НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ТАДЖИКИСТАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. А.ДЖУРАЕВА

УДК 517.948

На правах рукописи

Каримов Олимджон Худойбердиевич

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗДЕЛИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный
анализ

Душанбе – 2020

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
НАН Таджикистана

Научный консультант: **Исхоков Сулаймон Абунасрович,**
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент НАН Таджикистана,
профессор

Официальные оппоненты: **Азизов Музафар,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни

Исмати Мухаммаджон,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математики и информационных систем в экономике Института туризма, предпринимательства и сервиса

Хасанов Юсуфали,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры информатики и информационных технологии Российско-Таджикского (Славянского) университета

Оппонирующая организация: Таджикский национальный университет

Защита состоится 22 января 2021 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 6D.КОА–037 при Институте математики имени А. Джураева НАН Таджикистана по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А. Джураева НАН Таджикистана, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан "___" ________________ 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 6D.КОА-037,
кандидат физико-математических наук Хайруллоев Ш.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию коэрцитивных свойств и теоремам разделимости различных нелинейных дифференциальных операторов второго и более высокого порядка. На основе разделимости дифференциальных операторов изучается коэрцитивная разрешимость нелинейных дифференциальных уравнений.

Установление коэрцитивных неравенств является основной проблемой самостоятельного направления современный теории дифференциальных операторов. Наличие коэрцитивных оценок для дифференциальных операторов, позволяет сразу установить разделимость этих операторов и исследовать свойства гладкости решения дифференциальных уравнений.

Термин «разделимость дифференциального оператора» в первые был введен в научную литературу английским математиком В.Н. Эвериттом (W.N.Everitt) и шведский математиком М.Гирцом (M.Girtz) в начале семидесятых годов прошлого столетия. В своих работах [1–4] они, в основном, изучали разделимость оператора Штурма-Лиувилля

$$L[y] = -y''(x) + q(x)y(x)$$

и его степеней.

Позже результаты статьи[1] обобщались в других работах этих авторов, а также в работах Ф.М.Аткинсона(F.V.Atkinson)[5], В.Н.Эверитта, М.Гирца, Дж.Вайдмана (J.Weidmann)[6], А.Цеттла (A.Zettl)[7], В.Д.Эванса

---

[1] Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc.London Math.Soc., 1971, v.23, pp.301-324.

[2] Everitt W.N., Gierz M. An example concerning the separation property for differential operators // Proc.London Math.Soc., 1973, vol.71, pp.159-165.

[3] Everitt W.N., Gierz M. Some inequallities associated with certain differential operators // Math.Z., 1972, v.126, pp.308-326.

[4] Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc.London Math.Soc., 1972, v.24, pp.149-170.

[5] Atcinson F.V. On some results of Everitt and Giertz// Proc. Royal Soc. Edinburg. –1973. –V.71A. –P.151-158.

[6] Everitt W.N., Gierz M., Weidmann J. Some remarks on a separation and limit-point criterion of second order ordinary differential expressions // Math.Ann. –1973. –V.203. –No 4.–P.335-346.

[7] Zettl A. Separation for differential operators on the L_p spaces // Proc.Amer. Math.Soc. –1976. –V.55. –№ 6. –P.44-46.

(W.D.Evans), А.Цеттла[8], К.Х.Бойматова[9,10], М. Отелбаева[11,12], М.М.Бакоевой, С.А.Исхокова[13], Р.С. Брауна (R.C.Brown)[14], Р.С. Брауна, Д.Б. Хинтона (D.B.Hinton)[15], Н.Чернявской (N.Chernyaskaya), Л.Шустера (L.Shuster)[16,17] и др.

В частности для оператора Штурма-Лиувилля впервые избавились от условии гладкости на потенциал $q(x)$ независимо друг о друга К.Х.Бойматова[9] и В.М.Аткинсон(F.V.Atcinson)[5]. М. Отелбаев[11] исследовал разделимость оператора Штурма-Лиувилля в весовом пространстве $L_{2,k}(I)$, где I- открытий отрезок вещественной прямой.

