На правах рукописи

Якушев Илья Анатольевич

НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Душанбе 2015

Работа выполнена в Политехническом институте (филиале)
ФГАОУ ВПО « Северо-Восточного федерального университета
им. М.К.Аммосова» в г. Мирном

Научный руководитель: доктор физико–математических наук
Гадоев Махмадрахим Гафурович

Официальные оппоненты: **Федоров Владимир Евгеньевич,**
доктор физико–математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО Челябинский
государственный университет,
зав.кафедрой математического анализа

Мухсинов Абдулкосим,
доктор физико–математических наук,
доцент, Худжандский государственный
университет имени академика Б.Гафурова,
зав. кафедрой математического анализа

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики
им. С. Л. Соболева Сибирского отделения
Российской академии наук

Защита состоится *03 апреля 2015 г. в 14 ч. 00 мин.* на заседании Диссертационного совета Д 047. 007.02 при Институте математики имени А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А.Джураева АН Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан "____"____________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047. 007.02
доктор физико–математических наук Каримов У.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений высшего порядка.

Одним из основных направлений в современной теории краевых задач для уравнений с частными производными является исследование разрешимости краевых задач для различных классов вырождающихся эллиптических уравнений. Интерес к таким исследованиям обусловлен тем, что математическое моделирование ряда прикладных задач в теории малых изгибов поверхностей вращения, в теории оболочек, в газовой динамике и других разделах механики приводит к вырождающимся эллиптическим уравнениям.

Существуют разнообразные способы вырождения эллиптических уравнений и поэтому для изучения краевых задач для таких уравнений применяются разные методы. Применяемый нами метод основан на элементов теории вложения весовых функциональных пространств и теории полуторалинейных форм. Этот метод разрабатывался и совершенствовался в работах С.М.Никольского, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, С.В. Успенского, К.Х. Бойматова, Х. Трибеля, А. Куфнера, Н.В. Мирошина, Б.Л. Байдельдинова, С.А. Исхокова и А.Ё. Куджмуродова, др.[1–4].

В работах этих авторов, посвященных вырождающимся эллиптическим уравнениям, в основном, рассматривались дифференциальные уравнения, коэффициенты которых имели форму произведения ограниченной функции и функцию, которую характеризует вырождения, и их исследование проводилось без использования неравенства Гординга. В отличие от этого, в нашей диссертационной работе рассматриваются дифференциальные уравнения, младшие коэффициенты которых принадлежат некоторым весовым L_p – пространствам и для них сперва доказывается весовой аналог неравенства Гординга.

---

[1]Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: Мир.- 1980.- 664 с.

[2]Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.// Известия Вузов. Математика. 1988, №8, с.4 – 30.

[3]Исхоков С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1995, т. 31, №4, стр. 641-653.

[4] Бойматов К. Х., Исхоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой //Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1997, т.214, с.107-134.

В случае дифференциальных операторов с вырождением, неравенство Гординга было доказано в работах Киприянов И.А.[5] и Исхоков С.А.[6] Эллиптические операторы, рассмотренные Киприяновым И.А. [5], имеют специальный вид, заданы в ограниченной области Ω^+, расположенной в полупространстве $E^+_{n+1} = \{(x,\, y) = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, y) \,:\, y > 0\}$ и прилегающей к гиперплоскости $y = 0$. В их определении вместо обычных операторов дифференцирования использовались операторы вида

$$\widetilde{D}^{m+r} = D^m_x \widetilde{D}^r_y, \quad D^m_x = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}, \quad \widetilde{D}^r_y = y^r \frac{\partial^r}{(y\partial y)^r},$$

и вследствие этого вырождение имело место только на части Γ^0 границы области Ω^+, лежащей на гиперплоскости $y = 0$. Эллиптические операторы, рассмотренные Исхоковым С.А.[6] заданы в произвольной (ограниченной или неограниченной) области и имеют одинаковое вырождение по всем независимым переменным.

