица A_0 будет постоянной и симметрической. Множество таких предельных матриц обозначим через $H(A)$.

Через $\{p_j\}$ обозначим подпоследовательность $\{g_{n_j}\}$, а через $L_0 w$ вектор-функцию $w_{\bar z}+A_0\overline{w}$. Покажем, что из последовательности $\{p_j\}$ можно выделить подпоследовательность $\{p_{j_k}\}$, сходящуюся по норме пространства $C_{\alpha'}$ к функции $L_0 w$.

Действительно, так как $p_j - L_0 w = [A(z+h_{n_j})-A_0]\overline{w}$, то имеем

$$\left\|p_j - L_0 w\right\|_{\alpha'} = \sup_{z\in C}\left\|[A(z+h_{n_j})-A_0]w(z)\right\|_{C^n} + \sup_{z_1\neq z_2} q(z_1,\ z_2),$$

где

$$q_j(z_1,z_2)=\left|z_1-z_2\right|^{-\alpha'}\left\|[A(z_1+h_{n_j})-A_0]w(z_1)-[A(z_2+h_{n_j})-A_0]w(z_2)\right\|_{C^n}$$

В силу того, что вектор-функция $w(z)$ имеет компактный носитель, справедливо предельное соотношение

$$\sup_{z\in C}\left\|[A(z+h_{n_j})-A_0]w(z)\right\|_{C^n}\to 0 \text{ при } j\to\infty. \tag{1.17}$$

Пусть $q_j^0=\sup\limits_{z_1\neq z_2} q_j(z_1,z_2)$, $K-$носитель вектор-функции $w(z)$ и ε_j произвольная положительная числовая последовательность, стремящаяся к нулю при $j\to\infty$. Тогда по определению супремума найдутся такие точки $\xi_j,\ \eta_j\in C,\ \xi_j\neq\eta_j$, что справедливы неравенства

$$q_j^0-\varepsilon_j\le q_j(\varsigma_j,\eta_j)\le q_j^0,\ j=1,2,\ldots \tag{1.18}$$

Из последовательности $\delta_j=\left|\xi_j-\eta_j\right|$ выделим подпоследовательность δ_{j_k}, имеющую конечный или бесконечный предел δ. В силу симметричности функции $q(z_1, z_2)$ относительно переменных z_1, z_2 и компактности носителя вектор-функции $w(z)$, если нужно, переходя от последовательностей $\{\xi_{j_k}\}, \{\eta_{j_k}\}$ к их подпоследовательностям, достаточно рассмотреть следующие два случая:

1) $\xi_{j_k} \in K,\ \eta_{j_k} \in K,\quad k = 1, 2, \ldots;$ 2) $\xi_{j_k} \in K,\ \eta_{j_k} \notin K,\ k = 1, 2, \ldots$

Случай 1. Имеем

$$q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) \le \left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'} \cdot$$
$$\left\{\left\|[A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0]w(\xi_{j_k})\right\|_{C^n} + \left\|[A(\eta_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0]w(\eta_{j_k})\right\|_{C^n}\right\} \le \tag{1.19}$$
$$\left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'}\left\{\left\|A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0\right\|_0 \left\|w(\xi_{j_k})\right\|_{C^n} + \left\|A(\eta_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0\right\|_0 \left\|w(\eta_{j_k})\right\|_{C^n}\right\},$$

где $\left\|A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0\right\|_0$ - какая-нибудь матричная норма. Так как для произвольной ограниченной последовательности $\{\xi_j\} \subset C$ верно равенство

$$\lim_{j \to \infty}\left\|A(\xi_j + h_{n_j}) - A_0\right\|_0 = 0,$$

то в случае, когда $\delta > 0$, переходя в неравенстве (1.19) при $k \to \infty$ к пределу, получим

$$\lim_{k \to \infty} q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) = 0 \tag{1.20}$$

Если же $\delta = 0$, то из неравенства

$$q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) \le \left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'} \cdot \Big(\left\|A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0\right\|_0 \left\|w(\xi_{j_k}) - w(\eta_{j_k})\right\|_{C^n} +$$
$$+ \left\|A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A(\eta_{j_k} + h_{n_{j_k}})\right\|_0 \left\|w(\eta_{j_k})\right\|_{C^n}\Big) \le$$
$$\le \left\|A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0\right\|_0 H_{\alpha'}(w) + \sup_{z \in C}\left\|w(z)\right\|_{C^n} H_\alpha(A)\left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{\alpha - \alpha'},$$

где $H_\alpha(A), H_{\alpha'}(w)$ – гёльдеровы константы для соответствующих функций, следует справедливость предельного равенства (1.20). Тогда из (1.18) и (1.20) получим, что $q_j^0 \to 0$ при $j \to \infty$, которое вместе с соотношением (1.17) даёт требуемое равенство:

$$\lim_{k\to\infty}\left\| p_{j_k} - L_0 w\right\|_{\alpha'} = 0\,.$$

Случай 2. В этом случае $w(\eta_{j_k}) = 0$ и из неравенства (1.19) имеем

$$q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) \le \left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'} \left\| A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0\right\|_0 \left\| w(\xi_{j_k}) - w(\eta_{j_k})\right\|_{C^n} \le$$
$$\le \left\| A(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - A_0\right\|_0 H_{\alpha'}(w).$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) = 0\,.$$

Следовательно, $q^0_{j_k} \to 0$ и $\left\| p_{j_k} - L_0 w\right\|_{\alpha'} = 0$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

Итак, мы показали, что из последовательности $\{g_n\}$ можно выделить сходящуюся к $L_0 w$ по норме пространства $C_{\alpha'}$ подпоследовательность $\{g_{n_{j_k}}\}$. Поэтому из неравенства (1.16) при $n = n_{j_k}$ путём предельного перехода, получим

$$\left\| L_0 w\right\|_{\alpha'} \ge m' \left\| w\right\|_{\alpha',\,1}. \tag{1.21}$$

Как известно, гёльдеровы нормы $\|\ .\ \|_\alpha$ и $\|\ .\ \|_{\alpha,\,1}$ как функции от α являются непрерывными слева (см. глава 1, § 1). Тогда переходя в неравенстве (1.21) к пределу при $\alpha' \to \alpha - 0$, будем иметь неравенство

$$\left\| L_0 w\right\|_{\alpha} \ge m' \left\| w\right\|_{\alpha,\,1} \tag{1.22}$$

для любой $w \in C^1_\alpha$ с компактным носителем.

Теперь докажем, что это неравенство выполняется для любой вектор-функции $w \in C^1_\alpha$. Пусть $\varepsilon(z) \in D$ такая функция, что $0 \le \varepsilon(z) \le 1$ $\forall z \in C$ и $\varepsilon(z) \equiv 1$ при $|z| \ge 2$. Тогда для произвольной вектор-функции $w \in C^1_\alpha$ вектор-функции $v_n(z) = \varepsilon\left(\dfrac{z}{n}\right) w(z)$ принадлежат пространству C^1_α и имеют компактный носитель. Поэтому для вектор-функции $v_n(z)$ справедливо неравенство (1.22), то есть

$$\|L_0 v_n\|_\alpha \geq m' \|v_n\|_{\alpha,1}.$$

Но,

$$L_0 v_n = L_0\left[\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right) w(z)\right] = \varepsilon\left(\frac{z}{n}\right) L_0 w + \frac{1}{n}\varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right) w$$

и

$$\|L_0 v_n\|_\alpha \leq \left\|\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right) L_0 w\right\|_\alpha + \frac{1}{n}\left\|\varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right) w\right\|_\alpha.$$

Следовательно,

$$\left\|\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right) L_0 w\right\|_\alpha + \frac{1}{n}\left\|\varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right) w\right\|_\alpha \geq m' \left\|\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right) w\right\|_{\alpha,1}.$$

Переходя здесь к переделу при $n \to \infty$, получим

$$\|L_0 w\|_\alpha \geq m' \|w\|_{\alpha,1} \quad \forall\, w \in C_\alpha^1.$$

Из этого неравенства следует, что предельная система

$$w_{\bar z} + A_0 \overline{w} = 0 \qquad (1.23)$$

в пространстве C_α^1 имеет только нулевое решение. Поэтому $\det A_0 \neq 0$, так как в противном случае система (1.23) имела бы постоянные решения вида μw_0, где $\mu \in R$, w_0 – собственный вектор матрицы A_0 соответствующий нулевому собственному значению.

В силу произвольности последовательности $\{h_n\}$ $(h_n \to \infty)$, для всех предельных матриц A_0 будет выполняться неравенство $\det A_0 \neq 0$. Отсюда следует неравенство (1.12). Необходимость условия (1.12) доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие (1.12). Доказательство нётеровости оператора $L\colon C_\alpha^1 \to C_\alpha$ будем проводить в несколько шагов.

Шаг 1. Из условия (1.12) следует, что любая предельная матрица $A_0 \in H(A)$ является невырожденной. Поэтому в силу теоремы 1.1 все предельные системы

$$w_{\bar{z}} + A_0 \overline{w} = 0,\ A_0 \in H(A) \tag{1.24}$$

в пространстве C^1_α имеют только нулевое решение.

Покажем, что найдётся такая постоянная $M > 0$, не зависящая от $w \in C^1_\alpha$, что верна априорная оценка вида

$$\|w\|_{\alpha,1} \le M\left(\| Lw \|_\alpha + \max_{|z|\le 1} \| w(z)\|_{C^n}\right)\ \forall w \in C^1_\alpha \tag{1.25}$$

В предположении противного, найдётся такая последовательность $\{w_k\} \subset C^1_\alpha$, что имеет место неравенство

$$\|w_k\|_{\alpha,1} > k\left(\|Lw_k\|_\alpha + \max_{|z|\le 1}\| w_k(z)\|_{C^n}\right),\ k = 1, 2,... \tag{1.26}$$

Положим

$$\omega_k = \frac{w_k}{\| w_k\|_{\alpha,1}},\ \ f_k = L\ \omega_k,\ \ r_k = \max_{|z|\le 1}\| \omega_k(z)\|_{C^n}.$$

Тогда поделив обе части неравенства (1.26) на $k\|w_k\|_{\alpha,1}$, получим

$$\| f_k\|_\alpha + r_k < \frac{1}{k},\quad k = 1,\ 2, ...$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, имеем

$$f_k \to 0 \text{ в } C_\alpha \tag{1.27}$$

$$r_k \to 0 \text{ при } k \to \infty . \tag{1.28}$$

Для оператора $L: C^1_\alpha \to C_\alpha$ справедлива априорная оценка вида (см. глава 1, § 3)

$$\|w\|_{\alpha,1} \le M_1\left(\| Lw\|_\alpha + \sup_{z\in C}\| w(z)\|_{C^n}\right),\ \ w \in C^1_\alpha \tag{1.29}$$

где M_1 – постоянная, не зависящая от w. Подставляя в (1.29) $w = \omega_k$, с учётом соотношения $\|\omega_k\|_{\alpha,1} = 1$, получим следующее неравенство

$$\|L\omega_k\|_\alpha + \sup_{z\in C}\|\omega_k(z)\|_{C^n} \ge \frac{1}{M_1},\ k=1,\ 2,...$$

В силу предельного соотношения (1.27), первое слагаемое в левой части последнего неравенства для достаточно больших k будет меньше чем $\frac{1}{2M_1}$. Поэтому для таких k второе слагаемое, то есть $\sup_{z\in C}\|\omega_k(z)\|_{C^n}$ будет больше чем $\frac{1}{2M_1}$. Тогда по определению супремума найдётся такое k_0 и последовательность точек z_k, что выполняется неравенство

$$\|\omega_k(z_k)\|_{C^n} > \frac{1}{2M_1} \quad \forall\, k \ge k_0. \tag{1.30}$$

Рассмотрим два возможных случая: 1) последовательность z_k ограниченная, 2) последовательность z_k неограниченная.

