Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВПО
"Северо-Восточный федеральный университет
им. М.К.Аммосова"в г. Мирном

На правах рукописи

Якушев Илья Анатольевич

Неравенство Гординга для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений и его приложения

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.–мат. наук
Гадоев М.Г.

Мирный – 2015

Оглавление

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для некоторых классов эллиптических уравнений с вырождением. Применяемый нами метод основан на элементах теории весовых нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, прямые и обратные теоремы о следах, теоремы о плотности гладких функций и т.д.). В отличие от ранее опубликованных работ по этому направлению наши исследования основаны на применении аналога нера-венства Гординга для вырождающихся эллиптических уравнений, доказа-тельство которого является основным результатом первой главы настоящей работы.

Первый результат типа теорем вложения для весовых пространств функций многих переменных был получен в 1938 г. в работе В.И.Кондрашова [34]. Систематическое изучение весовых пространств с весом, равным расстоянию до границы области в положительной степени, а также их приложения к решению краевых задач для вырождающихся на границе ограниченной области эллиптических дифференциальных уравнений, впервые было проведено в монографии Л.Д.Кудрявцева [35]. Обзор работ и подробная библиография по весовым функциональным пространствам содержится в монографиях С.М.Никольского [51], Х. Трибеля [57, 58] и статьях О.В. Бесова, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, С.М. Никольского [3], Л.Д.Кудрявцева, С.М.Никольского [36] и С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [54].

Вариационная задача Дирихле для эллиптических уравнений в n - мерной ограниченной области со степенным вырождением на $(n-1)$ -мерной границе области исследовалась в работах С.М. Никольского, П.И. Лизоркина [53], С.М. Никольского [52], П.И. Лизоркина и С.М. Никольского [41, 42, 43], П.И. Лизоркина [39], Н.В. Мирошина [46, 47, 48], П.И. Лизоркина и Н.В. Мирошина [40], Б.Л.Байдельдинова [1, 2] и др.

В указанных выше работах С.М. Никольского, П.И. Лизоркина. Н.В.

Мирошина, Б.Л. Байдельдинова предполагалось, что полуторалинейная форма, связанная с дифференциальным уравнением, удовлетворяет условию коэрцитивности. Вариационная задача Дирихле в случае, когда эта форма не является коэрцитивной, изучалась К.Х. Бойматовым, С.А. Исхоковым и К. Седдики [4, 5, 6, 7, 8, 12, 17, 18, 19]. Дифференциальные свойства решений этой задачи в зависимости от гладкости коэффициентов оператора и правой части уравнения изучались в работах К.Х. Бойматова и С.А. Исхокова [10], [17], [19].

В работах вышеуказанных авторов, в которых рассматривались вырождающиеся эллиптические уравнения в ограниченной области n-мерного евклидова пространства, коэффициенты дифференциальных операторов имели форму произведения ограниченной функции и степени расстояния до границы области. В отличие от них в работах С.А. Исхокова и А.Я. Куджмуродова [27, 28, 29] изучались дифференциальные уравнения, младшие коэффициенты которых принадлежат некоторым весовым L_p – пространствам. Исследование в этих работах основано на применении теорем вложения разных метрик для соответствующих функциональных пространств.

Следует отметить, что не все результаты, полученные по этому направлению в случае ограниченных областей, обобщаются на случай, когда рассматриваемая область является неограниченной. Поэтому суще-ствуют лишь отдельные работы, в которых изучаются вариационные задачи для эллиптических уравнений с вырождением в неограниченных областях специального вида (внешность ограниченной области, полупро-странство $R_n^+ = \{x = (x', x_n) : x_n > 0\}$, предельно цилиндрическая область). Случай внешности ограниченной области рассматривался в работах Н.В. Мирошина [49, 50], С.А.Исхокова, Г.И.Сивцевой [30]. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве R_n^+ исследовалась в работах И.А. Киприянова [33], Ю.В. Рыбалова [55, 56], И.И. Матвеевой [44, 45], С.А. Исхокова [20, 21, 22]. Случай дифференциальных уравнений, вырождающихся на неограниченных многообразиях произвольной размерности меньше размерности пространства, рассматривался в работах С.А.Исхокова и Г.И. Тарасовой [31].

Во всех вышеперечисленных работах, где изучалась вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений, не использовалось неравенство Гординга, что приводило к более жесткому условию эллиптичности, нежели соответствующее условие для уравнений без вырождения. Исследования по этому направлению с применением неравенства Гординга для эллиптических уравнений с вырождением проводились в работах И.А. Киприянова [32] и С.А. Исхокова [23]. Эллиптические операторы, рассмотренные в работе [32], имеют специальный вид и вырождаются только по одной независимой переменной, а операторы, рассмотренные в [23], имеют одинаковое вырождение по всем независимым переменным. В отличие от этих работ в первой главе настоящей работы доказывается неравенство Гординга для общих эллиптических операторов высшего порядка с разными характерами вырождения по разным независимым переменным и с помощью этого неравенства исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями (в том смысле, что решение принадлежит функциональному пространству, где плотно множество бесконечнодиффе-ренцируемых финитных функций).

Перейдем теперь к краткому изложению содержания диссертации. Работа состоит из настоящего введения, двух глав и списка литературы. Используется тройная нумерация теорем, лемм, следствий и формул, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий – на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов и посвящена исследованию однородной вариационной задачи для эллиптических уравнений с нестепенным вырождением в произвольной области. В первом параграфе рассмотрены основные определения и доказаны вспомогательные интегральные неравенства.

Пусть Ω - произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1,n}\}$ -единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки $\xi \in R_n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \ldots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ - определенные в Ω положительные функции. Символом $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ обозначим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ при $\vec{t} = \varepsilon \cdot \vec{g}(\xi)$, где $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Далее, в первой главе предполагается, что множество Ω и функции $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ связаны условием: существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И.Лизоркина

[38]. В работе [38] также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $\sigma(x)$ – определенная в Ω положительная функция. Предположим, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ существуют положительные числа $\lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)$ такие, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \lambda(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \nu(\varepsilon) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\varepsilon)} \le \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \le \nu(\varepsilon),\ \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \le \frac{g(x)}{g(\xi)} \le \lambda(\varepsilon),\ i=\overline{1,n}, \tag{0.0.1}$$

для всех x из $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$.

Класс положительных функций $\sigma(x)$, $x\in\Omega$, удовлетворяющих условию (0.0.1) обозначим через $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$

Пусть $1 \le p < +\infty$ и r - натуральное число. Символом $L^m_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$, где целое число m такое, что $0 \le m \le r$, обозначим класс функций $u(x)$, $x\in\Omega$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$, $k=(k_1,\dots,k_n)$ - мультииндекс, $|k| = k_1+\dots+k_n \le r$, с конечной полунормой

$$\|u; L^m_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=m} \int_\Omega (\sigma(x) g_1^{k_1-r}(x) g_2^{k_2-r}(x)\dots g_n^{k_n-r}(x)|u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом $W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})$ - пространство функций $u(x)$, $x\in\Omega$, с конечной нормой

$$\|u; W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})\| = \left\{ \|u; L^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^p + \|u; L^0_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^p \right\}^{1/p}. \tag{0.0.2}$$

Пространство $W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})$ является банаховым с нормой (0.0.2) и согласно результатам работы С. А. Исхокова [24] в сделанных выше предположениях при всех $p\in[1,\infty)$ и всех натуральных r множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в этом пространстве.

Символом $(W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ обозначим пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Основным результатом первого параграфа первой главы является следующая лемма.

Лемма 0.1 *Пусть положительные функции* $\alpha(x)$, $\beta(x)$ *принадлежат классу* $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$, $p \ge 1$, $q \ge 1$ *и* r, t *- натуральные числа. Для* *мультииндексов k, l таких, что $|k| < r$, $|l| \le t$, определим числа q_l, λ_{kl}, s_k посредством следующих соотношений*

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \frac{1}{q} - \frac{t-|l|}{n}, & n > q(t-|l|) \\ \varepsilon_0,\ 0 < \varepsilon_0 \le 1/q, & n \le q(t-|l|), \end{cases}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p} - \frac{r-|k|}{n},\ \textit{при } n - p(r-|k|) > 0,$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_1,\ \textit{где } 0 < \varepsilon_1 < 1/p,\ \textit{при } n - p(r-|k|) \le 0,$$

$$\frac{1}{s_k} \ge \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}.$$

Пусть положительная функция $\sigma_{kl}(x)$ принадлежит классу $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{kl}(x)\alpha^{-1}(x)\beta^{-1}(x) \le$$
$$\le c g_1^{k_1+l_1}(x) g_2^{k_2+l_2}(x) \dots g_n^{k_n+l_n}(x) (g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-t+\frac{1}{q}-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda_{kl}}}$$

для всех $x \in \Omega$; положительное число c не зависит от x.

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| \le \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g}) \right\| \cdot \left\| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g}) \right\| +$$
$$+ c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha, (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s_k}}) \right\|,$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k| n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r-|k|)n^{-1}}$$

и положительная постоянная c_0 зависит только от $n, p, r, |k|$.

Во втором параграфе первой главы рассматривается неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением.

Как известно, из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных (см.,например,[15],[16]), неравенство Гординга [62] играет важную роль в исследовании разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических уравнений методами функционального анализа. В случае эллиптических уравнений с вырождением существуют лишь работы И.А.Киприянова [32], С.А.Исхокова [23], в которых доказаны неравенства Гординга и с их помощью изучена разрешимость задачи Дирихле.

Эллиптические операторы, рассмотренные в работе [32], имеют специальный вид, а операторы, рассмотренные в работе [23], имеют одинаковое вырождение по всем независимым переменным. В отличие от них, в первом параграфе первой главы изучены общие эллиптические операторы с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \sum_{|k|,|l|\le r} (-1)^{|l|} \Big(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \Big)^{(l)}, \ x \in \Omega, \tag{0.0.3}$$

где

$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \dots g_n^{-r+k_n}(x)$$

и $a_{kl}(x)$ - комплексозначные функции.

Изучение краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором (0.0.3) методами функционального анализа связано со следующей полуторали-нейной формой, порожденной этим оператором

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int\limits_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{0.0.4}$$

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (0.0.4), ранее изучалась в работах С.А.Исхокова [24, 25] в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \ge c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{0.0.5}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r} \subset \mathbb{C}$. Число $c > 0$ не зависит от x, ζ. Здесь, вместо условия (0.0.5), мы предполагаем выполнение более слабого условия

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|,|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c |\xi|^{2r} \tag{0.0.6}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_n$; c - положительное число, не зависящее от x, ξ.

Основным результатом второго параграфа первой главы является следующая теорема, где доказывается неравенство, которое является весовым аналогом неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов.

Теорема 0.1. *Пусть коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (0.0.6) и для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существуют число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu$$

для любого $y \in \Omega$ *и любого*

$$z \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y) = \{z \in R_n : |z_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon g_i(y),\ i = \overline{1,n}\}.$$

Пусть также коэффициенты $a_{kl}(x)$ *при* $|k|, |l| \leq r$ *и* $|k| + |l| \leq 2r - 1$ *принадлежат пространству* $L_{p_{kl}}\left(\Omega; (g_1 \cdot g_2 \ldots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$, *где*

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \leq r-1,\ |l| \leq r \\ q_{lk} & \text{при } |k| = r,\ |l| \leq r-1 \end{cases}$$

а числа q_{kl} *определяются соотношениями:*

$$\frac{n}{2r - |k| - |l|} < q_{kl} \leq \frac{n}{r - |l|}, \text{ если } n > 2(r - |k|),\ n > 2(r - |l|);$$

$$\frac{n}{r - |k| - \varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2} \text{ если } n > 2(r - |k|),\ n \leq 2(r - |l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r - |l| + \varepsilon_2 n},\ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2} \text{ если } n \leq 2(r - |k|),\ n > 2(r - |l|), \\ \\ \text{любое конечное число} >1, \text{ если } n \leq 2(r - |k|),\ n \leq 2(r - |l|). \end{cases}$$

Тогда существуют такие постоянные $c_1 > 0$ *и* $c_2 \geq 0$, *что*

$$Re\, B[u,u] \geq c_1 \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - c_2 \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \qquad (0.0.7)$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$.

Применяя неравенство Гординга (0.0.7) в третьем параграфе первой главы, мы рассматриваем разрешимость вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений.

Рассмотрим Вариационную задачу Дирихле.

Задача D_λ**.** *Для заданного функционала* $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[u,v] + \lambda \int\limits_\Omega \sigma^2(x)(g_1(x) g_2(x) \ldots g_n(x))^{-2r} U(x) \overline{v(x)} dx =< F, v >$$

$$(v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$.

Основным результатом третьего параграфа первой главы является следующая теорема:

Теорема 0.2. *Пусть выполнены условия:*
I) *коэффициенты* $a_{kl}(x)$ *при* $|k| = |l| = r$ *ограничены и удовлетворяют условию эллиптичности*

$$Re \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k \xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x, \xi \in R_n$ *(*c *– положительная числа, не зависящее от* x, ξ*), и для любого достаточно малого* $\nu > 0$ *существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(\xi)| < \nu$$

для любого $\xi \in \Omega$ *и любого* $x \in \Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$*;*
II)*коэффициенты* $a_{kl}(x)$ *при* $|k|, |l| \leq r$ *и* $|k| + |l| \leq 2r - 1$ *принадлежат пространству* $L_{p_{kl}}\left(\Omega; (g_1 g_2 \cdots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$ *где числа* p_{kl} *– такие же как в теореме 0.1.*

Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'$ *задача* D_λ *имеет единственное решение* $U(x)$ *и, при этом, выполняется оценка*

$$\|U; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \leq M \left\|F; (W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'\right\|,$$

где число $M > 0$ *не зависит от* F*.*

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению Вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для некоторых классов эллиптических уравнений с вырождением

Пусть R_n - n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим

$$R_n^+ = \{x | x = (x', x_n) \in R_n, x_n > 0\}.$$

В первом параграфе второй главы доказываются некоторые вспомогательные интегральные неравенства для функций, заданных в полупространстве R_n^+.

Пусть функция $\varphi(t) \in C^\infty(R_1^+)$ такая, что $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ для любого $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и $\varphi(t) \equiv 0$, когда $t \geq 1$; $\varphi = 1$ для любого $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Для любых двух вещественных чисел α, β определим функцию

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t) = \varphi(t) t^{-\alpha} + (1 - \varphi(t)) t^\beta \ (t > 0).$$

Пусть $p \in (1; +\infty)$ и r - некоторое целое неотрицательное число. Символом $V_{p;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных в полупространстве R_n^+, имеющих все обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$ до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k|\le r} \int_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|k|} |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Обозначим через $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ пространство функций $u(x)$ $(x \in R_n^+)$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\| = \left\{ \|u; L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\|^p + \|u; L^0_{p;\alpha,\gamma}(R_n^+)\|^p \right\}^{1/p},$$

где

$$\|u; L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Обозначим через $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$ множество бесконечно дифференцируемых функций в R_n^+ финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях x_n. Если D - некоторое весовое пространство функций, заданных в R_n^+, то через $\overset{\circ}{D}$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(R_n^+)$ в метрике пространства D, а через $\tilde{D}$ - пополнение класса $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$ в метрике пространства D.

Свойства пространств $V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)$, $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ ранее изучалась в работах С.А.Исхокова [21], С.А.Исхокова и М.Ш.Ганиева [26].

Исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями в полупространстве основывается на применении вспомогательного интегрального неравенства, в котором оценивается норма произведения производных функций $u \in \tilde{W}^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$. Это вспомогательное интегральное неравенство сформулировано и доказано в виде следующей теоремы.

Теорема 0.3 *Пусть $p > 1$, $q > 1$, r - натуральное число, и вещественные числа α, β удовлетворяют условиям*

$$\alpha \le 0, \ \beta + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, r\}.$$

Тогда для всех мультииндексов k, l таких, что $|k| \le r$, $|l| \le r$, $|k|+|l| \le 2r-1$ и всех функций $u \in \tilde{W}^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$ справедливо *неравенство*

$$\left\{\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\right)^{\lambda_{kl}}dx\right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$

$$\ll \|u;W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\|\|v;V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)\|,$$

где γ *- произвольное вещественное конечное число и числа* $\alpha_{kl},\beta_{kl},\lambda_{kl}$ *определяются следующими соотношениями:*

1)если $|k|<r,\ |l|<r$*, то*

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= 2\alpha+n\varepsilon_l+\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+,\\
\beta_{kl} &= 2\beta-r+|k|-\delta_k-n\varepsilon_l-\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+,\\
\frac{1}{\lambda_{kl}} &= \delta_k+\varepsilon_l+\left(\frac{1}{q}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+;
\end{aligned}$$

2)если $|k|=r,\ |l|\le r-1$*, то*

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= 2\alpha+n\varepsilon_l+\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+,\\
\beta_{kl} &= 2\beta-n\varepsilon_l-\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+,\\
\frac{1}{\lambda_{kl}} &= \frac{1}{p}+\varepsilon_l+\left(\frac{1}{q}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+;
\end{aligned}$$

3)если $|k|\le r-1,\ |l|=r$*, то*

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= 2\alpha,\\
\beta_{kl} &= 2\beta-r+|k|+\frac{1}{p}-\delta_k,\\
\frac{1}{\lambda_{kl}} &= \frac{1}{q}+\delta_k.
\end{aligned}$$

Здесь ε_l *- произвольное число из интервала* $(0,1/q)$*,* δ_k *- произвольное положительное число не превосходящее* $1/p$*, и* $(\mu)_+=\mu$*, если* μ *- положительное число, а* $(\mu)_+=0$ *в противном случае.*

Второй параграф второй главы посвящен разрешимости вариационной задачи в полупространстве с неоднородными граничными условиями. В первой части этого параграфа сначала сформулированы результаты о разрешимости вариационной задачи Дирихле в полупространстве с однородными граничными условиями.

Пусть $\sigma(x)$, $\vec{g}(x)$, $L^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$, $W^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$ такие же объекты, как в первой главе. Положим,

$$\begin{gathered}\Omega = R_n^+,\ \sigma(x)=\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{r(n-1)},\\ g_1(x)=g_2(x)=\cdots=g_n(x)=x_n.\end{gathered}$$

Тогда

$$\left\|u;L^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| = \left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)\left|u^{(k)}(x)\right|\right)^p dx\right\}^{1/p},$$

$$\left\|u;L^0_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| = \left\{\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)\cdot x_n^{-r}\left|u(x)\right|\right)^p dx\right\}^{1/p},$$

поэтому с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство

$$W^r_p(R_n^+;\sigma,\vec{g}) = V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+).$$

Из равенств (2.2.1) следует, что

$$p_k(x)=\sigma(x)g_1^{-r+k_1}(x)g_2^{-r+k_2}(x)\dots g_n^{-r+k_n}(x)=\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-r+|k|}.$$

Рассмотрим полуторалинейную форму.

$$B[u,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int\limits_{R_n^+}p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

где

$$p_k(x)=\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-r+|k|}$$

и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, определенные в полупространстве R_n^+.

Задача D'_λ**.** *Для заданного функционала* $F\in\left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[U,v]+\lambda\int\limits_{R_n^+}\sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-2r}U(x)\overline{v(x)}dx=<F,v>\quad (v\in C_0^\infty(R_n^+)),$$

принадлежащее пространству $V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$.

Теорема 0.4. *Пусть выполнены условия:*

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|=|l|=r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$Re\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x\in R_n^+$, $\xi\in R_n$ (с-положительное число, не зависящее от x,ξ), и для любого достаточно малого $\nu>0$ существует число $\varepsilon>0$ такое, что

$$|a_{kl}(x)-a_{kl}(y)|<\nu$$

для всех $x,y\in R_n^+$ таких, что

$$|x_i-y_i|<\frac{1}{2}\varepsilon y_n,\quad i=\overline{1,n};$$

II)коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,|l|\leq r$ и $|k|+|l|\leq 2r-1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(R_n^+;x_n^{-n/p_{kl}}\right)$, где p_{kl} – такие же числа как в теореме 0.1.

Тогда существует число $\lambda_0\geq 0$ такое, что при $\lambda>\lambda_0$ для любого заданного функционала $F\in\left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'$ задача D'_λ имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U;V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right\|\leq M\left\|F;\left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'\right\|,$$

где число $M>0$ не зависит от F и от λ.

Теорема 0.5. *Пусть выполнены все условия теоремы 0.8 и пусть также существует такое положительное число c_0, что*

$$c_0\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-r}|v(x)|\right)^2dx\leq Re\,B[v,v]$$

для всех $v\in C_0^\infty(R_n^+)$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 0.4 при $\lambda_0=0$.

Далее исследуется существование решения вариационной задачи Дирихле в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$.

Задача D_0. *Для заданного функционала $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения*

$$B[U,v]=\sum_{|k|,|l|\leq r}\int\limits_{R_n^+}p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)U^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx=<F,v>\quad(v\in C_0^\infty(R_n^+)),$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$.

Теорема 0.6. *Пусть*

$$-\alpha+\frac{1}{2}\notin\{1,2,\ldots,r\},\ \beta+\frac{1}{2}\notin\{1,2,\ldots,r\},\ \beta-r\geq\gamma$$

и пусть выполнены все условия теоремы 0.5. Тогда для любого заданного функционала $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ *задача* D_0 *имеет единственное решение* $U(x)$. *При этом выполняется оценка*

$$\left\|U;W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\leq M\left\|F;\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\|,$$

где число $M>0$ *не зависит от* F.

В силу плотности класса $C_0^\infty(R_n^+)$ в пространствах $V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$, $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, граничные условия в задачах D'_λ и D_0 формально считаются однородными. При некоторых дополнительных ограничениях на параметры α, β, γ можно выписать граничные условия задачи D_0 в явном виде. Пусть выполнены условия

$$-\alpha+\frac{1}{p}\notin\{1,2,\ldots,r\},\,\beta+\frac{1}{p}\notin\{1,2,\ldots,r\},\,\beta-r\geq\gamma$$

и пусть

$$\begin{aligned}-r+\frac{1}{2}<\alpha\leq\frac{1}{2}\ ,\quad r+\frac{1}{2}\geq\beta,\quad r-\beta+1/2<s_0,\\ \gamma+s_0<1/2,\quad \gamma+s_0\neq-1/2,\end{aligned}$$

где s_0 - целое число, удовлетворяющее неравенствам $r+\alpha-1/2\leq s_0<r+\alpha+1/2$. Тогда полунорма в пространстве $L^r_{2;\,\alpha,\,\beta}(R_n^+)$ эквивалента на функциях $u\in\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha,\beta,\,\gamma}(R_n^+)$ норме $\|u;W^r_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R_n^+)\|$ и в силу результатов П.И. Лизоркина [37] условие $U(x)\in\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ задачи D_0 можно заменить на эквивалентное ему условие

$$U(x)\in\widetilde{W}{}^{r}_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R_n^+)\quad\text{и}\quad\frac{\partial^sU(x)}{\partial x_n^s}\Big|_{x_n=0}=0,\ s=0,1,\ldots,s_0-1.$$

Во второй части второго параграфа второй главы исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле с **неоднородными граничными условиями**.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int_{R_n^+}\sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx \tag{0.0.8}$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D**.** *Для заданного функционала* $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ *и заданного элемента* $\Psi(x)\in\tilde{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ *требуется найти решение* $U(x)\in\tilde{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ *уравнения*

$$\mathbb{B}[U,v]=<F,v>,\ \forall v\in C_0^\infty(R_n^+), \tag{0.0.9}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x)-\Psi(x)\in\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+).$$

Предположим, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ полуторалинейной формы (0.0.8) удовлетворяют условиям:

I^o) при $|k|=|l|=r$ коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\ge c|\xi|^{2r}$$

для всех $x\in R_n^+$, $\xi\in R_n$ (c - положительное число, не зависящее от x,ξ), и для любого достаточно малого $\nu>0$ существует число $\varepsilon>0$ такое, что

$$|a_{kl}(x)-a_{kl}(y)|<\nu$$

для всех $x,y\in R_n^+$ таких, что

$$|x_i-y_i|<\frac{1}{2}\varepsilon y_n,\ i=\overline{1,n};$$

II^o) при $|k|+|l|\le 2r-1$ коэффициенты a_{kl} принадлежат пространству $L_{p_{kl}}(R_n^+;\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n))$, где числа $\alpha_{kl},\beta_{kl},p_{kl}$ определяются соотношениями:

а)если $|k|<r,\ |l|<r$, то

$$\alpha_{kl}=-\frac{n}{2}+\frac{n}{p_{kl}}+n\delta_k-r+|l|,\quad \beta_{kl}=2r-|k|-|l|-(n-1)\delta_k+\frac{n}{2}-\frac{n}{p_{kl}},$$
$$\frac{1}{p_{kl}}=1-\delta_k-\varepsilon_l-\left(\frac{1}{2}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+,$$

а числа δ_k, ε_l из интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{1}{2} - \delta_k - \varepsilon_l < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r-|k|}{n}\right\};$$

б)если $|k| = r,\ |l| \leq r-1$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - r + |l|, \quad \beta_{kl} = -\frac{n}{p_{kl}} + r - |l|,$$
$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \varepsilon_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+,$$

а ε_0 - достаточно малое положительное число;

в)если $|k| \leq r-1,\ |l| = r$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} - \delta_k, \quad \beta_{kl} = r - |k| - \frac{1}{2} + \delta_k,$$
$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \delta_k.$$

В этих условиях число δ_k такое, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \delta_k < \frac{1}{2}.$$

Теорема 0.7. *Пусть выполнены условия I^o), II^o) и пусть существует такое положительное число c_0, что*

$$c_0 \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|\right)^2 dx \leq Re\mathbb{B}[v,v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Пусть также

$$\alpha < -\frac{1}{2},\ -\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,r\},\ \beta + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ и любого заданного элемента $\Psi \in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ задача D имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leq$$
$$\leq M\left\{\left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\| + \left\|\Psi; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\right\},$$

где число M не зависит от F и Ψ.

Далее рассматривается более конкретный случай задачи D, когда граничные условия на гиперплоскости $x_n = 0$ выписываются в явном виде. Справедлива следующая лемма (см., например, [57, §2.9.2]).

Лемма 0.3. *Пусть $-r + \frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда для любого набора функций*

$$\psi_j \in B_2^{r+\alpha-\frac{1}{2}-j}(R_{n-1}), \quad j = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \tag{0.0.10}$$

где $B_2^\nu(R_{n-1})$ – классы О.В.Бесова функций, определенных на R_{n-1}, s_0 – целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$r + \alpha - \frac{1}{2} < s_0 < r + \alpha + \frac{1}{2},$$

существует функция $\Psi \in L^r_{2;-\alpha}(R_n^+)$ такая, что:

$$\Psi(x) \equiv 0 \quad \text{на} \quad R_n^+ \backslash \Omega_{1/2};$$

$$\left. \frac{\partial^j \Psi}{\partial x_n^j} \right|_{x_n=0} = \psi_j(x'),\ j = 0, 1, \ldots, s_0 - 1;$$

$$\left\| \Psi; L^r_{2;-\alpha}(R_n^+) \right\| \ll \sum_{j=0}^{s_0-1} \left\| \psi_j; B_2^{r+\alpha-j-1/2}(R_{n-1}) \right\|.$$

Задача D_1. *Для заданного функционала $F \in \left(\widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+) \right)'$ и заданного набора граничных функций* (0.0.10) *требуется найти решение $U(x)$ уравнения* (0.0.9), *принадлежащее пространству $\widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ и удовлетворяющее граничным условиям*

$$\left. \frac{\partial^j U(x)}{\partial x_n^j} \right|_{x_n=0} = \psi_j(x'),\ j = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Результат о разрешимости задачи D_1 сформулирован в виде следующей теоремы

Теорема 0.8. *Пусть выполнены все условия теоремы* 0.11 *и пусть числа α, β, γ удовлетворяют условиям*

$$-r + \frac{1}{2} < \alpha < 0, \quad r + \frac{1}{2} \geq \beta, \quad r - \beta + 1/2 < s_0,$$
$$\gamma + s_0 < 1/2, \quad \gamma + s_0 \neq -1/2, \quad \beta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ *и любого заданного набора граничных функций* (0.0.10) *существует единственное решение* $U(x)$ *задачи* D_1 *и при этом выполняется оценка*

$$\left\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leq$$
$$\leq M \left\{ \left\| F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)' \right\| + \sum_{j=0}^{s_0-1} \left\| \psi_j; B_2^{r+\alpha-j-1/2}(R_{n-1}) \right\| \right\},$$

где число $M > 0$ *не зависит от* F *и набора граничных функций (0.0.10).*

В **третьем параграфе второй главы** доказаны вспомогательные интегральные неравенства для функций, заданные в дополнении неограниченного многообразия $\mathfrak{M}$ размерности $m \in [1, n-1]$ в пространстве R_n, и на их основе в **четвертом параграфе второй главы** изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка в $R_n \setminus \mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ - неограниченное многообразие размерности $m \in [1, n-1]$ в n-мерном евклидовом пространстве R_n, удовлетворяющее условию конуса. Положим $\Omega = R_n \setminus \mathfrak{M}$ и $\rho(x) = dist\{x, \mathfrak{M}\}$ для всех $x \in \Omega$. Аналогично весовому пространству $W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ определяется пространство $W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, в определении которого вместо x_n используется функция $\rho(x)$.