В отличие от указанных выше работ[5,6], здесь рассматриваются общие эллиптические операторы высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

Цель работы. Целью диссертационной работы является доказательство весового аналога неравенства Гординга для эллиптических уравнений высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным и, с помощью этого неравенства, исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высшего порядка.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории весовых функциональных пространств (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, прямые и обратные теоремы о следах, теоремы о плотности гладких функций и т.д.).

---

[5]Киприянов И.А. О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов и его приложениях //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1969, т.105, с. 77 – 88.

[6]Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Математические заметки. 2010. Т. 87. №2. С. 201 – 216.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказано весовое неравенство Гординга для эллиптических уравнений высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

2. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических уравнений высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

3. Исследована разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических уравнений высшего порядка в полупространстве $R_n^+ = \{x|x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n;\, x_n > 0\}$, коэффициенты которых имеют степенное вырождение и принадлежат некоторым весовым L_p–пространствам.

4. Исследована разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических уравнений высшего порядка, заданных в $\Omega = R_n \setminus \mathfrak{M}$, где R_n – n-мерное евклидово пространство и $\mathfrak{M}$ – неограниченное многообразие размерности $m \in [1, n-1]$.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории вложения весовых функциональных пространств, в теории краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью вырождающихся дифференциальных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и неоднократно обсуждались автором на семинарах кафедры фундаментальной и прикладной математики Мирнинского Политехнического института под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А.Исхокова и д.ф.-м.н. М.Г.Гадоева (2009-2014), на общеинститутском семинаре Института математики АН Республики Таджикистан под руководством д.ф.-м.н. член-корреспондента АН РТ, проф. З.Х.Рахмонова (2012), на I Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодежь и научно-технический прогресс в современном мире"(25-26 марта 2009 г. Мирный), на Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики посвященной 80-летию со дня рождения М.М. Лаврентьева (2012, Новосибирск), на международной конференции посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. 25-29 марта 2013, Москва, РУДН), на Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященной 105-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева (18-24 августа 2013, Новосибирск), на международной научно-практической конференции "Наука и инновационные разработки - северу"посвященной 20-летию Политехнического института(филиалу) Северо-Восточного Федерального университета им. М.К.Аммосова (март 2014, Мирный).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти статьях в рецензируемых научных журналах и сборниках, а также отражены в тезисах двух докладов на научных конференциях список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с С.А.Исхоковым и М.Г.Гадоевым, соавторам принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Работа изложена на 121 страницах компьютерного набора. Библиография насчитывает 71 наименований.

Содержание диссертации

Во введении дается краткий исторический обзор результатов по рассматриваемой проблеме, обосновывается актуальность темы. Приводится также краткое содержание диссертации с указанием основных результатов.

В диссертации использована двойная нумерация параграфов, причем первая цифра означает номер главы, вторая – номер параграфа в главе. Для нумерации теорем, лемм и формул используется тройная нумерация, где первые две означают номер соответствующего параграфа.

Первая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений в произвольной (ограниченной, или неограниченной) области n – мерного евклидова пространства с нестепенным вырождением.

В **первом параграфе первой главы** рассмотрены основные определения и доказаны вспомогательные интегральные неравенства.

Пусть Ω - произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1,n}\}$ -единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки $\xi \in R_n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \ldots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ - определенные в Ω положительные функции. Символом $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ обозначим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ при $\vec{t} = \varepsilon \cdot \vec{g}(\xi)$, где $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Далее, всюду в первой главе, предполагается, что множество Ω и функции $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ связаны условием: существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И.Лизоркина [7]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $\sigma(x)$ – определенная в Ω положительная функция. Предположим, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют положительные числа $\lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)$ такие, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \lambda(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \nu(\varepsilon) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\varepsilon)} \leq \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \leq \nu(\varepsilon),\ \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \leq \frac{g(x)}{g(\xi)} \leq \lambda(\varepsilon),\ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

для всех x из $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$.

Класс положительных функций $\sigma(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих условию (1) обозначим через $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$

[7] Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980, т.156, с. 130 – 142.