Случай 1. Пусть последовательность z_k ограниченная. Выделим из этой последовательности сходящуюся подпоследовательность z_{k_j}. Пусть z_0 предел этой подпоследовательности. Из соотношения $\|\omega_{k_j}\|_{\alpha,\,1}=1$ следует (см. глава 1, § 1), что последовательности $\{\omega_{k_j}(z)\}$, $\left\{\frac{\partial\omega_{k_j}(z)}{\partial\bar{z}}\right\}$ содержат подпоследовательности $\{\omega_{k_{j_m}}(z)\}$, $\left\{\frac{\partial\omega_{k_{j_m}}(z)}{\partial\bar{z}}\right\}$ равномерно сходящиеся на каждом компакте плоскости. Пусть $I=\{k_{j_1}, k_{j_2}, ...\}$, $\omega(z)$, $\nu(z)$ пределы последовательностей $\{\omega_l(z)\}$, $\left\{\frac{\partial\omega_l}{\partial\bar{z}}\right\}$, $l\in I$ соответственно и R произвольное положительное число большее чем $\max\{1,|z_0|\}$. Запишем равенства (см. глава 1, § 1)

$$\omega_l(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{\omega_l(t)}{t-z}dt - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\varsigma|<R}\frac{\partial\omega_l(\varsigma)}{\partial\bar{\varsigma}}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\varsigma - z}, \tag{1.31}$$

где $l\in I,\ \varsigma=\xi+i\eta,\ |z|<R$. Используя соотношение

$$\frac{\partial\omega_l(z)}{\partial\bar{z}} + A(z)\overline{\omega_l(z)} = f_l(z),$$

равенство (1.31) перепишем в виде

$$\omega_l(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{\omega_l(t)}{t-z}dt + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\varsigma|<R}A(\varsigma)\overline{\omega_l(\varsigma)}\frac{d\xi d\eta}{\varsigma - z} -$$
$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\varsigma|<R}f_l(\varsigma)\frac{d\xi d\eta}{\varsigma - z},\ |z|<R,\ l\in I. \tag{1.32}$$

Переходя в равенстве (1.32) к пределу при $l\to\infty$, с учётом выше сказанного и соотношения (1.27), получим

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=R}\frac{\omega(t)}{t-z}dt + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\varsigma|<R}A(\varsigma)\overline{\omega(\varsigma)}\frac{d\xi d\eta}{\varsigma - z}, \qquad (|z|<R). \tag{1.33}$$

Отсюда, учитывая свойства оператора Векуа T_G (см. глава 1, § 1) получим, что

$$\omega_{\bar{z}} = -A(z)\overline{\omega} \qquad (|z|<R),$$

то есть

$$L\ \omega(z) = 0 \text{ при } |z|<R\ . \tag{1.34}$$

Из (1.28) следует, что

$$\omega(z)\equiv 0 \text{ при } |z|\le 1. \tag{1.35}$$

Далее с учётом неравенства (1.30) и равенства $\left\|\omega_{k_j}\right\|_{\alpha,1} = 1$, имеем

$$\frac{1}{2M_1} < \|\omega_l(z_l)\|_{C^n} \le \|\omega_l(z_l)-\omega_l(z_0)\|_{C^n} + \|\omega_l(z_0)-\omega(z_0)\|_{C^n} +$$
$$\|\omega(z_0)\|_{C^n} \le H_\alpha(\omega_l)|z_l - z_0|^\alpha + \|\omega_l(z_0)-\omega(z_0)\|_{C^n} + \|\omega(z_0)\|_{C^n}. \tag{1.36}$$

Так как $H_\alpha(\omega_l)\le 1$ и $z_l\to z_0$, то первое слагаемое в правой части (1.36) стремится к нулю при $l\to\infty$, второе слагаемое также стремится к нулю. Поэтому

$$\|\omega(z_0)\|_{C^n} \ge \frac{1}{2M_1}. \tag{1.37}$$

Соотношения (1.34), (1.35), (1.37) показывают, что вектор-функция $\omega(z)$ при $|z|<R$ является ненулевым решением эллиптической системы $Lw=0$ и об-

ращается в нуль при $|z|<1$. Это противоречит теореме единственности продолжения решения для систем вида (1.10). Следовательно, случай 1 невозможен.

Случай 2. Пусть последовательность z_k неограниченная. Будем считать, что $z_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Из последовательности матриц $\{A(z+z_k)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{A(z+z_{k_j})\}$, равномерно сходящуюся на каждом компакте плоскости, причём в силу того, что элементы матрицы функции $A(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности и при $|z|>R_0$ матрица $A(z)$ симметрическая, предельная матрица A_0 будет постоянной и симметрической.

Положим $v_j(z)=\omega_{k_j}(z+z_k)$. Так как $\|v_j\|_{\alpha,1}=1$, то из последовательности $\{v_j\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{v_{j_m}\}$, равномерно сходящуюся на каждом компакте к некоторой вектор-функции $v(z)$. Переписывая очевидные равенства

$$\frac{\partial v_{j_m}(z)}{\partial \bar{z}}+A(z+z_{k_{j_m}})\overline{v_{j_m}(z)}=f_{k_{j_m}}(z)$$

в виде

$$v_{j_m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{v_{j_m}(t)}{t-z}dt+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\varsigma|<R}\left[A(\varsigma+z_{k_{j_m}})\overline{v_{j_m}(\varsigma)}-f_{k_{j_m}}(\varsigma)\right]\frac{d\xi d\eta}{\varsigma-z},$$
$$\varsigma=\xi+i\eta,\ \ (|z|<R)$$

и переходя к пределу при $m\to\infty$, с учётом соотношения (1.27), получим

$$v(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{v(t)}{t-z}dt+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\varsigma|<R}A_0\overline{v(\varsigma)}\frac{d\xi d\eta}{\varsigma-z},\qquad (|z|<R).$$

Отсюда

$$v_{\bar{z}}(z)=-A_0\overline{v(z)}\qquad (|z|<R)\tag{1.38}$$

и в силу произвольности R вектор-функция $v(z)$ будет удовлетворять системе (1.24) во всей плоскости.

Покажем, что $v \in C^1_\alpha$. Из равенства $\left\| v_{j_m} \right\|_{\alpha,\,1} = 1$ имеем следующие неравенства

$$\sup_{z\in C} \left\| v_{j_m}(z) \right\|_{C^n} + \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \left\| v_{j_m}(z_1) - v_{j_m}(z_2) \right\|_{C^n} \le 1, \tag{1.39}$$

$$\sup_{z\in C} \left\| \frac{\partial v_{j_m}}{\partial z} \right\|_{C^n} + \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \left\| \frac{\partial v_{j_m}(z_1)}{\partial z} - \frac{\partial v_{j_m}(z_2)}{\partial z} \right\|_{C^n} \le 1\,. \tag{1.40}$$

Из неравенства (1.39) следует, что $\sup\limits_{z\in C} \| v(z) \|_{C^n} \le 1$ и

$$\left\| v_{j_m}(z_1) - v_{j_m}(z_2) \right\|_{C^n} \le |z_1 - z_2|^{\alpha} \quad \forall\ z_1,\ z_2 \in C\,.$$

Фиксируя в последнем неравенстве точки z_1 и z_2, и переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\left\| v(z_1) - v(z_2) \right\|_{C^n} \le |z_1 - z_2|^{\alpha} \quad \forall\ z_1,\ z_2 \in C\,.$$

Следовательно, $v \in C_\alpha$. Далее из (1.38) получим, что $v_{\bar z} \in C_\alpha$.

Из (1.40) следует, что последовательность $\left\{ \dfrac{\partial v_{j_m}}{\partial z} \right\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Поэтому без потери общности можно считать, что она равномерно на каждом компакте сходится к некоторой функции $u_0(z)$, причём $u_0 \in C_\alpha$. В равенстве

$$v_{j_m}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{v_{j_m}(t)}{\bar t - \bar z} d\bar t - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\varsigma|<R} \frac{\partial v_{j_m}(\varsigma)}{\partial \varsigma} \frac{d\xi d\eta}{\bar\varsigma - \bar z}\,, \quad \varsigma = \xi + i\eta,\ \ (|z| < R),$$

где $R-$произвольное положительное число, переходя к пределу при $m \to \infty$, будем иметь

$$v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{v(t)}{\bar t - \bar z} d\bar t - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\varsigma|<R} u_0(\varsigma) \frac{d\xi d\eta}{\bar\varsigma - \bar z}\,, \qquad |z| < R\,.$$

Отсюда с учётом свойства оператора T_G (см. глава 1, § 2) имеем $\dfrac{\partial v(z)}{\partial z} = u_0(z)$, то есть $v_z \in C_\alpha$. Следовательно, $v \in C^1_\alpha$.

Из неравенства (1.30) следует, что $\|v(0)\|_{C^n} > \dfrac{1}{2M_1}$. Итак, вектор-функция $v \in C_\alpha^1$ является ненулевым решением системы (1.24). Но, как было указано выше в силу симметричности и невырожденности матрицы A_0 система (1.24) в пространстве C_α^1 имеет только нулевое решение. Получили противоречие. Поэтому справедлива априорная оценка (1.25).

Шаг 2. Теперь используя априорную оценку (1.25) установим конечномерность ядра $KerL$ оператора L. Пусть $w \in C_\alpha^1$, $\|w_k\|_{\alpha,1} = 1$, $w_k \in KerL$. Из такой последовательности, как было указано выше, можно выделить равномерно сходящуюся на каждом компакте подпоследовательность $\{w_{k_j}\}$, причём предельная вектор-функция $w_0(z)$ будет, принадлежат пространству C_α^1 и в силу непрерывности оператора $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ будет выполнено равенство $L w_0 = 0$, то есть $w_0 \in KerL$. Тогда полагая в априорной оценке (1.25) $w = w_{k_j} - w_0$, имеем

$$\left\|w_{k_j} - w_0\right\|_{\alpha,1} \le M \max_{|z|\le 1}\left\|w_{k_j}(z) - w_0(z)\right\|_{C^n}.$$

Так как $w_{k_j}(z)$ в круге $\{z : |z| \le 1\}$ равномерно сходится к вектор-функции $w_0(z)$, то из последнего неравенства получим, что w_{k_j} сходится к w_0 и по норме пространства C_α^1. Очевидно, что $\|w_0\|_{\alpha,1} = 1$.

Итак, мы показали, что произвольная последовательность $w_k(z)$ из единичной сферы подпространства $KerL$ имеет сходящуюся подпоследовательность; тем самым установили компактность этой сферы. Поэтому в силу теоремы Рисса (см. [36]) $KerL$ конечномерно.