Например, можно доказать, что при $0 < l < \frac{1}{p}(1+\frac{1}{p})$ для дифференциального выражения

$$A(x, D_x) = A^{(l)}(x, D_x) = -\frac{d}{dx^2} + l \cdot x^{-2},$$

L_p- разделимость не имеет смысла (см. К.Х.Бойматова[18]).

Разделимость обыкновенных дифференциальных выражений более высокого порядка исследовалась в работах К.Х. Бойматова и П.И. Лизоркина[19], Ф.В. Аткинсона(F.N.Atkinson)[5], В.Д. Эванса (W.D.Evans), А. Цеттла(A.Zettl)[8], С.А. Исхокова[20] , Д.С. Гаибова [21] и др.

---

[8]Evans W.D. Dirichlet and separation results for Schrodinger type operators // Proc. Roy. Soc. Edinburg A, 1978, –V.80. –P.151-162.

[9]Бойматов К.Х. Теоремы разделимости для оператора Штурма-Лиувилля // Математические заметки. 1973, Т.14, № 33, С. 349 - 359.

[10]Бойматов К.Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР, 1973. Т.213, № 5, С. 1009 –1011.

[11]Отелбаев М. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма-Лиувилля // Математические заметки, 1974, Т.16 № 6, С. 969-980.

[12]Отелбаев М. О гладкости решений дифференциальных уравнений // Изв. АН. Каз.ССР., Серия физ.-мат., 1977. № 5, С.45-48.

[13]Бакоева М.М., Исхоков С.А. О разделимости оператора Штурма-Лиувилля с несимметричным матричным потенциалом // Вест. Хорогского университета. Серия 1. –2002. –№ 5. –С. 43-51.

[14]Brown R.C. Separation and disconjugacy //Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. –2003. –V.4. –Is.3. –Article 56.–16p.

[15]Брауна Р.С., Хинтона Д.Б.(Hinton D.B.) Two separation criteria for second ordinary or partial differential operators // Mathematica Bohemica. –1999. –V.124. –№ 2-3.–P.273-292.

[16]Chernyavskaya N., Shuster L. Correct solvability, embedding theorems and separability for the Sturm-Liouvelle equation // arXiv:1307.5611v1[math.CA] –22.–Jul. –2013. 9p.

[17]Chernyavskaya N., L.Shuster. Weighted estimates for solutions if the general Sturm-Liouvelle equation and the Everitt-Giertz problem // Proc. Edinburgh Math.Soc. –2015. –V.58. –Is.01. –P.125-147.

[18]Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им.В.А. Стеклова АН СССР. –1984. –Т.170. –С. 37-76.

[19] Бойматов К.Х., Лизоркин П.И. Оценки роста решений дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. –1989. –Т.25. –№ 4. –С. 578-588.

[20]Исхоков С.А. О разделимости обыкновенных дифференциальных выражений // В сб.: Функциональный анализ и его приложения в механике и теории вероятностей. Москва. Изд-во МГУ. –1984. –С. 130-131.

[21]Гаибов Д.С. Обыкновенные дифференциальные операторы класса Трибеля на полуоси // Доклады АН Республики Таджикистан. –1993. –Т.36. –№ 12. –С. 571-574.

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х. Бойматова[10] и далее в работах К.Х. Бойматова[22,23], М. Отелбаева[24], Р. Ойнарова[25] и их учеников.

Разделимость нелинейных обыкновенных дифференциальных выражений изучалась в работах А.А. Биргебаева, М. Отелбаева[26], Т.Т. Амановой, М.Б. Муратбекова[27], Э.З.Гриншпуна, М. Отелбаева[28], К.Н. Оспанова, Р.Д. Ахмедкалиевой[29,30] и др.

Отметим, что разделимость оператора Штурма-Лиувилля с нелинейным потенциалом $q(x, |x|)$ в пространстве $L_1(-\infty, +\infty)$ получена в работе Т.Т. Амановой, М.Б. Муратбекова. В работе Э.З. Гриншпуна, М. Отелбаева доказано, что нелинейный оператор Штурма-Лиувилля, с положительным потенциалом всегда разделим в пространстве $L_1(-\infty, +\infty)$.