Пусть $\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \varphi(\rho(x))\rho(x)^{-\alpha} + (1 - \varphi(\rho(x)))\rho(x)^{\beta}$, где $\varphi(t)$ такая же функция, как в первом параграфе второй главы.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int_{\Omega} \varphi^2_{\alpha,\beta}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \qquad (0.0.11)$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D. *Для заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ *и заданного элемента* $\Psi(x) \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[U, v] = < F, v >, \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежащее пространству $W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *и удовлетворяющее условию*

$$U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega).$$

Предположим, что коэффициенты полуторалинейной формы (0.0.11) удовлетворяют условиям:

I*) при $|k| = |l| = r$ коэффициенты a_{kl} ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_n$ (c - положительная константа), и для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(\xi)| < \nu$$

для любого $\xi \in \Omega$ и любого $x \in \{x \in R_n : |x_i - \xi_i| < (\varepsilon/2)\rho(\xi),\ i = \overline{1,n}\}$;

II*) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| \leq r$, $|l| \leq r$ и $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}(\Omega; \varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}})$, где

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - 2r + |k| + |l| + \varepsilon + (\alpha + r - |k| - 1/2(n-m) - \frac{m}{p_{kl}})_+,$$

$$\beta_{kl} = 2r - |k| - |l| + \varepsilon - \frac{1}{p_{kl}}(n-m) + (\beta - 1 + 1/2(n-m))_+,$$

ε - достаточно малое положительное число и числа p_{kl} такие же как в теореме 0.1.

Теорема 0.9. *Пусть выполнены условия I*), II*) и пусть вещественные числа α, β, γ удовлетворяют условиям*

$$-\alpha + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Пусть также существует такое положительное число c_0, что

$$c_0 \int_\Omega (\varphi_{\alpha,\beta}(x)\rho^{-r}(x)|v(x)|)^2 dx \leq Re\mathbb{B}[v, v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ и любой заданной функции $\Psi(x) \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D и при этом выполняется оценка

$$\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \leq M \left\{ \|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'\| + \|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \right\},$$

где число$M > 0$ не зависит от F и Ψ.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [65] – [71].

Глава 1

Однородная вариационная задача для эллиптических уравнений с нестепенным вырождением в произвольной области

1.1 Функциональные пространства. Вспомогательные интегральные неравенства

Пусть Ω - произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1,n}\}$ -единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки $\xi \in R_n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \ldots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ - определенные в Ω положительные функции. Положим $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon,\vec{g}(\xi)}(\xi)$, где $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), \ldots, g_n(\xi))$

Далее, в этой главе, предполагается, что множество Ω и функции $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ связаны условием: существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И.Лизоркина [38]. В работе [38] также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $\sigma(x)$ – определенная в Ω положительная функция. Предположим, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют положительные числа

$\lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)$ такие, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \lambda(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \nu(\varepsilon) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\varepsilon)} \le \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \le \nu(\varepsilon),\ \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \le \frac{g(x)}{g(\xi)} \le \lambda(\varepsilon),\ i=\overline{1,n}, \tag{1.1.1}$$

для всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ и всех $\xi \in \Omega$.

Не трудно заметить, что $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) \subset \Pi_{\varepsilon_0,\vec{g}}(\xi)$ для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и всех $\xi \in \Omega$.

Класс положительных функций $\sigma(x),\ x \in \Omega$, удовлетворяющих условию (1.1.1) обозначим через $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$

Для любого натурального числа m и любого положительного числа ε обозначим через $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon_m,\vec{g}}(\xi)$ при $\varepsilon_m = m\cdot\varepsilon/(m+1)$. Заметим, что $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) \subset \Pi_{\varepsilon_0,\vec{g}}(\xi)$ для любого натурального числа m.

Лемма 1.1.1. *Пусть $\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(x;\xi)$ - характеристическая функция параллелепипеда $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$. Тогда для любого натурального числа m и достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{m}\right)^n g_1^{-1}(x)g_2^{-1}(x)\dots g_n^{-1}(x)\int \chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(x;\xi)d\xi \le \left(\frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2}\right)^n, \tag{1.1.2}$$

где $\lambda(\varepsilon)$ - такое же число как в условии (1.1.1).

Доказательство. Пусть x - произвольная фиксированная точка из Ω. Вводим следующие обозначения

$$T_{\varepsilon,\vec{g}}(x) = \left\{\xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}g_i(\xi),\ i=\overline{1,n}\right\},$$

$$D_{\varepsilon,\vec{g}}(x) = \left\{\xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}g_i(x),\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Пусть $\xi \in D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x)$. Тогда из условия (1.1.1) следует, что

$$|\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\cdot g_i(x) < \frac{\varepsilon}{2}g_i(\xi),\ i=\overline{1,n}.$$

Следовательно, $\xi \in T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$ и поэтому

$$D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x) \subset T_{\varepsilon,\vec{g}}(x) \tag{1.1.3}$$

для всех $x \in \Omega$.

Пусть $\xi \in T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$. Тогда

$$|\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot g_i(\xi),\ i = \overline{1,n}.$$

Из условия (1.1.1) следует, что $g_i(\xi) < \lambda(\varepsilon) g_i(x)$. Поэтому

$$|\xi_i - x_i| < \frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2} \cdot g_i(\xi),\ i = \overline{1,n}.$$

Эти неравенства означают, что $\xi \in D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x)$.

Таким образом, доказано включение

$$T_{\varepsilon,\vec{g}}(x) \subset D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x) \tag{1.1.4}$$

для всех $x \in \Omega$.

Так как

$$\int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi) d\xi = |T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)|,$$

где правая часть обозначает объем параллелепипеда $T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$, то из (1.1.3), (1.1.4) следует, что

$$\left|D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x)\right| \le \int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi) d\xi \le \left|D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x)\right|.$$

Вычисляя объем параллелепипедов $D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x)$, $D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x)$, находим

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\right)^n g_1(x) \cdot g_2(x) \ldots g_n(x) \le \int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi) d\xi \le$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon\lambda(\varepsilon)}{2}\right)^n g_1(x) \cdot g_2(x) \ldots g_n(x).$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\right)^n \le g_1^{-1}(x) \cdot g_2^{-1}(x) \ldots g_n^{-1}(x) \int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi) d\xi \le \left(\frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2}\right)^n. \tag{1.1.5}$$

Заменяя в этом неравенстве ε через $\varepsilon_m = \varepsilon_m/(m+1)$ получим (1.1.2).

Лемма 1.1.1 доказана.

Пусть $1 \le p < +\infty$ и r - натуральное число. Символом $L^s_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$, где целое число s такое, что $0 \le s \le r$, обозначим класс функций $u(x)$, $x \in \Omega$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$,

$k = (k_1, k_2 \dots, k_n)$ - мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 \dots + k_n \le r$, с конечной полунормой

$$\|u; L^s_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=s} \int\limits_{\Omega} (\sigma(x) g_1^{k_1 - r}(x) g_2^{k_2 - r}(x) \dots g_n^{k_n - r}(x) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом $W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})$ - пространство функций $u \in L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \|u; L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p + \|u; L^0_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p \right\}^{1/p}. \qquad (1.1.6)$$

Пространство $W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})$ является банаховым с нормой (1.1.6), и, согласно результатам работы С. А. Исхокова [24], в сделанных выше предположениях при всех $p \in [1, \infty)$ и всех натуральных r множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в этом пространстве.

Лемма 1.1.2. *Пусть s - целое число и $0 \le s < r$. Пусть $p \ge 1$, $1 \le q_1 \le q_0$ и числа q_0 удовлетворяют условиям:*

$$\frac{1}{p} - \frac{r-s}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \textit{при} \quad n - (r-s)p > 0;$$

$$q_0 - \textit{любое конечное число при } n - (r-s)p \le 0.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ и всех $v \in W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})$ справедливо неравенство

$$\left\| v; L^s_{q_0,r}\left(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}}, \vec{g}\right) \right\| \le \tau \left\| v; W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\| +$$
$$+ c_1 \tau^{-\mu} \left\| v; L_{q_1}(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}}, \vec{g}) \right\| \qquad (1.1.7)$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + sn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-s)n^{-1}} \qquad (1.1.8)$$

Доказательство. В условиях этой леммы из интерполяционных неравенств для классических пространств Соболева (см. например [63], [59, §4.7]) следует, что

$$\left\| u^{(k)}; L_{q_0}(\Pi(0)) \right\| \le \tau \sum_{|l|=r} \left\| u^{(l)}; L_p(\Pi(0)) \right\| +$$
$$+ \tau \|u; L_p(\Pi(0))\| + c_1 \tau^{-\mu} \|u; L_{q_1}(\Pi(0))\|, \qquad (1.1.9)$$

где k - любой мультииндекс длины s и число μ определяется равенством (1.1.8).

Для удобства записи далее вместо $u(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ коротко будем писать $u(\eta_i)$.

Пусть v - произвольная функция из пространства $W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$, ξ - произвольная точка из множества Ω. Рассмотрим отображение $z \to x$, осуществляемое с помощью следующих равенств

$$x_i = \frac{z_i - \xi_i}{\varepsilon g_i(\xi)},\ i = \overline{1, n}.$$

С помощью этого отображения параллелепипед

$$\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi) = \left\{ z \in R_n : |z_i - \xi_i| < \frac{1}{2} \varepsilon g_i(\xi) \right\}$$

отображается в единичный куб $\Pi(0)$.

Так как согласно сделанным выше предположениям относительно Ω и функций $g_i(x)$ для всех $\xi \in \Omega$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место включение $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi) \subset \Omega$, то функция $\hat{v}_\xi(x) = v(\varepsilon x_i g_i(\xi) + \xi_i)$ принадлежит пространству $W_p^r(\Pi(0))$.

Так как

$$\hat{v}_\xi^{(k)}(x) = v^{(k)}(\varepsilon x_i g_i(\xi) + \xi_i) \cdot \varepsilon^{|k|} \cdot g_1^{k_1}(\xi) g_2^{k_2}(\xi) \ldots g_n^{k_n}(\xi),$$

$$\hat{v}_\xi^{(l)}(x) = v^{(l)}(\varepsilon x_i g_i(\xi) + \xi_i) \cdot \varepsilon^{|l|} \cdot g_1^{l_1}(\xi) g_2^{l_2}(\xi) \ldots g_n^{l_n}(\xi),$$

то неравенство (1.1.9) для функции $u(x) = \hat{v}_\xi(x)$ примет вид

$$\varepsilon^s \left\{ \int\limits_{\Pi(0)} \left(\left| v^{(k)}(\varepsilon x_i g_i(\xi) + \xi_i) \right| g_1^{k_1}(\xi) g_2^{k_2}(\xi) \ldots g_n^{k_n}(\xi) \right)^{q_0} dx \right\}^{1/q_0} \leq$$

$$\leq \varepsilon^r \tau \sum_{|l|=r} \left\{ \int\limits_{\Pi(0)} \left(\left| v^{(l)}(\varepsilon x_i g_i(\xi) + \xi_i) \right| g_1^{l_1}(\xi) g_2^{l_2}(\xi) \ldots g_n^{l_n}(\xi) \right)^{p} dx \right\}^{1/p} +$$

$$+\tau \left\{ \int\limits_{\Pi(0)} |v(\varepsilon x_i g_i(\xi) + \xi_i)|^p \, dx \right\}^{1/p} + c_1 \tau^{-mu} \left\{ \int\limits_{\Pi(0)} |v(\varepsilon x_i g_i(\xi) + \xi_i)|^{q_1} \, dx \right\}^{1/q_1}.$$

В интегралах этого неравенства произведем замену переменных интегрирования равенствами

$$x_i = \frac{1}{\varepsilon g_i(\xi)}(z_i - \xi_i),\ i = \overline{1, n},$$

где z_i - новые переменные. В результате имеем

$$\varepsilon^{s-n/q_0} \left\{ \int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)} \left(\left| v^k(z) \right| g_1^{k_1}(\xi) g_2^{k_2}(\xi) \ldots g_n^{k_n}(\xi) \right)^{q_0} \cdot g_1^{-1}(\xi) g_2^{-1}(\xi) \ldots g_n^{-1}(\xi) dz \right\}^{1/q_0} \leq$$

$$\leq \varepsilon^{r-n/p} \tau \sum_{|l|=r} \left\{ \int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)} \left(\left| v^l(z) \right| g_1^{l_1}(\xi) g_2^{l_2}(\xi) \ldots g_n^{l_n}(\xi) \right)^{p} \cdot g_1^{-1}(\xi) g_2^{-1}(\xi) \ldots g_n^{-1}(\xi) dz \right\}^{1/p} +$$

$$+ \tau \varepsilon^{-n/p} \left\{ \int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)} |v(z)|^p \, g_1^{-1}(\xi) g_2^{-1}(\xi) \ldots g_n^{-1}(\xi) dz \right\}^{1/p} +$$

$$+ c_1 \tau^{-\mu} \varepsilon^{-n/q_1} \left\{ \int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)} |v(z)|^{q_1} \, g_1^{-1}(\xi) g_2^{-1}(\xi) \ldots g_n^{-1}(\xi) dz \right\}^{1/q_1}.$$

Обе части этого неравенства умножим на

$$\sigma(\xi) \cdot (g_1(\xi) g_2(\xi) \ldots g_n(\xi))^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}},$$

результат возведем в степень q_0 и проинтегрируем по $\xi \in \Omega$ (число const τ вновь обозначим через τ). В итоге получим неравенство

$$\varepsilon^{s-n} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)} \left(\sigma(\xi) (g_1(\xi) g_2(\xi) \ldots g_n(\xi))^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}} \cdot g_1^{k_1}(\xi) g_2^{k_2}(\xi) \ldots g_n^{k_n}(\xi) |v(z)| \right)^{q_0} \right.$$

$$\left. g_1^{k_{-1}}(\xi) g_2^{k_{-1}}(\xi) \ldots g_n^{k_{-1}}(\xi) dz \right) d\xi \leq$$

$$\leq \varepsilon^{r-nq_0/p_0}\tau^{q_0}\sum_{|l|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0+\frac{q_0}{p}-1}\times$$

$$\times(g_1^{-1}(\xi)g_2^{-1}(\xi)\dots g_n^{-1}(\xi))^{q_0/p}(g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\dots g_n^{l_n}(\xi))^{q_0}\left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)}|v^{(l)}(z)|^p dz\right)^{q_0/p}d\xi+$$

$$+\tau^{q_0}\varepsilon^{-nq_0/p}\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0+\frac{q_0}{p}-1}\times$$

$$\times(g_1^{-1}(\xi)g_2^{-1}(\xi)\dots g_n^{-1}(\xi))^{q_0/p}\left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)}|v^{(l)}(z)|^p dz\right)^{q_0/p}d\xi+$$

$$+c_1\tau^{-\mu q_0}\varepsilon^{-nq_0/q1}\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0+\frac{q_0}{p}-1}(g_1^{-1}(\xi)g_2^{-1}(\xi)\dots g_n^{-1}(\xi))^{q_0/q_1}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)}|v(z)|^{q_0}dz\right)^{q_0/q_1}d\xi.$$

После некоторых элементарных преобразований отсюда следует, что

$$\varepsilon^{s-n}\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-2+\frac{q_0}{p}}\cdot(g_1^{k_1}(\xi)g_2^{k_2}(\xi)\dots g_n^{k_n}(\xi))^{q_0}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v^{(k)}(z)|^{q_0}dz\right)d\xi\leq$$

$$\leq\tau^{q_0}\varepsilon^{r-nq_0/p}\sum_{|l|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1}(g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\dots g_n^{l_n}(\xi))^{q_0}\times$$

$$\times\left(\int\limits_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec g}(z,\xi)|v^{(l)}(z)|^p dz\right)^{q_0/p} d\xi + \tau^{q_0}\varepsilon^{-nq_0/p}\int\limits_\Omega \sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1}\times$$
$$\times\left(\int\limits_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec g}(z,\xi)|v(z)|^p dz\right)^{q_0/p} d\xi + c_1\tau^{-\mu q_0}\varepsilon^{-nq_0/q1}$$
$$\int\limits_\Omega \sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1+\frac{q_0}{p}-\frac{q_0}{q_1}}\left(\int\limits_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec g}(z,\xi)|v(z)|^{q_1} dz\right)^{q_0/q_1} d\xi \tag{1.1.10}$$

Для оценки интегралов этого неравенства нам понадобится следующая лемма из статьи С.А.Исхокова [24], которая является обобщением известной леммы Труази [64] на рассматриваемый случай.

Лемма 1.1.3. *В сделанных выше предположениях относительно области Ω и положительных функций $\sigma(x)$, $g_i(x)$, $x\in\Omega$, $i=\overline{1,n}$, справедливо соотношение эквивалентности*

$$\int\limits_\Omega \left(\sigma(\xi)\|u; L_p(\Pi_{\varepsilon,\vec g}(\xi))\|\right)^p d\xi \asymp \int\limits_\Omega \Big(\sigma(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{1/p}|u(x)|\Big)^p dx$$

где символ $\asymp$ означает наличие двусторонней оценки с некоторыми положительными константами.

Применяя лемму 1.1.3 снизу оценим интеграл, стоящий в левой части неравенства (1.1.10).

$$\int\limits_\Omega \sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0+\frac{q_0}{p}-2}(g_1^{k_1}(\xi)g_2^{k_2}(\xi)\dots g_n^{k_n}(\xi))^{q_0}\times$$
$$\times\left(\int\limits_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec g}(z,\xi)|v^{(k)}(z)|^{q_0} dz\right) d\xi \gg \int\limits_\Omega \sigma^{q_0}(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-rq_0+\frac{q_0}{p}-1}\times$$
$$\times (g_1^{k_1}(x)g_2^{k_2}(x)\dots g_n^{k_n}(x))^{q_0}|v^{(k)}(z)|^{q_0}dx =$$
$$= \int\limits_\Omega (\sigma(x)g_1^{k_1-r}(x)g_2^{k_2-r}(x)\dots g_n^{k_n-r}(x)(g_1g_2(x)\dots g_n(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}|v^{(k)}(x)|)^{q_0}dx. \tag{1.1.11}$$

Теперь используя следующее обобщенное неравенство Минковского

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y |F(x,y)|^p dy \right)^{q_0/p} dx \le \left\{ \int\limits_Y \left(\int\limits_X |F(x,y)|^{q_0} dx \right)^{p/q_0} dy \right\}^{q_0/p}, \tag{1.1.12}$$

оценим сверху интегралы правой части неравенства (1.1.10)

$$\int\limits_\Omega \sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1} \left(\int\limits_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v(z)|^p dz \right)^{q_0/p} d\xi =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \left(\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-1/q_0}|v(z)| \right)^p dz \right)^{q_0/p} d\xi \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \left(\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-1/q_0}|v(z)| \right)^{q_0} d\xi \right)^{p/q_0} dz \right\}^{q_0/p}.$$

Если z - фиксированная точка из Ω и $\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi) = 0$, то $\xi \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(z)$ и в силу условия (1.1.1) выполняются неравенства

$$\frac{1}{\nu}\sigma(z) \le \sigma(\xi) \le \nu\sigma(z), \ \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} g_i(z) \le g_i(\xi) \le \lambda(\varepsilon) g_i(z), \ i = \overline{1,n}. \tag{1.1.13}$$

Поэтому заменяя в последнем интеграле $\sigma(\xi)$, $g_i(\xi)$ $(i = \overline{1,n})$ соответственно через $\sigma(z)$, $g_i(z)$ $(i = \overline{1,n})$, получим

$$\int\limits_\Omega \sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1} \left(\int\limits_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v(z)|^p dz \right)^{q_0/p} d\xi \ll$$

$$\ll \left\{ \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \left(\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-r-1/q_0}|v(z)| \right)^{q_0} d\xi \right)^{p/q_0} dz \right\}^{q_0/p} =$$

$$= \left\{ \int\limits_\Omega |v(z)|^p \sigma^p(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-rp-p/q_0} \left(\int\limits_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi) d\xi \right)^{p/q_0} dz \right\}^{q_0/p}.$$

Далее применяя неравенство (1.1.2) леммы 1.1.1 получаем следующую окончательную оценку

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v(z)|^p dz\right)^{q_0/p} d\xi \ll$$

$$\ll \varepsilon^n\left\{\int\limits_{\Omega}\sigma^p(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-rp}dz\right\}^{q_0/p}. \quad (1.1.14)$$

теперь переходим к оценке другого интеграла в правой части неравенства (1.1.10). В начале применяя обобщенное неравенство Миньковского (1.1.12) имеем

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1}(g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\dots g_n^{l_n}(\xi))^{q_0}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v^{(l)}(z)|^p dz\right)^{q_0/p} d\xi = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\sigma^p(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rp-\frac{p}{q_0}}\right.$$

$$\left.(g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\dots g_n^{l_n}(\xi))^p\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v^{(l)}(z)|^p dz\right)^{q_0/p} d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-\frac{1}{q_0}}\right.\right.$$

$$\left.\left.g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\dots g_n^{l_n}(\xi)|v(l)(z)|\right)^p dz\right)^{q_0/p} d\xi \le$$

$$\le\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-\frac{1}{q_0}}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\dots g_n^{l_n}(\xi)|v(l)(z)|\right)^{q_0} d\xi\right)^{p/q_0} dz\right\}^{q_0/p} =$$

$$= \left\{\int\limits_{\Omega}|v^{(l)}(z)|^p\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-\frac{1}{q_0}}\right.\right.$$

$$\left.\left.(g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\dots g_n^{l_n}(\xi))^{q_0}d\xi\right)^{p/q_0} dz\right\}^{q_0/p}.$$

Согласно неравенствам (1.1.13) при $\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z;\xi)\neq 0$ функции $\sigma(\xi)$, $g_i(\xi)$ $(i=\overline{1,n})$ соответственно эквивалентны функциям $\sigma(z)$, $g_i(z)$ $(i=\overline{1,n})$. Поэтому заменяя $\sigma(\xi)$, $g_i(\xi)$ $(i=\overline{1,n})$ на $\sigma(z)$, $g_i(z)$ $(i=\overline{1,n})$ в последнем интеграле, выносим их из под знака внутреннего интеграла. В результате приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\ldots g_n(\xi))^{-rq_0-1}(g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\ldots g_n^{l_n}(\xi))^{q_0}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v^{(l)}(z)|^p dz\right)^{q_0/p}d\xi\ll\left\{\int\limits_{\Omega}|v^{(l)}(z)|^p\sigma^p(z)(g_1(z)g_2(z)\ldots g_n(z))^{-rp-\frac{p}{q_0}}\right.$$
$$\left.(g_1^{l_1}(z)g_2^{l_2}(z)\ldots g_n^{l_n}(z))^p\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)d\xi\right)^{p/q_0}dz\right\}^{q_0/p}.$$

теперь применяя неравенство (1.1.2) из леммы 1.1.1 получаем следующую окончательную оценку

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\ldots g_n(\xi))^{-rq_0}(g_1^{l_1}(\xi)g_2^{l_2}(\xi)\ldots g_n^{l_n}(\xi))^{q_0}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v^{(l)}(z)|^p dz\right)^{q_0/p}d\xi\ll$$
$$\ll\varepsilon^n\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\sigma(z)g_1^{l_1-r}(z)g_2^{l_2-r}(z)\ldots g_n^{l_n-r}(z)|v^{(l)}(z)|\right)^p dz\right\}^{q_0/p}. \quad (1.1.15)$$

Далее действуя аналогично, сверху оценим последний интеграл в правой части неравенства (1.1.10). Обобщенное неравенство Минковского (1.1.12) запишем в виде

$$\int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y}|F(x,y)|^{q_1}dy\right)^{q_0/q_1}dx\leq\left\{\int\limits_{Y}\left(\int\limits_{X}|F(x,y)|^{q_0}dx\right)^{q_1/q_0}dy\right\}^{q_0/q_1},$$
$$(1\leq q_1\leq q_0). \quad (1.1.16)$$

Применяя это неравенство, для последнего интеграла правой части неравенства (1.1.10) имеем

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1+\frac{q_0}{p}-\frac{q_0}{q_1}}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v(z)|^{q_1}dz\right)^{q_0/q_1}d\xi=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\left[\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}|v(z)|\right]^{q_1}dz\right)^{q_0/q_1}d\xi\leq$$

$$\leq\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\left[\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}|v(z)|\right]^{q_0}d\xi\right)^{q_1/q_0}dz\right\}^{q_0/q_1}=$$

$$=\left\{\int\limits_{\Omega}|v(z)|^{q_1}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)\sigma(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-r-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}d\xi\right)^{q_1/q_0}dz\right\}^{q_0/q_1}.$$

После применения неравенств (1.1.13) отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1+\frac{q_0}{p}-\frac{q_0}{q_1}}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v(z)|^{q_1}dz\right)^{q_0/q_1}d\xi\ll$$

$$\ll\left\{\int\limits_{\Omega}|v(z)|^{q_1}(\sigma(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-r-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}})^{q_1}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)d\xi\right)^{q_1/q_0}dz\right\}^{q_0/q_1}.$$

Далее применяя неравенство (1.1.2) из леммы 1.1.1, получим

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{q_0}(\xi)(g_1(\xi)g_2(\xi)\dots g_n(\xi))^{-rq_0-1+\frac{q_0}{p}-\frac{q_0}{q_1}}\left(\int\limits_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z,\xi)|v(z)|^{q_1}dz\right)^{q_0/q_1}d\xi\ll$$

$$\ll\varepsilon^n\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\sigma(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-r-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p}}|v(z)|\right)^{q_1}dz\right\}^{q_0/q_1}.\quad(1.1.17)$$

В силу полученных неравенств (1.1.11), (1.1.14), (1.1.15) и (1.1.17) из

(1.1.10) следует, что

$$\varepsilon^{s-n}\int\limits_{\Omega}\left(\sigma(x)g_1^{k_1-r}(x)g_2^{k_2-r}(x)\dots g_n^{k_n-r}(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}|v^{(k)}(x)|\right)^{q_0}dx\le$$

$$\le\tau^{q_0}\varepsilon^{r-n\frac{q_0}{p}}\varepsilon^n\sum_{|l|=r}\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\sigma(x)g_1^{l_1-r}(x)g_2^{l_2-r}(x)\dots g_n^{l_n-r}(x)|v^{(l)}(x)|\right)^p dx\right\}^{q_0/p}+$$

$$+\tau^{q_0}\varepsilon^{-n\frac{q_0}{p}}\varepsilon^n\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\sigma(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-r}|v(x)|\right)^p dx\right\}^{q_0/p}+$$

$$+c_1\tau^{-\mu q_0}\varepsilon^{-n\frac{q_0}{q_1}}\varepsilon^n\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\sigma(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-r-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p}}|v(x)|\right)^{q_1}dx\right\}^{q_0/q_1}. \qquad (1.1.18)$$

Заметим, что в этом неравенстве k - произвольный мультииндекс, длина которого равна s. Поэтому произведя суммирование по мультииндексам $k:\ |k|=s$ из неравенства (1.1.18) получим

$$\left\|v;L^s_{q_0,r}\left(\Omega;\sigma(g_1g_2\dots g_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}},\vec{g}\right)\right\|\le$$
$$\le\tau\|v;W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g}\|+c_1\tau^{-mu}\left\|v;L_{q_1,r}\left(\Omega;\sigma(g_1g_2\dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}},\vec{g}\right)\right\|.$$

Это и есть требуемое неравенство.