Шаг 3. Остаётся показать, что образ LC_α^1 оператора $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ является замкнутым. Пусть последовательность $\{f_k\} \subset LC_\alpha^1$ сходится к $f_0 \in C_\alpha$ по норме пространства C_α. Возьмём вектор-функции $w_k \in C_\alpha^1$ такие, что $Lw_k = f_k$. Через U_k обозначим множество решений уравнения $Lw = f_k$. Это множество состоит из вектор-функций вида $w_k(z)+v(z)$, где $v(z)$ – произвольное решение однородного уравнения $Lw=0$. Рассмотрим функционал

$$F_k(v)=\|w_k+v\|_{\alpha,1},\ v\in KerL\ .$$

Так как

$$\|F_k(v)\|_{\alpha,1}\geq -\|w_k\|_{\alpha,1}+\|v\|_{\alpha,1},$$

то $\|F_k(v)\|_{\alpha,1}\to+\infty$ при $\|v\|_{\alpha,1}\to+\infty$. Поэтому из конечномерности ядра $KerL$ оператора L следует, что функционал $F_k(v)$ достигает своего минимума на каком-то элементе $v_k\in KerL$, то есть

$$F_k(v_k)=\min_{v\in KerL}\|w_k+v\|_{\alpha,1}.$$

Пусть $\omega_k=w_k+v_k$, $r_k=\|\omega_k\|_{\alpha,1}$. Тогда $L\omega_k=f_k$, то есть $\omega_k\in U_k$ и

$$\|\omega_k\|_{\alpha,1}\leq\|w\|_{\alpha,1}\qquad\forall w\in U_k\,. \tag{1.41}$$

Шаг 4. Покажем, что последовательность $\{r_k\}$ является ограниченной. Действительно, в предположении противного у последовательности $\{r_k\}$ есть подпоследовательность $\{r_{k_j}\}$, такая что $\lim\limits_{j\to\infty}r_{k_j}=+\infty$. Пусть

$$u_j=\frac{1}{r_{k_j}}\omega_{k_j},\quad g_j=\frac{1}{r_{k_j}},\ j=1,\ 2,... \tag{1.42}$$

Тогда

$$\|u_j\|_{\alpha,1}=1,\ \ Lu_j=\frac{1}{r_{k_j}}L\omega_{k_j}=g_j\,,$$

$$\|g_j\|_{\alpha}\leq\frac{1}{r_{k_j}}\|f_{k_j}\|_{\alpha}. \tag{1.43}$$

В силу сходимости последовательности $\{f_{k_j}\}$ числовая последовательность $\left\{\|f_{k_j}\|_{\alpha}\right\}_{j=1}^{\infty}$ является ограниченной и поэтому из неравенства (1.43) следует, что последовательность вектор-функций $\{g_j\}$ будет сходится в C_α к нулю. Из последовательности $\{u_j\}$ выделим подпоследовательность $\{u_{j_m}\}$, равномерно сходящуюся на каждом компакте к некоторой вектор-функции $u_0(z)$. В силу априорной оценки (1.25) имеем

$$\left\| u_{j_m} - u_{j_p} \right\|_{\alpha,1} \le M\left(\left\| g_{j_m} - g_{j_p} \right\|_{\alpha} \right) + \max_{|z|\le 1} \left\| u_{j_m}(z) - u_{j_p}(z) \right\|_{C^n} . \qquad (1.44)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Так как $g_{j_m} \to 0$ при $m \to \infty$ в C_α, то существует такой номер N_1, что

$$\left\| g_{j_m} \right\|_{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \forall m > N_1 . \qquad (1.45)$$

Далее в силу равномерной сходимости последовательности $\{u_{j_m}\}$, найдётся такое N_2, что

$$\max_{|z|\le 1} \left\| u_{j_m}(z) - u_{j_p}(z) \right\|_{C^n} < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall m,\ p > N_2 . \qquad (1.46)$$

Тогда из неравенств (1.43) – (1.46) при $m,\ p > N = \max\{N_1,\ N_2\}$, имеем

$$\left\| u_{j_m} - u_{j_p} \right\|_{\alpha,\,1} < M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon .$$

Отсюда следует фундаментальность подпоследовательности $\{u_{j_m}\} \subset C_\alpha^1$, и следовательно, она сходится в C_α^1. Аналогично, как выше можно показать, что пределом последовательности $\{u_{j_n}\}$ будет вектор-функция $u_0(z)$. Поэтому, переходя в равенстве $Lu_{j_m} = g_{j_m}$ к пределу при $m \to +\infty$, с учётом непрерывности оператора $L\colon C_\alpha^1 \to C_\alpha$ и неравенства (1.43), получим

$$Lu_0 = 0,$$

то есть $u_0(z)$ является решением однородного уравнения $Lw = 0$. Тогда $L(u_{j_m} - u_0) = g_{j_m}$ или в силу (1.42)

$$L[r_{k_{j_m}}(u_{j_m} - u_0)] = f_{k_{j_m}} .$$

Отсюда получаем включение $r_{k_{j_m}}(u_{j_m} - u_0) \in U_{k_{j_m}}$. Поэтому с учётом (1.41) имеем

$$\left\| r_{k_{j_m}}(u_{j_m} - u_0) \right\|_{\alpha,\,1} \ge \left\| \omega_{k_{j_m}} \right\|_{\alpha,\,1} = r_{k_{j_m}}$$

или

$$\left\| u_{j_m} - u_0 \right\|_{\alpha,\,1} \geq 1.$$

Это неравенство противоречит сходимости последовательности $\{u_{j_n}\}$ к вектор-функции $u_0(z)$ в пространстве C_α^1.

Полученное противоречие показывает, что числовая последовательность $\{r_k\}$ является ограниченной.

Шаг 5. В силу ограниченности $\{r_n\}$ из последовательности $\{\omega_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\omega_{n_j}\}$, равномерно сходящуюся на каждом компакте плоскости к некоторой вектор-функции $\omega_0 \in C_\alpha^1$.

Из априорной оценки (1.25) имеем

$$\left\| \omega_{n_j} - \omega_{n_k} \right\|_{\alpha,1} \leq M\left(\left\| f_{n_j} - f_{n_k} \right\|_\alpha + \max_{|z|\leq 1} \left\| \omega_{n_j}(z) - \omega_{n_k}(z) \right\|_{C^n} \right).$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства можно сделать сколь-угодно малым за счёт сходимости последовательности $\{f_n\}$ в пространстве C_α, а второе слагаемое – за счёт равномерной сходимости подпоследовательности $\{\omega_{n_j}\}$. Поэтому последовательность $\{\omega_{n_j}\}$ будет фундаментальной в C_α^1 и, следовательно, сходится. Как выше можно установить, что пределом будет вектор-функция $\omega_0(z)$.

Теперь переходя в равенстве $L\omega_{n_j} = f_{n_j}$ к пределу при $j \to \infty$, получим $L\omega_0 = f_0$, то есть $f_0 \in LC_\alpha^1$.

Итак, замкнутость образа LC_α^1 оператора $L\colon C_\alpha^1 \to C_\alpha$ доказана.

Отсюда в силу конечномерности ядра $KerL$ следует $n-$нормальность оператора $L\colon C_\alpha^1 \to C_\alpha$

Шаг 6. Покажем, что сопряжённый оператор $L^*\colon C_\alpha^* \to \left(C_\alpha^1\right)^*$ имеет конечномерное ядро.

Пусть $f(w)$ – линейный непрерывный функционал в пространстве C_α, то есть $f \in C_\alpha^*$. Для значения $m > 2$ гильбертово пространство $H^m = H^m(C)$ непрерывно вложено в C_α (см. глава 1, § 1). Поэтому, функционал $f(w)$ непрерывен в H^m $(m > 2)$ и существует такой элемент ω из двойственного пространства H^{-m} (см. глава 1, § 1), что функционал $f(w)$ представляется в виде

$$f(w) = \langle w,\, \omega \rangle,\ w \in H^m, \tag{1.47}$$

где $\langle w,\, \omega \rangle = \iint\limits_C \mathrm{Re}(w,\, \omega) dxdy$ значение функционала ω на элементе w, $(w,\, \omega)$ – скалярное произведение в C^n.

Пусть теперь $f \in Ker\, L^*$, то есть $f(Lw) = 0\ \forall w \in C_\alpha^1$. Тогда из (1.47) имеем

$$\langle Lw,\, \omega \rangle = \iint\limits_C \mathrm{Re}(Lw,\, \omega) dxdy = 0 \quad \forall w \in H^m.$$

Далее из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \langle Lw,\, \omega \rangle &= \langle w_{\bar z},\, \omega \rangle + \langle A\overline{w},\, \omega \rangle = \langle w,\, -\omega_z \rangle + \langle w,\, A^T \overline{\omega} \rangle = \\ &= \langle w,\, -\omega_z + A^T \overline{\omega} \rangle = \langle w,\, L^T \omega \rangle \end{aligned} \tag{1.48}$$

следует, что

$$\langle w, L^T \omega \rangle = 0 \quad \forall\, w \in H^m,$$

где $L^T \omega = -\omega_z + A^T(z)\overline{\omega}$. Последнее равенство означает, что ω является обобщённым решением союзного уравнения

$$L^T v = 0. \tag{1.49}$$

Так как коэффициенты уравнения (1.49) принадлежат C_α, то по теореме о гладкости решений эллиптических уравнений ω будет классическим решением этого уравнения.

Пусть

$$w(z) = \left(1 + |\varsigma|^2\right)^{-m/2} \hat{\omega}(z).$$

Согласно определению пространства H^{-m} вектор-функция $w(z)$ принадлежит L_2 (см. глава 1, § 1). Поэтому

$$\omega(z) = F^{-1}\left[\left(1+|\varsigma|^2\right)^{m/2} w(\varsigma)\right],$$

(F^{-1}- обратное преобразование Фурье) или

$$\omega(z) = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+|\varsigma|^2\right)^{m/2} w(-\varsigma).$$

Тогда используя свойства преобразования Фурье, вектор-функцию $u(z) = \left(1+|z|^2\right)^{-m/2}\omega(z)$ можно представить в виде

$$u(z) = \frac{1}{4\pi^2}\left\{\left(I-\Delta\right)^{-m/2}\left[\left(1+|z|^2\right)^{m/2} w(-z)\right]\right\} \qquad (1.50)$$

где оператор

$$\left(I-\Delta\right)^{-m/2} v = F^{-1}\left[\left(1+|\varsigma|^2\right)^{-m/2}\hat{v}\right]$$

действует из H^{-m} в L_2 и является изометрически изоморфным (см. [42, 88]). Следовательно, из (1.50) имеем, что $u \in L_2$.

Так как $L^T\omega = 0$, то

$$L^T\left[\left(1+|z|^2\right)^{m/2} u(z)\right] = 0$$

или

$$-\left(1+|z|^2\right)^{m/2} u_z - \frac{m}{2}\left(1+|z|^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\cdot \bar{z}u + \left(1+|z|^2\right)^{m/2} A^T(z)\bar{u} = 0.$$

Отсюда

$$L_1 u \equiv u_z + \frac{m\bar{z}}{2\left(1+|z|^2\right)}u - A^T(z)\bar{u} = 0\ . \qquad (1.51)$$

Из этого равенства, в силу включения $u \in H^0$, имеем

$$u_z = -\frac{m\bar{z}}{2\left(1+|z|^2\right)}u + A^T(z)\bar{u} \in H^0.$$

Поэтому из коэрцитивных неравенств для эллиптических операторов (см. [15]) получим, что $u \in H^1$. Следовательно, по теореме о гладкости решений эллиптических уравнений вектор-функция $u(z)$ будет принадлежать пространству C_α^1.

Теперь покажем, что функция $\|u(z)\|_{C^m}$ экспоненциально убывает при $|z| \to \infty$. Так как

$$M v \equiv \overline{L_1 \bar{v}} = v_{\bar{z}} + \frac{mz}{2\left(1+|z|^2\right)} v - \overline{A^T(z)}\bar{v},$$

то для оператора M соответствующие предельные операторы имеют вид

$$\tilde{M} v = v_{\bar{z}} - \bar{A}_0^T \bar{v}.$$

Так как матрицы $\bar{A}_0^T$ невырожденные, то уравнения $\tilde{M} v = 0$ в пространстве C_α^1 имеют только нулевое решение и аналогично априорной оценке (1.25), можно доказать справедливость следующего неравенства

$$\| v \|_{\alpha,1} \le K\left(\|M v\|_\alpha + \max_{|t|\le 1} \| v(t) \|_{C^n} \right) \forall v \in C_\alpha^1, \tag{1.52}$$

где $K-$постоянная, не зависящая от v.