В работах К.Х. Бойматова[31], А.С. Мохамеда[32] и др. рассмотрены дифференциальные операторы с матричными коэффициентами.

Отметим, что в работе А.С.Мохамеда[32] допускалась нелинейность рассматриваемого дифференциального оператора за счет слабого возмущения линейного оператора.

Нелинейные дифференциальные выражения с частными производными рассматривались в работах Б.М.Муратбекова, М.Отелбаева[33], К.Х.

[22]Бойматов К.Х. L_2- оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // ДАН СССР. –1975. –Т.223. –№ 3. –С. 521-524.

[23]Бойматов К.Х. Об области определения оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. –1976. –Т.12. –№ 7. –С. 1151-1160.

[24]Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. –1983. –Т.161. –С. 195-217.

[25]Ойнаров Р. О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций // Доклады АН СССР. –1985. –Т.285. –№ 5. –С. 1062-1064.

[26]Биргебаев А.А., Отелбаева М. О разделимости нелинейного дифференциального оператора третьего порядка // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. –1984. –№ 3, С. 11-13.

[27] Аманова Т.Т., Муратбекова М.Б. Разделимость нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля в $L_1(-\infty, +\infty)$ // Известия АН КазССР. Сер.физ.-мат. –1984. –№ 3, –С. 57-59.

[28]Гриншпун Э.З., Отелбаев М. О гладкости решений нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля в $L_1(-\infty, +\infty)$ // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. –1984. –№ 5. –С.26-29.

[29]Ospanov K.N., Akhmedkaliyeva R.D. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space // SRM Preprint Series. –2011. –№ 1080. –12P.

[30]Ospanov K.N., Akhmedkaliyeva R.D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. –2012. –№ 66. –P.1-12:http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[31]Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для дифференциальных операторов произвольного порядка // Успехи математических наук. –1989. –Т.44. –№ 3. –С. 147-148.

[32] Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the Schrodinger operator with an operator potential in the Hilbert spaces // Applicable Analysis. –2005. –V.84. –№ 1. –P.103-111.

[33]Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шрёдингера // Известия вузов.Математика. –1989. –№ 3. –С. 44-48.

Бойматова[18,34], К.Х. Бойматова, А. Шарифова[35], З. Оера (Z.Oer)[36] и др.

В работах Х.А.Ати, Р.С.Алсаиди, А.Рамади(H.A.Atia, R.S.Alsaedi, A.Ramady)[37] и О.Милатовича (O.Milatovic)[38,39,40,41] рассматривается разделимость дифференциальных операторов с частными производными, заданных на римановых многообразиях.

Дифференциальные выражения более высокого порядка исследованы в следующих работах: К.Х.Бойматов[31], М.Б.Муратбеков[42], М.Б. Муратбеков, М.М.Муратбеков, К.Н. Оспанов[43], М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков[44,45], М.Г.Гадоев, С.А.Исхоков, Ф.С.Исхоков[46] и др.

В работе М.Г.Гадоева, С.А.Исхокова, Ф.С.Исхокова[46] впервые доказаны теоремы разделимости для вырождающихся эллиптических операторов общего вида в случае, когда область, в которой задается дифференциальный оператор и неотрицательные функции, которые характеризируют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и удовлетворяют условию погружения (см.

---

[34] Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // Доклады АН СССР. –1988. –Т.301. –№ 5. –С. 1033-1036.

[35] Бойматов К.Х., Шарифов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады АН России. –1992. –Т.326. –№ 3. –С. 393-398.

[36] Oer Z. Separation theorem for Sturm-Liouville equation with operator coefficient // Proyecciones, Universidad Catolica del Norte Antofagasta-Chile. –2001. –V.20. –№ 2. –P.177-191.

[37] Atia H.A., Alsaedi R.S., Ramady A. Separation of bi-harmonic operators on Riemannian manifolds // Forum Math. –2014. –V.26. –P.953-966.