Лемма 1.1.2 доказана.

Аналогично лемме 1.1.2 доказывается, что если число s такое, что $0\le s\le r$, и выполняются условия

$$1\le p\le q_0<+\infty,\ r-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q_0}>0,$$

то для всех $v\in W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})$ имеет место неравенство

$$\left\|v;L^s_{q_0,r}\left(\Omega;\sigma(g_1g_2\dots g_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}},\vec{g}\right)\right\|\le M\left\|v;W^r_p(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|, \qquad (1.1.19)$$

где число $M>0$ не зависит от функции $v(x)$.

Лемма 1.1.4. *Пусть* $p_0,q_0\ge 1$ *и* $\dfrac{1}{p_0}+\dfrac{1}{q_0}\le 1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_{\Omega}|u(x)v(x)|^{\lambda_0}dx\right)^{1/\lambda_0}\le\left(\int\limits_{\Omega}|u(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0}\left(\int\limits_{\Omega}|v(x)|^{q_0}dx\right)^{1/q_0}$$

где число λ_0 *определяется из следующего равенства*

$$\frac{1}{\lambda_0}=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа $P=\dfrac{p_0}{\lambda_0}$, $Q=\dfrac{q_0}{\lambda_0}$. Из условия леммы следует, что

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=1.$$

Поэтому, согласно неравенства Гельдера

$$\int\limits_{\Omega}|U(x)V(x)|dx\leq\left(\int\limits_{\Omega}|U(x)|^{P}dx\right)^{1/P}\left(\int\limits_{\Omega}|V(x)|^{Q}dx\right)^{1/Q}=$$

$$=\left(\int\limits_{\Omega}|U(x)|^{p_0/\lambda_0}dx\right)^{\lambda)_0/p_0}\left(\int\limits_{\Omega}|V(x)|^{q_0/\lambda(\varepsilon)_0}dx\right)^{\lambda_0/q_0}.$$

Обе стороны полученного неравенства возведем в степень $1/\lambda_0$.

$$\left(\int\limits_{\Omega}|U(x)V(x)|dx\right)^{1/\lambda_0}\leq\left(\int\limits_{\Omega}|U(x)|^{p_0/\lambda_0}dx\right)^{1/p_0}\left(\int\limits_{\Omega}|V(x)|^{q_0/\lambda_0}dx\right)^{1/q_0}.$$

Отсюда с помощью подстановок

$$U(x)=|u(x)|^{\lambda_0},\ V(x)=|v(x)|^{\lambda_0}$$

получаем требуемое неравенство. Лемма 1.1.4 доказана.

Лемма 1.1.5. *Пусть положительные функции* $\alpha(x)$, $\beta(x)$ *принадлежат классу* $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$, $p\geq 1$, $q\geq 1$ *и* r, t *- натуральные числа. Для мультииндексов* k, l *таких, что* $|k|<r$, $|l|\leq t$, *определим числа* q_l, λ_{kl}, s_k *посредством следующих соотношений*

$$\frac{1}{q_l}=\begin{cases}\dfrac{1}{q}-\frac{t-|l|}{n}, & n>q(t-|l|)\\ \varepsilon_0,\ 0<\varepsilon_0\leq 1/q, & n\leq q(t-|l|),\end{cases}\tag{1.1.20}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}}>\frac{1}{q_l}+\frac{1}{p}-\frac{r-|k|}{n},\ \textit{при}\ n-p(r-|k|)>0,\tag{1.1.21}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}}=\frac{1}{q_l}+\varepsilon_1,\ \textit{где}\ 0<\varepsilon_1<1/p,\ \textit{при}\ n-p(r-|k|)\leq 0,\tag{1.1.22}$$

$$\frac{1}{s_k} \geq \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}. \tag{1.1.23}$$

Пусть положительная функция $\sigma_{kl}(x)$ принадлежит классу $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} &\sigma_{kl}(x)\alpha^{-1}(x)\beta^{-1}(x) \leq \\ &\leq c g_1^{k_1+l_1}(x) g_2^{k_2+l_2}(x) \dots g_n^{k_n+l_n}(x) (g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-t+\frac{1}{q}-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda_{kl}}} \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

для всех $x \in \Omega$; положительное число c не зависит от x

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| &\leq \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g}) \right\| \cdot \left\| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g}) \right\| + \\ &+ c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha, (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s_k}}) \right\|, \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k| n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r - |k|) n^{-1}} \tag{1.1.26}$$

и положительная постоянная c_0 зависит только от $n, p, r, |k|$.

Доказательство. Пусть $|k| < r$, $|l| \leq t$. Так как число q_l, определенное равенством (1.1.20), удовлетворяет условиям

$$1 \leq q \leq q_l < \infty, \ t - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} > 0,$$

то применяя неравенство (1.1.19) имеем

$$\begin{aligned} \left\| v^{(l)}; L_{q_l}\left(\Omega; \beta(x) g_1^{l_1}(x) g_2^{l_2}(x) \dots g_n^{l_n}(x) (g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-t+\frac{1}{q}-\frac{1}{q_l}}\right) \right\| \ll \\ \ll \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g}) \right\|. \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

Далее заметим, что при $q_0 = p_k$, $s = |k|$, $q_1 = s_k$, где $p_k = \left(\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1}\right)^{-1}$ и числа q_l, λ_{kl}, s_k определены соотношениями (1.1.20)-(1.1.23), выполняются условия леммы 1.1.2. Поэтому применяя лемму 1.1.2 в этом случае получим

$$\begin{aligned} \left\| u^{(k)}; L_{p_k}\left(\Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_k}}\right) \right\| &\leq \tau \| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g}) \| + \\ &+ c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s_k}}) \right\|, \end{aligned} \tag{1.1.28}$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k - p_k^{-1} + |k| n^{-1}}{p_k^{-1} - p^{-1} + (r - |k|) n^{-1}}. \tag{1.1.29}$$

В силу равенства
$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l} \tag{1.1.30}$$
и условия (1.24) с помощью неравенства Гельдера доказывается, что
$$\left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| \leq \left\| v^{(l)}; L_{q_l}\left(\Omega; \beta g_1^{l_1} g_2^{l_2} \dots g_n^{l_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-t+\frac{1}{q}-\frac{1}{q_l}}\right) \right\| \times$$
$$\times \left\| u^{(k)}; L_{q_k}\left(\Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_k}}\right) \right\|. \tag{1.1.31}$$
Теперь легко можно заметить, что из (1.1.27), (1.1.28), (1.1.31) следует неравенство (1.1.25). Равенство (1.1.26) следует из (1.1.29) в силу равенства (1.1.30).

Лемма 1.1.5 доказана.

1.2 Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением

Как известно из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных (см.,например,[15],[16]), неравенство Гординга [62] играет важную роль в исследовании разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических уравнений методами функционального анализа. В случае эллиптических уравнений с вырождением существуют лишь работы И.А.Киприянова [32], С.А.Исхокова [23], в которых доказаны неравенства Гординга и с их помощью изучена разрешимость задачи Дирихле. Эллиптические операторы, рассмотренные в работе [32], имеют специальный вид, а операторы, рассмотренные в работе [23], имеют одинаковое вырождение по всем независимым переменным. В отличии от них, в этом параграфе мы изучаем общие эллиптические операторы с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

Рассмотрим дифференциальный оператор
$$(Au)(x) = \sum_{|k|,|l| \leq r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \ x \in \Omega, \tag{1.2.1}$$
где
$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \dots g_n^{-r+k_n}(x) \tag{1.2.2}$$
и $a_{kl}(x)$ - комплексозначные функции. Область Ω и весовые функции $\sigma(x), \ g_i(x), \ i = \overline{1,n}$ такие же как в §1.1.

Изучение краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором (1.2.1) методами функционального анализа связано со следующей полуторалинейной формой, порожденной этим оператором,

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx. \tag{1.2.3}$$

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (1.2.3), ранее изучалась в работах С.А.Исхокова [24, 25] в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$Re \sum_{|k|,|l|\le r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l} \ge c\sum_{|k|=r}|\zeta_k|^2 \tag{1.2.4}$$

для всех $x\in\Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r}\subset\mathbb{C}$. Число $c>0$ не зависит от $x,\ \xi$.В этом параграфе, вместо условия (1.2.4), мы предполагаем выполнение более слабого условия

$$Re \sum_{|k|,|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \ge c|\xi|^{2r} \tag{1.2.5}$$

для всех $x\in\Omega,\ \xi\in R_n$; c - положительное число, не зависящее от $x,\ \xi$.

Теорема 1.2.1. *Пусть коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|=|l|=r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (1.2.5) и для любого достаточно малого числа $\nu>0$ существует число $\varepsilon>0$ такое, что*

$$|a_{kl}(y)-a_{kl}(z)|<\nu \tag{1.2.6}$$

для любого $y\in\Omega$ и любого

$$z\in\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y) = \{z\in R_n : |z_i-y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon g_i(y),\ i=\overline{1,n}\}.$$

Пусть также коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,|l|\le r$ и $|k|+|l|\le 2r-1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(\Omega;(g_1\cdot g_2\dots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k|\le r-1,\ |l|\le r\\ q_{lk} & \text{при } |k|=r,\ |l|\le r-1\end{cases}, \tag{1.2.7}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r-|k|-|l|} < q_{kl} \le \frac{n}{r-|l|}, \text{если } n>2(r-|k|),\ n>2(r-|l|);$$
$$\frac{n}{r-|k|-\varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0<\varepsilon_1<\frac{1}{2}\ \text{ если } n>2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|); \tag{1.2.8}$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0<\varepsilon_2<\dfrac{1}{2}\ \textit{если}\ n\le 2(r-|k|),\ n>2(r-|l|), \\ \\ \textit{любое конечное число} >1,\ \textit{если}\ \ n\le 2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|). \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Тогда существуют такие постоянные $c_1>0$ *и* $c_2\ge 0$, *что*

$$ReB[u,u]\ge c_1\|u;W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 - c_2\|u;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 \tag{1.2.10}$$

для всех $u\in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Доказательство. В начале рассмотрим случай, когда полуторалинейная форма (1.2.3) не содержит младшие коэффициенты, то есть когда $a_{kl}(x)\equiv 0$ $(x\in\Omega)$ для всех мультииндексов r, l таких, что $|k|,|l|\le 2r$ и $|k|+|l|\le 2r-1$.

Фиксируя произвольную точку $y\in\Omega$, рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_y[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{R_n} a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,\ u,v\in C_0^\infty(R_n).$$

Применяя неравенство Гординга для сильно эллиптических операторов с постоянными коэффициентами, имеем

$$\sum_{|k|=r}\int\limits_{R_n}|u^{(k)}(x)|^2dx\le$$

$$\le M\left\{\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{R_n} a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\int\limits_{R_n}|u(x)|^2dx\right\} \tag{1.2.11}$$

для всех $u\in C_0^\infty(R_n)$.

Вводим обозначение

$$\Pi_m(0)=\left\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R_n : |x_i|<\frac{m}{2(m+1)},\ i=\overline{1,n}\right\},$$

где m - натуральное число.

Берем функцию $\varphi_m(x)$ со следующими свойствами:

1) $0\le\varphi_m(x)\le 1$ для всех $x\in\Pi(0)$;

2) $\varphi_m(x)=1$ для всех $x\in\Pi_m(0)$;

3) существует число $c>0$ такое, что $|\varphi_m^{(k)}(x)|\le c$ для всех $x\in\Pi(0)$ и всех мультииндексов k.

Пусть $u(x)$ - произвольная функция класса $C^\infty(\Pi(0))$. Продолжая функцию $v_m(x)=u(x)\varphi_m(x)$ вне множества $\Pi(0)$ нулем, получаем функцию $v_m\in C_0^\infty(R_n)$. Так как $v_m(x)=u(x)$ для всех $x\in\Pi_m(0)$, то из неравенства (1.2.11) для функции $v_m(x)$ следует, что

$$\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Pi_m(0)}|u^{(k)}(x)|^2dx\le M_0\left\{\operatorname{Re}B_y[v_m,v_m]+\int\limits_{\Pi(0)}|u(x)|^2dx\right\}. \tag{1.2.12}$$

Форму $B_y[v_m,v_m]$ представим в виде

$$B_y[v_m,v_m]=B_y^{(1)}[v_m,v_m]+B_y^{(2)}[v_m,v_m], \tag{1.2.13}$$

где

$$B_y^{(1)}[v_m,v_m]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Pi(0)}a_{kl}(y)\varphi_m^2(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_y^{(2)}[v_m,v_m]=B_y[v_m,v_m]-B_y^{(1)}[v_m,v_m].$$

Так как во всех интегралах, составляющих полуторалинейную форму $B_y^{(2)}[v_m,v_m]$, порядок хотя бы одной из производных $u^{(k)}(x)$, $u^{(l)}(x)$ не превосходит $r-1$, то применяя соответствующие теоремы вложения для пространств Соболева без веса, а также неравенство Юнга с малым параметром, получаем: для любого достаточно малого числа $\tau>0$ существует конечное число $M(\tau)>0$ такое, что

$$|B_y^{(2)}[v_m,v_m]|\le\tau\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Pi(0)}|u^{(k)}(x)|^2dx+M(\tau)\int\limits_{\Pi(0)}|u(x)|^2dx. \tag{1.2.14}$$

Учитывая свойство 2) функций $\varphi_m(x)$, представим форму $B_y^{(1)}[v_m,v_m]$ в виде

$$B_y^{(1)}[v_m,v_m]=B_{y,m}^{(11)}[u,u]+B_{y,m}^{(12)}[u,u], \tag{1.2.15}$$

где

$$B_{y,m}^{(11)}[u,u]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Pi_m(0)}a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_{y,m}^{(12)}[u,u]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Pi^m(0)}a_{kl}(y)\varphi_m^2(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$\Pi^{(m)}(0)=\Pi(0)\setminus\Pi_m(0)=\left\{x\in R_n:\frac{m}{2(m+1)}<|x_i|<\frac{1}{2},\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Согласно условию теоремы 1.2.1, коэффициенты a_{kl} ограничены при $|k| = |l| = r$. Поэтому, применяя неравенство Коши-Буняковского и принимая во внимание то, что $|\Pi^{(m)}(0)| \to 0$ при $m \to \infty$, получаем

$$|B^{(12)}_{y,m}[u,u]| \leq \mu_m \|u; L^r_2(\Pi(0))\|^2, \tag{1.2.16}$$

где

$$\|u; L^r_2(\Pi(0))\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Pi(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и положительные числа μ_m стремятся к нулю при $m \to \infty$.

Из представлений (1.2.13), (1.2.15), в силу неравенства (1.2.12), имеем

$$\|u; L^r_2\left(\Pi_m(0)\right)\|^2 - M_0 |B^{(2)}_y[v_m, v_m]| - M_0 |B^{(12)}_{y,m}[u,u]| \leq M_0 Re B^{(11)}_{y,m}[u,u].$$

Далее, подбирая натуральное число m достаточно большим и применяя неравенство (1.2.14) при $\tau = \dfrac{1}{m}$, а также неравенство (1.2.16), приходим к неравенству

$$\|u; L^r_2\left(\Pi_m(0)\right)\|^2 - \\ - c_m \left\|u; L^r_2\left(\Pi(0)\right)\right\|^2 - \mathbb{C}_m \left\|u; L_2\left(\Pi(0)\right)\right\|^2 \leq M_0 Re B^{(11)}_{y,m}[u,u] \tag{1.2.17}$$

для всех $u \in C^\infty(\Pi(0))$, где $c_m, \mathbb{C}_m$ - положительные числа, не зависящие от $u(x)$ и $c_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Пусть v - произвольная функция из класса $C^\infty_0(\Omega)$ и y - произвольная фиксированная точка области Ω. Отображение $z \to x$, определенное равенствами

$$x_i = (z_i - y_i)/\varepsilon g_i(y), \; i = \overline{1,n},$$

отображает параллелепипед

$$\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y) = \left\{ z \in R_n : |z_i - y_i| < \frac{1}{2} \varepsilon g_i(y) \right\}$$

в еденичный куб $\Pi(0)$, а параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)$ - в $\Pi_m(0)$. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)$ содержится в области Ω и поэтому функция $\hat{v}_y(x) = v(x_i \varepsilon g_i(y) + y_i)$ определена для всех $x \in \Pi(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(\Pi(0))$.

Неравенство (1.2.17) для функции $u(x) = \hat{v}_y(x)$ с учетом равенства

$$D^k_x v_y(x) = v^{(k)}(x_i \varepsilon g_i(y) + y_i) \varepsilon^{|k|} g_1^{k_1}(y) g_2^{k_2}(y) \ldots g_n^{k_n}(y) = \\ = \hat{v}^{(k)}_y(x) \varepsilon^{|k|} g_1^{k_1}(y) g_2^{k_2}(y) \ldots g_n^{k_n}(y)$$

примет вид

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{\Pi_m(0)}|\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2dx-c_m\int\limits_{\Pi(0)}|\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2dx\right\}\varepsilon^{2r}g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)-$$

$$-\mathbb{C}_m\int\limits_{\Pi(0)}|\hat{v}_y(x)|^2dx\le M_0Re\sum_{|k|=|l|=r}\varepsilon^{2r}g_1^{k_1+l_1}(y)g_2^{k_2+l_2}(y)\dots g_n^{k_n+l_n}(y)\times$$

$$\times\int\limits_{\Pi_m(0)}a_{kl}(y)\hat{v}_y^{(k)}(x)\overline{v_y^{(l)}(x)}dx.$$

В интегралах этого неравенства переходим к новым переменным интегрирования

$$z_i=x_i\varepsilon g_i(y)+y_i.$$

Тогда

$$dz=\varepsilon^n g_1(y)g_2(y)\cdots g_n(y)dx,$$

$$v_y^{(k)}(x)=v^{(k)}(x_i\varepsilon g_i(y)+y_i)=v^{(k)}(z),$$

и интеграл по кубу $\Pi(0)$ переходит к интегралу по параллелепипеду $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)$, а интеграл по $\Pi_m(0)$ - к интегралу по $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)$.

В итоге мы переходим к неравенству

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz-c_m\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right\}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)\times$$

$$\times g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)-\mathbb{C}_m\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v(z)|^2dz\varepsilon^{-n}g_1^{-1}(y)g_2^{-1}(y)\dots g_n^{-1}(y)\le$$

$$\le M_0\,\mathrm{Re}\left\{\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=|l|=r}g_1^{k_1+l_1-1}(y)g_2^{k_2+l_2-1}(y)\dots g_2^{k_2+l_2-1}(y)\right.$$

$$\left.\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}a_{kl}(y)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}\right\}.$$

Обе части этого неравенства умножим на

$$\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}$$

и результат проинтегрируем по $y \in \Omega$. В итоге имеем

$$\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\left(\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy-$$

$$-\,c_m\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy-$$

$$-\,\mathbb{C}_m\int\limits_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\varepsilon^{-n}\left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\le$$

$$\le M_0\varepsilon^{2r-n}\operatorname{Re}B_{\varepsilon,m}[v,v],\quad(1.2.18)$$

где

$$B_{\varepsilon,m}[v,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{k_1+l_1}(y)g_2^{k_2+l_2}(y)\dots g_n^{k_n+l_n}(y)\left(\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}a_{kl}(y)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz\right)dy\quad(1.2.19)$$

Далее, применяя лемму 1.1.1 и неравенства (1.1.13), оценим интегралы в левой части неравенства (1.2.18). Для первого интеграла с помощью неравенств (1.1.13) имеем

$$\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)\left(\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy=$$

$$=\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)\left(\int\limits_{\omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\geq$$

$$\geq\varepsilon^{2r-n}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^2(z)(g_1(y)g_2(z)\dots g_n(z))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(z)g_2^{2k_2}(z)\dots g_n^{2k_n}(z)\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)|v^{(k)}(z)|^2dz,$$

где

$$\varepsilon_m=\frac{m}{m+1}\cdot\varepsilon.$$

Далее, применяя лемму 1.1.1, получим

$$\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)\left(\int\limits_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\geq$$

$$\geq \varepsilon^{2r-n}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon_m)}\right)^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\times$$

$$\times\sum_{|k|=r}\int_\Omega \sigma^2(z)(g_1(y)g_2(z)\dots g_n(z))^{-2r}\times$$

$$\times g_1^{2k_1}(z)g_2^{2k_2}(z)\dots g_n^{2k_n}(z)|v^{(k)}(z)|^2dz=$$

$$=\varepsilon^{2r}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-2n}(\varepsilon_m)2^{-n}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\left\|v;L_{2,r}^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2. \quad (1.2.20)$$

Теперь оценим второй интеграл в левой части неравенства (1.2.18). Применяя неравенства (1.1.13), имеем

$$\sum_{|k|=r}\int_\Omega \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\times$$

$$\times\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy=$$

$$=\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int_\Omega \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\times$$

$$\times\left(\int_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\leq$$

$$\leq \varepsilon^{2r-n}\nu^2(\varepsilon)\lambda^{-n}(\varepsilon)\sum_{|k|=r}\int_\Omega \sigma^2(z)g_1^{2k_1-2r-1}(z)g_2^{2k_2-2r-1}(z)\dots g_n^{2k_n-2r-1}(z)|v^{(k)}(z)|^2\times$$

$$\times\left(\int_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)dz.$$

Далее, применяя лемму 1.1.1, получаем следующую окончательную оценку

$$\sum_{|k|=r}\int_\Omega \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \le \varepsilon^{2r-n} \nu^2(\varepsilon) \lambda^{-n}(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{2} \lambda(\varepsilon) \right)^n \times$$

$$\times \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \sigma^2(z) g_1^{2k_1-2r}(z) g_2^{2k_2-2r}(z) \dots g_n^{2k_n-2r}(z) |v^{(k)}(z)|^2 dz =$$

$$= \varepsilon^{2r} \nu^2(\varepsilon) 2^{-n} \left\| v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2. \quad (1.2.21)$$

Переходим к оценке третьего интеграла в левой части неравенства (1.2.18). Применяя неравенства (1.1.13), имеем

$$\int\limits_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y) g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \varepsilon^{-n} \left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy =$$

$$= \varepsilon^{-n} \int\limits_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y) g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z; y) |v(z)|^2 dz \right) dy \le$$

$$\le \varepsilon^{-n} \nu^2(\varepsilon) \lambda^{-2rn-n}(\varepsilon) \times$$

$$\times \quad \int\limits_{\Omega} \sigma^2(z) (g_1(z) g_2(z) \dots g_n(z))^{-2r-1} |v(z)|^2 \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z; y) dy \right) dz.$$

Теперь, для оценки внутреннего интеграла применяем лемму 1.1.1 и приходим к следующему неравенству

$$\int\limits_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y) g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \varepsilon^{-n} \left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy \le$$

$$\le \varepsilon^{-n} \nu^2(\varepsilon) \lambda^{-2rn-n}(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{2} \lambda(\varepsilon) \right)^n \int\limits_{\Omega} \sigma^2(z) (g_1(z) g_2(z) \dots g_n(z))^{-2r} |v(z)|^2 dz =$$

$$= \nu^2(\varepsilon) \lambda^{-2rn}(\varepsilon) 2^{-n} \left\| v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2. \quad (1.2.22)$$

Применяя полученные оценки (1.2.20) - (1.2.22) интегралов левой части неравенства (1.2.18), из этого неравенства получаем

$$\varepsilon^{2r}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-2n}(\varepsilon_m)2^{-n}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-r}\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2-$$
$$-c_m\varepsilon^{2r}\nu^2(\varepsilon_m)2^{-n}\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2-\mathbb{C}_m\nu^2(\varepsilon)\lambda^{-2rn}(\varepsilon)2^{-n}\left\|v;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2\leq$$
$$\leq M_0\varepsilon^{2r-n}ReB_{\varepsilon,m}[v,v].$$

Это неравенство можно записать в виде

$$(1-\tilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2-\tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v;L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2\leq$$
$$\leq\varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)ReB_{\varepsilon,m}[v,v],\quad(1.2.23)$$

где полуторалинейная форма $B_{\varepsilon,m}[v,v]$ определена равенством (1.2.19) и

$$\begin{aligned}&\tilde{c}_m=c_m\nu^4(\varepsilon_m)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,\ \varepsilon_m=\frac{m}{m+1}\varepsilon,\\&\tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)=\mathbb{C}_m\nu^4(\varepsilon)\lambda^{-2rn}(\varepsilon)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,\\&M_m(\varepsilon)=M_0\nu^2(\varepsilon_m)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)2^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.\end{aligned}\quad(1.2.24)$$

Заметим, что числа $c_m,\lambda(\varepsilon),\nu(\varepsilon)$ имеют следующие свойства

$$\lim_{m\to\infty}c_m=0,\ \lim_{\varepsilon\to0+}\lambda(\varepsilon)=1,\ \lim_{\varepsilon\to0+}\nu(\varepsilon)=1\quad(1.2.25)$$

Вводим новую полуторалинейную форму

$$B^{(1)}_{\varepsilon,m}[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega\left(\int_\Omega\chi^{(m)}_\varepsilon(z;y)a_{kl}(y)dy\right)\times$$
$$\times(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}p_k(z)p_l(z)u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz,\quad(1.2.26)$$

где

$$p_k(z)=\sigma(z)g_1^{-r+k_1}(z)g_2^{-r+k_2}(z)\dots g_n^{-r+k_n}(z).$$

В силу ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ имеем

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B_{\varepsilon,m}[v,v]\right| \le$$
$$\le \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega \left(\int_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z;y)|a_{kl}(y)| \left(p_k(y)p_l(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -p_k(z)p_l(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}\right) |v^{(k)}(z)||v^l(z)|dz \right) dy \le$$
$$\le M \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega \left(\int_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z;y) \left|1 - \frac{p_k(y)p_l(y)}{p_k(z)p_l(z)} \cdot \frac{g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)}{g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y)}\right| \times \right.$$
$$\left. \times\, p_k(z)p_l(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}|v^{(k)}(z)||v^l(z)|dz \right) dy. \quad (1.2.27)$$

Согласно неравенствам (1.1.1), при достаточно малых $\varepsilon > 0$ для всех $z \in \Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(y)$ (т.е. когда $\chi^{(m)}_\varepsilon(z,y) \ne 0$), имеют место неравенства

$$\sigma(y)\nu^{-1}(\varepsilon_m) \le \sigma(z) \le \nu(\varepsilon_m)\sigma(y),$$
$$g_i(y)\lambda^{-1}(\varepsilon_m) \le g_i(z) \le \lambda(\varepsilon_m)g_i(y),\ i = \overline{1,n},$$

где $\varepsilon_m = m\varepsilon/(m+1)$ и положительные числа $\nu(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)$ такие, что $\nu(\varepsilon) \to 1,\ \lambda(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0+$. Поэтому для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\mu_1(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|1 - \frac{p_k(y)p_l(y)}{p_k(z)p_l(z)} \cdot \frac{g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)}{g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y)}\right| \le \mu_1(\varepsilon) \quad (1.2.28)$$

для всех $y, z \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\chi^{(m)}_\varepsilon(z,y) \ne 0$ и $\mu_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$

Учитывая это обстоятельство и применяя лемму 1.1.1, а также неравенство Коши-Буняковского из (1.2.27), получим

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B_{\varepsilon,m}[v,v]\right| \le \varepsilon^n \mu_1(\varepsilon) \left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \quad (1.2.29)$$

для всех $v \in C^\infty_0(\Omega)$.