Пусть $\gamma(z) = \sqrt{1+|z|^2}$ и $\mu-$положительная постоянная. Тогда с учётом (1.51), имеем

$$\mu\left(e^{\mu\gamma}\bar{u}\right) = \left(e^{\mu\gamma}\bar{u}\right)_{\bar{z}} + \frac{mz}{2\gamma^2} e^{\mu\gamma}\bar{u} - \overline{A^T} e^{\mu\gamma} u = e^{\mu\gamma}\left[\left(\bar{u}_{\bar{z}} + \frac{mz}{2\gamma^2}\bar{u} - \overline{A^T u}\right) + \mu\gamma_{\bar{z}}\bar{u}\right] =$$
$$= e^{\mu\gamma}\left(\overline{L_1 u} + \mu\gamma_{\bar{z}}\bar{u}\right) = \mu\gamma_{\bar{z}} e^{\mu\gamma}\bar{u}.$$

Отсюда в силу свойств гёльдеровых норм (см. глава 1, § 1), получим

$$\left\| \mu\left(e^{\mu\gamma}\bar{u}\right)\right\|_\alpha \le \mu\gamma_0 \left\| e^{\mu\gamma}\bar{u} \right\|_\alpha,$$

где $\gamma_0 = \| \gamma_{\bar{z}} \|_\alpha$. Далее в силу оценки (1.52) будем иметь

$$\left\| e^{\mu\gamma}\bar{u} \right\|_{\alpha,1} \le K\left(\mu\gamma_0 \left\| e^{\mu\gamma}\bar{u}\right\|_\alpha + \max_{|t|\le 1} \left\| e^{\mu\gamma}\overline{u(t)}\right\|_{C^n} \right). \tag{1.53}$$

Число μ выберем так чтобы $\mu\gamma_0 K < \dfrac{1}{2}$. Тогда из (1.53) следует неравенство

$$\left\| e^{\mu\gamma} \bar{u} \right\|_{\alpha,1} \le \frac{1}{2} \left\| e^{\mu\gamma} \bar{u} \right\|_{\alpha} + K \max_{|t|\le 1} \left\| e^{\mu\gamma} \overline{u(t)} \right\|_{C^n}$$

или

$$\left\| e^{\mu\gamma} \bar{u} \right\|_{\alpha,1} < 2K \max_{|t|\le 1} \left\| e^{\mu\gamma} \overline{u(t)} \right\|_{C^n}.$$

В свою очередь из последнего неравенства имеем

$$\left\| e^{\mu\gamma(z)} \overline{u(z)} \right\|_{C^n} < d_0 \max_{|t|\le 1} \left\| u(t) \right\|_{C^n} \quad \forall z \in C$$

или

$$\left\| u(z) \right\|_{C^n} < d_0 e^{-\mu\gamma(z)} \max_{|t|\le 1} \left\| u(t) \right\|_{C^n} \quad \forall z \in C, \qquad (1.54)$$

где $d_0 = e^{\mu\sqrt{2}}$. Так как $\gamma(z) \sim |z|$ при $|z| \to \infty$, то из неравенства (1.54) следует, что функция $\left\| u(z) \right\|_{C^n}$ экспоненциально убывает при $|z| \to \infty$. Тогда из равенства $\omega(z) = \left(1 + |z|^2\right)^{m/2} u(z)$ получаем, что функция $\left\| \omega(z) \right\|_{C^n}$ также экспоненциально убывает при $|z| \to \infty$.

Таким образом, с учётом того, что пространство H^m при $m > 2$ непрерывно вложено в C_α и формулы (1.47) получаем, что каждый функционал $f \in C_\alpha^*$ единственным образом представляется в виде

$$f(w) = \langle w, \omega \rangle, \quad w \in C_\alpha, \qquad (1.55)$$

где вектор-функция $\omega(z)$ принадлежит $KerL^T$.

Обратно, для вектор-функции $\omega \in KerL^T$ ($\omega(z)$ – экспоненциально убывает при $|z| \to \infty$, это устанавливается как выше) формула (1.55) определяет линейный непрерывный функционал в пространстве C_α. Записывая цепочку равенств вида (1.48) получаем, что $f(Lw) = 0 \;\; \forall w \in C_\alpha^1$, то есть $f \in KerL^*$.

Итак, мы показали, что между ядром сопряжённого оператора L^* и ядром союзного оператора L^T есть изоморфизм и этот изоморфизм даётся формулой (1.55). Из равенства $M_1 v = -\overline{L^T \overline{\omega}} = \omega_{\bar{z}} - \overline{A}^T(z)\overline{\omega}$ следует, что $KerL^T = KerM_1$. Оператор $M_1 : C_\alpha^1 \to C_\alpha$ имеет конечномерное ядро (это устанавливается аналогично как для оператора L). Поэтому

$$\dim KerL^* = \dim KerL^T < +\infty$$

и оператор $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ является $d-$нормальным.

Таким образом, мы показали, что $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ является $n-$нормальным и $d-$нормальным, то есть нётеровым. Достаточность условия (1.12) установлена.

Теорема о нётеровости оператора $L: C_\alpha^1 \to C_\alpha$ доказана.

§ 2. Принцип экстремума для одного класса эллиптических систем

2.1. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с частными производными, записанную в матричной форме:

$$LU \equiv U_x + AU_y + BU = 0 \ , \qquad (2.1)$$

где $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – искомая вектор-функция, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ постоянные квадратные матрицы второго порядка.

Предположим, что система (2.1) является эллиптической, то есть выполнено условие (см. глава 2, § 1)

$$(a_1 - a_4)^2 + 4a_2a_3 < 0. \tag{2.2}$$

Как известно [15, 47], для эллиптических уравнений справедлив принцип максимума. Что касается эллиптических систем, то для ряда таких систем принцип максимума имеет место в той или иной форме [1, 3, 16, 43, 91].

Относительно системы (2.1) справедлив принцип максимума в следующей форме.

Теорема 2.1. *Пусть* $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *является ненулевым решением системы (2.1). Тогда справедливы следующие утверждения:*

А) если $\det B < 0$*, то функции* u *и* v *не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов;*

Б) если $\det B = 0$*, то функции* u *и* v *не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда* U *является тождественно постоянной.*

Доказательство. Пусть пара u, v является ненулевым решением системы (2.1). Пусть $\det B = b_1b_4 - b_2b_3 \le 0$. Так как система эллиптическая, то из условия эллиптичности (2.1) следует неравенство

$$a_2a_3 < 0. \tag{2.3}$$

Систему (2.1) перепишем в виде

$$\begin{cases} u_x + a_1u_y + a_2v_y + b_1u + b_2v = 0, \\ v_x + a_3u_y + a_4v_y + b_3u + b_4v = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

В силу эллиптичности системы и постоянности коэффициентов функции u и v являются бесконечно дифференцируемыми. Поэтому уравнения системы (2.4) можно дифференцировать сколь угодно раз. Первое уравнение продифференцируем по x, а второе – по y:

$$\begin{cases} u_{xx} + a_1u_{xy} + a_2v_{yx} + b_1u_x + b_2v_x = 0, \\ v_{xy} + a_3u_{yy} + a_4v_{yy} + b_3u_y + b_4v_y = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Умножая второе уравнение на $-a_2$ $\quad (a_2 \neq 0$ в силу (2.3)) и складывая с первым, получим

$$u_{xx} + a_1 u_{xy} - a_2 a_3 u_{yy} - a_2 a_4 v_{yy} + b_1 u_x + b_2 v_x - a_2 b_3 u_y - a_2 b_4 v_y = 0. \qquad (2.6)$$

Теперь первое уравнение системы (2.4) продифференцируем по y и из полученного равенства находим $a_2 v_{yy}$:

$$a_2 v_{yy} = -(u_{xy} + a_1 u_{yy} + b_1 u_y + b_2 v_y);$$

значение $a_2 v_{yy}$ подставим в (2.6)

$$\begin{aligned} &u_{xx} + a_1 u_{xy} - a_2 a_3 u_{yy} - a_4 (u_{xy} + a_1 u_{yy} + b_1 u_y + b_2 v_y) + \\ &+ b_1 u_x + b_2 v_x - a_2 b_3 u_y - a_2 b_4 v_y = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &u_{xx} + SpA u_{xy} + \det A\, u_{yy} + b_1 u_x + (a_4 b_1 - a_2 b_3) u_y + \\ &+ b_2 v_x + (a_4 b_2 - a_2 b_4) v_y = 0, \end{aligned} \qquad (2.7)$$

где SpA *и* $\det A -$ след и определитель матрицы A соответственно.

Из системы (2.4) находим:

$$\begin{aligned} a_2 v_y &= -(u_x + a_1 u_y + b_1 u + b_2 v), \\ v_x &= -(a_3 u_y + a_4 v_y + b_3 u + b_4 v). \end{aligned}$$

Значения v_x и $a_2 v_y$ подставим в (2.7):

$$\begin{aligned} &u_{xx} + SpA u_{xy} + \det A\, u_{yy} + b_1 u_x + (a_4 b_1 - a_2 b_3) u_y - \\ &- b_2 a_3 u_y + \frac{b_2 a_4}{a_2}(u_x + a_1 u_y + b_1 u + b_2 v) - b_2 b_3 u - b_2 b_4 v - \\ &- \frac{a_4 b_2}{a_2}\left(u_x + a_1 u_y + b_1 u + b_2 v\right) + b_4 \left(u_x + a_1 u_y + b_1 u + b_2 v\right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &u_{xx} + SpA u_{xy} + \det A\, u_{yy} + SpB u_x + \\ &+ (a_4 b_1 - a_2 b_3 - b_2 a_3 + b_4 a_1) u_y + \det B u = 0. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Введя обозначения

$$M\, u = u_{xx} + SpA\, u_{xy} + \det A u_{yy} + SpB u_x + \left(a_4 b_1 - a_2 b_3 - b_2 a_3 + b_4 a_1\right) u_y,$$

$$a = \det B,$$

соотношение (2.8) запишем в виде:

$$M\,u + a u = 0. \tag{2.9}$$

Повторяя все эти выкладки, можно показать, что функция v удовлетворяет уравнению (2.9).

В силу неравенства (1.7) из главы 2, § 1 имеем

$$\frac{1}{4}(SpA)^2 - \det A < 0.$$

Поэтому дифференциальный оператор M является эллиптическим.

Итак, мы показали, что если пара u, v является решением эллиптической системы (2.4), то функции u и v будет решениями эллиптического уравнения второго порядка (2.9).

Так как по условию теоремы $a \le 0$, то в силу принципа максимума для эллиптических уравнений второго порядка (см. глава 1, § 3) функции u и v не будут иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда они являются тождественно постоянными.

Если $a < 0$, то уравнение (2.9) не имеет постоянных решений, кроме нулевого. Поэтому в этом случае будет иметь место утверждение *А*). Если $a = 0$, то уравнение (2.9) имеет постоянные решения. Поэтому в этом случае функции u и v будут постоянными и, следовательно, имеет место утверждение *Б*).

Теорема 2.1 доказана.

2.2. Системы уравнений с переменными коэффициентами.

Рассмотрим линейную систему уравнений с частными производными первого порядка с переменными коэффициентами при искомой функции:

$$U_x + AU_y + BU = 0, \tag{2.10}$$

где $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ c(x,y) & d(x,y) \end{pmatrix}$. Будем предполагать, что матрица A постоянная, система (2.10) эллиптическая и элементы матрицы B

определены в области G и имеют непрерывные по Гёльдеру частные производные первого порядка.