[38] Milatovic O. The form sum and the Friedrichs extension of Schrodinger operators on Riemannian manifolds // Proceedings of the American mathematical society. –2003. –V.132. –№ 1.–P.147-156.

[39] Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators on Riemannian manifolds // Journal of Geometry and Physics. –2006. –V.56. –P.1283-1293.

[40] Milatovic O. A separation property for Schrodinger operators on Riemannian manifolds // Journal of Geometry and Physics. –2011. –V.61. –P.1-7.

[41] Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators in L_p –spaces on noncompact manifolds // Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. –2013. –V.58. –№ 6.–P.853-854.

[42] Муратбеков М.Б. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора высокого порядка // Дифференциальные уравнения. –1981. –Т.17. –№ 3. –С. 893-901.

[43] Муратбеков М.Б., Муратбекова М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. –2010. –Т.435. –№ 3. –С. 310-313.

[44] Гадоев М.Г., Исхоков Ф.С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Математические заметки СВФУ. –2016. –Т.23. –№ 3(91). –С. 3-26.

[45] Гадоев М.Г., Исхоков Ф.С. Об относительной ограниченности одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Математические заметки СВФУ. –2018. –Т.25. –№ 1(97). –С. 3-14.

[46] Гадоев М.Г., Исхоков С.А., Исхоков Ф.С. О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Чебышевский сборник, 2019г, т.18, № 4, стр. 85-105.

П.И.Лизоркин[47].)

Коэрцитивная разрешимость дифференциальных операторов рассмотрена в следующих статьях: К.Х. Бойматова, А. Шарифова[35], М.Б.Муратбеков, М.М. Муратбеков, К.Н.Оспанов[43], E.M.E. Zayed, A.S.Mohamed, H.A.Atia[48] и др.

Из приведенного выше краткого обзора результатов по теории разделимости дифференциальных операторов следует, что актуальной преблемой разделимости этой теории является исследовании разделимости сильно нелинейных дифференциальных операторов , то есть операторов которые не являются слабыми возмущениями линейных операторов. Именно этой актуальной проблеме посвящена настоящая диссертационная работа.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы Института математики им. А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана на 2016-2020 гг. по теме "Обобщенные краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами и нелинейные эволюционные уравнения дробного порядка".

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование коэрцитивных свойств широкого класса нелинейных операторов и систем нелинейных дифференциальных операторов второго и более высокого порядка, заданных во всем пространстве R^n, в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$; установление разделимости этих нелинейных дифференциальных операторов в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$; получение соответствующих коэрцитивных неравенств; изучение коэрцитивной разрешимости исследуемых уравнений на основе установленных коэрцитивных неравенств.

В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- изучить коэрцитивные свойства строго нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом пространстве, доказать соответствующие коэрцитивные неравенства и на их основе доказать разделимость соответствующих операторов;

[47]Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p – нормах // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. –1980. –Т.156. –С. 130-142.

[48]Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math.Anal.Appl. –2007. –V.336. –P.81-92.

- найти достаточные условия разделимости строго нелинейных дифференциальных операторов порядка выше второго и доказать соответствующие коэрцитивные неравенства;
- доказать теоремы существования и единственности решения строго нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Объекты исследования. Объектами исследования являются строго нелинейные дифференциальные операторы второго и более высокого порядка во всем пространстве, которые не являются слабыми возмущениями линейных дифференциальных операторов.

Методы исследования. Основными методами исследования являются современные методы функционального анализа и теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных; метод интегрирования по частям, впервые примененный В.Н. Эвериттом и М. Гирцом и в последующем получившей развитие в работах К.Х. Бойматова.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- установлены коэрцитивные оценки и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами и нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в гильбертовом пространстве;
- изучены коэрцитивные свойства оператора Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом;
- изучены коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами в пространстве вектор-функций и доказана теорема о разделимости общих нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами;
- изучены коэрцитивные свойства бигармонического оператора с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом;
- установлены коэрцитивные оценки, и доказана теорема о разделимости нелинейного обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка в гильбертовом пространстве;

- найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа–Бельтрами и доказана теорема о существование и единственности решение нелинейного уравнение Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве;
- найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и доказана теорема о существование и единственности решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве.