Согласно нашим условиям, для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu \ (|k| = |l| = r) \quad (1.2.30)$$

для любого $y \in \Omega$ и любого $z \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)$.

Рассмотрим новую полуторалинейную форму

$$B^{(2)}_{\varepsilon,m}[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)a_{kl}(z)p_k(z)p_l(z)\times$$
$$\times\,(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz,\ (u,v\in C_0^\infty(\Omega)).$$

В силу условия (1.2.30), леммы 1.2.1, действуя стандартным образом, с помощью неравенства Коши-Буняковского, доказывается, что для любого достаточно малого положительного ν существует число $\varepsilon_\nu>0$ такое, что

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right|\le\varepsilon^n\nu\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \qquad (1.2.31)$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$ и любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\nu)$.

Лемма 1.2.1. *Для любой вещественнозначной функции $\Phi(z)\in L_1(\Omega)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливо неравенство*

$$c_{n,m}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}\Phi(z)dz\le$$
$$\le\lambda^n(\varepsilon_m)\varepsilon^n\int\limits_{\Omega}\Phi(z)dz+\varepsilon^n\left[\lambda^n(\varepsilon_m)-\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\right]\int\limits_{\Omega}\Phi^-(z)dz, \quad (1.2.32)$$

где

$$\Phi^-(z)=(|\Phi(z)|-\Phi(z))/2,\ c_{n,m}=2^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.$$

Доказательство. Определим также функцию

$$\Phi^+(z)=(|\Phi(z)|+\Phi(z))/2.$$

Заметим, что $\Phi(z)=\Phi^+(z)-\Phi^-(z)$ и функции $\Phi^+(z),\Phi^-(z)$ неотрицательны.

В силу леммы 1.1.1 имеем

$$\varepsilon^n2^{-n}\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\le$$
$$\le(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy, \quad (1.2.33)$$

$$(g_1(z)g_2(z)\ldots g_n(z))^{-1}\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy \le$$

$$\le \varepsilon^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}2^{-n}\lambda^n(\varepsilon_m). \quad (1.2.34)$$

Так как $\Phi^-(z)$ - неотрицательная функция, то умножая обе части неравенства (1.2.33) на $\Phi^-(z)$ и интегрируя полученное неравенство по $z\in\Omega$, получаем

$$\varepsilon^n 2^{-n}\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\int\limits_{\Omega}\Phi^-(z)dz \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)(g_1(z)g_2(z)\ldots g_n(z))^{-1}\Phi^-(z)dz. \quad (1.2.35)$$

Функция $\Phi^+(z)$ также неотрицательна. Обе части неравенства (1.2.34) умножим на $\Phi^+(z)$ и затем интегрируем полученный результат по $z\in\Omega$. В итоге, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)(g_1(z)g_2(z)\ldots g_n(z))^{-1}\Phi^+(z)dz \le$$

$$\le \varepsilon^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}2^{-n}\lambda^n(\varepsilon_m)\int\limits_{\Omega}\Phi^+(z)dz. \quad (1.2.36)$$

Неравенство (1.2.35) умножим на (-1) и результат складываем с (1.2.36). С учетом равенства $\Phi^+(z)-\Phi^-(z)=\Phi(z)$, приходим к следующему результату

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)(g_1(z)g_2(z)\ldots g_n(z))^{-1}\Phi(z)dz \le$$

$$\le \varepsilon^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}2^{-n}\lambda^n(\varepsilon_m)\int\limits_{\Omega}\Phi^+(z)dz-$$

$$-\varepsilon^n 2^{-n}\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\int\limits_{\Omega}\Phi^-(z)dz.$$

Из правой части этого равенства, используя равенство $\Phi^{+}(z)=\Phi(z)+\Phi^{-}(z)$, исключаем функцию $\Phi^{+}(z)$. В результате получаем

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right)(g_1(z)g_2(z)\ldots g_n(z))^{-1}\Phi(z)dz\leq$$
$$\leq\varepsilon^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}2^{-n}\lambda^n(\varepsilon_m)\int\limits_{\Omega}\Phi(z)dz+$$
$$+\varepsilon^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}2^{-n}[\lambda^n(\varepsilon_m)-\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\int\limits_{\Omega}\Phi^{-}(z)dz.$$

Отсюда следует неравенство (1.2.32).

Лемма 1.2.1 доказана.

Применяя неравенство (1.2.32) при

$$\Phi(z)=\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(z)p_k(z)p_l(z)v^{(k)}\overline{v^{(l)}(z)},$$

имеем

$$c_{n,m}\mathrm{Re}\,B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\leq\lambda^n(\varepsilon_m)\varepsilon^n\mathrm{Re}\,B[v,v]+$$
$$+\varepsilon^n[\lambda^n(\varepsilon_m)-\lambda^{-n}(\varepsilon_m)]\int\limits_{\Omega}\Phi^{-}(z)dz.\quad(1.2.37)$$

В силу ограниченности коэффициентов $a_{kl}(z)$ при $|k|=|l|=r$ имеем

$$\int\limits_{\Omega}\Phi^{-}(z)dz\leq\int\limits_{\Omega}\Phi(z)dz\leq\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Omega}|a_{kl}(z)|p_k(z)p_l(z)|v^{(k)}(z)||v^{(l)}(z)|dz\leq$$
$$\leq M\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Omega}p_k(z)p_l(z)|v^{(k)}(z)||v^{(l)}(z)|dz\leq$$
$$\leq M\left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}(p_k(z)|v^{(k)}(z)|)^2dz\right\}^{1/2}\left\{\sum_{|l|=r}\int\limits_{\Omega}(p_l(z)|v^{(l)}(z)|)^2dz\right\}^{1/2}\leq$$
$$\leq M\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2.$$

Отсюда и из (1.2.37) следует, что

$$\mathrm{Re}\,B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\leq\varepsilon^nM\left\{\mathrm{Re}\,B[v,v]+\mu_2(\varepsilon)\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2\right\},\qquad(1.2.38)$$

где M - положительное число не зависящее от $\varepsilon > 0$ и $v(x)$, и

$$\mu_2(\varepsilon) = \lambda^n(\varepsilon_m) - \lambda^{-n}(\varepsilon_m),\ \varepsilon_m = \frac{m}{m+1} \cdot \varepsilon. \tag{1.2.39}$$

Используя неравенство (1.2.23), имеем

$$\begin{gathered}(1 - \tilde{c}_m(\varepsilon)) \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 - \tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r} \left\| v; L^0_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 \leq \\ \leq \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) \mathrm{Re}\, B_{\varepsilon,m}[v,v] = \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon)[\mathrm{Re}\,(B_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]) + \\ + \mathrm{Re}\,(B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]) + \mathrm{Re}\, B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]] \leq \\ \leq \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) \mathrm{Re}\, B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] + \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) |B_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]| + \\ + \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) |B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]|.\end{gathered}$$

Отсюда, в силу неравенств (1.2.29), (1.2.31), следует, что

$$\begin{gathered}(1 - \tilde{c}_m(\varepsilon)) \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 - \tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r} \left\| v; L^0_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 \leq \\ \leq \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) \mathrm{Re}\, B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] + \mu_1(\varepsilon) M_m(\varepsilon) \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 + \\ + M_m(\varepsilon)\nu \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2.\end{gathered}$$

Далее, применяя неравенство (1.2.38), имеем

$$\begin{gathered}(1 - \tilde{c}_m(\varepsilon)) \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 - \tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r} \left\| v; L^0_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 \leq \\ \leq M_m(\varepsilon) M \left\{ \mathrm{Re}\, B[v,v] + \mu_2(\varepsilon) \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 \right\} + \\ + \mu_1(\varepsilon) M_m(\varepsilon) \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 + M_m(\varepsilon)\nu \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}[1 - \tilde{c}_m(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon) M_m(\varepsilon) M - \mu_1(\varepsilon) M_m(\varepsilon) - M_m(\varepsilon)\nu] \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 - \\ - \tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r} \left\| v; L^0_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 \leq M_m(\varepsilon) M \mathrm{Re}\, B[v,v],\end{gathered} \tag{1.2.40}$$

где числа $\tilde{c}_m(\varepsilon)$, $\tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)$, $M_m(\varepsilon)$ такие же как в (1.2.24), $\mu_1(\varepsilon)$ - такое же как в (1.2.28), а число $\mu_2(\varepsilon)$ определено равенством (1.2.39).

Заметим, что числа $\tilde{c}_m(\varepsilon)$, $\mu_1(\varepsilon)$, $\mu_2(\varepsilon)$ обладают следующими свойствами (см. (1.2.24), (1.2.25), (1.2.28), (1.2.39))

$$\lim_{m \in \infty} \tilde{c}_m(\varepsilon) = 0,\ \lim_{\varepsilon \to 0+} \mu_1(\varepsilon) = 0,\ \lim_{\varepsilon \to 0+} \mu_2(\varepsilon) = 0.$$

Поэтому, подбирая число m достаточно большим, а числа ε, ν - достаточно малыми, из (1.2.40) получаем неравенство

$$\mathrm{Re}\, B[v,v] \geq c_3 \left\| v; L^r_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 - c_4 \left\| v; L^0_{2,r}(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|^2 \tag{1.2.41}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$; c_3, c_4 - положительные постоянные, не зависящие от $v(x)$.

Таким образом, неравенство Гординга для вырождающегося эллиптического оператора, ассоциированного с полуторалинейной формой $B[u,v]$, определенной равенством (1.2.3) в случае $a_{kl} \equiv 0$ при $|k|+|l| \le 2r-1$, доказано.

Теперь перейдем к доказательству неравенства Гординга (1.2.10) в общем случае. Положим,

$$B_0[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_1[u,v] = B[u,v] - B_0[u,v] = \tag{1.2.42}$$

$$= \sum_{\substack{|k|,|l|\le r,\\ |k|+|l|\le 2r-1}} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \ u,v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Согласно вышедоказанному результату, для полуторалинейной формы $B_0[u,v]$ имеет место неравенство вида (1.2.41), то есть существуют числа $c_5 > 0, \ c_6 \ge 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} B_0[u,u] \ge c_5 \left\| u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g}) \right\|^2 - c_6 \left\| u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g}) \right\|^2 \tag{1.2.43}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Полуторалинейную форму $B_1[u,v]$ представим в виде

$$B_1[u,v] = B_{11}[u,v] + B_{12}[u,v], \tag{1.2.44}$$

где

$$\begin{aligned} B_{11}[u,v] &= \sum_{|k|<r,|l|\le r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \\ B_{12}[u,v] &= \sum_{|k|=r,|l|<r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx. \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

Для удобства чтения сформулируем утверждение леммы 1.1.5 в случае $\alpha(x) = \beta(x) = \sigma(x)$, $p = q = 2$, $s_k = 2$, $t = r$.

Лемма 1.2.2. *Пусть $\sigma(x) \in \Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$, r - натуральное число. Для мультииндексов k, l таких, что $|k| < r$, $|l| \le r$ определим числа λ_{kl}, q_l посредством следующих соотношений:*

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{r-|l|}{n}, & \textit{если } n > 2(r-|l|) \\ \varepsilon_1, \ 0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}, & \textit{если } n \le 2(r-|l|), \end{cases} \tag{1.2.46}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{2} - \frac{r-|k|}{n} \text{ } \textit{при } n - 2(r-|k|) > 0, \tag{1.2.47}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_2, \; 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2} \text{ } \textit{при } n - 2(r-|k|) \le 0, \tag{1.2.48}$$

$$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}. \tag{1.2.49}$$

Определим положительную функцию

$$\sigma_{kl}(x) = \sigma^2(x) g_1^{k_1+l_1-2r}(x) g_2^{k_2+l_2-2r}(x) \dots g_n^{k_n+l_n-2r}(x) \times \\ \times (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{1-1/\lambda_{kl}}. \tag{1.2.50}$$

Тогда для всех функций $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ *и любого* $\tau > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| \le \|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \times \\ \times \left\{ \tau \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| + c_0 \tau^{-m u_k} \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \right\}, \tag{1.2.51}$$

где

$$\mu_k = \frac{2^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k| n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - 2^{-1} + (r-|k|) n^{-1}}. \tag{1.2.52}$$

Определим числа q_{kl} равенством

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} + \frac{1}{q_{kl}} = 1, \text{ то есть } \frac{1}{q_{kl}} = 1 - \frac{1}{\lambda_{kl}}. \tag{1.2.53}$$

Тогда из условий (1.2.46) - (1.2.49) следует, что q_{kl} удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{1}{q_{kl}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{q_l} + \frac{r-|k|}{n} \text{ при } n - 2(r-|k|) > 0, \tag{1.2.54}$$

$$\frac{1}{q_{kl}} = 1 - \frac{1}{q_l} - \varepsilon_2, \; 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2} \text{ при } n - 2(r-|k|) \le 0, \tag{1.2.55}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{q_{kl}} + \frac{1}{q_l}. \tag{1.2.56}$$

Из условий (1.2.46), (1.2.54) следует, что

$$\frac{1}{q_{kl}} = \begin{cases} \dfrac{r-|l|}{n} + \dfrac{r-|k|}{n}, & \text{если } n-2(r-|k|)>0,\ n-2(r-|l|)>0 \\ \dfrac{1}{2} - \varepsilon_1 + \dfrac{r-|k|}{n}, & \text{если } n-2(r-|k|)>0,\ n-2(r-|l|)\le 0. \end{cases}$$

Следовательно

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{2r-|k|-|l|}, & \text{если } n>2(r-|l|),\ n>2(r-|k|) \\ \dfrac{2n}{n-2n\varepsilon_0+2(r-|k|)}, & \text{если } n>2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|). \end{cases}$$

Вводим обозначение $\varepsilon_2 = 1-2\varepsilon_1$. Так как $0<\varepsilon_1<1/2$, то $0<\varepsilon_2<1$. Поэтому $q_{kl} > \dfrac{2n}{2(r-|k|)+\varepsilon_2 n}$, $0<\varepsilon_2<1$, при $n>2(r-|k|)$, $n \le 2(r-|l|)$.

Из условий (1.2.46), (1.2.55) следует, что

$$\frac{1}{q_{kl}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{r-|l|}{n} - \varepsilon_2, & \text{если } n\le 2(r-|k|),\ n>2(r-|l|) \\ 1-\varepsilon_2-\varepsilon_1, & \text{если } n\le 2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{2n}{\varepsilon_2 n+2(r-|l|)}, 0<\varepsilon_2<1 & \text{если } n\le 2(r-|k|),\ n>2(r-|l|) \\ \text{любое конечное число} >1, & \text{если } n\le 2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|). \end{cases}$$

Относительно условия (1.2.56) заметим, что оно следует из (1.2.55) при $n-2(r-|k|)\le 0$. Если же $n-2(r-|k|)>0$, то условие (1.2.56) примет вид

$$\frac{1}{q_{kl}} \ge \begin{cases} \dfrac{r-|l|}{n}, & \text{при } n>2(r-|l|), \\ \varepsilon_3,\ 0<\varepsilon_3<1/2, & \text{при } n\le 2(r-||). \end{cases}$$

Следовательно, $q_{kl} \le \dfrac{n}{r-|l|}$, если $n>2(r-|l|)$, а q_{kl} меньше $1/\varepsilon_3$, где $0<\varepsilon_3<1/2$. Так как (см. (1.2.2),(1.2.53))

$$p_k(x)p_l(x) = \sigma^2(x) g_1^{k_1+l_1-2r}(x) g_2^{k_2+l_2-2r}(x)\ldots g_n^{k_n+l_n-2r}(x),\ 1-\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_{kl}},$$

то равенство (1.2.50) можно записать в виде

$$\sigma_{kl}(x) = p_k(x)p_l(x)(g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))^{1/q_{kl}}.$$

Ввиду этого равенства, используя неравенство Гельдера с показателями q_{kl}, λ_{kl}, в силу условия

$$\left\|a_{kl}; L_{q_{kl}}(\Omega; (g_1 g_2 \ldots g_n)^{-1/q_{kl}})\right\| < +\infty, \ |k|+|l| \leq 2r-1,$$

имеем

$$|B_{11}[u,v] \leq \sum_{|k|<r,|l|\leq r} \int\limits_{\Omega} p_k(x)p_l(x)|a_{kl}(x)||u^{(k)}(x)||v^{(l)}(x)|dx =$$

$$= \sum_{|k|<r,|l|\leq r} \int\limits_{\Omega} (g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))^{-1/q_{kl}}|a_{kl}(x)|\sigma_{kl}(x)|u^{(k)}(x)||v^{(l)}(x)|dx \leq$$

$$\leq \sum_{|k|<r,|l|\leq r} \left\|a_{kl}; L_{q_{kl}}\left(\Omega; (g_1 g_2 \ldots g_n)^{-1/q_{kl}}\right)\right\| \left\|u^{(k)}v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\right\| \leq$$

$$\leq M_0 \sum_{|k|<r,|l|\leq r} \left\|u^{(k)}v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\right\|.$$

Далее, применяя лемму 1.2.2, получим

$$|B_{11}[u,v] \leq M \left\|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\| \{\tau \left\|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\| + \\ + c_0 \tau^{-\mu} \left\|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\|\}, \quad (1.2.57)$$

где $\mu = \max\limits_{|k|<r} \mu_k$ и числа μ_k определяются равенством (1.2.52); τ - достаточно малое положительное число.

Так как (см. (1.2.45)) полуторалинейная форма $B_{12}[u,v]$ содержит $u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)$ при $|l|<r$, $|k|=r$, то меняя ролями $u(x)$ и $v(x)$, и действуя также как в доказательстве неравенства (1.2.57) имеем

$$|B_{12}[u,v] \leq M \left\|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\| \{\tau \left\|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\| + \\ + c_0 \tau^{-\mu} \left\|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\|\}. \quad (1.2.58)$$

Используя неравенства (1.2.57), (1.2.58) при $u(x) \equiv v(x)$ и равенство (1.2.44) получаем

$$|B_1[u,u] \leq M \left\|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\| \{\tau \left\|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\| + \\ + c_0 \tau^{-\mu} \left\|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\|\}. \quad (1.2.59)$$

Так как $B[u,v] = B_0[u,v] + B_1[u,v]$, то используя неравенства (1.2.43), (1.2.59) находим

$$\mathrm{Re}\ B[u,u] = \mathrm{Re}\ B_0[u,u] + \mathrm{Re}\ B_1[u,u] \geq \mathrm{Re}\, B_0[u,u] - |B_1[u,u] \geq \\ \geq (c_5 - \tau)\left\|u; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\|^2 - (\tau + c_0\tau^{-2\mu} + c_6)\left\|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\|^2.$$

Далее, фиксируя достаточно малое число $\tau > 0$, получим

$$\operatorname{Re} B[u,u] \geq c_7 \left\| u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g}) \right\|^2 - c_8 \left\| u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g}) \right\|^2. \qquad (1.2.60)$$

Так как

$$\| u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g}) \| = \left\{ \left\| u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g}) \right\|^2 + \left\| u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g}) \right\|^2 \right\}^{1/2},$$

то из полученного неравенства (1.2.60) следует неравенство (1.2.10).

Теорема 1.2.1 доказана.

1.3 Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений

В этом параграфе исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле для эллиптических уравнений с нестепенным вырождением в произвольной (ограниченной или неограниченной) области. Здесь применяется весовой аналог неравенства Гординга, полученный в §1.2 (см. неравенство (1.2.10)).

Пусть область $\Omega \subset R_n$ и положительные функции $\sigma(x),\ g_i(x),\ i = \overline{1,n}$ - такие же как в §1.1. На функциях $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \qquad (1.3.1)$$

где

$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \ldots g_n^{-r+k_n}(x)$$

и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, определенные в области Ω.

Обозначим через $\left(W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right)'$ пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Далее считаем, что положительные функции $\sigma(x),\ g_i(x),\ i = \overline{1,n}$ удовлетворяют условиям §1.1 (см. С. А. Исхоков [24]), которые обеспечивают плотность класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})$ и условия, наложенные ниже на коэффициенты $a_{kl}(x)$, позволяют продолжить по непрерывности билинейную форму $B[u,v]$ на элементы $u, v \in W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Задача D_λ**.** *Для заданного функционала* $F \in (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[U,v] + \lambda \int\limits_\Omega \sigma^2(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-2r}U(x)\overline{v(x)}dx =< F,v >$$

$$(v \in C_0^\infty(\Omega)), \quad (1.3.2)$$

принадлежащее пространству $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Так как класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ и решение $U(x)$ задачи D_λ ищется в этом пространстве, то граничные условия в задаче D_λ формально считаются однородными. Заметим, что в случае достаточной гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ и правой части F уравнения (1.3.2), решение $U(x)$ задачи D_λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{|k|,|l|\le r}(-1)^{|l|}\left(p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)U^{(k)}(x)\right)^{(l)} +$$

$$+\lambda\sigma^2(x)\left(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)^{-2r}U(x) = F(x), \quad x \in \Omega.$$

Разрешимость задачи D_λ ранее исследовалась в работе С.А. Исхокова [24] в предположении ограниченности всех коэффициентов $a_{kl}(x)$ ($|k|,|l| \le r$, $x \in \Omega$). Здесь мы предполагаем, что старшие коэффициенты $a_{kl}(x)$ ($|k| = |l| = r$, $x \in \Omega$) – ограничены, а младшие коэффициенты $a_{kl}(x)$ ($|k|+|l| \le 2r-1$, $x \in \Omega$) принадлежат некоторым L_p – пространствам с весом.

Теорема 1.3.1 *Пусть выполнены условия:*

I) *коэффициенты* $a_{kl}(x)$ *при* $|k| = |l| = r$ *ограничены и удовлетворяют условию эллиптичности*

$$Re\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \ge c|\xi|^{2r}$$

для всех $x,\xi \in R_n$ (c *– положительная числа, не зависящее от* x,ξ), *и для любого достаточно малого* $\nu > 0$ *существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(\xi)| < \nu$$

для любого $\xi \in \Omega$ *и любого* $x \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$;

II)*коэффициенты* $a_{kl}(x)$ *при* $|k|,|l| \le r$ *и* $|k|+|l| \le 2r-1$ *принадлежат пространству* $L_{p_{kl}}\left(\Omega;(g_1g_2\cdots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$, *где*

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \le r-1, \ |l| \le r \\ q_{lk} & \text{при } |k| = r, \ |l| \le r-1 \end{cases},$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r-|k|-|l|} < q_{kl} \le \frac{n}{r-|l|}, \text{ если } n > 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|);$$

$$\frac{n}{r-|k|+\varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2},\ \text{если } n > 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2},\ \text{если } n \le 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \text{любое конечное число} >1\text{, если }\ n \le 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|). \end{cases}$$

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ задача D_λ имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\|U; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \le M \left\|F; (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'\right\|, \qquad (1.3.3)$$

где число $M > 0$ не зависит от F.

Доказательство. Обозначим

$$B^{(\lambda)}[u,v] = B[u,v] + \lambda \int\limits_\Omega \sigma^2(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-2r}u(x)\overline{v(x)}dx. \qquad (1.3.4)$$

Уравнение (1.3.2) принимает следующий вид

$$B^{(\lambda)}[u,v] =< F, v > \ (v \in C_0^\infty(\Omega)). \qquad (1.3.5)$$

В условиях теоремы 1.3.1 выполняются все условия теоремы 1.2.1, согласно которой существуют такие постоянные $c_1 > 0,\ c_2 \ge 0$, что

$$\operatorname{Re} B[u,u] \ge c_1\|u; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 - c_2\|u; L_{2,r}^0(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$. Так как

$$\|u; L_{2,r}^0(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 = \int\limits_\Omega \sigma^2(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-2r}|u(x)|^2dx,$$

то отсюда следует, что при $\lambda > c_2$ имеет место неравенство

$$B^{(\lambda)}[u,u] \ge c_1\|u; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 \qquad (1.3.6)$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Также как в §1.2 представим форму (1.3.1) $B[u,v]$ в виде (см.(1.2.42))

$$B[u,v] = B_0[u,v] + B_1[u,v], \tag{1.3.7}$$

где

$$B_0[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_1[u,v] = \sum_{\substack{|k|,|l|\le r,\\ |k|+|l|\le 2r-1}} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}\overline{v^{(l)}(x)}dx.$$

Коэффициенты $a_{kl}(x)$ полуторалинейной формы $B_0[u,v]$ ограничены. Поэтому используя неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\begin{gathered} |B_0[u,v]| \le M_0 \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)|u^{(k)}(x)||v^{(l)}(x)|dx \le \\ \le M_0 \left\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega (p_k(x)|u^{(k)}(x)|)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{|l|=r} \int_\Omega (p_l(x)|v^{(l)}(x)|)^2 dx \right\}^{1/2} = \\ = M_0 \|u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \cdot \|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \le \\ \le M_0 \|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \cdot \|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \end{gathered} \tag{1.3.8}$$

для всех $u,v \in W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Полуторалинейную форму $B_1[u,v]$ представим в виде (см.(1.2.44), (1.2.45))

$$B_1[u,v] = B_{11}[u,v] + B_{12}[u,v], \tag{1.3.9}$$

где

$$B_{11}[u,v] = \sum_{|k|\le r-1, |l|\le r} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_{12}[u,v] = \sum_{|k|\le r, |l|\le r-1} \int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx.$$

Согласно неравенствам (1.2.57), (1.2.58) при всех $\tau > 0$ и для любых $u,v \in W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})$ имеют места следующие неравенства

$$|B_{11}[u,v]| \le M\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \left\{ \tau\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\| + c_0\tau^{-\mu}\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \right\},$$

$$|B_{12}[u,v]| \le M\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \left\{ \tau\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\| + c_0\tau^{-\mu}\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \right\}.$$

Так как
$$\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\| \le \|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|,$$
то фиксируя число τ из последних неравенств получим
$$|B_{11}[u,v]| \le M_1\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|\cdot\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|,$$
$$|B_{12}[u,v]| \le M_1\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|\cdot\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|.$$
Отсюда в силу равенства (1.3.9) следует, что
$$|B_1[u,v]| \le M_2\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|\cdot\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|. \tag{1.3.10}$$
для всех $u,v\in W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)$.

Далее, учитывая равенство (1.3.7) из (1.3.8), (1.3.10) имеем
$$|B[u,v]| \le M_3\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|\cdot\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|. \tag{1.3.11}$$
для всех $u,v\in W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)$.

Применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем
$$\int\limits_\Omega \sigma^2(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-2r}|u(x)\cdot|v(x)|dx \le$$
$$\le \left\{\int\limits_\Omega(\sigma(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-r}|u(x)|)^2dx\right\}^{1/2}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_\Omega(\sigma(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{-r}|v(x)|)^2dx\right\}^{1/2} =$$
$$= \|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\|\cdot\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\| \le$$
$$\le \|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|\cdot\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|. \tag{1.3.12}$$

Ввиду равенства (1.3.4) из неравенств (1.3.11), (1.3.12) следует, что
$$|B^{(\lambda)}[u,v]| \le (M_3+|\lambda|)\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\|\cdot\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)\| \tag{1.3.13}$$
для всех $u,v\in W^r_2(\Omega;\sigma,\vec g)$.

Полученные неравенства (1.3.6), (1.3.13) позволяют нам применить теорему 2.0.1 работы [54], которая является обобщением известной теоремы Лакса-Мильграма (см.,например, [60, 61]). В силу указанной теоремы приходим к следующему результату.

Утверждение 1.3.1. *Существует линейный оператор A, осуществляющий гомеоморфизм пространств $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ и $(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$, такой , что*

$$< Au, v >= B^{(\lambda)}[u,v] \ \forall u,v \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$$

и всякий антилинейный функционал $L(v)$ над пространством $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ допускает представление

$$L(v) = B^{(\lambda)}[u_0,v] =< Au_0, v >, \ (v \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))$$

причем, такое представление единственно.