Ниже изучен вопрос о справедливости принципа экстремума для системы (2.10). Введём обозначения:

$$\begin{aligned} &E(x,\ y) = \det B + a_x(x,\ y) + a_4 a_y(x,\ y) - a_2 c_y(x,\ y) \\ &F(x, y) = b_x(x,\ y) + a_4 b_y(x,\ y) - a_2 d_y(x,\ y). \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} &E_1(x,\ y) = \det B + d_x(x,\ y) + a_1 d_y(x,\ y) - a_3 b_y(x,\ y), \\ &F_1(x, y) = c_x(x,\ y) + a_1 c_y(x,\ y) - a_3 a_y(x,\ y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.2. *Пусть* $u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – *решение системы (2.10) в области* G.

А) Если выполнены условия:

2) $E(x,\ y) \le 0\ \ \forall (x,\ y) \in G$; *2)* $F(x,\ y) \equiv 0\ \ \forall (x,\ y) \in G$,

то функция $u(x,y)$ *не имеет локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов кроме случая, когда он является тождественно постоянной.*

Б) Если выполнены условия:

3*)* $E_1(x,\ y) \le 0\ \ \forall (x,\ y) \in G$;; *4)* $F_1(x,\ y) \equiv 0\ \ \forall (x,\ y) \in G$,

то функция $v(x,y)$ *не имеет локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда она является тождественно постоянной.*

В) Если выполнены условия 1) – 4), то функции $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *не имеют локальных положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда* U *является тождественно постоянной.*

Доказательство. Пусть пара u и v является решением системы (2.10).

Распишем систему (2.10) в виде:

$$\begin{cases} u_x + a_1 u_y + a_2 v_y + a(x,y)u + b(x,y)v = 0, & (2.13) \\ v_x + a_3 u_y + a_4 v_y + c(x,y)u + d(x,y)v = 0 & (2.14) \end{cases}$$

В силу эллиптичности системы и условия на коэффициентов, функции u и v имеют непрерывные по Гёльдеру частные производные второго порядка. Поэтому уравнения (2.13) и (2.14) можно дифференцировать. Дифференцируя уравнение (2.13) по x, а уравнение (2.14) – по y получаем:

$$u_{xx} + a_1 u_{yx} + a_2 v_{yx} + a_x(x,y)u + a(x,y)u_x + b_x(x,y)v + b(x,y)v_x = 0,$$
$$v_{xy} + a_3 u_{yy} + a_4 v_{yy} + c_y(x,y)u + c(x,y)u_y + d_y(x,y)v + d(x,y)v_y = 0.$$

Умножая второе уравнение на $-a_2$ ($a_2 \neq 0$ в силу неравенства (2.3)) и складывая с первым уравнением получаем:

$$\begin{aligned} & u_{xx} + a_1 u_{yx} + a_x(x,y)u + a(x,y)u_x + b_x(x,y)v + \\ & + b(x,y)v_x - a_2 a_3 u_{yy} - a_2 a_4 v_{yy} - a_2 c_y(x,y)u - a_2 c(x,y)u_y - \\ & - a_2 d_y(x,y)v - a_2 d(x,y)v_y = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Теперь дифференцируем уравнение (2.13) по y и из полученного равенства находим $a_2 v_{yy}$:

$$u_{xy} + a_1 u_{yy} + a_2 v_{yy} + a_y(x,y)u + a(x,y)u_y + b_y(x,y)v + b(x,y)v_y = 0,$$

$$a_2 v_{yy} = -u_{xy} - a_1 u_{yy} - a_y(x,y)u - a(x,y)u_y - b_y(x,y)v - b(x,y)v_y.$$

Значение $a_2 v_{yy}$ подставим в (2.15)

$$\begin{aligned} & u_{xx} + a_1 u_{yx} + a_x(x,y)u + a(x,y)u_x + b_x(x,y)v + b(x,y)v_x - \\ & - a_2 a_3 u_{yy} + a_4 u_{xy} + a_4 a_1 u_{yy} + a_4 a_y(x,y)u + a_4 a(x,y)u_y + \\ & + a_4 b_y(x,y)v + a_4 b(x,y)v_y - a_2 c_y(x,y)u - a_2 c(x,y)u_y - \\ & - a_2 d_y(x,y)v - a_2 d(x,y)v_y = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Это равенство содержит v_x и v_y, которых выразим из уравнений (2.13) и (2.14):

$$a_2 v_y = -u_x - a_1 u_y - a(x,y)u - b(x,y)v$$

$$v_x = -a_3 u_y - a_4 v_y - c(x,y)u - d(x,y)v\,.$$

Отсюда

$$v_x = -a_3 u_y - \frac{a_4}{a_2}(-u_x - a_1 u_y - a(x,y)u - b(x,y)v) - c(x,y)u - d(x,y)v\ .$$

Выражения v_x и $a_2 v_y$ подставим в (2.16):

$$\begin{aligned}
&u_{xx} + a_1 u_{yx} + a_x(x,y)u + a(x,y)u_x + b_x(x,y)v + \\
&+ b(x,y)[-a_3 u_y - \frac{a_4}{a_2}(-u_x - a_1 u_y - a(x,y)u - b(x,y)v) - c(x,y)u - d(x,y)v\ ] + \\
&- a_2 a_3 u_{yy} + a_4 u_{xy} + a_4 a_1 u_{yy} + a_4 a_y(x,y)u + a_4 a(x,y)u_y + a_4 b_y(x,y)v + \\
&+ \frac{a_4 b(x,\ y)}{a_2}[-u_x - a_1 u_y - a(x,y)u - b(x,y)v\ ] - a_2 c_y(x,y)u - a_2 c(x,\ y)u_y - \\
&+ a_2 d_y(x,y)v - d(x,y)[-u_x - a_1 u_y - a(x,y)u - b(x,y)v\ ] = 0.
\end{aligned}$$

После упрощений получим

$$\begin{aligned}
&u_{xx} + SpAu_{xy} + \det Au_{yy} + SpBu_x + [a_4 a(x,\ y) - a_3 b(x,\ y) - \\
&- a_2 c(x,\ y) + a_1 d(x,y)]u_y + [\det B + a_x(x,y) + a_4 a_y(x,\ y) - \\
&- a_2 c_y(x,\ y)]u + [b_x(x,y) + a_4 b_y(x,\ y) - a_2 d_y(x,\ y)]v = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
Mu = {}& u_{xx} + SpAu_{xy} + \det Au_{yy} + SpBu_x + [a_4 a(x,\ y) - a_3 b(x,\ y) - \\
&- a_2 c(x,\ y) + a_1 d(x,y)]u_y.
\end{aligned}$$

Тогда с учётом обозначений (2.11), соотношение (2.17) можно записать в виде:

$$M\,u + E(x,\ y)u + F(x,\ y)v = 0. \tag{2.18}$$

Повторяя все эти выкладки, получим следующее равенство

$$M\,v + E_1(x,\ y)v + F_1(x,\ y)u = 0. \tag{2.19}$$

Итак, мы показали, что если пара u, v является решением эллиптической системы (2.10), то для функций u и v справедливы соотношения (2.18) и (2.19). Отсюда мы получаем, что если выполнены условия 1) и 2), то есть $E \le 0$ и $F = 0$, то в силу принципа максимума для эллиптических уравнений второго порядка (см. глава 1, § 3) функция u не будет иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда она является тождественно постоянной. Если же выполнены условия 3) и 4), то есть $E_1 \le 0$ и $F_1 = 0$, то функция v не будет иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда она является тождественно постоянной. Наконец, если выполнены условия 1) – 4), то есть $E \le 0$, $E_1 \le 0$ и $F = F_1 = 0$, то функции u и v не будут иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов, кроме случая, когда они являются тождественно постоянными.

Теорема 2.2 доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда в системе (2.10) коэффициенты имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = 2\alpha(x, y)\begin{pmatrix} \cos m\varphi & \sin m\varphi \\ \sin m\varphi & -\cos m\varphi \end{pmatrix}$$

где $\alpha(x, y)$ – функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, причём $0 \le \alpha \le 1$, $\alpha = 0$ при $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ при $x^2 + y^2 > 1$, φ – полярный угол, то есть $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$, m – целое число.

Распишем систему (2.10):

$$\begin{cases} u_x - v_y + 2\alpha\cos m\varphi \cdot u + 2\alpha\sin m\varphi \cdot v = 0, \\ v_x + u_y + 2\alpha\sin m\varphi \cdot u - 2\alpha\cos m\varphi \cdot v = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.3. *Пусть* $(u,\ v)$ *является ненулевым решением системы (2.20). Тогда функция* $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$ *при* $x^2 + y^2 > 1$ *не имеет локальных максимумов.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть функция ω в некоторой точке $(x_0,\ y_0)$ имеет локальный максимум. Тогда $\omega_x = \omega_y = 0$ в точке $(x_0,\ y_0)$. Так как

$$\omega_x = \frac{2uu_x + 2vv_x}{2\sqrt{u^2 + v^2}} = \omega^{-1}(uu_x + vv_x),\ \ \omega_y = \omega^{-1}(uu_y + vv_y),$$

то в точке $(x_0,\ y_0)$ имеем

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

В точке максимума $\omega_{xx} \le 0,\ \omega_{yy} \le 0,$ то есть

$$\Delta\omega \le 0. \tag{2.22}$$

Если рассмотреть систему (2.21) относительно $u,\ v$, то его определитель должен равняться нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y = 0. \tag{2.23}$$

Вычислим $\Delta\omega$:

$$\omega_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{uu_x + vv_x}{\omega}\right) = \frac{\left((u_x)^2 + (v_x)^2 + uu_{xx} + vv_{xx}\right)\omega - \left(uu_x + vv_x\right)\cdot\omega_x}{\omega^2}.$$

Аналогично, находим ω_{yy}:

$$\omega_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{uu_y + vv_y}{\omega}\right) = \frac{\left((u_y)^2 + (v_y)^2 + uu_{yy} + vv_{yy}\right)\omega - \left(uu_y + vv_y\right)\cdot\omega_y}{\omega^2}.$$

Поэтому $\Delta\omega$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta\omega = \frac{1}{\omega^2}\Big[&\left((u_x)^2 + (u_y)^2 + (v_x)^2 + (v_y)^2 + u\Delta u + v\Delta v\right)\omega - \\ &- (uu_x + vv_x)\cdot\omega_x - (uu_y + vv_y)\cdot\omega_y\Big].\end{aligned} \tag{2.24}$$

Вычислим Δu и $\Delta \vartheta$. Так как $\alpha \equiv 1$ при $x^2 + y^2 > 1$, то при таких значениях x, y система (2.19) примет вид

$$\begin{cases} u_x - v_y + 2(\cos m\varphi u + \sin m\varphi v) = 0, \\ v_x + u_y + 2(\sin m\varphi u - \cos m\varphi v) = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные по Гёльдеру частные производные второго порядка. Поэтому из системы (2.25) путем дифференцирования можно перейти к системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} u_{xx} - v_{xy} + 2(\cos m\varphi u_x + (\cos m\varphi)_x u + \sin m\varphi v_x + (\sin m\varphi)_x v) = 0, \\ v_{xy} + u_{yy} + 2(\sin m\varphi u_y + (\sin m\varphi)_y u - \cos m\varphi v_y - (\cos m\varphi)_y v) = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} \Delta u + 2\cos m\varphi u_x - 2m\sin m\varphi \varphi_x u + 2\sin m\varphi v_x + 2m\cos m\varphi \varphi_x v + \\ 2\sin m\varphi u_y + 2m\cos m\varphi \varphi_y u - 2\cos m\varphi v_y + 2m\sin m\varphi \varphi_y v = 0 \end{gathered} \tag{2.26}$$

Из формул $r^2 = x^2 + y^2$ и

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{2.27}$$

находим:

$$r_x = \frac{x}{r} = \cos\varphi, \ \ r_y = \frac{y}{r} = \sin\varphi \tag{2.28}$$