Пусть $1 \le p < +\infty$ и r - натуральное число. Символом $L^m_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$, где целое число m такое, что $0 \le m \le r$, обозначим класс функций $u(x)$, $x \in \Omega$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$, $k = (k_1,\dots,k_n)$ - мультииндекс, $|k| = k_1 + \dots + k_n \le r$, с конечной полунормой

$$\|u; L^m_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=m} \int\limits_{\Omega} (\sigma(x) g_1^{k_1-r}(x) g_2^{k_2-r}(x) \dots g_n^{k_n-r}(x) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом $W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})$ - пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|u; W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})\| = \left\{ \|u; L^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^p + \|u; L^0_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^p \right\}^{1/p}. \qquad (2)$$

Пространство $W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})$ является банаховым с нормой (2), и в сделанных выше предположениях при всех $p \in [1,\infty)$ и всех натуральных r множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в этом пространстве.

Символом $(W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ обозначим пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Основным результатом первого параграфа первой главы является следующая лемма.

Лемма 1 *Пусть положительные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принадлежат классу $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$, $p \ge 1$, $q \ge 1$ и r, t - натуральные числа. Для мультииндексов k, l таких, что $|k| < r$, $|l| \le t$, определим числа q_l, λ_{kl}, s_k посредством следующих соотношений*

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \frac{1}{q} - \frac{t-|l|}{n}, & n > q(t-|l|) \\ \varepsilon_0,\ 0 < \varepsilon_0 \le 1/q, & n \le q(t-|l|), \end{cases}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p} - \frac{r-|k|}{n},\ \textit{при}\ n - p(r-|k|) > 0,$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_1,\ \textit{где}\ 0 < \varepsilon_1 < 1/p,\ \textit{при}\ n - p(r-|k|) \le 0,$$

$$\frac{1}{s_k} \ge \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}.$$

Пусть положительная функция $\sigma_{kl}(x)$ *принадлежит классу* $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\sigma_{kl}(x)\alpha^{-1}(x)\beta^{-1}(x) \le$$
$$\le c g_1^{k_1+l_1}(x) g_2^{k_2+l_2}(x) \ldots g_n^{k_n+l_n}(x) (g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))^{-t+\frac{1}{q}-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda_{kl}}}$$

для всех $x \in \Omega$*; положительное число* c *не зависит от* x

Тогда для любого $\tau > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| \le \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g}) \right\| \cdot \left\| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g}) \right\| +$$
$$+ c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha, (g_1 g_2 \ldots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s_k}}) \right\|,$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k| n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r - |k|) n^{-1}}$$

и положительная постоянная c_0 *зависит только от* $n, p, r, |k|$.

Во **втором параграфе первой главы** доказывается неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \sum_{|k|,|l| \le r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \ x \in \Omega, \tag{3}$$

где

$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \ldots g_n^{-r+k_n}(x)$$

и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции.

Изучение краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором (3) методами функционального анализа связано со следующей полуторали-нейной формой, порожденной этим оператором

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{4}$$

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (4) ранее изучалась в работах С.А.Исхокова в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$Re \sum_{|k|,|l| \le r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \ge c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{5}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$. Число $c > 0$ не зависит от $x,\ \zeta$. Здесь вместо условия (5) мы предполагаем выполнение более слабого условия

$$Re \sum_{|k|,|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \ge c|\xi|^{2r} \tag{6}$$

для всех $x \in \Omega,\ \xi \in R_n$; c - положительное число, не зависящее от $x,\ \xi$.

Основным результатом второго параграфа первой главы является следующая теорема, где доказывается неравенство, которое является весовым аналогом неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (6) и для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существуют число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y) = \{z \in R_n : |z_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon g_i(y),\ i = \overline{1,n}\}.$$

Пусть также коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,|l| \le r$ и $|k| + |l| \le 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(\Omega; (g_1 \cdot g_2 \dots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \textit{при } |k| \le r-1,\ |l| \le r \\ q_{lk} & \textit{при } |k| = r,\ |l| \le r-1 \end{cases}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r-|k|-|l|} < q_{kl} \le \frac{n}{r-|l|}, \textit{ если } n > 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|);$$

$$\frac{n}{r-|k|-\varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\ \textit{ если } n > 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2}\ \textit{ если } n \le 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\[2ex] \textit{любое конечное число >1, если }\ n \le 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|). \end{cases}$$

Тогда существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \ge 0$, что

$$ReB[u,u] \ge c_1\|u; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 - c_2\|u; L_{2,r}^0(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 \tag{7}$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Применяя неравенство Гординга (7) в **третьем параграфе первой главы** исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений.