Пусть F - произвольный функционал из $(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$. Тогда согласно утверждению 1.3.1 существует единственная функция $U(x) \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ такая, что

$$< F, v >= B^{(\lambda)}[U,v] =< AU, v > \ \forall v \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}).$$

Ввиду однозначно определенности функции $U(x)$ из последних равенств следует, что $F = AU$ и $U = A^{-1}F$.

Следовательно, для любого заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ функция $U = A^{-1}F$ принадлежит пространству $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ и удовлетворяет уравнению (см. (1.3.5))

$$B^{(\lambda)}[U,v] =< F, v > \ \forall v \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}).$$

Другими словами, $U(x)$ является решением задачи D_λ.

Согласно утверждению 1.3.1, оператор A осуществляет гомеоморфизм пространств $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ и $(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$. Следовательно, оператор A^{-1} является ограниченным и из

$$\|U; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\| = \|A^{-1}F; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|F; (W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'\|$$

следует неравенство (1.3.3)

Теорема 1.3.1 доказана.

Глава 2

Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для некоторых классов эллиптических уравнений с вырождением

2.1 Вспомогательные интегральные неравенства для дифференцируемых функций в полупространстве

Пусть R_n - n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим

$$R_n^+ = \{x | x = (x', x_n) \in R_n, x_n > 0\}.$$

В первой части этого параграфа доказываются некоторые вспомогательные неравенства для функций, заданных в полупространстве R_n^+.

Пусть функция $\varphi(t) \in C^\infty(R_1^+)$ такая, что $0 \le \varphi(t) \le 1$ для любого $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и $\varphi(t) \equiv 0$, когда $t \ge 1$; $\varphi = 1$ для любого $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Для любых двух вещественных чисел α, β определим функцию

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t) = \varphi(t)t^{-\alpha} + (1 - \varphi(t))t^{\beta} \ (t > 0).$$

Пусть $p \in (1; +\infty)$ и r - некоторое целое неотрицательное число. Символом $V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных в полупространстве R_n^+, имеющих все обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$ до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k|\le r} \int\limits_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|k|} |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Обозначим через $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ пространство функций $u(x)$ $(x \in R_n^+)$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\| = \left\{ \|u; L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\|^p + \|u; L^0_{p;\alpha,\gamma}(R_n^+)\|^p \right\}^{1/p},$$

где

$$\|u; L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Обозначим через $\widetilde{C}_0^\infty(R_n^+)$ множество бесконечно дифференцируемых функций в R_n^+ финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях x_n. Если D - некоторое весовое пространство функций, заданных в R_n^+, то через $\overset{\circ}{D}$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(R_n^+)$ в метрике пространства D, а через $\widetilde{D}$ - пополнение класса $\widetilde{C}_0^\infty(R_n^+)$ в метрике пространства D.

Свойства пространств $V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)$, $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ ранее изучалась в работах С.А.Исхокова [21], С.А.Исхокова и М.Ш.Ганиева [26]. В этих работах, в частности, установлены следующие результаты.

Теорема 2.1.1 *Пусть выполнены условия* $-\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \ldots, r\}$, $\beta + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \ldots, r\}$, $\beta - r \ge \gamma$. *Тогда с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство*

$$V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+) = \overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+).$$

Теорема 2.1.2 *Пусть* $p > 1$ *и числа* α, β, γ *удовлетворяют условиям теоремы 2.1.1. Пусть также*

$$-r + \frac{1}{p} < \alpha \le -\frac{1}{p},\ r + \frac{1}{p'} \ge \beta,\ z - \beta + \frac{1}{p'} < s_0 + 1,\ \gamma + s_0 < \frac{1}{p'},\ \gamma + s_0 \ne -\frac{1}{p},$$

где $p' = p/(p-1)$ *и* s_0 *- целое число, удовлетворяющее неравенствам* $r + \alpha - 1/p \le s_0 < r + \alpha - 1/p + 1$.

тогда для всех функций $u \in \overset{\circ}{L}{}^{r}_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\gamma}(x_n)|u(x)|)^p dx \ll \sum_{|k|=r} \int\limits_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)|u^{(k)}(x)|)^p dx.$$

Следствие 2.1.1 *В условиях теоремы 2.1.2 полунорма в пространстве* $L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)$ *эквивалентна на функциях* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ *норме в* $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$.

Теорема 2.1.3 *Пусть мультииндекс* k *такой, что* $|k| \le r-1$ *и пусть выполнены условия*

$$\alpha_1 - \alpha \le r - |k| + \frac{1}{p_k} - \frac{1}{p},\ \alpha_1 < \frac{1}{p_k},\ 1 < p \le p_k < \infty,$$

$$\beta + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \ldots, r - |k|\}, \beta_1 = \beta - r + |k| - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p}.$$

Тогда для всех функций $u \in \widetilde{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ *имеет место неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_1,\beta_1}(x_n)|u^{(k)}(x)| \right)^{p_k} dx \right\}^{1/p_k} \ll \|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\|.$$

здесь γ *- произвольное вещественное число.*

Теорема 2.1.4 *Пусть* $1 \le q < \infty$ *и пусть мультииндекс* l *такой, что* $|l| < r$. *Пусть также* $q \le q_l < +\infty$, $r - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} > 0$. *Тогда для всех* $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|l|+\frac{n}{q}-\frac{n}{q_l}} |v^{(l)}(x)| \right)^{q_l} dx \right\}^{1/q_l} \ll \|v; V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)\|.$$

Далее используя эти результаты докажем оценку нормы произведения призводных функций $u \in \widetilde{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$.

Теорема 2.1.5 *Пусть* $p > 1$, $q > 1$, r *- натуральное число, и вещественные числа* α, β *удовлетворяют условиям*

$$\alpha \le 0,\ \beta + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Тогда для всех мультииндексов k, l таких, что $|k| \le r$, $|l| \le r$, $|k|+|l| \le 2r-1$ и всех функций $u \in \widetilde{W}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$ справедливо неравенство

$$\left\{\int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\right)^{\lambda_{kl}} dx\right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$

$$\ll \|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\|\|v; V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)\|, \quad (2.1.1)$$

где γ - произвольное вещественное конечное число и числа $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, \lambda_{kl}$ определяются следующими соотношениями:

1)если $|k| < r$, $|l| < r$, то

$$\begin{aligned} \alpha_{kl} &= 2\alpha + n\varepsilon_l + \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+, \\ \beta_{kl} &= 2\beta - r + |k| - \delta_k - n\varepsilon_l - \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+, \\ \frac{1}{\lambda_{kl}} &= \delta_k + \varepsilon_l + \left(\frac{1}{q} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+; \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

2)если $|k| = r$, $|l| \le r-1$, то

$$\begin{aligned} \alpha_{kl} &= 2\alpha + n\varepsilon_l + \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+, \\ \beta_{kl} &= 2\beta - n\varepsilon_l - \left(r - |l| - \frac{n}{q}\right)_+, \\ \frac{1}{\lambda_{kl}} &= \frac{1}{p} + \varepsilon_l + \left(\frac{1}{q} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+; \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

3)если $|k| \le r-1$, $|l| = r$, то

$$\begin{aligned} \alpha_{kl} &= 2\alpha, \\ \beta_{kl} &= 2\beta - r + |k| + \frac{1}{p} - \delta_k, \\ \frac{1}{\lambda_{kl}} &= \frac{1}{q} + \delta_k. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Здесь ε_l - произвольное число из интервала $(0, 1/q)$, δ_k - произвольное положительное число не превосходящее $1/p$, и $(\mu)_+ = \mu$, если μ - положительное число, а $(\mu)_+ = 0$ в противном случае.

Доказательство. Пусть мультииндексы k и l такие, что $|k| < r$, $|l| < r$. Оценим норму $u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)$ для произвольных функций $u(x) \in$

$\widetilde{W}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v(x) \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$. Пусть числа λ_{kl}, α_{kl}, β_{kl} удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p_k}, \\ &\alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha_l, \\ &\beta_{kl} = \beta_k + \beta_l. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Тогда учитывая неравенство

$$\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) \le c_1 \sigma_{\alpha_k,\beta_k}(x_n)\sigma_{\alpha_l,\beta_l}(x_n) \ (x_n > 0),$$

где $c_1 > 0$ не зависит от x_n, в силу леммы 1.1.4 имеем

$$\begin{aligned} &\left\{ \int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\Big)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll \\ &\qquad \ll \left\{ \int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha_k,\beta_k}(x_n)|u^{(k)}(x)|\Big)^{p_k} dx \right\}^{1/p_k} \times \\ &\qquad\qquad \times \left\{ \int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha_l,\beta_l}(x_n)|v^{(l)}(x)|\Big)^{q_l} dx \right\}^{1/q_l}. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Согласно теореме 2.1.3 для всех функций $u(x) \in \widetilde{W}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ имеет место неравенство

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha_1,\beta_1}(x_n)|u^{(k)}(x)|\Big)^{p_k} dx \right\}^{1/p_k} \ll \|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\| \tag{2.1.7}$$

если выполнены следующие условия

$$\alpha_1 - \alpha \le r - |k| + \frac{1}{p_k} - \frac{1}{p},\ \alpha_1 < \frac{1}{p_k},\ 1 < p \le p_k < \infty,$$

$$\beta + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \ldots, r - |k|\}, \beta_1 = \beta - r + |k| - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p}.$$

Так как $|k| < r$, то $r - |k| \ge 1$ и число

$$\alpha_k = \alpha \tag{2.1.8}$$

удовлетворяет неравенству

$$\alpha_k - \alpha \le r - |k| + \frac{1}{p_k} - \frac{1}{p}.$$

с другой стороны из условия $\alpha \le 0$ следует, что $\alpha_k < \dfrac{1}{p_k}$. Поэтому неравенство (2.1.7) имеет место, если α_1 заменим через α_k, а β_1 - через

$$\beta_k = \beta - r + |k| - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p}. \tag{2.1.9}$$

Следовательно

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_k,\beta_k}(x_n)|u^{(k)}(x)| \right)^{p_k} dx \right\}^{1/p_k} \ll \|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\|. \tag{2.1.10}$$

Согласно теореме 2.1.4 интегральное неравенство

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|l|+\frac{n}{q}-\frac{n}{q_l}} |v^{(l)}(x)| \right)^{q_l} dx \right\}^{1/q_l} \ll \|v; V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)\| \tag{2.1.11}$$

имеет место для всех $v \in V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)$, если

$$1 < q \le q_l < +\infty, \; r - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} > 0. \tag{2.1.12}$$

Заметим, что число q_l, определенное равенством

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \dfrac{1}{q} - \dfrac{r-|l|}{n} + \varepsilon_l, & \text{если } q(r-|l|) < n, \\ \varepsilon_l, & \text{если } q(r-|l|) \ge n, \end{cases} \tag{2.1.13}$$

где ε_l - произвольное число из интервала $(0, 1/q)$, удовлетворяет условиям (2.1.12). Поэтому из неравенства (2.1.11) следует, что

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_l,\beta_l}(x_n)|v^{(l)}(x)| \right)^{q_l} dx \right\}^{1/q_l} \ll \|v; V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)\|, \tag{2.1.14}$$

где

$$\alpha_l = \alpha + r - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l}, \; \beta_l = \beta - r + |l| + \frac{n}{q} - \frac{n}{q_l} \tag{2.1.15}$$

и число q_l определяется равенством (2.1.13).

Пусть $q(r-|l|)<n$. Тогда $\dfrac{1}{q_l}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{r-|l|}{n}+\varepsilon_l$ и равенства (2.1.15) принимают следующий вид

$$\begin{aligned}\alpha_l&=\alpha+r-|l|-\frac{n}{q}+\frac{n}{q_l}=\alpha+n\varepsilon_l\\ \beta_l&=\beta-r+|l|+\frac{n}{q}-\frac{n}{q_l}=\beta-n\varepsilon_l.\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

Если же $q(r-|l|)\geq n$, согласно (2.1.13) $\dfrac{1}{q_l}=\varepsilon_l$. В этом случае равенства (2.1.15) принимают следующий вид

$$\begin{aligned}\alpha_l&=\alpha+n\varepsilon_l+r-|l|-\frac{n}{q}\\ \beta_l&=\beta-n\varepsilon_l-r+|l|+\frac{n}{q}.\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

Вводим обозначение

$$(\mu)_+=\begin{cases}\mu, & \text{если } \mu>0\\ 0, & \text{если } \mu\leq 0.\end{cases}$$

Тогда объединяя равенства (2.1.16), (2.1.17) имеем

$$\begin{aligned}\alpha_l&=\alpha+n\varepsilon_l+\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+\\ \beta_l&=\beta-n\varepsilon_l-\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+.\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

Отсюда и из неравенств (2.1.5), (2.1.13) следует, что

$$\begin{aligned}&\alpha_{kl}=2\alpha+n\varepsilon_l+\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+,\\ &\beta_{kl}=2\beta-r+|k|-\frac{1}{p_k}-n\varepsilon_l-\left(r-|l|-\frac{n}{q}\right)_+,\\ &\frac{1}{\lambda_{kl}}=\frac{1}{p_k}+\varepsilon_l+\left(\frac{1}{q}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+.\end{aligned}$$

Так как p_k - любое число не меньше p, то подставляя в эти равенства $\varepsilon_l=1/p_k$ получаем (2.1.2).

В силу выше установленных неравенств (2.1.10), (2.1.14) из неравенства (2.1.6) следует (2.1.1).

Таким образом, теорема 2.1.5 в случае $|k| < r$, $|l| < r$ доказана.

Теперь рассмотрим случай $|k| = r$, $|l| \leq r - 1$.В этом случае имеет место следующее неравенство

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) |u^{(k)}(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p} \ll \|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\|. \tag{2.1.19}$$

Пусть числа $\lambda_{kl}, \alpha_{kl}, \beta_{kl}$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_l}, \\ &\alpha_{kl} = \alpha + \alpha_l, \\ &\beta_{kl} = \beta + \beta_l. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Тогда анаогично неравенству (2.1.6) с помощью леммы 1.1.4 доказывается, что

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) |u^{(k)}(x) v^{(l)}(x)| \right)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$

$$\ll \left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) |u^{(k)}(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_l,\beta_l}(x_n) |v^{(l)}(x)| \right)^{q_l} dx \right\}^{1/q_l}. \tag{2.1.21}$$

Так как $|l| < r$, то имеет место неравенство (2.1.14), где числа α_l, β_l, q_l определяются равенствами (2.1.13), (2.1.18).

Подставляя значения чисел α_l, β_l, q_l из равенств (2.1.13), (2.1.18) в (2.1.20) получим

$$\begin{aligned} &\alpha_{kl} = 2\alpha + n\varepsilon_l + \left(r - |l| - \frac{n}{q} \right)_+, \\ &\beta_{kl} = 2\beta - n\varepsilon_l - \left(r - |l| - \frac{n}{q} \right)_+, \\ &\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{q} - \frac{r - |l|}{n} \right)_+ + \varepsilon_l, \end{aligned}$$

то есть мы получили равенства (2.1.3).

Далее легко можно заметить, что в силу неравенств (2.1.14), (2.1.19) из (2.1.21) следует неравенство (2.1.1) при $|k| = r$, $|l| \leq r-1$.

Таким образом, теорема 2.1.5 в случае $|k| = r$, $|l| \leq r-1$ доказана.

Рассмотрим случай $|k| \leq r-1$, $|l| = r$. Так как $|l| = r$, то имеет место следующее очевидное неравенство

$$\left\{\int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)|v^{(l)}(x)|\Big)^q\,dx\right\}^{1/q} \ll \|v; V^r_{q;\alpha,\beta}(R_n^+)\|. \tag{2.1.22}$$

Пусть числа $\lambda_{kl}, \alpha_{kl}, \beta_{kl}$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q},\\ &\alpha_{kl} = \alpha + \alpha_k,\\ &\beta_{kl} = \beta + \beta_k. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Аналогично неравенству (2.1.21) доказывается, что

$$\begin{aligned} &\left\{\int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\Big)^{\lambda_{kl}}\,dx\right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll \\ &\qquad \ll \left\{\int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha_k,\beta_k}(x_n)|u^{(k)}(x)|\Big)^{p_k}\,dx\right\}^{1/p_k} \times \\ &\qquad\qquad \times \left\{\int\limits_{R_n^+} \Big(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)|v^{(l)}(x)|\Big)^{q}\,dx\right\}^{1/q}. \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Так как $|k| < r$ и $u(x) \in \widetilde{W}^{\,r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, то имеет место неравенство (2.1.10), где p_k любое число не меньше p и числа α_k, β_k определяются равенствами (см. (2.1.8), (2.1.9))

$$\alpha_k = \alpha,$$

$$\beta_k = \beta - r + |k| - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p}.$$

Подставляя эти значения в (2.1.23) получим

$$\alpha_{kl} = 2\alpha + 1,$$

$$\beta_{kl} = 2\beta - r + |k| - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p}.$$

Так как p_k - любое число не меньше p, то подставляя в эти равенства и в (2.1.23), $\varepsilon_l = 1/p_k$, получаем (2.1.4).

Далее легко можно заметить, что в силу неравенств (2.1.10), (2.1.22) из (2.1.24) следует основное неравенство теоремы 2.1.5, то есть неравенство (2.1.1)

Теорема 2.1.5 доказана полностью.

2.2 Вариационная задача Дирихле в полупространстве с неоднородными граничными условиями

Прежде чем приступить к исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле в полупространстве с неоднородными граничными условиями сформулируем результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле в полупространстве с однородными граничными условиями, который является частным случаем результатов §1.3 первой главы.

Пусть $\sigma(x)$, $\vec{g}(x)$, $L^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$, $W^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})$ такие же объекты как в первой главе. Положим

$$\begin{aligned} &\Omega = R_n^+,\ \sigma(x) = \sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{r(n-1)}, \\ &g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_n(x) = x_n. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Тогда

$$\left\|u; L^r_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) \left| u^{(k)}(x) \right| \right)^p dx \right\}^{1/p},$$

$$\left\|u; L^0_{p,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| = \left\{ \int_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) \cdot x_n^{-r} \left| u(x) \right| \right)^p dx \right\}^{1/p},$$

и поэтому с точностью до эквивалентности норм имеет место следующее равенство

$$W^r_p(R_n^+;\sigma,\vec{g}) = V^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+).$$

Из равенств (2.2.1) следует, что

$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \dots g_n^{-r+k_n}(x) = \sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|k|}.$$

В рассматриваемом случае полуторалинейная форма (1.3.1) принимает следующий вид

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{R_n^+} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx,$$

где

$$p_k(x) = \sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|k|}$$

и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, определенные в полупространстве R_n^+.

Задача D'_λ. *Для заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения*

$$B[U,v] + \lambda \int\limits_{R_n^+} \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-2r} U(x) \overline{v(x)} dx = < F, v > \quad (v \in C_0^\infty(R_n^+)), \quad (2.2.2)$$

принадлежащее пространству $V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$.

Заметим, что в случае достаточной гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ и правой части F уравнения (2.2.2) решение $U(x)$ задачи D'_λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{|k|,|l| \le r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) U^{(k)}(x) \right)^{|l|} +$$
$$+ \lambda \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-2r} U(x) = F(x), \; x \in R_n^+.$$

Теперь сформулируем результат о разрешимости задачи D'_λ, который следует из теоремы 1.3.1 первой главы.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены условия:*

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$Re \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in R_n^+$, $\xi \in R_n$ (c-положительное число, не зависящее от x, ξ), и для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(y)| < \nu$$

для всех $x, y \in R_n^+$ *таких, что*

$$|x_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon y_n, \quad i = \overline{1,n};$$

II)коэффициенты $a_{kl}(x)$ *при* $|k|, |l| \le r$ *и* $|k|+|l| \le 2r-1$ *принадлежат пространству* $L_{p_{kl}}\left(R_n^+; x_n^{-n/p_{kl}}\right)$, *где*

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \le r-1, \ |l| \le r, \\ q_{lk} & \text{при } |k| = r, \ |l| \le r-1, \end{cases}$$

а числа q_{kl} *определяются соотношениями:*

$$\frac{n}{2r - |k| - |l|} < q_{kl} \le \frac{n}{r - |l|}, \text{если } n > 2(r - |k|), \quad n > 2(r - |l|);$$

$$\frac{n}{r - |k| + \varepsilon_1 n} < q_{kl}, \ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}, \quad \text{если } n > 2(r - |k|), \ n \le 2(r - |l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r - |l| + \varepsilon_2 n}, \ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2} \ \text{если } n \le 2(r - |k|), \ n > 2(r - |l|), \\ \\ \text{любое конечное число } >1, \text{ если } \ n \le 2(r - |k|), \ n \le 2(r - |l|). \end{cases}$$

Тогда существует число $\lambda_0 \ge 0$ *такое, что при* $\lambda > \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in \left(V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\right)'$ *задача* D_λ' *имеет единственное решение* $U(x)$ *и при этом выполняется оценка*

$$\left\|U; V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\right\| \le M \left\|F; \left(V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\right)'\right\|,$$

где число $M > 0$ *не зависит от* F.

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1 и пусть также существует такое положительное число* c_0, *что*

$$c_0 \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|\right)^2 dx \le ReB[v,v] \tag{2.2.3}$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 2.1.1 при $\lambda_0 = 0$.

Доказательство. В условиях теоремы 2.2.1 имеет место аналог неравенства Гординга (1.2.10), согласно которого существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \ge 0$, что

$$ReB[v,v] \ge c_1 \left\|v; V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\right\|^2 - c_2 \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|\right)^2 dx \tag{2.2.4}$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Согласно результатам работ [9, 21] норма пространства $V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$ эквивалентна величине

$$\left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) \left| v^{(k)}(x) \right| \right)^2 dx + \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} \left| v(x) \right| \right)^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (2.2.5)$$

Поэтому из неравенства (2.2.4) следует, что

$$\operatorname{Re} B[v,v] \geq c_1 \left\| v; L_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+) \right\|^2 - c_2 \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)| \right)^2 dx \quad (2.2.6)$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Здесь и далее

$$\left\| v; L_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+) \right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) \left| v^{(l)}(x) \right| \right)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

В силу условия (2.2.3) из неравенства (2.2.6) следует, что

$$c_1 \left\| v; L_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+) \right\|^2 \leq \left(1 + c_2 \cdot c_0^{-1} \right) ReB[v,v] \quad (2.2.7)$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Так как величина (2.2.5) эквивалентна норме пространства $V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$, то из неравенств (2.2.3), (2.2.7) следует, что при некотором $M_0 > 0$ для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$ имеет место неравенство

$$M_0 \left\| v; V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+) \right\|^2 \leq \operatorname{Re} B[v,v]. \quad (2.2.8)$$

При выполнении равенств (2.2.1) из неравенства (1.3.11) первой главы следует, что

$$|B[u,v]| \leq M_3 \left\| u; V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+) \right\| \cdot \left\| v; V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+) \right\| \quad (2.2.9)$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$.

На основе неравенств (2.2.8), (2.2.9) применяя теорему Лакса-Мильграма (см.,например, [60, 61]) и поступая также как в доказательства теоремы 1.3.1 первой главы завершаем доказательство теоремы 2.2.2.

Задача D_0**.** *Для заданного функционала* $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)^{'}$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B[U,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int\limits_{R_n^+}p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)U^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx=<F,v> \quad (v\in C_0^\infty(R_n^+)),$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$.

Теорема 2.2.3. *Пусть*

$$-\alpha+\frac{1}{2}\notin\{1,2,\dots,r\},\ \beta+\frac{1}{2}\notin\{1,2,\dots,r\},\ \beta-r\ge\gamma \qquad (2.2.10)$$

и пусть выполнены все условия теоремы 2.2.2. Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)^{'}$ *задача* D_0 *имеет единственное решение* $U(x)$ *и при этом выполняется оценка*

$$\left\|U;W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\le M\left\|F;\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)^{'}\right\|,$$

где число $M>0$ *не зависит от* F.

Доказательство. Согласно теореме 2.1.1 при выполнении условий (2.2.10) имеет место следующее равенство

$$V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)=\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+).$$

Поэтому утверждение теоремы 2.2.3 следует из теоремы 2.2.2.

В силу плотности класса $C_0^\infty(R_n^+)$ в пространствах $V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$, $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, граничные условия в задачах $D_\lambda^{'}$ и D_0 формально считаются однородными. При некоторых дополнительных ограничениях на параметры α, β, γ можно выписать граничные условия задачи D_0 в явном виде. Пусть выполнены условия

$$-\alpha+\frac{1}{p}\notin\{1,2,\dots,r\},\ \beta+\frac{1}{p}\notin\{1,2,\dots,r\},\ \beta-r\ge\gamma$$

и пусть

$$-r+\frac{1}{2}<\alpha\le\frac{1}{2}\ ,\quad r+\frac{1}{2}\ge\beta,\quad r-\beta+1/2<s_0,$$
$$\gamma+s_0<1/2,\quad \gamma+s_0\ne-1/2,$$

где s_0 - целое число, удовлетворяющее неравенствам $r+\alpha-1/2\le s_0<r+\alpha+1/2$. Тогда в силу следствия 2.1.1 полунорма в пространстве $L^r_{2;\,\alpha,\,\beta}(R_n^+)$

эквивалента на функциях $u \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha,\beta,\,\gamma}(R_n^+)$ норме $\|u; W^r_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R_n^+)\|$. Поэтому из результатов П.И. Лизоркина [37] следует, что в рассматриваемом случае условие $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ задачи D_0 можно заменить на эквивалентное ему условие

$$U(x) \in \widetilde{W}{}^{r}_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R_n^+) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial^s U(x)}{\partial x_n^s}\right|_{x_n=0} = 0,\ s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Далее исследуем разрешимость вариационной задачи Дирихле с **неоднородными граничными условиями**. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{R_n^+} \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \tag{2.2.11}$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D. *Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ и заданного элемента $\Psi(x) \in \widetilde{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ требуется найти решение $U(x) \in \widetilde{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ уравнения*

$$\mathbb{B}[U, v] = < F, v >,\ \forall v \in C_0^\infty(R_n^+), \tag{2.2.12}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+). \tag{2.2.13}$$

Предположим, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ полуторалинейной формы (2.2.11) удовлетворяют условиям:

I^o) при $|k| = |l| = r$ коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \ge c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in R_n^+$, $\xi \in R_n$ (c - положительное число, не зависящее от x, ξ), и для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(y)| < \nu$$

для всех $x, y \in R_n^+$ таких, что

$$|x_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon y_n,\ i = \overline{1, n};$$

II^o) при $|k|+|l| \le 2r-1$ коэффициенты a_{kl} принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(R_n^+;\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)\right)$, где числа $\alpha_{kl},\beta_{kl},p_{kl}$ определяются соотношениями:

а)если $|k|<r,\ |l|<r$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= -\frac{n}{2}+\frac{n}{p_{kl}}+n\delta_k-r+|l|,\\
\beta_{kl} &= 2r-|k|-|l|-(n-1)\delta_k+\frac{n}{2}-\frac{n}{p_{kl}},\\
\frac{1}{p_{kl}} &= 1-\delta_k-\varepsilon_l-\left(\frac{1}{2}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+,
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

а числа δ_k,ε_l из интервала $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ удовлетворяют условиям

$$0<\frac{1}{2}-\delta_k-\varepsilon_l<\min\left\{\frac{1}{2},\frac{r-|k|}{n}\right\};$$

б)если $|k|=r,\ |l|\le r-1$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= \frac{n}{p_{kl}}-r+|l|,\\
\beta_{kl} &= -\frac{n}{p_{kl}}+r-|l|,\\
\frac{1}{p_{kl}} &= \frac{1}{2}-\varepsilon_0-\left(\frac{1}{2}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+,
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

а ε_0 - достаточно малое положительное число;

в)если $|k|\le r-1,\ |l|=r$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= \frac{1}{2}-\delta_k,\\
\beta_{kl} &= r-|k|-\frac{1}{2}+\delta_k,\\
\frac{1}{p_{kl}} &= \frac{1}{2}-\delta_k.
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

В этих условиях число δ_k такое, что

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\le\delta_k<\frac{1}{2}.$$

Теорема 2.2.4. *Пусть выполнены условия I^o), II^o) и пусть существует такое положительное число c_0, что*

$$c_0\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)x_n^{-r}|v(x)|\right)^2dx\le Re\,\mathbb{B}[v,v] \tag{2.2.17}$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Пусть также

$$\alpha < -\frac{1}{2},\ -\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ *и любого заданного элемента* $\Psi \in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ *задача* D *имеет единственное решение* $U(x)$ *и при этом выполняется оценка*

$$\left\|U; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leq \\ \leq M \left\{ \left\| F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)' \right\| + \left\|\Psi; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \right\}, \quad (2.2.18)$$

где число M *не зависит от* F *и* Ψ.