Положения, выносимые на защиту:

1. Теорема о разделимости нелинейного дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$.

2. Теорема о разделимости общего нелинейного дифференциального оператора второго порядка в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

3. Теорема о разделимости строго нелинейного дифференциального оператора Гельмгольца в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

4. Теорема о разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами в пространстве вектор-функций $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

5. Теорема о разделимости строго нелинейного дифференциального бигармонического оператора в пространстве $L_2(R^n)^l$.

6. Теорема о разделимости одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов шестого порядка в гильбертовом пространстве $L_2(R)$.

7. Теорема о существовании и единственности решения нелинейного дифференциального оператора второго порядка в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

8. Теорема о существовании и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения Лапласа -Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$.

Личный вклад автора. Задачи исследования были сформулированы совместно с научным консультантом работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе "Научная новизна", получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в теории дифференциальных операторов с частными производными, в теории пространств дифференцируемых функции многих переменных и спектральной теории дифференциальных операторов. Материалы диссертации могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности «Математика».

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведенных в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы: Основные результаты работы обсуждены и получены положительные отзывы на семинарах отдела теории функции и функционального анализа, общеинститутском семинаре Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвященная 60-летию академика НАН Таджикистана К.Х.Бойматова, г. Душанбе, 24 июня, 2010 г.; международная научная конференция «Наука и инновационные разработки -Северу», Россия, г. Мирный, 10-12 марта 2014 г.; международная научная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященная 80-летию чл.-корр. НАН Таджикистана, д.ф.-м.н., профессора В.Л. Стеценко, г. Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.; международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения», посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского, г. Москва, 25-29 мая 2015 г.; VI-ая Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. СВФУ им. М.К. Аммосова, Политехнический институт, Россия, г. Мирный, 2015 г.; международная летняя математическая школа-конференция С.Б. Стечкина по теории функций, г. Душанбе, 15-25 августа 2016 г.; международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию член.корр РАН СССР А.Ф. Леонтьева, Россия, г. Уфа, 27-30 мая, 2017 г.; Уфимская международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Россия, Уфа, 27-30 сентября, 2016 г.; международная научная конференция «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций», посвященная 90-летию академика НАН Таджикистана, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Л.Г., г.

Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.; IV-ая международная научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», Приэльбрусье, п. Терскол, Кабардино-Балкарская республика, 22-26 мая 2018 г.; международная научная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы», Россия, г. Уфа, 1-4 октября 2018 г.; международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика РАН В.А. Садовничего МГУ, г. Москва, 13-15 мая 2019 г.; международная научно-практическая конференция «Наука и инновационные разработки - Северу», Россия, г. Мирный, 2019 г., 14-15 марта 2019 г; XVI-ая международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза, Россия, г. Тула, 13–18 мая 2019 г; международная конференция «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвященная 60-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова С.А., Душанбе, 13–14 декабря 2019 г.; международная конференция «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященная 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа, Душанбе, 30-31 января 2020 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 34 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1]-[16] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки РФ. Работы [1]-[6] входят в международные библиографические и реферативные базы данных **Web of Science и Scopus**.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 135 наименований и заключения, занимает 157 страницу машинописного текста и набрана на LaTeX . Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья-на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Основное содержание работы

Во введении даётся краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемы, обосновывается актуальность темы.