Рассматривается следующая вариационная задача Дирихле.

Задача D_λ. *Для заданного функционала* $F \in (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[u,v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \sigma^2(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-2r}U(x)\overline{v(x)}dx = < F, v >$$

$$(v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Основным результатом третьего параграфа первой главы является следующая теорема

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*
I) *коэффициенты* $a_{kl}(x)$ *при* $|k| = |l| = r$ *ограничены и удовлетворяют условию эллиптичности*

$$Re \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x, \xi \in R_n$ *(*c *– положительная числа, не зависящее от* x, ξ*), и для любого достаточно малого* $\nu > 0$ *существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(\xi)| < \nu$$

для любого $\xi \in \Omega$ *и любого* $x \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$;
II)*коэффициенты* $a_{kl}(x)$ *при* $|k|, |l| \leq r$ *и* $|k| + |l| \leq 2r - 1$ *принадлежат пространству* $L_{p_{kl}}\left(\Omega; (g_1 g_2 \cdots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$, *где числа* p_{kl} *– такие же как в теореме 1.*

Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что* $F \in (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ *задача* D_λ *имеет единственное решение* $U(x)$ *и при этом выполняется оценка*

$$\|U; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \leq M \left\|F; (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'\right\|,$$

где число $M > 0$ *не зависит от* F.

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для некоторых классов эллиптических уравнений с вырождением

Пусть R_n - n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Обозначим $R_n^+=\{x|x=(x',x_n)\in R_n, x_n>0\}$.

В **первом параграфе второй главы** доказываются некоторые вспомогательные интегральные неравенства для функций, заданных в полупространстве R_n^+.

Пусть функция $\varphi(t)\in C^\infty(R_1^+)$ такая, что $0\le\varphi(t)\le 1$ для любого $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ и $\varphi(t)\equiv 0$, когда $t\ge 1$; $\varphi(t)=1$ для любого $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Для любых двух вещественных чисел α,β определим функцию

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t)=\varphi(t)t^{-\alpha}+(1-\varphi(t))t^{\beta}\ (t>0).$$

Пусть $p\in(1;+\infty)$ и r - некоторое целое неотрицательное число. Символом $V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных в полупространстве R_n^+, имеющих все обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$ до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\|u;V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\|=\left\{\sum_{|k|\le r}\int\limits_{R_n^+}(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-r+|k|}|u^{(k)}(x)|)^p dx\right\}^{1/p}.$$

Обозначим через $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ пространство функций $u(x)$ $(x\in R_n^+)$ с конечной нормой

$$\|u;W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\|=\left\{\|u;L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\|^p+\|u;L^0_{p;\alpha,\gamma}(R_n^+)\|^p\right\}^{1/p},$$

где

$$\|u;L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\|=\left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_{R_n^+}(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)|u^{(k)}(x)|)^p dx\right\}^{1/p}.$$

Обозначим через $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$ множество бесконечно дифференцируемых функций в R_n^+ финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях x_n. Если D - некоторое весовое пространство функций, заданных в R_n^+, то через $\overset{\circ}{D}$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(R_n^+)$ в метрике пространства D, а через $\tilde{D}$ - пополнение класса $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$ в метрике пространства D.

Свойства пространств $V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)$, $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ ранее изучалась в работах С.А.Исхокова и М.Ш.Ганиева.

Исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями в полупространстве основывается на применении вспомогательного интегрального неравенства, в котором оценивается норма произведения производных функций $u \in \tilde{W}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$. Это вспомогательное интегральное неравенство сформулировано и доказано в виде следующей теоремы.

Теорема 3 *Пусть* $p>1$, $q>1$, r *- натуральное число, и вещественные числа* α,β *удовлетворяют условиям* $\alpha \le 0$, $\beta+\frac{1}{p} \notin \{1,2,\ldots,r\}$.