Доказательство. Для удобства чтения сначала сформулируем результат теоремы 2.1.5 в случае $p = q = 2$.

Лемма 2.2.1. *Пусть* γ *- произвольное вещественное число и числа* α, β *удовлетворяют условиям*

$$\alpha < -\frac{1}{2},\ \beta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Тогда для всех мультииндексов k, l *таких, что* $|k|, |l| \leq r$, $|k| + |l| \leq 2r - 1$ *и всех функций* $u \in \widetilde{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\hat{\alpha}_{kl}, \hat{\beta}_{kl}}(x_n) \left| u^{(k)}(x) v^{(l)}(x) \right| \right)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll \\ \ll \left\|u; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \cdot \left\|v; V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right\|,$$

где числа $\hat{\alpha}_{kl}, \hat{\beta}_{kl}, \lambda_{kl}$ *определяются следующими соотношениями:*

1)если $|k| < r$, $|l| < r$, *то*

$$\hat{\alpha}_{kl} = 2\alpha + n\varepsilon_l + \left(r - |l| - \frac{n}{2}\right)_+,$$
$$\hat{\beta}_{kl} = 2\beta - r + |k| - \delta_k - n\varepsilon_l - \left(r - |l| - \frac{n}{2}\right)_+,$$
$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \delta_k + \varepsilon_l + \left(\frac{1}{2} - \frac{r - |l|}{n}\right)_+;$$

2)если $|k|=r,\ |l|\le r-1$, *то*

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{kl}&=2\alpha+n\varepsilon_l+\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_+,\\ \hat{\beta}_{kl}&=2\beta-n\varepsilon_l-\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_+,\\ \frac{1}{\lambda_{kl}}&=\frac{1}{2}+\varepsilon_l+\left(\frac{1}{2}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+;\end{aligned}$$

3)если $|k|\le r-1,\ |l|=r$, *то*

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{kl}&=2\alpha,\\ \hat{\beta}_{kl}&=2\beta-r+|k|+\frac{1}{2}-\delta_k,\\ \frac{1}{\lambda_{kl}}&=\frac{1}{2}+\delta_k.\end{aligned}$$

Здесь δ_k,ε_l *- произвольные числа из интервала* $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int\limits_{R_n^+}b_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx. \tag{2.2.19}$$

Предположим, что коэффициенты $b_{kl}(x)$ формы (2.2.19) удовлетворяют условиям:

1) при $|k|=|l|=r$ коэффициенты $b_{kl}(x)$ имеют вид

$$b_{kl}(x)=\sigma_{\alpha,\beta}(x)a_{kl}(x), \tag{2.2.20}$$

где $a_{kl}(x)$ - ограниченные функции;

2)при $|k|,|l|\le r$ и $|k|+|l|\le 2r-1$ коэффициенты $b_{kl}(x)$ принадлежат пространству $L_{\mu_{kl}}\left(R_n^+;\sigma_{-\hat{\alpha}_{kl},-\hat{\beta}_{kl}}(x_n)\right)$, где $\mu_{kl}=\lambda_{kl}/(\lambda_{kl}-1)$, а числа $\hat{\alpha}_{kl},\hat{\beta}_{kl},\lambda_{kl}$ такие же как в лемме 2.2.1.

Лемма 2.2.2. *Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда для любого элемента* $\Psi(x)\in\widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ *функционал* G, *определенный равенством*

$$< G,v >=-\mathbb{B}[\Psi,v]\ \left(v\in V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right), \tag{2.2.21}$$

принадлежит пространству $\left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'$ *и справедливо неравенство*

$$\left\|G;\left(V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right)'\right\|\le M\left\|\Psi;W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|, \tag{2.2.22}$$

где число $M > 0$ *не зависит от* Ψ.

Доказательство. Полуторалинейную форму (2.2.19) представим в виде

$$\mathbb{B}[u,v] = \mathbb{B}^{(1)}[u,v] + \mathbb{B}^{(2)}[u,v], \tag{2.2.23}$$

где

$$\mathbb{B}^{(1)}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{R_n^+} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx,$$

$$\mathbb{B}^{(1)}[u,v] = \sum_{|k|+|l|\leq 2r-1} \int_{R_n^+} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx.$$

Применяя неравенство (2.2.20) и неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\left|\mathbb{B}^{(1)}[u,v]\right| \ll \sum_{|k|=|l|=r} \int_{R_n^+} \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) \left|u^{(k)}(x)\right| \left|v^{(l)}(x)\right| dx \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) \left|u^{(k)}(x)\right|\right)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{|l|=r} \int_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) \left|v^{(l)}(x)\right|\right)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Отсюда легко следует, что

$$\left|\mathbb{B}^{(1)}[u,v]\right| \ll \left\|u; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \cdot \left\|v; V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right\| \tag{2.2.24}$$

для всех $u \in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v \in V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$.

Так как

$$\frac{1}{\mu_{kl}} + \frac{1}{\lambda_{kl}} = 1,$$

то в силу условия 2) применяя неравенство Гельдера имеем

$$\left|\mathbb{B}^{(2)}[u,v]\right| \ll$$
$$\ll \sum_{|k|+|l|\le 2r-1} \int\limits_{R_n^+} \sigma_{-\hat{\alpha}_{kl},-\hat{\beta}_{kl}}(x_n)|b_{kl}(x)|\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)\left|u^{(k)}(x)\right|\left|v^{(l)}(x)\right|dx \ll$$
$$\ll \sum_{|k|+|l|\le 2r-1} \left\{\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{-\hat{\alpha}_{kl},-\hat{\beta}_{kl}}(x_n)|b_{kl}(x)|\right)^{\mu_{kl}}dx\right\}^{1/\mu_{kl}} \times$$
$$\times \left\{\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\hat{\alpha}_{kl},\hat{\beta}_{kl}}(x_n)\left|u^{(k)}(x)\right|\left|v^{(l)}(x)\right|\right)^{\lambda_{kl}}dx\right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$
$$\ll \sum_{|k|+|l|\le 2r-1} \left\{\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\hat{\alpha}_{kl},\hat{\beta}_{kl}}(x_n)\left|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)\right|\right)^{\lambda_{kl}}dx\right\}^{1/\lambda_{kl}}.$$

Далее применяя лемму 2.2.1, получим

$$\left|\mathbb{B}^{(2)}[u,v]\right| \ll \left\|u;W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\cdot\left\|v;V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right\| \qquad (2.2.25)$$

для всех $u\in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v\in V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$.

В силу неравенств (2.2.24), (2.2.25) из равенства (2.2.23) следует, что

$$|\mathbb{B}[u,v]| \ll \left\|u;W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\cdot\left\|v;V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right\|$$

для всех $u\in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$, $v\in V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$.

Из последнего неравенства следует, что функционал G, определенный равенством (2.2.21), удовлетворяет следующей оценке

$$|<G,\Psi>| \ll \left\|\Psi;W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\cdot\left\|v;V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)\right\|$$

для всех $v\in V^r_{2;\alpha,\beta}(R_n^+)$. Отсюда следует неравенство (2.2.22).

Лемма 2.2.2 доказана

Числа μ_{kl}, которые имеются в условиях леммы 2.2.2, определяются равенством

$$\mu_{kl}=\frac{\lambda_{kl}}{(\lambda_{kl}-1)},$$

где числа λ_{kl} такие же как в лемме 2.2.1. Отсюда и из условий леммы 2.2.1 следует, что

1) если $|k| < r$, $|l| < r$, то

$$\frac{1}{\mu_{kl}} = 1 - \frac{1}{\lambda_{kl}} = 1 - \delta_k - \varepsilon_l - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+;$$

2) если $|k| = r$, $|l| \leq r-1$, то

$$\frac{1}{\mu_{kl}} = \frac{1}{2} - \varepsilon_l - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+;$$

3) если $|k| \leq r-1$, $|l| = r$, то

$$\frac{1}{\mu_{kl}} = \frac{1}{2} - \delta_k.$$

Здесь ε_l, δ_k - произвольные числа из интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Утверждение 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.4 коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (2.2.11) удовлетворяют условиям теоремы 2.2.3.*

Доказательство. Не трудно заметить, что условие (2.2.3) следует из (2.2.17), а условие I^o) совпадает с условием I) теоремы 2.2.1. Условие II) этой теоремы для коэффициентов a_{kl} полуторалинейной формы (2.2.11) примет следующий вид:

II') при $|k| + |l| \leq 2r-1$ имеет место включение

$$a_{kl}(x) x_n^{2r-|k|-|l|} \in L_{p_{kl}}\left(R_n^+; x_n^{-n/p_{kl}}\right),$$

где числа p_{kl} такие же как в теореме 2.2.1.

Проверим условие II') в случае $|k| < r, |l| < r$. В этом случае согласно условию II^o) имеет место неравенство

$$\int\limits_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)|a_{kl}(x)|\right)^{p_{kl}} dx < +\infty, \tag{2.2.26}$$

где

$$\alpha_{kl} = -r + |l| - \frac{n}{2} + n\delta_k + \frac{n}{p_{kl}},$$

$$\beta_{kl} = 2r - |k| - |l| - (n-1)\delta_k + \frac{n}{2} - \frac{n}{p_{kl}}.$$

Так как

$$\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) = \varphi(x_n) x_n^{-\alpha_{kl}} + (1 - \varphi(x_n)) x_n^{\beta_{kl}},$$

то из определения функции $\varphi(x_n)$ при $0 < x_n \le 1$ следует, что

$$x_n^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}}\sigma^{-1}_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) \ll x_n^{r-|k|-n/2+n\delta_k}.$$

Отсюда в силу неравенств

$$r-|k| \ge 1,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{n} < \delta_k$$

следует, что

$$x_n^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}} \ll \sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n). \tag{2.2.27}$$

Если же $x_n \ge 1$, то

$$x_n^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}}\sigma^{-1}_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) \ll x_n^{(n-1)\delta_k-n/2}.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\delta_k(n-1)-\frac{n}{2} = -\delta_k - n\left(\frac{1}{2}-\delta_k\right) < 0$$

следует справедливость неравенства (2.2.27) в случае $x_n \ge 1$.

Используя (2.2.26), (2.2.27) имеем

$$\left\|\frac{a_{kl}(x)}{x_n^{-2r+|k|+|l|}}; L_{p_{kl}}\left(R_n^+; x_n^{-n/p_{kl}}\right)\right\| =$$

$$= \left\{\int\limits_{R_n^+}\left(x_n^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}}|a_{kl}(x)|\right)^{p_{kl}} dx\right\}^{1/p_{kl}} \ll$$

$$\ll \left\{\int\limits_{R_n^+}\left(\sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)|a_{kl}(x)|\right)^{p_{kl}} dx\right\}^{1/p_{kl}} < +\infty. \tag{2.2.28}$$

Следовательно, условие $II')$ в случае $|k| < r$, $|l| < r$ выполняется, если мы покажем, что число p_{kl} удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1.

В теореме 2.2.1 при $|k| < r$, $|l| < r$ имеются следующие ограничения на числа p_{kl}:

$$\frac{n}{2r-|k|-|l|} < p_{kl} \le \frac{n}{r-|l|}, \text{если } n > 2(r-|k|),\quad n > 2(r-|l|);$$

$$\frac{n}{r-|k|+\varepsilon_1 n} < p_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2},\quad \text{если } n > 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|);$$

$$p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0<\varepsilon_2<\dfrac{1}{2} \text{ если } n \le 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \text{любое конечное число} >1, \text{ если } \ n \le 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|). \end{cases}$$

В условиях теоремы 2.2.4 числа p_{kl} определяются равенством

$$\frac{1}{p_{kl}} = 1-\delta_k-\varepsilon_l-\left(\frac{1}{2}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+. \tag{2.2.29}$$

Пусть $n > 2(r-|l|)$. Тогда согласно последнему равенству

$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2}-\delta_k-\varepsilon_l+\frac{r-|l|}{n}. \tag{2.2.30}$$

Условия теоремы 2.2.1 в этом случае записываются в виде

$$\frac{r-|l|}{n} \le \frac{1}{p_{kl}} < \frac{r-|l|}{n}+\frac{r-|k|}{n},\ \text{если } n > 2(r-|k|),$$

$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{r-|l|}{n}+\varepsilon_2,\ \text{если } n \le 2(r-|k|).$$

Числа p_{kl}, определенные равенством (2.2.30) удовлетворяют этим условиям, так как в условиях нашей теоремы

$$0 < \frac{1}{2}-\delta_k-\varepsilon_l < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r-|k|}{n}\right\}.$$

Пусть $n \le 2(r-|l|)$. Тогда из (2.2.29) следует, что

$$\frac{1}{p_{kl}} = 1-\delta_k-\varepsilon_l. \tag{2.2.31}$$

Условия теоремы 2.2.1 в этом случае записываются в виде

$$\frac{1}{p_{kl}} < \frac{r-|k|}{n}+\varepsilon_1,\ 0<\varepsilon_1<\frac{1}{2},\ \text{если } n > 2(r-|k|),$$

$$p_{kl}\ \text{ - любое конечное число} >1, \text{ если } \ n \le 2(r-|l|).$$

В рассматриваемом случае числа δ_k, ε_l удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2}-\delta_k-\varepsilon_l < \frac{r-k}{n}.$$

Тогда существует достаточно малое положительное число ε такое, что

$$\frac{1}{2} - \delta_k - \varepsilon_l + \varepsilon < \frac{r-|k|}{n}.$$

Отсюда и из (2.2.31) следует, что

$$\frac{1}{p_{kl}} < \frac{r-|k|}{n} + \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Это означает, что числа p_{kl} удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1 в случае $n \le 2(r-|l|)$, $|k| < r$, $|l| < r$.

Проверим условие II') в случае $|k| \le r-1$, $|l| = r$. В этом случае $\alpha_{kl} = \dfrac{1}{2} + \delta_k$, $\beta_{kl} = r - |k| + \delta_k - \dfrac{1}{2}$, и поэтому

$$x_n^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}} \sigma^{-1}_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) \ll x_n^{r-|k|+\frac{1}{2}+\delta_k-n/p_{kl}}$$

при $0 < x_n \le 1$. Так как

$$r - |k| - \frac{n}{p_{kl}} \ge 1 - \frac{n}{p_{kl}} = 1 - \frac{n}{2} + \delta_k n \ge 0,$$

то отсюда следует неравенство (2.2.27) при $0 < x_n \le 1$.

В случае $x_n \ge 1$ имеем

$$x_n^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}} \sigma^{-1}_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) = x_n^{r-|k|-n/p_{kl}} \sigma^{-1}_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) \ll x_n^{-\delta_k+1/2-n/p_{kl}}. \quad (2.2.32)$$

Заметим, что

$$-\delta_k + \frac{1}{2} - \frac{n}{p_{kl}} = -\delta_k + \frac{1}{2} - n\left(\frac{1}{2} - \delta_k\right) = -(n-1)\left(\frac{1}{2} - \delta_k\right) \le 0.$$

Поэтому из (2.2.32) следует неравенство (2.2.27) в случае $x_n \ge 1$.

Покажем, что число p_{kl} из теоремы 2.2.4 удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1. В случае $|k| \le r-1$, $|l| = r$ в условиях теоремы 2.2.1 имеются следующие ограничения на число p_{kl}: если $n > 2(r-|k|)$, то $p_{kl} > n/(r-|k|)$, а если $n \le 2(r-|k|)$, то p_{kl} - любое конечное число ≥ 2. Так как

$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \delta_k$$

и число δ_k удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le \delta_k < \frac{1}{2},$$

то легко проверяется, что число p_{kl} удовлетворяет этим условиям теоремы 2.2.1.

Повторяя вкладки, приведенные в (2.2.28) заключаем, что условие $II')$ выполняется и в случае $|k| \leq r-1$, $|l| = r$.

Рассмотрим случай $|k| = r$, $|l| \leq r-1$. В этом случае

$$\begin{aligned} &\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - r + |l| \\ &\beta_{kl} = -\frac{n}{p_{kl}} + r - |l| \\ &\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \varepsilon_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+, \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

где ε_0 - достаточно малое положительное число. В теореме 2.2.1 при $|k| = r$, $|l| \leq r-1$ имеются следующие ограничения на числа p_{kl}: если $n > 2(r-|l|)$, то $p_{kl} \geq n/(r-|l|)$ и p_{kl} - любое конечное число ≥ 2, в противном случае. Равенство (2.2.33) записывается в виде

$$\frac{1}{p_{kl}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \varepsilon_0 & \text{если } n \leq 2(r-|l|) \\ \\ \dfrac{r-|l|}{n} - \varepsilon_0 & \text{если } n > 2(r-|l|). \end{cases}$$

Отсюда легко следует, что числа p_{kl} удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1.

В случае $|k| = r$, $|l| \leq r-1$ имеем

$$x_n^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}} \sigma^{-1}_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n) \leq const,$$

что равносильно неравенству (2.2.27) и в силу которого имеет место неравенство (2.2.28).

Утверждение 2.2.1. доказано.

Утверждение 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.4 коэффициенты полуторалинейной формы (2.2.11) удовлетворяют условиям леммы 2.2.2.*

Доказательство. Коэффициенты полторалинейных форм (2.2.11) и (2.2.19) связаны равенством

$$b_{kl}(x) = \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) a_{kl}(x) \quad (|k|, |l| \leq r,\ x \in R_n^+).$$

Поэтому из ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ следует, что коэффициенты b_{kl} удовлетворяют условию 1) леммы 2.2.2.

Условие 2) леммы 2.2.2 в нашем случае означает, что

$$\sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n)a_{kl}(x) \in L_{\mu_{kl};-\hat\alpha_{kl},-\hat\beta_{kl}}(R_n^+) \tag{2.2.34}$$

при $|k|+|l|\le 2r-1$. Здесь $\mu_{kl}=\lambda_{kl}/(\lambda_{kl}-1)$ и числа $\hat\alpha_{kl},\hat\beta_{kl},\lambda_{kl}$ такие же как в лемме 2.2.1.

Пусть $|k|<r$, $|l|<r$. Тогда согласно условиям леммы 2.2.1

$$\begin{aligned}
&\hat\alpha_{kl}=2\alpha+n\varepsilon_l+\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_+,\\
&\hat\beta_{kl}=2\beta-r+|k|-n\varepsilon_l-\delta_k-\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_+,\\
&\frac{1}{\lambda_{kl}}=\delta_k+\varepsilon_l+\left(\frac{1}{2}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$2\alpha-\hat\alpha_{kl}=-n\varepsilon_l-\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_+, \tag{2.2.35}$$

$$2\beta-\hat\beta_{kl}=r-|k|+n\varepsilon_l+\delta_k+\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_+, \tag{2.2.36}$$

$$\frac{1}{\mu_{kl}}=1-\frac{1}{\lambda_{kl}}=1-\delta_k-\varepsilon_l-\left(\frac{1}{2}-\frac{r-|l|}{n}\right)_+. \tag{2.2.37}$$

Отсюда и из (2.2.14) следует, что

$$\mu_{kl}=p_{kl}. \tag{2.2.38}$$

Учитывая это равенство из (2.2.37) находим

$$n\varepsilon_l=n-\delta_k n-\frac{n}{p_{kl}}-\left(\frac{n}{2}-r+|l|\right)_+.$$

Используя это равенство из (2.2.35), (2.2.36) исключим ε_l:

$$2\alpha-\hat\alpha_{kl}=-n+\delta_k n+\frac{n}{p_{kl}}+\left(\frac{n}{2}-r+|l|\right)_+-\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_+,$$

$$2\beta-\hat\beta_{kl}=r-|k|+n-\delta_k n-\frac{n}{p_{kl}}-\left(\frac{n}{2}-r+|l|\right)_++\left(r-|l|-\frac{n}{2}\right)_++\delta_k.$$

Эти равенства после упрощения принимают следующий вид

$$2\alpha-\hat\alpha_{kl}=-\frac{n}{2}+n\delta_k+\frac{n}{p_{kl}}-r+|l|,$$

$$2\beta-\hat\beta_{kl}=2r-|k|-|l|+\frac{n}{2}-n\delta_k-\frac{n}{p_{kl}}.$$

Отсюда и из равенств (2.2.14) следует, что

$$\begin{aligned} &2\alpha - \hat{\alpha}_{kl} = \alpha_{kl}, \\ &2\beta - \hat{\beta}_{kl} = \beta_{kl}. \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

Поэтому из условия $a_{kl}(x) \in L_{p_{kl};\alpha_{kl},\beta_{kl}}(R_n^+)$ следует условие (2.2.34).

Пусть $|k| = r,\ |l| \le r-1$. Тогда согласно условиям леммы 2.2.1

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_{kl} = 2\alpha + n\varepsilon_l + \left(r - |l| - \frac{n}{2}\right)_+, \\ &\hat{\beta}_{kl} = 2\beta - n\varepsilon_l - \left(r - |l| - \frac{n}{2}\right)_+, \\ &\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{2} + \varepsilon_l + \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+. \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\mu_{kl}} = 1 - \frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{2} - \varepsilon_l - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+. \tag{2.2.41}$$

Если положить $\varepsilon_l = \varepsilon_0$ - достаточно малое положительное число, то отсюда и из (2.2.15) следует равенство (2.2.38). Из (2.2.38), (2.2.41) находим

$$n\varepsilon_l = \frac{n}{2} - \frac{n}{p_{kl}} - \left(\frac{n}{2} - r + |l|\right)_+.$$

Используя это равенство из (2.2.40) исключим ε_l

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_{kl} = 2\alpha + \frac{n}{2} - \frac{n}{p_{kl}} - \left(\frac{n}{2} - r + |l|\right)_+ + \left(r - |l| - \frac{n}{2}\right)_+, \\ &\hat{\beta}_{kl} = 2\beta - \frac{n}{2} + \frac{n}{p_{kl}} + \left(\frac{n}{2} - r + |l|\right)_+ - \left(r - |l| - \frac{n}{2}\right)_+. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} &2\alpha - \hat{\alpha}_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - r + |l|, \\ &2\beta - \hat{\beta}_{kl} = -\frac{n}{p_{kl}} + r - |l|, \end{aligned}$$

то есть выполняются равенства (2.2.39) и из условия $a_{kl}(x) \in L_{p_{kl};\alpha_{kl},\beta_{kl}}(R_n^+)$ следует условие (2.2.34).

Теперь рассмотрим случай $|k| \le r-1,\ |l| = r$. В этом случае условия леммы 2.2.1 имеют вид

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_{kl} = 2\alpha, \\ &\hat{\beta}_{kl} = 2\beta - r + |k| + \frac{1}{2} - \delta_k, \\ &\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{2} + \delta_k. \end{aligned}$$

Следовательно
$$\frac{1}{\mu_{kl}} = 1 - \frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{2} - \delta_k = \frac{1}{p_{kl}}.$$
Отсюда и из (2.2.16) следует, что
$$2\alpha - \hat{\alpha}_{kl} = 0 \le \alpha_{kl} = \tfrac{1}{2} - \delta_{kl}$$
$$2\beta - \hat{\beta}_{kl} = r - |k| - \frac{1}{2} + \delta_{kl} = \beta_{kl}.$$

Поэтому
$$\sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) \cdot \sigma_{-\hat{\alpha}_{kl},-\hat{\beta}_{kl}}(x_n) \ll \sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n)$$
и в силу этого из условия $a_{kl}(x) \in L_{p_{kl};\alpha_{kl},\beta_{kl}}(R_n^+)$ следует условие (2.2.34).

Утверждение 2.2.2 доказано.

Теперь приступим к непосредственному доказательству теоремы 2.2.4.

Пусть задана функция $\Psi(x) \in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ и пусть G - функционал определенный равенством
$$< G, v >= -\mathbb{B}[\Psi, v],\ v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+). \tag{2.2.42}$$
Согласно утверждения 2.2.2 выполняются все условия леммы 2.2.2. В силу этой леммы функционал G принадлежит пространству $\left(\widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ и справедливо неравенство
$$\left\| G; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)' \right\| \le M_0 \left\| \Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+) \right\| \tag{2.2.43}$$
где число $M_0 > 0$ не зависит от $\Psi(x)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ требуется найти решение $U_*(x)$ уравнения
$$\mathbb{B}[U_*, v] =< F + G, v >, \quad \forall v \in C_0^\infty(R_n^+), \tag{2.2.44}$$
принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$.

Согласно утверждению 2.2.1 полуторалинейная форма $\mathbb{B}[u, v]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2.3. В силу этой теоремы вспомогательная задача имеет единственное решение $U_*(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ и имеет место следующая оценка
$$\left\| U_*; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+) \right\| \le M_1 \left\| F + G; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)' \right\|. \tag{2.2.45}$$

Пусть $U_*(x)$ - решение вспомогательной задачи. Рассмотрим функцию

$$U(x) = U_*(x) + \Psi(x).$$

Из (2.2.42), (2.2.44) следует, что

$$\mathbb{B}[U, v] = \mathbb{B}[U_*, v] + \mathbb{B}[\Psi, v] =< F + G, v > - < G, v >=< F, v > \\ \left(\forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right),$$

то есть функция $U(x)$ удовлетворяет уравнению (2.2.12).

С другой стороны

$$U(x) - \Psi(x) = U_*(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+),$$

то есть функция $U(x)$ удовлетворяет граничному условию (2.2.13).

Таким образом, мы показали, что $U(x)$ является решением задачи D. Из единственности решения $U_*(x)$ вспомогательной задачи следует единственность $U(x)$.

Используя оценки (2.2.43), (2.2.45), имеем

$$\left\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leq \left\|U_*; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| + \left\|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leq \\ \leq M_1 \left\{ \left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\| + \left\|G; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\| \right\} + \left\|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leq \\ \leq M_1 \left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\| + (1 + M_1 M_0) \left\|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|.$$

Отсюда следует оценка (2.2.18) теоремы 2.2.4.

Теорема 2.2.4 доказана полностью.

Далее рассмотрим более конкретный случай задачи D, когда граничные условия на гиперплоскости $x_n = 0$ выписываются в явном виде. Справедлива следующая лемма

Лемма 2.2.3. *Пусть $-r + \frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда для любого набора функций*

$$\psi_j \in B_2^{r+\alpha-\frac{1}{2}-j}(R_{n-1}), \quad j = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \tag{2.2.46}$$

где $B_2^\nu(R_{n-1})$ – классы Бесова функций, определенных на R_{n-1}, s_0 – целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$r + \alpha - \frac{1}{2} < s_0 < r + \alpha + \frac{1}{2},$$

существует функция $\Psi \in L^r_{2;-\alpha}(R^+_n)$ *такая, что:*

$$\Psi(x) \equiv 0 \quad \text{на} \quad R^+_n \backslash \Omega_{1/2};$$

$$\left.\frac{\partial^j \Psi}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} = \psi_j(x'),\ j = 0, 1, \ldots, s_0 - 1; \tag{2.2.47}$$

$$\left\|\Psi; L^r_{2;-\alpha}(R^+_n)\right\| \ll \sum_{j=0}^{s_0-1} \left\|\psi_j; B_2^{r+\alpha-j-1/2}(R_{n-1})\right\|. \tag{2.2.48}$$

Доказательство следует из результатов параграфа 2.9.2 монографии Х. Трибеля [57].