Далее из (2.27) путём дифференцирования получим:

$$\begin{cases} 1 = r_x \cos\varphi + r(\cos\varphi)_x, \\ 0 = r_y \cos\varphi + r(\cos\varphi)_y. \end{cases}$$

Отсюда с учётом (2.28), имеем

$$\varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r},\ \varphi_y = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Значения φ_x, φ_y подставим в соотношение (2.26):

$$\Delta u + 2\left(\cos m\varphi u_x + \sin m\varphi u_y\right) + \frac{2m}{r}(\sin m\varphi \cdot \sin\varphi + \cos m\varphi \cdot \cos\varphi)u +$$
$$2\left(\sin m\varphi v_x - \cos m\varphi v_y\right) - \frac{2m}{r}(\cos m\varphi \cdot \sin\varphi - \sin m\varphi \cdot \cos\varphi)v = 0 \quad (2.29)$$

Первое уравнение (2.25) умножим на $\cos m\varphi$, а второе – на $\sin m\varphi$ и из полученных соотношений находим $\sin m\varphi\, v_x$ и $-\cos m\varphi\, v_y$:

$$-\cos m\varphi v_y = -\cos m\varphi u_x - 2\cos^2 m\varphi u - \sin 2m\varphi v,$$

$$\sin m\varphi v_x = -\sin m\varphi u_y - 2(\sin^2 m\varphi u + \sin 2m\varphi\, v.$$

Значения $-\cos m\varphi\, v_y$ и $\sin m\varphi\, v_x$ подставим в равенство (2.29):

$$\Delta u + 2\left(\cos m\varphi u_x + \sin m\varphi u_y\right) + \frac{2m}{r}(\sin m\varphi \cdot \sin\varphi + \cos m\varphi \cdot \cos\varphi)u +$$
$$2\left(-\sin m\varphi u_y - 2\sin^2 m\varphi\, u + \sin 2m\varphi v - \cos m\varphi u_x - 2\cos^2 m\varphi u - \sin 2m\varphi v\right) -$$
$$\frac{2m}{r}(\cos m\varphi \cdot \sin\varphi - \sin m\varphi \cdot \cos\varphi)v = 0$$

или

$$\Delta u + \frac{2m}{r}\left(\sin m\varphi \cdot \sin\varphi + \cos m\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{2r}{m}\right)u -$$
$$\frac{2m}{r}(\cos m\varphi \cdot \sin\varphi - \sin m\varphi \cdot \cos\varphi)v = 0.$$

Отсюда

$$\Delta u = \left(-\frac{2m}{r}\cos(m-1)\varphi + 4\right)u - \frac{2m}{r}\sin((m-1)\varphi)v.$$

Аналогично вычислим Δv:

$$\Delta v = \left(\frac{2m}{r} \cos(m-1)\varphi + 4 \right) v - \frac{2m}{r} \sin(m-1)\varphi\, u$$

Поэтому

$$u\Delta u + v\Delta v = \left(-\frac{2m}{r} \cos(m-1)\varphi + 4 \right) u^2 - \frac{2m}{r} \sin(m-1)\varphi u \cdot v +$$
$$\left(\frac{2m}{r} \cos(m-1)\varphi + 4 \right) v^2 - \frac{2m}{r} \sin(m-1)\varphi\, u \cdot v =$$
$$-\frac{2m}{r} \cos(m-1)\varphi \cdot u^2 + 4u^2 + \frac{2m}{r} \cos(m-1)\varphi v^2 + 4v^2 - \frac{4m}{r} \sin(m-1)\varphi u v =$$
$$4(u^2 + v^2) - \frac{2m}{r} (\cos(m-1)\varphi(u^2 + v^2) + 2\sin(m-1)\varphi u v).$$

Используя формулу

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\alpha - \alpha_0),$$
$$\cos\alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin\alpha_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

имеем:

$$u\Delta u + v\Delta v = 4(u^2 + v^2) - \frac{2m}{r} \sqrt{(u^2 - v^2) + (2u \cdot v)^2} \cdot \cos((m-1)\varphi - \psi) =$$
$$= 4(u^2 + v^2) - \frac{2m}{r} (u^2 + v^2) \cdot \cos((m-1)\varphi - \psi) = 2(u^2 + v^2)(2 - \frac{m}{r} \cos((m-1)\varphi - \psi))$$

или

$$u\Delta u + v\Delta v = 2(u^2 + v^2)(2 - \frac{m}{r} \cos((m-1)\varphi - \psi)),$$

где

$$\cos\psi = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2};\ \sin\psi = \frac{2uv}{u^2 + v^2}.$$

Учитывая соотношения (2.21) и (2.24), в точке максимума $(x_0,\ y_0)$ имеем:

$$\Delta\omega = 2\omega(2 - \frac{m}{r} \cos((m-1)\varphi - \psi))$$

Введем обозначения:

$$\beta = 2 - \frac{m}{r}\cos((m-1)\varphi - \psi)),\ \gamma = (m-1)\varphi - \psi.$$

Тогда в точке максимума $(x_0,\ y_0)$

$$\Delta\omega = 2\omega\beta .$$

Покажем, что $\beta > 0$.

Действительно, если $m \ge 0$, то $m\cos\gamma \le m$ и $\beta \ge 2 - \frac{m}{r} > 0$, так как $\frac{m}{r} < 2$ при $r > r_0 \ge \frac{m}{r}$; если же $m < 0$, то при $\cos\gamma \ge 0$ имеем $m\cos\gamma \le 0$ и $\beta \ge 2$, а при $\cos\gamma < 0$ имеем $m\cos\gamma \le |m|$ и $\beta \ge 2 - \frac{|m|}{r} > 0$.

Итак, мы получили, что в точке максимума $(x_0,\ y_0)$, выполнено неравенство $\Delta\omega > 0$, что противоречит неравенству (2.22).

Следовательно, функция ω при $x^2 + y^2 > 1$ не имеет локальных максимумов. Теорема 2.3 доказана.

Отметим, что теоремы 2.2 и 2.3 могут быть использованы при исследовании краевых задач для систем вида (2.11).

§ 3. Периодические решения систем

Рассмотрим однородную систему уравнений с частными производными первого порядка с постоянными коэффициентами

$$U_x + AU_y + BU = 0, \qquad (3.1)$$

где $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – искомая вектор-функция переменных x и y, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – постоянные матрицы второго порядка.

Для системы (3.1) будем изучать вопрос о существовании 2π – периодических по переменным x и y решений. Такие решения будем искать в виде тригонометрического ряда Фурье в комплексной форме:

$$U = \sum_{k \in Z^2} U_k e^{i(k_1 x + k_2 y)}, \qquad (3.2)$$

где U_k – неизвестные векторы из C^2, $k = (k_1, k_2)$, $Z^2 = Z \times Z$, Z – множество целых чисел. Находим производные:

$$U_x = \sum_{k \in Z^2} U_k i k_1 e^{i(k_1 x + k_2 y)}, U_y = \sum_{k \in Z^2} U_k i k_2 e^{i(k_1 x + k_2 y)}$$

Теперь подставляем эти выражения в уравнение (3.1):

$$\sum_{k \in Z^2} U_k i k_1 e^{i(k_1 x + k_2 y)} + A \sum_{k \in Z^2} U_k i k_2 e^{i(k_1 x + k_2 y)} + B \sum_{k \in Z^2} U_k e^{i(k_1 x + k_2 y)} = 0 .$$

Объединяя суммы, получим

$$\sum_{k \in Z^2} (i k_1 E + A i k_2 + B) U_k e^{i(k_1 x + k_2 y)} = 0 .$$

Отсюда имеем

$$(i k_1 E + A i k_2 + B) U_k = 0$$

или

$$M_k U_k = 0, \qquad (3.3)$$

где M_k – матрица второго порядка, зависящая от k:

$$M_k = \begin{pmatrix} i k_1 + i k_2 a + \alpha & i k_2 b + \beta \\ i k_2 c + \gamma & i k_1 + i k_2 d + \delta \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы M_k

$$\begin{aligned} \det M_k &= (i k_1 + i k_2 a + \alpha)(i k_1 + i k_2 d + \delta) - (i k_2 b + \beta)(i k_2 c + \gamma) = \\ &- k_1^2 - k_1 k_2 a + i k_1 \alpha - k_1 k_2 d - k_2^2 a d + i k_2 \alpha d + i k_1 \delta + \\ &i k_2 a \delta + \alpha \delta + k_2^2 b c - i k_2 \beta c - i k_2 b \gamma - \beta \gamma = \\ &- k_1^2 - (a + d) k_1 k_2 + (b c - a d) k_2^2 + (\alpha \delta - \beta \gamma) + \\ &+ i[(\alpha + \delta) k_1 + (\alpha d + a \delta - \beta c - b \gamma) k_2]. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (3.3) имеет всегда нулевое решение, причём, если $\det M_k \neq 0$, то $U_k = 0$. Если же $\det M_k = 0$, то система имеет ненулевые решения и их можно найти.

Рассмотрим случай, когда $\det M_k = 0$. Приравнивая нулю вещественные и мнимые части $\det M_k$ в силу (3.4) получаем:

$$\begin{cases} k_1^2 + (a+d)k_1k_2 + (ad-bc)k_2^2 = \alpha\delta - \beta\gamma, \\ (\alpha+\delta)k_1 + (\alpha d + a\delta - \beta c - b\gamma)k_2 = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Эти равенства представляют собой систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных k_1, k_2. Первое уравнение является нелинейным (квадратичным), а второе уравнение – линейным.

Введём обозначения: $a+d=m$, $ad-bc=n$, $\alpha\delta-\beta\gamma=l$. Заменяем k_1, k_2 соответственно на x, y. Тогда получаем систему двух уравнений относительно x, y:

$$\begin{cases} x^2 + (a+d)xy + (ad-bc)y^2 = \alpha\delta - \beta\gamma, \\ (\alpha+\delta)x + (\alpha d + a\delta - \beta c - b\gamma)y = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Первое уравнение $x^2 + mxy + ny^2 = l$ является уравнением кривой второго порядка. Эту кривую обозначим через Γ. Вычислим дискриминант кривой Γ (см. [66]):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{2} & 0 \\ \frac{m}{2} & n & 0 \\ 0 & 0 & -l \end{vmatrix} = -nl + \frac{m^2}{4}l = l\left(\frac{m^2}{4} - n\right)$$

Находим минор второго порядка

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} & n \end{vmatrix} = n - \frac{m^2}{4}$$

Возможны два случая: 1) $\Delta \neq 0$, 2) $\Delta = 0$.

Случай 1. $\Delta \neq 0$, то есть $l\left(\frac{m^2}{4} - n\right) \neq 0$. Тогда $n - \frac{m^2}{4} \neq 0$, то есть $\delta_0 \neq 0$. Поэтому либо $\delta_0 > 0$, либо $\delta_0 < 0$.

Если $\delta_0 > 0$, то есть когда система (3.1) эллиптическая, то кривая Γ – это эллипс, причём

$$x^2 + mxy + ny^2 > 0 \ \forall (x, y) \neq 0.$$

Поэтому, если $l < 0$, то Γ – мнимый эллипс, то есть $\Gamma = \varnothing$. Тогда система (3.6) не имеет решения, поэтому система (3.5) также не будет иметь решения. Следовательно, в случае, когда система (3.1) эллиптическая и $l = \det B < 0,$ то она имеет только нулевое периодическое по x, y решение. Этот вывод согласуется с теоремой 1.3 из главы 2, § 1.