Тогда для всех мультииндексов k,l *таких, что* $|k| \le r$, $|l| \le r$, $|k|+|l| \le 2r-1$ *и всех функций* $u \in \tilde{W}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) |u^{(k)}(x) v^{(l)}(x)| \right)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$

$$\ll \|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\| \|v; V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)\|,$$

где γ *- произвольное вещественное конечное число и числа* $\alpha_{kl},\beta_{kl},\lambda_{kl}$ *определяются следующими соотношениями:*

1)если $|k|<r$, $|l|<r$, *то*

$$\alpha_{kl} = 2\alpha + n\varepsilon_l + \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+,$$
$$\beta_{kl} = 2\beta - r + |k| - \delta_k - n\varepsilon_l - \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+,$$
$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \delta_k + \varepsilon_l + \left(\frac{1}{q} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+;$$

2)если $|k|=r$, $|l| \le r-1$, *то*

$$\alpha_{kl} = 2\alpha + n\varepsilon_l + \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+,$$
$$\beta_{kl} = 2\beta - n\varepsilon_l - \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+,$$
$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p} + \varepsilon_l + \left(\frac{1}{q} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+;$$

3) если $|k| \le r-1$, $|l|=r$, *то* $\alpha_{kl} = 2\alpha$,

$$\beta_{kl} = 2\beta - r + |k| + \frac{1}{p} - \delta_k, \quad \frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q} + \delta_k.$$

Здесь ε_l *- произвольное число из интервала* $(0, 1/q)$*,* δ_k *- произвольное положительное число не превосходящее* $1/p$*, и* $(\mu)_+ = \mu$*, если* μ *- положительное число, а* $(\mu)_+ = 0$ *в противном случае.*

Второй параграф второй главы посвящен разрешимости вариационной задачи в полупространстве с неоднородными граничными условиями. В первой части этого параграфа сначала сформулированы результаты о разрешимости вариационной задачи Дирихле в полупространстве с однородными граничными условиями.

Пусть $\sigma(x)$, $\vec{g}(x)$, $L^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$, $W^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$ такие же объекты как в первой главе. Положим

$$\Omega = R^+_n,\ \sigma(x) = \sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{r(n-1)}, \quad g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_n(x) = x_n.$$

Тогда с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство

$$W^r_p(R^+_n;\sigma,\vec{g}) = V^r_{p;\alpha,\beta}(R^+_n).$$

Рассмотрим полуторалинейную форму.

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int\limits_{R^+_n} p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

где $p_k(x) = \sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-r+|k|}$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, определенные в полупространстве R^+_n.

Задача D'_λ**.** *Для заданного функционала* $F \in \left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R^+_n)\right)'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[U,v] + \lambda \int\limits_{R^+_n} \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-2r}U(x)\overline{v(x)}dx = < F, v > \quad (v \in C^\infty_0(R^+_n)),$$

принадлежащее пространству $V^r_{2;\alpha,\beta}(R^+_n)$*.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ *при* $|k| = |l| = r$ *ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности*

$$Re \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \ge c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in R^+_n$*,* $\xi \in R_n$ *(с-положительное число, не зависящее от* x,ξ*), и для любого достаточно малого* $\nu > 0$ *существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(y)| < \nu$$

для всех $x, y \in R_n^+$ таких, что

$$|x_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon y_n, \quad i = \overline{1, n};$$

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \le r$ и $|k| + |l| \le 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(R_n^+; x_n^{-n/p_{kl}}\right)$, где p_{kl} такие же числа как в теореме 1.

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda > \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'$ задача D'_λ имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U; V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right\| \le M \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'\right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от F.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 4 и пусть также существует такое положительное число c_0, что*

$$c_0 \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|\right)^2 dx \le Re B[v, v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 4 при $\lambda_0 = 0$.

Далее исследуется существование решения вариационной задачи Дирихле в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$.

Задача D_0. *Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения*

$$B[U, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{R_n^+} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) U^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx = < F, v > \quad (v \in C_0^\infty(R_n^+)),$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$.