Первая глава состоит из пяти параграфов, посвящена изучению коэрцитивных свойств и разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в пространстве $L_2(R^n)$ и систем нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Первый параграф носит вспомогательный характер; приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Пусть R^n - n - мерное евклидово пространство и $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ - произвольная точка этого пространства. Символом $L_p(R^n)$, где $1 \leq p < +\infty$ обозначим пространство измеримых в R^n функций $\varphi(x)$ с конечной нормой

$$\|\varphi; L_p(R^n)\| = \left\{ \int\limits_{R^n} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Пусть l- некоторое натуральное число. Символом $L_p(R^n)^l$ обозначим пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_l(x))$ таких, что $u_k(x) \in L_p(R^n), (k = \overline{1,l})$. Норму в пространстве $L_p(R^n)^l$ определяем следующим образом:

$$\|u; L_p(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{k=1}^{l} \|u_k\|^p_{L_p(R^n)} \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

При $p = 2$ пространство $L_p(R^n)^l$ является гильбертовым, и скалярное произведение в $L_2(R^n)^l$ определяется с помощью равенства

$$(u, \upsilon) = \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{R^n} u_j(x)\overline{\upsilon_j(x)} dx \quad .$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - мультииндекс, то есть вектор с целочисленными неотрицательными компонентами. Обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$,

$$D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Через $C_0^\infty(R^n)$ обозначим множество финитных и бесконечно дифференцируемых в R^n функций с компактным носителем. Говорят, что функция $\varphi(x)$ имеет обобщенную производную мультииндекса α в R^n в смысле Соболева, если существует локально суммируемая в R^n функция $\psi(x)$ такая, что

$$\int\limits_{R^n} \varphi(x) \cdot \overline{D^\alpha \omega(x)} dx = \int\limits_{R^n} \psi(x) \cdot \overline{\omega(x)} dx$$

для всех $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$, при этом $\psi(x) = D^\alpha \varphi(x)$.

Пусть r- некоторое натуральное число и $1 \le p < +\infty$. Символом $W_p^r(R^n)$ обозначим пространство комплекснозначных функций $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, имеющих в R^n всевозможные обобщенные производные $D^\alpha \varphi$ порядка $|\alpha| \le r$, также принадлежащие пространству $L_p(R^n)$. Норма в пространстве $W_p^r(R^n)$ определяется равенством

$$\|\varphi(x); W_p^r(R^n)\| = \left\{ \sum_{|\alpha| \le r} \int\limits_{R^n} |D^\alpha \varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Будем говорить, что вектор-функция $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_l(x))$ принадлежит классу $W_p^r(R^n)^l$, если ее компоненты $u_k(x)(k = \overline{1,l})$ принадлежат $W_p^r(R^n)$.

Пространство $W_p^r(R^n)^l$ также является нормированным пространством, и его норма определяется следующим образом:

$$\|\varphi(x); W_p^r(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{k=1}^{l} \|u_k; W_p^r(R^n)\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 2$ пространства $W_p^r(R^n)^l$, является гильбертовым пространством и скалярное произведение в нем определяется равенством

$$\langle u, \vartheta; W_2^r(R^n)^l \rangle = \sum_{k=1}^{l} \sum_{|\alpha| \le r} \int\limits_{R^n} D^\alpha u_k(x) \overline{D^\alpha \vartheta_k(x)} dx.$$

Если вектор-функция $\varphi(x)u(x)$ принадлежит пространству $W_p^r(R^n)^l$ для всех $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, то говорят, что $u(x)$ принадлежит классу $W_{p,loc}^r(R^n)^l$.

Символом $\mathrm{End}\, \mathrm{C}^l$ обозначим пространство $l \times l$ матриц $a = (a_{ij})_{i,j=1}^l$ с нормой $\|a\| = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Во втором параграфе первой главы исследуются коэрцитивные свойства нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$

$$L[u]=-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+V(x,u)u(x),$$

и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве.