Если же $l > 0$, то $\Gamma -$ действительный эллипс. Рассмотрим второе уравнение системы (3.6):

$$(\alpha + \delta)x + (\alpha d + a\delta - \beta c - b\gamma)y = 0.$$

Аналогично как при доказательстве теоремы 1.1 из главы 2, § 1 можно показать, что коэффициенты последнего уравнения одновременно не могут равняться нулю. Поэтому, это уравнение определяет прямую L, проходящую через точку (0, 0). Координаты точек пересечения эллипса Γ и прямой L будут решениями системы (3.6). Если эти координаты будут целыми, то система (3.5) имеет решение (k_1^0, k_2^0). Тогда $\det M_{k^0} = 0$, где $k^0 = (k_1^0,\ k_2^0)$ и система (3.3) при $k = k^0$ имеет ненулевые решения. Найдя эти ненулевые решения U_{k^0} и подставляя в формулу (3.2) получаем периодические решения системы (3.1).

Если $\delta_0 < 0$ (в этом случае система (3.1) является гиперболической), то кривая Γ – это гипербола. Для этого случая решениями системы (3.6) будут координаты точек пересечения гиперболы Γ и прямой L (если конечно гипербола и прямая имеют точки пересечения). Если эти координаты будут целыми, то система (3.5) имеет решение (k_1^0, k_2^0) и, найдя соответствующее решение U_{k^0} системы (3.1) и подставляя в формулу (3.2) получаем периодические решения системы (3.1).

Случай 2. $\Delta = 0$, то есть $l\left(\frac{m^2}{4} - n\right) = 0$. Рассмотрим возможные случаи:

а) $\frac{m^2}{4} - n = 0,\ l \neq 0$, б) $\frac{m^2}{4} - n \neq 0,\ l = 0$, в) $\frac{m^2}{4} - n = 0,\ l = 0$.

Случай а). Пусть $\frac{m^2}{4} - n = 0,\ l \neq 0$. В этом случае $\delta_0 = 0$ и уравнение кривой Γ можно переписать в виде

$$(x + \lambda y)^2 = l. \tag{3.7}$$

Так как $l \neq 0$, то либо $l > 0$, либо $l < 0$. Если $l > 0$, то $x + \lambda y = \pm\sqrt{l}$ и из (3.7) получаем пару прямых:

$$x = -\lambda y + \sqrt{l},\ x = -\lambda y - \sqrt{l}.$$

Если эти прямые пересекаются с прямой L, то система (3.6) имеет решения, причём если координаты точек пересечения целые, то система (3.5) имеет решение (k_1^0, k_2^0), и находя ненулевые решения U_{k^0} системы (3.3) и подставляя в формулу (3.2) получаем периодические решения системы (3.1). Если хотя бы одна координата точек пересечения не целая, то система (3.3) не будет иметь ненулевых решений и система (3.1) будет иметь только нулевое периодическое решение.

В случае, когда $l < 0$ равенство (3.7) невозможно, поэтому $\Gamma = \varnothing$ и в этом случае получаем только нулевое периодическое решение системы (3.1).

Случай б). Пусть $\frac{m^2}{4} - n \neq 0$, $l = 0$. Тогда $\delta_0 \neq 0$ и уравнение кривой Γ имеет вид:

$$x^2 + mxy + ny^2 = 0. \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что точка $(0,0) \in \Gamma$. Уравнение (3.8) при $y \neq 0$ перепишем в виде:

$$y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+m\left(\frac{x}{y}\right)+n\right]=0$$

и введя обозначение $t=\dfrac{x}{y}$, последнее уравнение перепишем так:

$$t^2+mt+n=0, \tag{3.9}$$

которое представляет квадратное уравнение относительно t. Дискриминант этого квадратного уравнения больше нуля $D=m^2-4n>0$ и потому оно имеет два вещественных корня

$$t_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4n}}{2}$$

и возвращаясь к переменным x и y получаем пару прямых

$$\frac{x}{y}=-\frac{m}{2}+\frac{\sqrt{m^2-4n}}{2},\ x=y\left(-\frac{m}{2}+\frac{\sqrt{m^2-4n}}{2}\right)-\text{прямая } p_1;$$

$$\frac{x}{y}=-\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{m^2-4n}}{2},\ x=y\left(-\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{m^2-4n}}{2}\right)-\text{прямая } p_2.$$

Тогда $\Gamma=p_1\bigcup p_2$. В этом случае, если прямая L не совпадает ни с одной из прямых $p_1,\ p_2$ система (3.6) имеет только одно решение $x=y=0$. Поэтому система (3.5) также имеет единственное решение $k_1=k_2=0$ и система (3.1) имеет постоянные периодические решения. Если прямая L совпадает с одной из прямых $p_1,\ p_2$ и на этой прямой есть целая точка $k^0=(k_1^0,\ k_2^0)$, то система (3.5) имеет решения вида $(mk_1^0,\ mk_2^0),\ m\in Z$. Тогда система (3.1) имеет периодические решения вида

$$U(x,\ y)=\sum_{m\in Z}U_m e^{im(k_1^0x+k_2^0y)},$$

где U_m – решение системы $M_{mk^0}U=0.$

Если $D=m^2-4n<0$, то уравнение (3.9) не имеет вещественных корней, поэтому $\Gamma=\{(0,0)\}$. В этом случае U_0 – произвольное, $U_k=0$ при $k\neq 0$.

Следовательно, система (3.1) в этом случае имеет только постоянные периодические решения.

Случай в). Пусть $\frac{m^2}{4} - n = 0, l = 0$. В этом случае уравнение Γ можно переписать в виде

$$2x + my = 0$$

и Γ будет прямой, проходящей через точку (0, 0). Прямые Γ и L пересекаются в точке (0, 0) или могут совпадать. В первом случае U_0 – произвольное, $U_k = 0$ при $k \neq 0$, то есть система (3.1) в этом случае имеет только постоянные периодические решения. Во втором случае, если на прямой $2x + my = 0$ есть целые точки (k_1^0, k_2^0), отличные от $(0, 0)$, то находя ненулевые решения U_k^0 системы (3.3) и подставляя в формулу (3.2) получаем периодические решения системы (3.1).

Таким образом, в зависимости от коэффициентов, то есть элементов матриц A и B, система (3.1) может иметь ненулевые периодические решения, которых можно найти по формуле (3.2), в которой векторы U_k являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (3.3).

Заключение

В диссертации для систем линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными вида

$$A_1(x, y)U_x + A_2(x, y)U_y + A_3(x, y)U = F(x, y), \tag{1}$$

где $U=(u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – искомая вектор-функция, $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$, $A_3(x, y)$ – вещественные матрицы порядка n, $F=(f_1, f_2, ..., f_n)^T$ – заданная вектор-функция, а также для эллиптических систем вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}} + A(z)\overline{w} = f(z), \tag{2}$$

где $w=(w_1, w_2, ..., w_n)^T$ – искомая комплекснозначная вектор-функция, $A(z)$ – комплексная матрица-функция порядка n, $f=(f_1, f_2, ..., f_n)^T$ – комплексно-значная вектор-функция получены следующие основные результаты.

1. Для систем вида (1) в случае постоянных коэффициентов при соответствующих условиях найдено многообразие всех решений.

2. При $n=2$, постоянных коэффициентов и эллиптичности системы (1) найдены множество всех решений из пространства S', многообразие решений степенного роста и периодических по переменным x и y решений соответствующей однородной системы; вычислена размерность пространства решений степенного роста.

3. Для решений систем вида (1) в случае $n=2$ и переменных коэффициентов установлены утверждения типа принципа экстремума.

4. Для однородной системы соответствующей (2) с постоянной и симметрической матрицей A получено утверждение о тривиальной разрешимости в пространстве S'.

5. Получены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора L в гёльдеровых пространствах функций, определенных во всей плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агмон С.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. М.: ИЛ, 1962.

2. *Байзаев С*. О медленно растущих решениях одной многомерной эллиптической системы / С. Байзаев // Доклады АН ТаджССР. - 1991. - Т. 34, № 6. - С. 329–332.

3. *Байзаев С*. Принцип максимума модуля и градиента решения квазилинейных эллиптических уравнений / С. Байзаев // Доклады АН ТаджССР.- 1984. - Т. 27, № 9. - С. 481 – 484.

4. *Байзаев С*. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости / С. Байзаев. Новосибирск. НГУ, 1999. - 74 с.

5. *Байзаев С*. Исследования по теории ограниченных решений эллиптических систем на плоскости / С. Байзаев. Докторская диссертация. НГУ, 1999. - 297с.

6. *Байзаев С.* О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Уфимский математический журнал. - 2013. Т. 5, № 2. – С. 12-17

7. *Байзаев С.* Нётеровость одного класса эллиптических систем в гёльдеровых пространствах / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Вестник Ошского государственного университета. -2013, №1. - С. 95-100.

8. *Байзаев С.* Нормальная разрешимость эллиптических систем в гёльдеровых пространствах / С. Байзаев, Д.А. Воситова // Материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции «Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании» с международным участием. г. Сибай. 16 – 17 мая 2013. Уфа. РИЦ Баш ГУ, 2013. – С. 14-20.

9. *Байзаев С.* О многообразии решений одного класса систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными / С. Байзаев, Д.А. Воситова // Тезисы докладов международной научной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвящённая 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. 5 – 12 августа 2012 г., Новосибирск: Сибирское научное издательство.– 2012. - С. 344.

10. *Байзаев С.* Принцип максимума для одного класса эллиптических систем / С.Байзаев, Д.А. Воситова // Ученые записки Худжандского госуниверситета им. акад. Б.Гафурова. -2011. №4. - С. 3-10.

11. *Байзаев С.* О решениях одной эллиптической системы в пространстве функций умеренного роста / С.Байзаев, Д.А. Воситова // Вестник Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики. - 2009. №1. - С. 92-96.

12. *Байзаев С.* О решениях умеренного роста одной эллиптической системы / С. Байзаев, Д.А. Воситова // Тезисы докладов международной научной конференции, посвящённой 70-летию академика Н. Раджабова, 25-26 сентября 2008 г., Душанбе. – 2008. – С.13-15.

13. *Байзаев С.* Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости / С. Байзаев, Э.Мухамадиев // Дифференциальные уравнения.- 1992. -Т. 28, №5. - С. 818 – 827.

14. *Бернштейн С.Н.* Sur la nature analytique des solutions des equations aux derives partielles due second ordre / С.Н. Бернштейн // Math. Annalen.- 1904. - V. 59. - р. 20 – 76.

15. *Берс Л.* Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. М.: Мир, 1966. -351с.

16. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. М.: Наука, 1981. - 448с.

17. *Бицадзе А.В.* К теории нефредгольмовых эллиптических краевых задач. – В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными / А.В. Бицадзе. М.: Наука. – 1970. С. 64-70.

18. *Блиев Н.К.* Обобщённые аналитические функции в дробных пространствах / Н.К. Блиев. Алма-Ата, 1985.

19. *Боярский Б.В.* Общие свойства решений эллиптических систем на плоскости. - В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного / Б.В. Боярский. М.: Физматгиз. - 1960. С. 461 – 483.

20. *Ващенко О.В.* Интегральное представление решений эллиптических систем первого порядка в классах Гельдера / О.В. Ващенко // Материалы III Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик-Эльбрус. - 2005. - С. 11-14.

21. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции / И.Н. Векуа. М.: Наука, 1988. - 509 с.

22. *Виноградов В.С.* В сб.: Комплексный анализ и его приложения / В.С. Виноградов. М.: Наука. - 1978. С. 120 – 125.

23. *Виноградов В.С.* О теореме Лиувилля для обобщённых аналитических функций / В.С. Виноградов // ДАН СССР. - 1968. - Т. 183. - С. 503-506.

24. *Владимиров В.С.* Обобщённые функции в математической физике / В.С. Владимиров. М.: Наука, 1976. - 280 с.