Теорема 6. *Пусть*

$$-\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\}, \ \beta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\}, \ \beta - r \ge \gamma \tag{8}$$

и пусть выполнены все условия теоремы 5. Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ задача D_0 имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \le M \left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\|,$$

где число $M>0$ не зависит от F.

В силу плотности класса $C_0^\infty(R_n^+)$ в пространствах $V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$, $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, граничные условия в задачах D'_λ и D_0 формально считаются однородными. При некоторых дополнительных ограничениях на параметры α, β, γ можно выписать граничные условия задачи D_0 в явном виде. Пусть выполнены условия (8) и пусть

$$-r+\frac{1}{2}<\alpha\le\frac{1}{2}\ ,\quad r+\frac{1}{2}\ge\beta,\quad r-\beta+1/2<s_0,$$
$$\gamma+s_0<1/2,\quad \gamma+s_0\ne-1/2,$$

где s_0 - целое число, удовлетворяющее неравенствам $r+\alpha-1/2\le s_0<r+\alpha+1/2$. Тогда полунорма в пространстве $L^r_{2;\,\alpha,\,\beta}(R_n^+)$ эквивалента на функциях $u\in\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\,\alpha,\beta,\,\gamma}(R_n^+)$ норме $\|u;W^r_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R_n^+)\|$ и в силу результатов П.И. Лизоркина [8] условие $U(x)\in\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ задачи D_0 можно заменить на эквивалентное ему условие

$$U(x)\in\widetilde{W}{}^r_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R_n^+)\quad\text{и}\quad\frac{\partial^s U(x)}{\partial x_n^s}\Big|_{x_n=0}=0,\ s=0,1,\ldots,s_0-1.$$

Во второй части второго параграфа второй главы исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле с **неоднородными граничными условиями**.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int\limits_{R_n^+}\sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx \tag{9}$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D**.** *Для заданного функционала $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ и заданного элемента $\Psi(x)\in\tilde{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ требуется найти решение $U(x)\in\tilde{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ уравнения*

$$\mathbb{B}[U,v]=<F,v>,\ \forall v\in C_0^\infty(R_n^+), \tag{10}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x)-\Psi(x)\in\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+).$$

[8]Лизоркин П.И. О замыкании множества финитных функций в весовом пространстве $W^l_{p,\Phi}$ // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, №4. С.789-792.

Предположим, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ полуторалинейной формы (9) удовлетворяют условию:

II^o) при $|k|+|l| \le 2r-1$ коэффициенты a_{kl} принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(R_n^+; \sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)\right)$, где числа $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, p_{kl}$ определяются соотношениями:

а) если $|k| < r,\ |l| < r$, то

$$\alpha_{kl} = -\frac{n}{2} + \frac{n}{p_{kl}} + n\delta_k - r + |l|,$$
$$\beta_{kl} = 2r - |k| - |l| - (n-1)\delta_k + \frac{n}{2} - \frac{n}{p_{kl}},$$
$$\frac{1}{p_{kl}} = 1 - \delta_k - \varepsilon_l - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+,$$

а числа δ_k, ε_l из интервала $(0, 1/2)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{1}{2} - \delta_k - \varepsilon_l < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r-|k|}{n}\right\};$$

б) если $|k| = r,\ |l| \le r-1$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - r + |l|, \quad \beta_{kl} = -\frac{n}{p_{kl}} + r - |l|, \quad \frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \varepsilon_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+,$$

а ε_0 - достаточно малое положительное число;

в) если $|k| \le r-1,\ |l| = r$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} - \delta_k, \quad \beta_{kl} = r - |k| - \frac{1}{2} + \delta_k, \quad \frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \delta_k.$$

В этих условиях число δ_k такое, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le \delta_k < \frac{1}{2}.$$

Теорема 7. *Пусть $\alpha < -1/2$, выполнены условия (8), I) теоремы 6 и условие II^o), и пусть существует такое положительное число c_0, что*

$$c_0 \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|\right)^2 dx \le Re\mathbb{B}[v, v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ и любого заданного элемента $\Psi \in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ задача D имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U; W^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \le$$
$$\le M\left\{\left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\| + \left\|\Psi; W^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\right\},$$

где число M не зависит от F и Ψ.