Задача D_1**.** *Для заданного функционала* $F \in \left(\widetilde{W}^r_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R^+_n)\right)'$ *и заданного набора граничных функций* (2.2.46) *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения* (2.2.12), *принадлежащее пространству* $\widetilde{W}^r_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R^+_n)$ *и удовлетворяющее граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial^j U(x)}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} = \psi_j(x'),\ j = 0, 1, \ldots, s_0 - 1. \tag{2.2.49}$$

Теорема 2.2.5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.2.4 *и пусть числа* α, β, γ *удовлетворяют условиям*

$$-r + \frac{1}{2} < \alpha < 0, \quad r + \frac{1}{2} \geq \beta, \quad r - \beta + 1/2 < s_0,$$
$$\gamma + s_0 < 1/2, \quad \gamma + s_0 \neq -1/2, \quad \beta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\widetilde{W}^r_{2;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(R^+_n)\right)'$ *и любого заданного набора граничных функций* (2.2.46) *существует единственное решение* $U(x)$ *задачи* D_1 *и при этом выполняется оценка*

$$\left\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right\| \leq$$
$$\leq M \left\{ \left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right)'\right\| + \sum_{j=0}^{s_0-1} \left\|\psi_j; B_2^{r+\alpha-j-1/2}(R_{n-1})\right\| \right\}, \tag{2.2.50}$$

где число $M > 0$ *не зависит от* F *и набора граничных функций* (2.2.46).

Доказательство. Пусть $\Psi(x)$ – функция из леммы 2.2.3, которая определяется граничными функциями (2.2.46). Так как в условиях теоремы 2.2.5 выполняются все условия теоремы 2.2.4, то существует единственное решение $U(x)$ задачи D с этой функцией $\Psi(x)$. Далее докажем, что это решение $U(x)$ удовлетворяет граничным условиям (2.2.49). В условиях теоремы 2.2.5 также выполняются все условия теоремы 2.1.2, согласно которой (см. следствие 2.1.1) полунорма в пространстве $L^r_{2;\alpha,\beta}(R^+_n)$ эквивалентна на функциях $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ норме в $W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$. Поэтому граничное условие (2.2.13) означает, что

$$V(x) = U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{L}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta}(R^+_n).$$

Отсюда и из результатов работы П.И. Лизоркина [37] следует, что

$$\left.\frac{\partial^s V(x)}{\partial x_n^s}\right|_{x_n=0} = 0,\ \ s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Следовательно (см. (2.2.47)), решение $U(x)$ уравнения (2.2.12) удовлетворяет граничным условиям (2.2.49) и поэтому является решением задачи D_1.

В силу неравенства (2.2.48) из (2.2.18) следует оценка (2.2.50).

Теорема 2.2.5 доказана.

2.3 Вспомогательные интегральные неравенства для дифференцируемых функций в дополнении неограниченного многообразия

Пусть a, h - положительные числа и m - натуральное число меньшее n. Определим следующие множества в n-мерном евклидовом пространстве R_n:

$$S_h^{(m)} = \left\{ x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n; x_1 = x_2 \cdots = x_m = 0; \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2 < h^2 \right\};$$

$$K_h = \left\{ x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n; 0 < x_n < h; \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < a^2 x_n^2 \right\}.$$

Символом $K_h(\xi)$, где $\xi \in R_n$ и $|\xi| = h$, обозначим конус, который получается путем поворота конуса K_h вокруг начала координат так, что при этом точка $(0, 0, \ldots, 0, h)$ переходит в точку ξ. Объединение всех конусов $K_h(\xi)$, когда ξ пробегает $\partial S_h^{(m)}$ обозначим через $V_h^{(m)}$.

Определение 2.3.1. *Неограниченное C^o-многообразие $\mathfrak{M} \subset R_n$ размерности m называется многообразием удовлетворяющим условию конуса, если существует линейное преобразование $A: R_n \to R_n$, осуществляющее поворот вокруг начала координат, такое, что*

$$x + AV_h^{(m)} \subset R_n \setminus \mathfrak{M}.$$

Далее предполагаем, что $\mathfrak{M}$ - неограниченное C^o-многообразие размерности $m \in [1, n-1]$, удовлетворяющее условию конуса, $\Omega = R_n \setminus \mathfrak{M}$ и $\rho(x) = dist\{x, \mathfrak{M}\}$ для всех $x \in \Omega$.

Пусть функция $\psi(t) \in C^\infty(0, +\infty)$ такая, что $0 \leq \psi(t) \leq 1$ для всех $t \in [1/2, 1]$; $\psi(t) \equiv 0$ при $t \geq 1$ и $\psi(t) = 1$ для всех $t \in (0, 1/2]$. Для двух вещественных чисел α, β определим функцию

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \psi(\rho(x))\rho^{-\alpha}(x) + (1 - \psi(\rho(x)))\rho^{\beta}(x), \ x \in \Omega.$$

Пусть $p \in (1, +\infty)$ и пусть r - целое неотрицательное число. Определим следующие весовые классы функций, определенных в области Ω:

$$L^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega) = \left\{ u(x) : \left\| u; L^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega) \right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega (\varphi_{\alpha,\beta}(x)|u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\},$$

$$W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega) = \left\{ u(x) : \left\| u; W^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega) \right\| = \left\{ \left\| u; L^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega) \right\|^p + \left\| u; L^o_{p;\alpha,\gamma}(\Omega) \right\|^p \right\}^{1/p} < +\infty \right\}$$

$$V^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega) = \left\{ u(x) : \left\| u; V^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega) \right\| = \left\{ \sum_{|k|\leq r} \int_\Omega (\varphi_{\alpha,\beta}(x)\rho^{-r+|k|}(x)|u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}$$

Сформулируем некоторые известные свойства этих пространств.

Теорема 2.3.1. *Пусть r - целое неотрицательное число, α, β - вещественные числа. Тогда множество $C_o^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $V^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega)$ и для любого натурального числа s справедливо вложение*

$$V^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega) \to V^{r-s}_{p;\alpha+s,\beta-s}(\Omega).$$

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия* $-\alpha+\dfrac{n-m}{p}\notin\{1,2,\ldots,r\}$*;* $\beta+\dfrac{n-m}{p}\notin\{1,2,\ldots,r\}$, $\beta-r\geq\gamma$. *Тогда с точностью до эквивалентности норм выполняется равенство*

$$V^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega)=\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega).$$

Теоремы 2.3.1. и 2.3.2. доказаны в работе С. А. Исхокова и Г.И. Тарасовой [31]

Теорема 2.3.3. *Пусть целое число* s *такое, что* $1\leq s\leq r-1$*, и пусть выполнены условия*

$$\alpha_s-\alpha\leq r-s+\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{p}\right)(n-m),\ \alpha_s<\frac{n-m}{q_0},\ 1<p\leq q_0<\infty,$$

$$\beta-\beta_s\geq r-s+\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{p}\right)(n-m),\ \beta_s+r-s-1<-\frac{n-m}{q_0}.$$

Тогда для всех функций $u\in W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u;L^s_{q_0;\alpha_s,\beta_s}(\Omega)\|\ll\|u;W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|.$$

Теорема 2.3.4. *Пусть целое число* s *такое, что* $0\leq s\leq r-1$ *и пусть выполнены условия* $1<p\leq q_0<\infty$, $-\alpha+\dfrac{n-m}{p}\notin\{1,2,\ldots,r-s\}$, $\beta+\dfrac{n-m}{p}\notin\{1,2,\ldots,r-s\}$, $\beta-r\geq\gamma$.

Тогда для всех функций $u\in\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u;L^s_{q_0;\alpha_s,\beta_s}(\Omega)\|\ll\|u;W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|,$$

где

$$\alpha_s=\alpha+r-s-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}\right)(n-m),$$

$$\beta_s=\beta-r+s+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}\right)(n-m).$$

Эти теоремы доказаны в работе [14](см. также [13]).

Теперь сформулируем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 2.3.5. *Пусть* $p>1$, $q>1$, r *- натуральное число и пусть вещественные числа* α,β,γ *удовлетворяют условиям*

$$-\alpha+\frac{n-m}{q}\notin\{1,2,\ldots,\},\ \beta+\frac{n-m}{q}\notin\{1,2,\ldots,\},\ \beta-r\geq\gamma.$$

Тогда для всех мультииндексов k,l *таких, что* $\|k\|\leq r$, $\|l\|\leq r$, $\|k\|+\|l\|\leq 2r-1$ *и всех функций* $u\in W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, $v\in\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\right)^{\lambda_{kl}}dx\right\}^{1/\lambda_{kl}}\ll$$

$$\ll\|u;W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|\ \|v;W^r_{q;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|,\quad(2.3.1)$$

где числа α_{kl}, β_{kl}, λ_{kl} *определяются соотношениями*

$$\frac{1}{\lambda_{kl}}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q};$$

1) если $|k|\leq r-1$ *и* $|l|\leq r$, *то*

$$\alpha_{kl}\leq\alpha+r-|l|-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\lambda_{kl}}\right)(n-m)+$$
$$+\min\{-\varepsilon;\alpha+r-|k|-\frac{1}{p}(n-m)\},$$
$$\beta_{kl}\leq\beta-2r+|l|+|k|+1+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\lambda_{kl}}\right)(n-m)+$$
$$+\min\{-\varepsilon;\beta-1+\frac{1}{p}(n-m)\};\quad(2.3.2)$$

2)если $|k|=r$ *и* $|l|\leq r-1$, *то*

$$\alpha_{kl}=2\alpha+r-|l|-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{\lambda_{kl}}\right)(n-m),$$
$$\beta_{kl}=2\beta-r+|l|+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{\lambda_{kl}}\right)(n-m).\quad(2.3.3)$$

Здесь ε *- достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Рассмотрим случай $|k|<r$, $|l|<r$. Пусть числа p_k, q_l, α_k, α_l, β_k, β_l удовлетворяют условиям

$$\alpha_{kl}=\alpha_k+\alpha_l,\ \beta_{kl}=\beta_k+\beta_l,\ \frac{1}{\lambda_{kl}}=\frac{1}{p_k}+\frac{1}{q_l},\ p_k\geq 1,\ q_l\geq 1. \qquad (2.3.4)$$

Тогда учитывая неравенство

$$\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x)\leq c_1\varphi_{\alpha_k,\beta_k}(x)\varphi_{\alpha_l,\beta_l}(x)\ (x\in\Omega),$$

в силу леммы 1.1.4 имеем

$$\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|)^{\lambda_{kl}}dx\right\}^{1/\lambda_{kl}}\ll$$
$$\ll\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi_{\alpha_k,\beta_k}(x)|u^{(k)}(x)|)^{p_k}dx\right\}^{1/p_k}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi_{\alpha_l,\beta_l}(x)|v^{(l)}(x)|)^{q_l}dx\right\}^{1/q_l}. \qquad (2.3.5)$$

Согласно теореме 2.3.3. для всех функций $u\in W_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi_{\alpha_k,\beta_k}(x)|u^{(k)}(x)|)^{p_k}dx\right\}^{1/p_k}\ll\|u;W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|, \qquad (2.3.6)$$

если выполнены условия

$$\alpha_k-\alpha\leq r-|k|+(\frac{1}{p_k}-\frac{1}{p})(n-m),\ \alpha_k<\frac{n-m}{p_k},\ 1<p\leq p_k<\infty,$$
$$\beta-\beta_k\geq r-|k|+(\frac{1}{p_k}-\frac{1}{p})(n-m),\ \beta_k+r-|k|-1<-\frac{n-m}{p_k}. \qquad (2.3.7)$$

Из теоремы 2.3.4. следует, что

$$\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi_{\alpha_l,\beta_l}(x)|v^{(l)}(x)|)^{q_l}dx\right\}^{1/q_l}\ll\|v;W^r_{q;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|, \qquad (2.3.8)$$

для всех функций $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{q;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, если выполнены условия

$$1 < q \le q_l < \infty,\ -\alpha + \frac{n-m}{q} \notin \{1,2,\dots,r-|l|\},$$

$$\beta + \frac{n-m}{q} \notin \{1,2,\dots,r-|l|\},\ \beta - r \ge \gamma,$$

$$\alpha_l = \alpha + r - |l| - (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m),$$

$$\beta_l = \beta - r + |l| + (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m). \quad (2.3.9)$$

Ниже мы докажем, что числа α_{kl}, β_{kl}, λ_{kl}, определенные равенствами (2.3.4), где α_k, β_k, p_k - такие же как в (2.3.7), а α_l, β_l, q_l - такие же как в (2.3.9), удовлетворяют условиям теоремы 2.3.5.

Здесь основное неравенство теоремы 2.3.5., то есть неравенство (2.3.1) следует из (2.3.5) в силу неравенств (2.3.6), (2.3.8).

Подставляя значения α_l, β_l из (2.3.9) в (2.3.4), находим следующие выражения для чисел α_k, β_k:

$$\alpha_k = \alpha_{kl} - \alpha_l = \alpha_{kl} - \alpha - r + |l| + (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m),$$

$$\beta_k = \beta_{kl} - \beta_l = \beta_{kl} - \beta + r - |l| - (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m).$$

Подставляя эти выражения в условия (2.3.7), имеем

$$\alpha_k - \alpha = \alpha_{kl} - 2\alpha - r + |l| + (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m) \le r - |k| - (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k})(n-m),$$

$$\alpha_k = \alpha_{kl} - \alpha - r + |l| + (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m) < \frac{n-m}{p_k},$$

$$\beta - \beta_k = 2\beta - \beta_{kl} - r + |l| + (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m) \ge r - |k| - (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k})(n-m),$$

$$\beta_k + r - |k| - 1 = \beta_{kl} - \beta + 2r - |l| - |k| - 1 - (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m) < -\frac{n-m}{p_k}.$$

Далее, используя равенство

$$\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l} = \frac{1}{\lambda_{kl}},$$

упростим полученные соотношения:

$$\alpha_{kl} \le 2\alpha + 2r - |k| - |l| - (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m),$$

$$\alpha_{kl} < \alpha + r - |l| - (\frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m),$$

$$\beta_{kl} \le 2\beta - 2r + |k| + |l| + (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m),$$

$$\beta_{kl} < \beta - 2r + |l| + |k| + 1 + (\frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m).$$

Не трудно заметить, что все эти неравенства выполняются в силу условий (2.3.2) теоремы 2.3.5.

Теорема 2.3.5. в случае $|k| < r$, $|l| < r$ доказана. Рассмотрим случай $|k| = r$, $|l| \le r-1$. Пусть числа q_l, α_l, β_l такие, что

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_l},\ \alpha_{kl} = \alpha + \alpha_l,\ \beta_{kl} = \beta + \beta_l. \tag{2.3.10}$$

Следовательно, выполняются условия (2.3.4) при $p_k = p$, $\alpha_k = \alpha$, $\beta_k = \beta$ и поэтому из (2.3.5) следует, что

$$\left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\right)^{\lambda_{kl}} dx\right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$

$$\ll \left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha,\beta}(x)|u^{(k)}(x)|\right)^{p} dx\right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha_l,\beta_l}(x)|v^{(l)}(x)|\right)^{q_l} dx\right\}^{1/q_l}.$$

Так как $|k| = r$, то отсюда и из (2.3.8) следует неравенство (2.3.1) теоремы 2.3.5., если воспользоваться очевидным неравенством

$$\left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha,\beta}(x)|u^{(k)}(x)|\right)^{p} dx\right\}^{1/p} \le \left\|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\|.$$

Подставляя значения α_l, β_l из (2.3.9) в (2.3.10), находим следующие выражения для α_{kl}, β_{kl}:

$$\alpha_{kl} = 2\alpha + r - |l| - (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m),$$
$$\beta_{kl} = 2\beta - r + |l| + (\frac{1}{q} - \frac{1}{q_l})(n-m).$$

Так как
$$\frac{1}{q_l} = \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{p},$$
то отсюда следует, что
$$\alpha_{kl} = 2\alpha + r - |l| - (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m),$$
$$\beta_{kl} = 2\beta - r + |l| - (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m).$$

Эти равенства выполняются в силу условия (2.3.3) теоремы 2.3.5. Теорема 2.3.5. при $|k| = r$, $|l| \le r-1$ доказана.

Рассмотрим случай $|k| \le r-1$, $|l| = r$. Пусть числа α_k, β_k, p_k такие, что
$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q},\ \alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha,\ \beta_{kl} = \beta_k + \beta. \tag{2.3.11}$$
Следовательно выполняются условия (2.3.4) при $q_l = q$, $\alpha_l = \alpha$, $\beta_l = \beta$ и поэтому из (2.3.5) следует, что
$$\left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)|\right)^{\lambda_{kl}} dx\right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$
$$\ll \left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha_k,\beta_k}(x)|u^{(k)}(x)|\right)^{p_k} dx\right\}^{1/p_k} \times$$
$$\times \left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha,\beta}(x)|v^{(l)}(x)|\right)^{q} dx\right\}^{1/q}.$$

Так как $|l| = r$, то отсюда и из (2.3.6) следует неравенство (2.3.1) теоремы 2.3.5., если воспользоваться очевидным неравенством
$$\left\{\int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\alpha,\beta}(x)|v^{(l)}(x)|\right)^{q} dx\right\}^{1/q} \le \left\|v; W^r_{q;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\|.$$

Из (2.3.11) находим значения α_k, β_k, p_k и подставим в условия (2.3.7):

$$\alpha_{kl} \le 2\alpha + r - |k| - (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m),$$

$$\alpha_{kl} < \alpha + (\frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q})(n-m),$$

$$\beta_{kl} \le 2\beta - r + |k| + (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m),$$

$$\beta_{kl} < \beta - r + 1 - (\frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q})(n-m).$$

Эти условия выполняются в силу условий (2.3.2) теоремы 2.3.5. при $|l| = r$.

Теорема 2.3.5. в случае $|l| = r$, $|k| \le r-1$ и, следовательно, и в общем случае доказана.

2.4 Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями на неограниченном многообразии

Пусть $\mathfrak{M}$ - неограниченное многообразие размерности $m \in [1, n-1]$ в n-мерном евклидовом пространстве R_n, удовлетворяющее условию конуса. Так же как в § 2.3 положим $\Omega = R_n \setminus \mathfrak{M}$ и $\rho(x) = dist\{x, \mathfrak{M}\}$ для всех $x \in \Omega$.

В первой части настоящего параграфа сформулируем результаты о разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических уравнений, вырождающихся на многообразии $\mathfrak{M}$, которые непосредственно следуют из результатов § 1.3.

Пусть $\varphi_{\alpha,\beta}(x)$ - такая же функция как в § 1.3. В случае

$$\sigma(x) = \rho^{r(n-1)}(x)\varphi_{\alpha,\beta}(x),\ g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_n(x) = \rho(x) \qquad (2.4.1)$$

пространство $W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ совпадает с пространством $V^r_{p;\alpha,\beta}(\Omega)$, определенное в § 2.3. В этом случае полуторалинейная форма (1.3.1) принимает следующий вид

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{\Omega} p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

где
$$p_k(x)=\varphi_{\alpha,\beta}(x)\rho^{-2r+|k|+|l|}(x)$$
и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, определенные в Ω. Рассмотрим следующую задачу

Задача D_λ. *Для заданного функционала* $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*
$$B[U,v]+\lambda\int\limits_{\Omega}\sigma^2_{\alpha,\beta}(x)\rho^{-2r}(x)U(x)\overline{v(x)}dx=<F,v>\ \ (v\in C_0^\infty(\Omega)),$$
принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть*
$$-\alpha+\frac{n-m}{2}\notin\{1,2,\dots,r\},\ \beta+\frac{n-m}{2}\notin\{1,2,\dots,r\},\ \beta-r\geq\gamma$$
и пусть также выполнены условия:

I) Коэффициенты a_{kl} *при* $|k|=|l|=r$ *ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности*
$$Re\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\geq c|\xi|^{2r}$$
для всех $x\in\Omega$, $\xi\in R_n$ *(c-положительное число, не зависящее от* x,ξ*), и для любого достаточно малого* $\nu>0$ *существует число* $\varepsilon>0$ *такое, что*
$$|a_{kl}(x)-a_{kl}(\xi)|<\nu$$
для любого $\xi\in\Omega$ *и любого* $x\in\{x\in R_n:|x_i-\xi_i|<\frac{1}{2}\varepsilon\rho(\xi),\ i=\overline{1,n}\}$;

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ *при* $|k|,|l|\leq r$ *и* $|k|+|l|\leq 2r-1$ *принадлежат пространству* $L_{p_{kl}}(\Omega;\rho^{-n/p_{kl}})$, *где*
$$p_{kl}=\begin{cases}q_{kl}\ \text{при}\ |k|\leq r-1,\ |l|\leq r\\ q_{lk}\ \text{при}\ |k|=r,\ |l|\leq r-1,\end{cases}$$
а числа q_{kl} *определяются соотношениями:*
$$\frac{n}{2r-|k|-|l|}<q_{kl}\leq\frac{n}{r-|l|},\ \text{если}\ n>2(r-|k|),\ n>2(r-|l|);$$
$$\frac{n}{r-|k|+\varepsilon_1 n}\leq q_{kl},\ 0<\varepsilon_1<1/2,\ \text{если}\ n>2(r-|k|),\ n\leq 2(r-|l|);$$

$$q_{kl}=\begin{cases}\dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0<\varepsilon_2<1/2,\ \text{\textit{если}}\ n\le 2(r-|k|),\ n>2(r-|l|)\\ \text{\textit{любое конечное число}} >1,\ \text{\textit{если}}\ n\le 2(r-|k|),\ n\le 2(r-|l|)\end{cases}.$$

Тогда существует число $\lambda_0\ge 0$ такое, что при $\lambda\ge\lambda_0$ для любого заданного функционала $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ задача D_λ имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\|U;W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|\le M\left\|F;\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'\right\|,$$

где число $M>0$ не зависит от F.

Доказательство. Сформулированный результат непосредственно следует из теоремы 1.3.1., если заметить, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)=V^r_{2;\alpha,\beta}(\Omega)$$

в силу теоремы 2.3.2. и

$$W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})=V^r_{2;\alpha,\beta}(\Omega)$$

в частном случае (2.4.1)

Теорема 2.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.4.1. и пусть также существует такая положительная константа c_0, что*

$$c_0\int\limits_\Omega(\varphi_{\alpha,\beta}(x)\rho^{-r}(x)|v(x)|)^2dx\le Re\,B[v,v]\qquad(2.4.2)$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 2.4.1. при $\lambda_0=0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.2.2.

Далее, во второй части настоящего параграфа, мы исследуем разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int\limits_\Omega\varphi^2_{\alpha,\beta}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,\qquad(2.4.3)$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D. *Для заданного функционала $F\in\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ и заданного элемента $\Psi(x)\in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения*

$$B[U,v]=<F,v>,\ \forall v\in C_0^\infty(\Omega),\qquad(2.4.4)$$

принадлежащее пространству $W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *и удовлетворяющее условию*

$$U(x)-\Psi(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega). \qquad (2.4.5)$$

Предположим, что коэффициенты полуторалинейной формы (2.4.3) удовлетворяют условиям:

I*) при $|k|=|l|=r$ коэффициенты a_{kl} ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x\in\Omega$, $\xi\in R_n$ (c - положительная константа), и для любого достаточно малого $\nu>0$ существует число $\varepsilon>0$ такое, что

$$|a_{kl}(x)-a_{kl}(\xi)|<\nu$$

для любого $\xi\in\Omega$ и любого $x\in\{x\in R_n : |x_i-\xi_i|<(\varepsilon/2)\rho(\xi),\ i=\overline{1,n}\}$;

II*) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|\leq r$, $|l|\leq r$ и $|k|+|l|\leq 2r-1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}(\Omega;\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}})$, где

$$\alpha_{kl}=\frac{n}{p_{kl}}-2r+|k|+|l|+\varepsilon+(\alpha+r-|k|-1/2(n-m)-\frac{m}{p_{kl}})_+, \quad (2.4.6)$$

$$\beta_{kl}=2r-|k|-|l|+\varepsilon-\frac{1}{p_{kl}}(n-m)+(\beta-1+1/2(n-m))_+, \quad (2.4.7)$$

где ε - достаточно малое положительное число,

$$p_{kl}=\begin{cases} q_{kl}, \text{ при } |k|\leq r-1,\ |l|\leq r\\ q_{lk}, \text{ при } |k|=r,\ |l|\leq r-1\end{cases},$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$q_{kl}=\begin{cases}\dfrac{n}{2r-|k|-|l|}<q_{kl}\leq\dfrac{n}{r-|l|}, \text{ если } n>2(r-|k|),\ n>2(r-|l|);\\ \dfrac{n}{r-|k|+\varepsilon_1 n}\leq q_{kl},\ 0<\varepsilon_1<1/2, \text{ если } n>2(r-|k|),\ n\leq 2(r-|l|);\\ \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0<\varepsilon_2<1/2, \text{ если } n\leq 2(r-|k|),\ n>2(r-|l|)\\ \text{любое конечное число} >1, \text{ если } n\leq 2(r-|k|),\ n\leq 2(r-|l|)\end{cases}.$$

Теорема 2.4.3. *Пусть выполнены условия I*), II*) и пусть вещественные числа* α, β, γ *удовлетворяют условиям*

$$-\alpha + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Пусть также существует такое положительное число c_0, *что*

$$c_0 \int\limits_{\Omega} (\varphi_{\alpha,\beta}(x)\rho^{-r}(x)|v(x)|)^2 dx \leq Re\mathbb{B}[v, v] \tag{2.4.8}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ *и любой заданной функции* $\Psi(x) \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *существует единственное решение* $U(x)$ *задачи* D *и при этом выполняется оценка*

$$\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \leq M \left\{ \|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'\| + \|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \right\}, \tag{2.4.9}$$

где число $M > 0$ *не зависит от* F *и* Ψ.

Доказательство. Для удобства чтения сначала сформулируем результат теоремы 2.3.5. в случае $p = q = 2$ в удобной для нас форме.

Лемма 2.4.1. *Пусть вещественные числа* α, β, γ *удовлетворяют условиям*

$$-\alpha + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta + \frac{n-m}{2} \notin \{1, 2, \ldots, r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Тогда для всех мультииндексов k, l *таких, что* $|k| \leq r$, $|l| \leq r$, $|k| + |l| \leq 2r + 1$ *и всех функций* $u \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\varphi_{\gamma_{kl},\delta_{kl}}(x)|u^{(k)}(x)v^{(l)}(x)| \right)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll \left\|u; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\|,$$

где $\lambda_{kl} > 1$ *и числа* γ_{kl}, δ_{kl} *определяются следующими соотношениями:*
1) если $|k| \leq r - 1$ *и* $|l| \leq r$, *то*

$$\gamma_{kl} \leq \alpha + r - |l| - (\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m) + min\{-\varepsilon; \alpha + r - |k| - 1/2(n-m)\},$$

$$\delta_{kl} \leq \beta - 2r + |l| + |k| + 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m) + min\{-\varepsilon; \beta - 1 + 1/2(n-m)\}; \tag{2.4.10}$$

1) если $|k| = r$ и $|l| \leq r-1$, то

$$\gamma_{kl} = 2\alpha + r - |l| - (1 - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m),$$

$$\delta_{kl} = 2\beta - r + |l| + (1 - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m). \qquad (2.4.11)$$

Здесь ε - достаточно малое положительное число.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{B}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leq r} \int\limits_{R_n^+} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \qquad (2.4.12)$$

Предположим, что коэффициенты $b_{kl}(x)$ формы (2.4.12) удовлетворяют условиям:

1) при $|k| = |l| = r$ коэффициенты $b_{kl}(x)$ принадлежат пространству $L_{\mu_{kl}}(\Omega; \varphi_{-\gamma_{kl}, -\delta_{kl}})$, где $\mu_{kl} = \lambda_{kl}/(\lambda_{kl}-1)$, а числа γ_{kl}, δ_{kl}, λ_{kl} такие же как в лемме 2.4.1.