В пространстве $L_2(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+V(x,u)u(x)=f(x), \qquad (1)$$

$$u(x)\in W^2_{2,loc}(R^n),$$

где $g(x)=(g_{ij}(x))$- эрмитова матрица, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Определение 1.2.1. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в $L_2(R^n)$, если*

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],$$

$V(x,u(x))u(x)\in L_2(R^n)$ *для всех* $u(x)\in L_2(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x)\in L_2(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x,z)\in C^1(R^n\times\mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta)=V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta)=V(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz.$$

Предположим, что для всех $x\in R^n,\ \omega=\xi+i\eta\in\mathbb{C},\ \Omega=\mu+i\nu\in\mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x))]\right\|^2\le\sigma_1, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}\right\|^2\le\sigma_1, \qquad (3)$$

$$\left\| g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu + \nu\frac{\partial F}{\partial \eta})\omega \right\| \leq \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}}\Omega \right\|. \qquad (4)$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = \xi + i\eta \in \mathbb{C}, \Omega = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| g^{-\frac{1}{2}} F \frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x))] \right\|^2 \leq \sigma_3, \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2} \right\|^2 \leq \sigma_4, \qquad (6)$$

$$\left\| g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu + \nu\frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega \right\| \leq \delta_2 \left\| F\Omega \right\|. \qquad (7)$$

Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия (2) –(7), и пусть числа* σ_j, δ_j $(j = \overline{1,4})$ *такие, что*

$$n\sigma_1 + 2n\sigma_2 < 4,\ \sigma_1 + 2\sigma_2 + 4\delta_1 < 4,\ n\sigma_3 + 2n\sigma_4 < 4,\ \sigma_3 + 2\sigma_4 + 4\delta_2 < 4. \quad (8)$$

Тогда оператор $L[u]$ *разделяется в* $L_2(R^n)$, *и для всех функций* $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_2(R^n)$ *справедливы включения*

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right],$$

$$V(x,u)u, \quad g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n),\ i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]; L_2(R^n) \right\| + \|V(x,u)u; L_2(R^n)\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n) \right\| \leq M\|f(x); L_2(R^n)\|, \qquad (9)$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

В третьем параграфе первой главы изучаются коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$ в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, норма которого определяется равенством

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)\| = \left\{ \int\limits_{R^n} \rho(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\rho(x)$ - положительная функция, определенная в R^n.

На основе полученных коэрцитивных оценок доказывается разделимость рассматриваемых операторов.

В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \qquad (10)$$

$$u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n),$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Определение 1.3.1. *Уравнение (10) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в* $L_{2,\rho}(R^n)$, *если*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_2(R^n)$$

для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x,z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$.

Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta) = V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = V(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz.$$

Пусть для всех $x \in R^n$, $\omega = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, $\Omega = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1} \right\|^2 \le \sigma_1, \qquad (11)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}F^{-1} \right\|^2 \le \sigma_2, \qquad (12)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \le \sigma_3, \qquad (13)$$

$$\left\|\frac{1}{n}a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)b_j(x)F^{-1}\right\|^2 \le \sigma_4, \tag{14}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial F}{\partial \eta})\omega\right\| \le \delta_1 \left\|F^{\frac{1}{2}}\Omega\right\|, \tag{15}$$

где знак $\| \bullet \|$ обозначает норму вектора из $\mathbb{C}$.

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = \xi + i\eta \in \mathbb{C}, \Omega = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2}\right\|^2 \le \sigma_5, \tag{16}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega\right\| \le \delta_2 \left\|F\Omega\right|, \tag{17}$$

где знак $\| \bullet \|$ обозначает норму вектора из $\mathbb{C}$.

Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены условия (11) –(17), и пусть числа* σ_j, $(j = \overline{1,5})$, δ_1, δ_2 *такие, что*

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4 < \frac{4}{3n^2}, \ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)} < 1-\delta_1, \tag{18}$$
$$\frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)} < 1-\delta_2.$$

Тогда оператор $L[u]$ *разделяется в* $L_{2,\rho}(R^n)$, *и для всех функций* $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$, *справедливы включения*

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n), i=1,2,...,n; j=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| + \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\| +$$
$$+\sum_{i,j=1}^n \left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| \le M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|, \tag{19}$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

В четвертом параграфе рассматривается нелинейный дифференциальный оператор Гельмгольца в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Рассмотрим оператор Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом

$$L[u] = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x), \tag{20}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, а значения $V(x,\omega)$, $x \in R^n, \omega \in \mathbb{C}^l$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми $(l \times l)$ матрицами. Здесь и далее l -некоторое фиксированное натуральное число.