Далее рассматривается более конкретный случай задачи D, когда граничные условия на гиперплоскости $x_n = 0$ выписываются в явном виде.

В **третьем параграфе второй главы** доказаны вспомогательные интегральные неравенства для функций, заданные в дополнении неограниченного многообразия $\mathfrak{M}$ размерности $m \in [1, n-1]$ в пространстве R_n, и на их основе в **четвертом параграфе второй главы** изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка в $R_n \setminus \mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ - неограниченное многообразие размерности $m \in [1, n-1]$ в n-мерном евклидовом пространстве R_n, удовлетворяющее условию конуса. Положим $\Omega = R_n \setminus \mathfrak{M}$ и $\rho(x) = dist\{x, \mathfrak{M}\}$ для всех $x \in \Omega$. Аналогично весовому пространству $W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ определяется пространство $W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, в определении которого вместо x_n используется функция $\rho(x)$.

Пусть $\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \varphi(\rho(x))\rho(x)^{-\alpha} + (1 - \varphi(\rho(x)))\rho(x)^{\beta}$, где $\varphi(t)$ такая же функция, как в первом параграфе второй главы.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int_{\Omega} \varphi^2_{\alpha,\beta}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{11}$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D. *Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ и заданного элемента $\Psi(x) \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения*

$$B[U, v] = < F, v >, \ \forall v \in C^\infty_0(\Omega),$$

принадлежащее пространству $W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ и удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega).$$

Предположим, что коэффициенты полуторалинейной формы (11) удовлетворяют условиям:

I*) при $|k| = |l| = r$ коэффициенты a_{kl} ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$Re \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_n$ (c - положительная константа), и для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(\xi)| < \nu$$

для любого $\xi \in \Omega$ и любого $x \in \{x \in R_n : |x_i - \xi_i| < (\varepsilon/2)\rho(\xi),\ i = \overline{1,n}\}$;

II*) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| \leq r$, $|l| \leq r$ и $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}(\Omega; \varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}})$, где

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - 2r + |k| + |l| + \varepsilon + (\alpha + r - |k| - 1/2(n-m) - \frac{m}{p_{kl}})_+,$$

$$\beta_{kl} = 2r - |k| - |l| + \varepsilon - \frac{1}{p_{kl}}(n-m) + (\beta - 1 + 1/2(n-m))_+,$$

ε - достаточно малое положительное число и числа p_{kl} такие же как в теореме 1.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия I*), II*) и пусть вещественные числа α, β, γ удовлетворяют условиям*

$$-\alpha + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Пусть также существует такое положительное число c_0, что

$$c_0 \int\limits_{\Omega} (\varphi_{\alpha,\beta}(x)\rho^{-r}(x)|v(x)|)^2 dx \leq Re\mathbb{B}[v,v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ и любой заданной функции $\Psi(x) \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D и при этом выполняется оценка

$$\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \leq M \left\{ \|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'\| + \|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от F и Ψ.

Публикации по теме диссертации

1. Гадоев М.Г.,Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле для одного класса эллиптических уравнений с вырождением //Математические заметки ЯГУ. 2011. Т. 18. №1. с. 25-35.

2. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А., Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. №3. с. 286.

3. Якушев И.А. О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов, вырождающихся на неограниченном многообразии // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. №7. с. 526-532.

4. Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для одного класса вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве // Тезисы докладов Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики посвященная 80-летию со дня рождения М.М. Лаврентьева - Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012 г. с. 472.

5. Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для одного класса вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве // Вестник Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова, 2013. Т. 10, №1. с. 9-13.

6. Якушев И.А. О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов, вырождающихся на неограниченном многообразии // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск. Россия, 18-24 августа 2013 г. с. 308.

7. Якушев И.А. О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов с неоднородными граничными условиями, вырождающихся на неограниченном многообразии // Сборник докладов международной научно-практической конференции "Наука и инновационные разработки - северу посвященной 20-летию Политехнического института(филиалу) Северо-Восточного Федерального университета им. М.К.Аммосова. Мирный, 2014, с. 557-563.