Лемма 2.4.2. *Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда для любого элемента $\Psi(x) \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ функционал G, определенный равенством*

$$< G, v >= -\mathfrak{B}[\Psi, v], \qquad (2.4.13)$$

принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ и справедливо неравенство

$$\left\| G; \left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)' \right\| \leq M \left\| \Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega) \right\|, \qquad (2.4.14)$$

где число $M > 0$ не зависит от Ψ.

Доказательство. Полуторалинейную форму (2.4.12) представим в виде

$$\mathfrak{B}[u,v] = \mathfrak{B}^{(1)}[u,v] + \mathfrak{B}^{(2)}[u,v], \qquad (2.4.15)$$

где

$$\mathfrak{B}^{(1)}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx,$$

$$\mathfrak{B}^{(2)}[u,v] = \sum_{|k|+|l|\leq 2r-1} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx.$$

В силу условия 1) применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|\mathfrak{B}^{(1)}[u,v]| \ll \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \varphi_{\alpha,\beta}(x)|u^{(k)}(x)| \cdot |v^{(l)}(x)| dx \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} (\varphi_{\alpha,\beta}(x)|u^{(k)}(x)|)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{|l|=r} \int_{\Omega} (\varphi_{\alpha,\beta}(x)|v^{(l)}(x)|)^2 dx \right\}^{1/2} \ll$$

$$\ll \left\| u; L^r_{2;\alpha,\beta}(\Omega) \right\| \cdot \left\| v; L^r_{2;\alpha,\beta}(\Omega) \right\|.$$

Следовательно

$$|\mathfrak{B}^{(1)}[\psi,v]| \ll \left\| \Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega) \right\| \left\| v; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega) \right\| \tag{2.4.16}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$. Так как

$$\frac{1}{\mu_{kl}} + \frac{1}{\lambda_{kl}} = 1 \ (|k| + |l| \leq 2r-1),$$

и $b_{kl}(x) \in L_{\mu_{kl}}(\Omega; \varphi_{-\gamma_{kl},-\delta_{kl}})$ при $|k|+|l| \leq 2r-1$, где λ_{kl}, γ_{kl}, δ_{kl} - такие же числа, как в лемме 2.4.1., то применяя неравенство Гельдера с показателями μ_{kl}, λ_{kl}, в силу леммы 2.4.1. имеем

$$|\mathfrak{B}^{(2)}[u,v]| \ll \sum_{|k|+|l| \leq 2r-1} \int_{\Omega} |b_{kl}(x)| (\varphi_{\gamma_{kl},\delta_{kl}}(x))^{-1} \times$$

$$\times \varphi_{\gamma_{kl},\delta_{kl}}(x)|u^{(k)}(x)||v^{(l)}(x)| dx \ll$$

$$\ll \sum_{|k|+|l| \leq 2r-1} \left\{ \int_{\Omega} |(b_{kl}(x)|(\varphi_{\gamma_{kl},\delta_{kl}}(x))^{-1})^{\mu_{kl}} dx \right\}^{1/\mu_{kl}} \times$$

$$\times \left\{ \int_{\Omega} (\varphi_{\gamma_{kl},\delta_{kl}}(x)|u^{(k)}(x)||v^{(l)}(x)|)^{\lambda_{kl}} dx \right\}^{1/\lambda_{kl}} \ll$$

$$\ll \sum_{|k|+|l| \leq 2r-1} \|b_{kl}; L_{\mu_{kl}}(\Omega; \varphi_{-\gamma_{kl},-\delta_{kl}})\| \cdot \|u; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \times$$

$$\times \|v; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \ll \|u; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| \cdot \|v; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\|$$

для всех $u \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$. Здесь мы также воспользовались неравенством

$$(\varphi_{\gamma_{kl},\delta_{kl}}(x))^{-1} \ll \varphi_{-\gamma_{kl},-\delta_{kl}}(x) \ \forall x \in \Omega.$$

Таким образом, мы доказали, что
$$|\mathfrak{B}^{(2)}[\psi, v]| \ll \left\|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| \left\|v; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| \qquad (2.4.17)$$
для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$.

В силу неравенств (2.4.16), (2.4.17) из (2.4.13), (2.4.15) следует, что
$$| < G, v > | \ll \left\|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| \left\|v; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\|$$
для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$. Это означает, что $G \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ и имеет место неравенство (2.4.14).

Лемма 2.4.2. доказана.

Теперь приступим к непосредственному доказательству утверждения теоремы 2.4.3. Сначала покажем, что в условиях теоремы 2.4.3. выполняются все условия теоремы 2.4.2. Не трудно заметить, что условие I*) теоремы 2.4.3. совпадает с условием I) теоремы 2.4.2.(см. теорему 2.4.1.), а условие (2.4.8) - с условием (2.4.2).

Условие II) теоремы 2.4.2.(см. теорему 2.4.1.) для коэффициентов $a_{kl}(x)$ полуторалинейной формы (2.4.3) примет следующий вид
$$a_{kl}(x)\rho^{2r-|k|-|l|}(x) \in L_{p_{kl}}(\Omega; \rho^{-n/p_{kl}}), \qquad (2.4.18)$$
где p_{kl} - такие же числа, как в теореме 2.4.3. Из определения весовой функции $\varphi_{\alpha,\beta}(x)$ следует, что $\varphi_{\alpha_1,\beta_1}(x) \ll \varphi_{\alpha_2,\beta_2}(x)$, если $\alpha_1 \le \alpha_2$, $\beta_1 \le \beta_2$. Поэтому
$$\rho^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}}(x) \ll \varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x) \ (x \in \Omega), \qquad (2.4.19)$$
если
$$-2r + |k| + |l| + \frac{n}{p_{kl}} \le \alpha_{kl},$$
$$2r - |k| - |l| - \frac{n}{p_{kl}} \le \beta_{kl}.$$
Эти неравенства выполняются в силу условий (2.4.6), (2.4.7) теоремы 2.4.3. Поэтому используя (2.4.19), имеем
$$\|a_{kl}\rho^{2r-|k|-|l|}; L_{p_{kl}}(\Omega; \rho^{-n/p_{kl}})\| =$$
$$= \left\{ \int\limits_{\Omega} (\rho^{2r-|k|-|l|-n/p_{kl}}(x)|a_{kl}(x)|)^{p_{kl}} dx \right\}^{1/p_{kl}} \ll$$
$$\ll \left\{ \int\limits_{\Omega} (\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x)|a_{kl}(x)|)^{p_{kl}} dx \right\}^{1/p_{kl}} = \|a_{kl}; L_{p_{kl}}(\Omega; \varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x)\| < +\infty$$

то есть включение (2.4.18), а следовательно и условие II) теоремы 2.4.2.(см. теорему 2.4.1.) выполняется.

Далее проверим, что в условиях теоремы 2.4.3. выполняются условия леммы 2.4.2. Условие этой леммы для коэффициентов $a_{kl}(x)$, $(|k|+|l|\leq 2r-1)$ полуторалинейной формы (2.4.3) примет вид

$$\varphi^2_{\alpha,\beta}(x)a_{kl}(x)\in L_{\mu_{kl}}(\Omega;\varphi_{-\gamma_{kl},-\delta_{kl}}). \tag{2.4.20}$$

Из определения весовой функции $\varphi_{\alpha,\beta}(x)$ (см. § 2.3) следует, что $\varphi_{\alpha_1,\beta_1}(x)\varphi_{\alpha_2,\beta_2}(x)\ll\varphi_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2}(x)$ Поэтому

$$\|\varphi^2_{\alpha,\beta}a_{kl};L_{p_{kl}}(\Omega;\varphi_{-\gamma_{kl},-\delta_{kl}})\|=\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi^2_{\alpha,\beta}(x)\varphi_{-\gamma_{kl},-\delta_{kl}}(x)|a_{kl}(x)|)^{p_{kl}}dx\right\}^{1/p_{kl}}\ll$$
$$\ll\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi_{2\alpha-\gamma_{kl},2\beta-\delta_{kl}}(x)|a_{kl}(x)|)^{p_{kl}}dx\right\}^{1/p_{kl}}$$

Ниже покажем, что

$$2\alpha-\gamma_{kl}\leq\alpha_{kl},\ 2\beta-\delta_{kl}\leq\beta_{kl}. \tag{2.4.21}$$

Поэтому

$$\|\varphi^2_{\alpha,\beta}a_{kl};L_{p_{kl}}(\Omega;\varphi_{-\gamma_{kl},-\delta_{kl}})\|\ll\|a_{kl};L_{p_{kl}}(\Omega;\varphi_{\alpha_{kl},\beta_{kl}})\|<+\infty$$

и следовательно включение (2.4.20) имеет место при $\mu_{kl}=p_{kl}$.

Числа γ_{kl}, δ_{kl} определены соотношениями 1), 2) леммы 2.4.1. Пусть $|k|\leq r-1$, $|l|\leq r$. Тогда из (2.4.10) имеем

$$\gamma_{kl}\leq\alpha+r-|l|-(\frac{1}{2}-\frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m)+min\{-\varepsilon;\alpha+r-|k|-1/2(n-m)\}=$$
$$=\alpha+r-|l|+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu_{kl}})(n-m)+min\{-\varepsilon;\alpha-|k|-1/2(n-m)\}$$

Следовательно

$$\gamma_{kl}\leq\alpha+r-|l|+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu_{kl}})(n-m)-\varepsilon,$$

$$\gamma_{kl}\leq 2\alpha+2r-|k|-|l|-\frac{1}{\mu_{kl}}(n-m).$$

Отсюда следует, что

$$2\alpha - \gamma_{kl} \geq \alpha - r + |l| - (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{kl}})(n-m) + \varepsilon, \tag{2.4.22}$$

$$2\alpha - \gamma_{kl} \geq -2r + |k| + |l| + \frac{1}{\mu_{kl}}(n-m). \tag{2.4.23}$$

Из (2.4.6) следует, что

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - 2r + |k| + |l| + \varepsilon, \tag{2.4.24}$$

если

$$\alpha + r - |k| - 1/2(n-m) - \frac{m}{p_{kl}} \leq 0.$$

Следовательно

$$\alpha_{kl} \geq \frac{n}{p_{kl}} - 2r + |k| + |l| + \varepsilon + [\alpha + r - |k| - 1/2(n-m) - \frac{m}{p_{kl}}] =$$
$$= \alpha - r + |l| + \varepsilon - (\frac{1}{2} - \frac{1}{p_{kl}})(n-m) \tag{2.4.25}$$

Из (2.4.22), (2.4.23) при $\mu_{kl} = p_{kl}$ и из (2.4.24), (2.4.25) следует, что существуют такие числа γ_{kl}, удовлетворяющие условиям леммы 2.4.1., что $\alpha_{kl} \geq 2\alpha - \gamma_{kl}$, то есть первое неравенство в (2.4.21) выполняется. Если же

$$\alpha + r - |k| - 1/2(n-m) - \frac{m}{p_{kl}} > 0, \tag{2.4.26}$$

то согласно условию (2.4.6) теоремы 2.4.3.

$$\alpha_{kl} = \alpha - r + |l| + \varepsilon - (\frac{1}{2} - \frac{1}{p_{kl}})(n-m). \tag{2.4.27}$$

Следовательно число γ_{kl}, удовлетворяющее условию (2.4.22) при $\mu_{kl} = p_{kl}$, а также неравенство $\alpha_{kl} \geq 2\alpha - \gamma_{kl}$ существуют.

В силу (2.4.27) число γ_{kl}, удовлетворяющее условию (2.4.23) при $\mu_{kl} = p_{kl}$, а также неравенству $\alpha_{kl} \geq 2\alpha - \gamma_{kl}$ существует, если

$$\alpha + r - |k| + \varepsilon - 1/2(n-m) \geq 0.$$

Это неравенство имеет место в силу (2.4.26). Первое неравенство в (2.4.21) в этом случае также выполняется.

Из (2.4.10) при $|k| \le r-1$, $|l| \le r$ имеем

$$\delta_{kl} \le \beta - 2r + |l| + |k| + 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n-m) + min\{-\varepsilon; \beta - 1 + 1/2(n-m)\} =$$

$$= \beta - 2r + |l| + |k| + 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{kl}})(n-m) + min\{-\varepsilon; \beta - 1 + 1/2(n-m)\}.$$

Следовательно

$$\delta_{kl} \le \beta - 2r + |k| + |l| + 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{kl}})(n-m) - \varepsilon,$$

$$\delta_{kl} \le 2\beta - 2r + |k| + |l| + \frac{1}{\mu_{kl}}(n-m).$$

Отсюда следует, что

$$2\beta - \delta_{kl} \ge \beta + 2r - |k| - |l| - 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{kl}})(n-m) + \varepsilon, \qquad (2.4.28)$$

$$2\beta - \delta_{kl} \ge 2r - |k| - |l| - \frac{1}{\mu_{kl}}(n-m). \qquad (2.4.29)$$

Из (2.4.7) имеем

$$\beta_{kl} = 2r - |k| - |l| + \varepsilon - \frac{1}{p_{kl}}(n-m), \qquad (2.4.30)$$

если

$$\beta - 1 + 1/2(n-m) \le 0.$$

Следовательно

$$\beta_{kl} \ge 2r - |k| - |l| + \varepsilon + \beta - 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p_{kl}})(n-m). \qquad (2.4.31)$$

Из (2.4.30), (2.4.31) следует существование числа δ_{kl}, которое удовлетворяет неравенствам (2.4.28), (2.4.29) при $\mu_{kl} = p_{kl}$, а также неравенству $\beta_{kl} \ge 2\beta - \delta_{kl}$.

Если же

$$\beta - 1 + 1/2(n-m) > 0, \qquad (2.4.32)$$

то согласно условию (2.4.7) теоремы 2.4.3.

$$\beta_{kl} = 2r - |k| - |l| + \varepsilon + \beta - 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p_{kl}})(n-m). \qquad (2.4.33)$$

Следовательно, число δ_{kl}, удовлетворяющее неравенству (2.4.28) при $\mu_{kl} = p_{kl}$ и неравенству $\beta_{kl} \ge 2\beta - \delta_{kl}$ существует.

Из (2.4.29) при $\mu_{kl} = p_{kl}$ и из (2.4.33) следует, что число δ_{kl}, удовлетворяющее неравенству $\beta_{kl} \geq 2\beta - \delta_{kl}$ существует, если

$$\varepsilon + \beta - 1 + 1/2(n - m) \geq 0,$$

что возможно в силу условия (2.4.32).

Таким образом мы показали, что в случае $|k| \leq r - 1$, $|l| \leq r$ существуют числа γ_{kl}, δ_{kl}, удовлетворяющие неравенствам (2.4.21).

Теперь рассмотрим случай $|k| = r$, $|l| \leq r - 1$.

Из (2.4.11) следует, что

$$\gamma_{kl} = 2\alpha + r - |l| - (1 - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n - m),$$

$$\delta_{kl} = 2\beta - r + |l| + (1 - \frac{1}{\lambda_{kl}})(n - m).$$

Так как $\mu_{kl} = \lambda_{kl}/(\lambda_{kl} - 1)$, то

$$\gamma_{kl} = 2\alpha + r - |l| - \frac{1}{\mu_{kl}}(n - m),$$

$$\delta_{kl} = 2\beta - r + |l| + \frac{1}{\mu_{kl}}(n - m).$$

При $|k| = r$ из условий (2.4.6), (2.4.7) теоремы 2.4.3. следует, что

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - r + |l| + \varepsilon + (\alpha - 1/2(n - m) - \frac{m}{p_k})_+,$$

$$\beta_{kl} = r - |l| + \varepsilon - \frac{1}{p_{kl}}(n - m) + (\beta - 1 + 1/2(n - m))_+.$$

Следовательно при $\mu_{kl} = p_{kl}$ неравенства

$$\alpha_{kl} \geq 2\alpha - \gamma_{kl},\ \beta_{kl} \geq 2\beta - \delta_{kl}$$

имеют место, если

$$\frac{n}{p_{kl}} - r + |l| + \varepsilon + (\alpha - 1/2(n - m) - \frac{m}{p_{kl}})_+ \geq -r + |l| + \frac{1}{p_{kl}}(n - m),$$

$$r - |l| + \varepsilon - \frac{1}{p_{kl}}(n - m) + (\beta - 1 + 1/2(n - m))_+ \geq r - |l| - \frac{1}{p_{kl}}(n - m).$$

После сокращения соответствующих членов, эти неравенства принимают вид

$$\frac{m}{p_{kl}} + \varepsilon + (\alpha - 1/2(n - m) - \frac{m}{p_{kl}})_+ \geq 0,$$

$$\varepsilon + (\beta - 1 + 1/2(n-m))_+ \geq 0.$$

Таким образом, мы показали, что в условиях теоремы 2.4.3. выполняются условия теоремы 2.4.2. и леммы 2.4.2.

Пусть заданы элементы $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$, $\Psi \in W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$. Тогда в силу леммы 2.4.2. функционал G, определенный равенством

$$< G, v >= -\mathfrak{B}[\Psi, v], \ v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega), \tag{2.4.34}$$

принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'$ и справедливо неравенство

$$\left\| G; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)' \right\| \leq M_0 \left\| \Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega) \right\|, \tag{2.4.35}$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от $\Psi(x)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: требуется найти решение $U_*(x)$ уравнения

$$\mathfrak{B}[U_*, v] =< F + G, v >, \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.4.36}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$.

Так как в условиях теоремы 2.4.3. выполняются все условия теоремы 2.4.2., то в силу этой теоремы вспомогательная задача имеет единственное решение и выполняется оценка

$$\left\| U_*; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega) \right\| \leq M_1 \left\| G + F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)' \right\|. \tag{2.4.37}$$

Рассмотрим функцию $U(x) = U_*(x) + \Psi(x)$. Так как $U_*(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, то $U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$, то есть $U(x)$ удовлетворяет условию (2.4.5) задачи D.

Из (2.4.34), (2.4.36) следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}[U, v] = \mathfrak{B}[U_* + \Psi, v] = \mathfrak{B}[U_*, v] + \mathfrak{B}[\Psi, v] = \\ =< G + F, v > - < G, v >=< F, v >, \end{aligned}$$

то есть $U(x)$ является решением уравнения (2.4.4) задачи D.

Таким образом, мы показали, что функция $U(x) = U_*(x) + \Psi(x)$ есть решение задачи D. Из единственности $U_*(x)$ следует единственность решение $U(x)$.

Докажем оценку (2.4.9) теоремы 2.4.3. Так как

$$\left\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| \le \left\|U_*; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| + \left\|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\|$$

и согласно (2.4.37)

$$\left\|U_*; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| \le M_1 \left\{ \left\|G; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'\right\| \right\},$$

то применяя оценку (2.4.35) получим

$$\left\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\| \le M_1 \left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right)'\right\| + (1 + M_0 M_1) \left\|\Psi; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\right\|.$$

Отсюда следует оценка (2.4.9). Теорема 2.4.3. доказана.

Литература

[1] Байдельдинов Б. Л. Об одном аналоге первой краевой задачи для эллиптического уравнения порядка $2m$ со степенным вырождением на границе // Доклады АН СССР. 1983, т.270, №5, с.1038 – 1042.

[2] Байдельдинов Б. Л. Об аналоге первой краевой задачи для эллиптических уравнений с вырождением. Метод билинейных форм //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984, т.170, с. 3 – 11.

[3] Бесов О. В., Кудрявцев Л.Д., Лизоркин П.И., Никольский С.М. Исследование по теории пространств дифференцируемых функций многих переменных//Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988, т.182, с.68 – 127.

[4] Бойматов К. Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Доклады АН СССР. 1992, т.327, №1, с. 9-5

[5] Бойматов К. Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой // Доклады АН России, 1993, т. 330, №3, с.285-290.

[6] Бойматов К. Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами // Доклады АН России, 1994, т. 339, №1, с.5-10.

[7] Бойматов К. Х. Обобщенная задача Дирихле для систем вырожденно-эллиптических уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". Москва, 1995,Сборник тезисов, с.54-55.

[8] Бойматов К. Х. Граничные задачи для некоэрцитивных форм // Доклады АН РТ,1998, т. XLI, №10, с.10-16.

[9] Бойматов К. Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах // Доклады АН СССР. 1989, т.307, №6, с. 1296 – 1299.

[10] Бойматов К. Х., Исхоков С.А. О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанная с некоэрцитивной билинейной формой //Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1997, т.214, с.107-134.

[11] Бойматов К. Х., Исхоков С.А. О собственных значениях и собственных функциях матричных дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Вестник Хорогского Университета. Естественные науки, 2000, №2, с.13-24.

[12] Бойматов К. Х., Седдики К. Граничные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Доклады АН России, 1997, т. 352, №3, с.295-297.

[13] Ганиев М.Ш. Вариационная задача Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений, вырождающихся на неограниченных многообразиях // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. №5. с. 353-358.

[14] Ганиев М.Ш. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений с вырождением //Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 2012.

[15] Егоров Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы - М.: МГУ. 1985. 166 стр.

[16] Иосида К. Функциональный анализ - М.: Мир. 1967. 624 стр.

[17] Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Доклады Академии наук (Россия), 1995, т. 342, №1, стр. 20-22.

[18] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // В сб.: Тезисы докладов Второй Международной конф. "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы матем. образования". Москва. Физматлит. 2003, с. 172-174.

[19] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными // Доклады Академии наук (Россия), 2003, т. 392, №5, стр. 606-609

[20] Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Доклады Академии наук (Россия), 1993, т. 330, №4, стр. 420-423.

[21] Исхоков С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1995, т. 31, №4, стр. 641-653.

[22] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Доклады Академии наук (Россия), 1995, т. 345, №2, стр. 164-167.

[23] Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Математические заметки. 2010. Т. 87. №2. С. 201 – 216.

[24] Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Дифференциальные уравнения, 2003. Т. 39, №11. С. 536 – 542.

[25] Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Доклады Академии наук (Россия). 2001. Т. 378, №3. С. 306 – 309.

[26] Исхоков С.А., Ганиев М.Ш. Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для нелинейных дифференциальных уравнений в полупространстве // Доклады АН Республики Таджикистан. 2011. Т. 54, №4. С. 97-104.

[27] Исхоков С.А., Кужмуратов А.Я. Об одной вариационной задаче для эллиптического оператора, вырождающегося на границе ограниченной области // В сб.: Тезисы докладов IV Международной конференции по мат. моделированию. Якутск, 27-31.07.2004, стр. 19-20.

[28] Исхоков С.А., Кужмуратов А.Я. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов // Доклады Академии наук (Россия), 2005, Том 403, №2, стр. 165-168.

[29] Исхоков С.А., Кужмуратов А.Я. Априорная оценка решений однородной задачи Дирихле для общих эллиптических уравнений с вырождением // Материалы международной конференции "Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики посвященной 70-летию академика АН РТ Усманова З.Д. Душанбе 24-25 августа 2007 г., с. 43-44.

[30] Исхоков С.А., Сивцева Г.И. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора, вырождающегося на многообразиях различных измерений // Математические заметки ЯГУ. 1999, т. 6, №2, стр. 28-41.

[31] Исхоков С.А., Тарасова Г.И. Обобщенная задача Дирихле для эллиптических уравнений, вырождающихся на неограниченных многообразиях // Вестник Новосибирского Госуниверситета. Серия: Математика, механика, информатика, 2006, том. 6, вып. 4, с. 43-49.

[32] Киприянов И.А. О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов и его приложениях //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1969, т.105, с. 77 – 88.

[33] Киприянов И.А. Об одной вариационной задаче в полупространстве //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1967, т.91, с. 19 – 26.

[34] Кондрашов В. И. Об одной оценке для семейств функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам // ДАН СССР.-1938.-Т. 18.- №4-5.-С. 253-254.

[35] Кудрявцев Л. Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1959, т. 55, с. 1-182.

[36] Кудрявцев Л. Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундаментальные направления.-1988.-Т. 26. с. 5-157.

[37] Лизоркин П.И. О замыкании множества финитных функций в весовом пространстве $W^l_{p,\Phi}$ // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, №4. С. 789-792.

[38] Лизоркин П. И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980, т.156, с. 130 – 142.

[39] Лизоркин П. И. К тории вырождающихся эллиптических уравнений //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985, т.172, с. 235 – 271.

[40] Лизоркин П. И., Мирошин Н. В. О гладкости решения первой краевой задачи для одного модельного вырождающегося эллиптического оператора второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1986, т.22, №11, с.1945 – 1951.

[41] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением // ДАН СССР.-1981.-Т. 259.-№1.-С. 21-23.

[42] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981, т.157, с.90 – 118.

[43] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983, т.161, с.157 – 183.

[44] Матвеева И.И. О первой краевой задаче для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12, №7. С. 1267-1281.

[45] Матвеева И.И. О вариационном методе решения вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Дифференц. уравнения. 1977. Т.13, №3. С.489-496.

[46] Мирошин Н. В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области // Дифференциальные уравнения, 1976, т.12, №6, с.1099 – 1111.

[47] Мирошин Н.В. К вариационной задаче Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических операторов // Доклады АН СССР. 1988, т.298, №5, с.1069 – 1072.

[48] Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора // Дифференциальные уравнения, 1988, т.24, №3, с.455 – 464.

[49] Мирошин Н.В. Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора //Изв. Вузов. Математика. 1988, №8, с.47 – 55.

[50] Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением //Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1992, т.194, с. 179 – 195.

[51] Никольский С. М. Приближений функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977, 455 с.

[52] Никольский С. М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе //Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1979, т.150, с.212 – 238.

[53] Никольский С.М., Лизоркин П.И. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе// ДАН СССР.-1964.-Т. 159.- №3.-С. 512-515.

[54] Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.И. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.//Известия Вузов. Математика. 1988, №8, с.4 – 30.

[55] Рыбалов Ю. В. О краевой задаче в полупространстве с граничными условиями на бесконечности // Дифференциальные уравнения, 1979, т.15, №12, с. 2193 – 2204.

[56] Рыбалов Ю. В. Краевые задачи в полупространстве с граничными условиями в точке // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №5. С. 834-845.

[57] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: Мир.- 1980.- 664 с.

[58] Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир. 1986г. 448 стр.

[59] Burenkov V.I. Sobolev Spaces on Domains. Teubner-TexteMath., vol. 137, B.G.Teubner, Stuttgart,1998.

[60] Chipot M. Elements of Nonlinear Analysis. Birkhauser Verlag. 2000.

[61] Evans L. C. Partial Differential Equations. Graduate studies in mathematics. Volume 19. 1998. American Mathematical Society.

[62] Garding L. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations // Math. Scand. 1953. Bd.1, №1. S. 55 – 72.

[63] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 13:3(1959),115Ц162.

[64] Troizi M. Theremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso // Ric. mat.-1969-№18.-p. 49-74.

[65] Гадоев М.Г., Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле для одного класса эллиптических уравнений с вырождением // Математические заметки ЯГУ. 2011. Т.18, вып. 1. с. 25 – 35.

[66] Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высокого порядка с нестепенным вырождением // Доклады Академии наук (Россия). 2012. Т. 443, №3. с. 286-289.

[67] Якушев И.А. О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов, вырождающихся на неограниченном многообразии // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. №7. с. 526-532.

[68] Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для одного класса вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве // Тезисы докладов Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики посвященная 80-летию со дня рождения М.М. Лаврентьева - Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012 г. с. 472.

[69] Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для одного класса вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве // Вестник Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова, 2013. Т. 10, №1. с. 9-13.

[70] Якушев И.А. О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов, вырождающихся на неограниченном многообразии // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск. Россия, 18-24 августа 2013 г. с. 308.

[71] Якушев И.А. О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов с неоднородными граничными условиями, вырождающихся на неограниченном многообразии // Сборник докладов международной научно-практической конференции "Наука и инновационные разработки - северу посвященной 20-летию Политехнического института(филиалу) Северо-Восточного Федерального университета им. М.К.Аммосова. Мирный, 2014, с. 557-563.