25. *Воситова Д. А.* О нётеровости одного класса многомерных эллиптических систем в гёльдеровых пространствах / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Ученые записки Худжандского госуниверситета им. акад. Б. Гафурова. -2014, №2. Часть 1. - С. 135-136.

26. *Воситова Д.А.* О решениях умеренного роста одной эллиптической системы /Д.А. Воситова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. - 2012. - Т. 55. №1. - С. 23-29.

27. *Воситова Д.А.* Периодические решения одного класса системы первого порядка на плоскости / Д.А. Воситова // Учёные записки Худжандского госуниверситета им. акад. Б.Гафурова. - ХГУ. -2012. №3. - С. 3-8.

28. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. М.: Наука, 1989. -576 с.

29. *Гуревич П.Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач в двугранных углах / П.Л. Гуревич // Мат. заметки. - 2002. - Т. 72. - С. 178-197.

30. *Гуревич П.Л.* Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах и формула Грина / П.Л. Гуревич // Доклады РАН. - 2001. - Т. 379. - С. 735-738.

31. *Гущин А. К.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка / А. К. Гущин, В. П. Михайлов // Мат. сб. — 1994. — Т. 185, № 1. - С. 121-160.

32. *Дикополов Г.В.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве / Г.В. Дикополов // Матем.сб. - 1962. - Т. 59 (101), №2. - С. 215-228.

33. *Дикополов Г.В.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве / Г.В. Дикополов, Шилов Г.Е. // Известия АН СССР. Математика. - 1960. - Т. 24. - С. 369-380.

34. *Егоров Ю.В.* Линейные уравнения главного типа / Ю.В. Егоров. М.: Наука, 1984, -360 с.

35. *Ильин В. А.* Априорная оценка решения задачи, сопряжённой к нелокальной краевой задаче первого рода / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. - 1988. - Т. 24, № 5. - С. 795-804.

36. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1972. – С. 496.

37. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. М.: Наука, 1971. - С. 104.

38. *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера / Н.В. Крылов. Новосибирск: Научная книга, 1998. - 176 с.

39. *Кучмент П.А.* Представления решений периодических дифференциальных уравнений в частных производных / П.А. Кучмент // Известия АН СССР. Серия математика. - 1982. - Т. 46. - С. 782 – 809.

40. *Лаврентьев М.А.* Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей / М.А. Лаврентьев // Математический сборник. - 1947. - Т. 21 (63). Вып. 2. - С. 285 – 320.

41. *Ле Хыу Зиен.* Топологическая классификация общих краевых задач для эллиптических по Петровскому систем на плоскости / Ле Хыу Зиен // Доклады АН БССР. - 1976. - Т. 22, №9. - С. 877-880.

42. *Лионс Ж-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж-Л. Лионс, Э. Мадженес. М.: Мир. 1971. - С. 371.

43. *Мазья В.Г.* Оценки в *Lp* и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе / В.Г. Мазья, Б.А. Пламеневский // Math. Nachr. - 1978. 81. - С. 25-82.

44. *Меликсетян Э.П.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в верхней полуплоскости / Э.П. Меликсетян // Изв. АН Арм.ССР, математика. - 1979. - Т. XIV, № 5.
45. *Меликсетян Э.П.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в классе суммируемых функций / Э.П. Меликсетян // Изв. АН АрмССР, математика. - 1979. - Т. XIV, №1.
46. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями / Л.Г. Михайлов. Душанбе: Дониш, 1986. – 116с
47. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. М.: Высшая школа, 1977. - 432с.
48. *Мухамадиев Э.* О нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических операторов в пространствах функций на R^n / Э. Мухамадиев // Записки научных семинаров ЛОМИ. -1981. - Т. 110. - С. 120–140.
49. *Мухамадиев Э.* О нётеровости и индексе эллиптических операторов 1-го порядка на плоскости / Э. Мухамадиев, С. Байзаев //Доклады АН ТаджССР, 1987. -Т. 30, № 4. - С. 206 - 210.
50. *Мухамадиев Э.* К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана / Э. Мухамадиев, С. Байзаев // ДАН СССР. - 1986. - Т. 287, № 2. - С. 280 – 283.
51. *Мухамадиев Э.* Ограниченные решения гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами / Э. Мухамадиев, С. Байзаев // Известия АН РТ. - 2011, №1 (142). - С. 20 – 26.
52. *Оболошвили Е.И.* Преобразование Фурье и его применение в теории упругости / Е.И. Оболошвили. Мецниереба, Тбилиси, - 1979.
53. *Олейник О.А.* О поведении решений неоднородных эллиптических систем в неограниченных областях / О.А. Олейник, Н.О. Максимова // Труды семинара им. И.Г.Петровского, МГУ. - 1978, № 3. - С. 117-137.
54. *Осколков А.П.* О разрешимости задачи Дирихле для некоторых классов линейных эллиптических систем в неограниченных областях / А.П. Оскол-

ков, В.А. Тарасов // В сб.: Дифференциальные уравнения. Вып. 8, Рязань. - 1976. - С. 145 - 161.

55. *Оспанов К.Н.* К теории сингулярных эллиптических систем первого порядка / К.Н. Оспанов // Материалы международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения». Астана, 2 – 5 октября 2012 г. - С. 172 – 174.

56. *Оспанов К.Н.* Об обобщенной системе Коши – Римана с негладкими коэффициентами / К.Н. Оспанов, М. Отелбаев // Известия вузов: математика. - 1989. № 3. - С. 48 – 56.

57. *Отелбаев М.* Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n / Отелбаев М. // Труды МИАН СССР. -1983. - Т. 161. - С. 195 – 217.

58. *Отелбаев М.* Сборник избранных научных трудов, опубликованных в 1972 – 2011 гг. / Отелбаев М. Астана: Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, 2012. – 579 с.

59. *Ошоров Б.Б.* Об одной эллиптической системе уравнений / Б.Б. Ошоров // В сб.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск. - 1980. - С. 120-124.

60. *Павлов А.Л.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве / Павлов А.Л. // Мат.сб., - 1977, - Т. 103 (145), №3 (7). - С. 367-391.

61. *Паламодов В.П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / В.П. Паламодов // М.: Физматгиз, 1967.

62. *Паломодов В.П.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве / В.П. Паломодов // Изв. АН СССР, математика. - 1960. - Т. 24. - С. 381-386.

63. *Панич О.И.* Некоторые теоремы существования решения для эллиптических краевых задач общего вида / О.И. Панич // В кн.: Краевые задачи для уравнений в частных производных, Киев. - 1979. - С. 79-88.

64. *Петровский И.Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. / И.Г. Петровский. М.: Наука, 1986. - 500 с.

65. *Петровский И.Г.* Об аналитичности решений уравнений с частными производными / И.Г. Петровский // Матем. сб. - 1939. - Т.5, № 1. - С. 6-58.

66. *Погорелов А. В.* Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 208с.

67. *Ройтберг Я.А.* Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем / Я.А. Ройтберг, З.Г. Шефтель // Сиб. мат. журнал. — 1972. — Т. 13, № 1. - С. 165-181.

68. *Рубанович С.Г.* Классические решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений в полупространстве / С.Г. Рубанович // Сборник докладов 7-го Советско-Чехословацкого семинара. Издательство Ереванского университета, Ереван. - 1982.

69. *Сафаров Д.* Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка / Д. Сафаров // Доклады РАН. - 2010. - Т. 430, №4. - С. 454 – 457.

70. *Сафаров Д.* О размерности пространства решений степенного роста для одного класса эллиптических систем / Д. Сафаров // Дифференциальные уравнения. - 1979. - Т. 15, №1. - С. 112 – 115.

71. *Сафаров Д.* Периодические решения эллиптических систем первого порядка / Д. Сафаров // Дифференциальные уравнения. -1981. - Т. 17, №8. - С. 1468 – 1477.

72. *Солдатов А.П.* Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости / А.П. Солдатов // Известия РАН. Сер. матем. - 2006. 70:6. –С. 161–192.

73. *Солдатов А.П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости.1. Гладкий случай / А.П. Солдатов // Известия АН СССР. Сер. матем. - 1991. - Т. 55, № 5. – С. 1070-1100.

74. *Солдатов А.П.* Задача Римана - Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера / А.П. Солдатов, О.В. Чернова

// Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. - 2009. - Т. 13, № 17.

75. *Товмасян Н.Е.* Корректность граничных задач для уравнений в частных производных в полупространстве в классе обобщённых функций / Н.Е. Товмасян // Сибирский математический журнал. - 1987. - Т. 28, № 2. - С. 172 – 185.

76. *Товмасян Н.Е.* Задача Дирихле для эллиптической системы двух дифференциальных уравнения второго порядка / Н.Е. Товмасян // ДАН СССР. - 1963. - Т. 153, № 1. - С. 53-56.

77. *Товмасян Н.Е.* Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщённых функций / Н.Е. Товмасян // Дифференциальные уравнения. - 1982. - Т.VIII, № 1. - С. 132-138.

78. *Товмасян Н.Е.* Некоторые граничные задачи для систем уравнений эллиптического типа второго порядка, не удовлетворяющие условию Я.Б. Лопатинского / Н.Е. Товмасян // ДАН СССР. - 1965. - Т. 160, № 5. - . 1028-1031.

79. *Товмасян Н.Е.* Об устранимых особых точках эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости / Н.Е. Товмасян // Матем. сб. - 1979, № 108 (150).

80. *Товмасян Н.Е.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами / Н.Е. Товмасян // Дифференциальные уравнения. - 1966. - Т.2, № 1. - С. 3-23, № 2. - С. 163-171.

81. *Усе А.Т.* Об одной краевой задаче для эллиптических систем двух уравнений со многими независимыми переменными / А.Т. Усе, В.И. Шевченко // ДАН СССР. - 1975. - Т. 222, № 6. - С. 1306-1308.

82. *Фейгин В.И.* О нётеровости дифференциальных операторов в R^n / В.И. Фейгин // Дифференциальные уравнения. - 1975. - Т. 11, № 12. - С. 2231 – 2235.

83. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хёрмандер. М.: Мир, 1986. - 455 с.

84. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хёрмандер. М.: Мир, 1965.

85. *Хоанг Куок Тоан*. Некоторые неэллиптические граничные задачи для системы уравнений Бицадзе / Хоанг Куок Тоан // Дифференциальные уравнения. - 1979. - Т. 15, № 12. - С. 2282-2285.

86. *Черномаз В.Н.* Об эллиптических системах с восемью независимыми переменными / В.Н. Черномаз, В.И. Шевченко // Мат. физ., Киев. - 1976, № 24. - С. 116-120.

87. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. М.: Наука, 1965. -327с.

88. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М.А. Шубин. М.: Добросвет, 2005. – 280 с.

89. *Янушаускас А.И.* Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами / А.И. Янушаускас. Вильнюс: Мокслас, 1990. – 180 с.

90. *Bers L.* Theory of pseudoanalytic functions / L. Bers. Lecture Notes, New York, 1953.

91. *Caso L.* On the maximum principle for elliptic operators / L. Caso, P. Cavaliere, M. Transirico // Math. Inequal. Appl. 7. — 2004. № 3. - P. 405-418.

92. *Cavaliere P.* Uniqueness result for elliptic equations in unbounded domains / P. Cavaliere, M. Transirico, M. Troisi // Matematiche (Catania) 54. — 1999. № 1. - P. 139-146.

93. *Dzuraev A.* On the Theory of First-Order Elliptic Systems in the Plane and Application / A. Dzuraev // Complex Variables. 1990. - V. 14. - P. 105 - 109.

94. *Rowley B.* An index formula for elliptic systems in the plane / B. Rowley // Trans. Amer. Math. Soc. - 1997, 349, № 8. - P. 3149 - 3179.