Определение 1.4.1. *Оператор (20) называется разделимым в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, если для всех вектор-функций $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $L[u] \in L_{2,\rho}(R^n)^l$, выполняются включения*

$$(-\Delta + k^2)u(x), \quad V(x, u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l.$$

Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических операторов второго порядка в линейном случае при $l = 1$ изучалась в работе К.Х.Бойматова[34]. Вопрос о разделимости оператора Гельмгольца в линейном случае, то есть, в случае $V(x,u(x))u(x) = q(x)$, исследовался в работе S. Omran и K.A. Gepreel[49].

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы не являются слабым возмущением линейного оператора.

Предположим, что значения матрица-функции $V(x,\omega) \in C(R^n \times \mathbb{C}^l; \operatorname{End}\mathbb{C}^l)$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами порядка l. Известно, что понятие квадратный корень от положительно-определенной матрицы определяется однозначно.

Для удобства вводим следующие обозначения:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

[49]Omran S., Gepreel K.A. Separation of the Helmholtz partial differential equation in Hilbert space // Adv. Studies Theor. Phys. –2012. –V.6. –№ 9. –P.399-410.

где ω определяется по формуле $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Определение 1.4.2. *Будем считать, что матрица-функция $V(x,\omega)$ принадлежит классу $T^{\delta_1,\delta_2,\chi_1,\chi_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$, если выполняются следующие условия для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in \mathbb{C}^l$, $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i\nu_l) \in \mathbb{C}^l$:*

$$\left\|F^{-\frac{1}{2}}(x,u)u\right\|^2 \leq \delta_1 \|F(x,u)u\|^2, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|F^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}(x,u)\right\|^2 \leq \chi_1, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_i}\omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_i}\omega\right\| \leq \\ \leq \sigma_1 \left\|F^{\frac{1}{2}}(x,u)\Omega\right\|,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\left\|V^{-1}(x,u)u\right\|^2 \leq \delta_2 \|u\|^2, \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial Q(x,u)}{\partial x_i}Q^{-1}(x,u)\right\|^2 \leq \chi_2, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_i}\omega + \nu_j F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta_i}\omega\right\| \leq \\ \leq \sigma_2 \left\|F(x,u)\Omega\right\|,\end{aligned} \tag{26}$$

где знак $\|\bullet\|$ обозначает норму вектора из $\mathbb{C}^l$ или матрицы из $End\mathbb{C}^l$.

Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть матрица-функция $V(x,\omega)$ принадлежит классу $T^{\delta_1,\delta_2,\chi_1,\chi_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$, и пусть весовая функция $\rho(x)$ принадлежит классу $C^1(R^n)$ и для всех $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in \mathbb{C}^l$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i}\rho^{-\frac{1}{2}}(x)Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega)\right\| \leq \sigma_3. \tag{27}$$

Тогда при выполнении условий

$$0 < \sigma_1 < 1,\ 0 < \sigma_2 < 1,\ \chi_1 + 2\delta_1 k^2 + \sigma_3 < 4,\ \chi_2 + 2\delta_2 k^2 + \sigma_3 < 4,$$

нелинейный оператор Гельмгольца (20) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, и для всех вектор-функций $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ уравнения

$$-(\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x)$$

с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\begin{gathered}\|(\Delta + k^2)u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \\ + \sum_{i=1}^{n} \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| \le \\ \le M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\|, \qquad (28)\end{gathered}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Пятый параграф посвящен исследованию коэрцитивных свойств нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричным потенциалом. Здесь обобщаются результаты второго параграфа на случай общего дифференциального оператора второго порядка. Сначала приводится основной результат параграфа, а потом доказываются некоторые вспомогательные леммы и, наконец, приводится полное доказательство основной теоремы.

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами:

$$L_0[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора L_0 являются квадратными матрицами порядка l с элементами из класса $C^1(R^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$I).\ a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \qquad Im a_{ij}(x) \equiv 0;$

$II).\ |a_{ij}(x)| \le \sigma_1, \quad |\nabla a_{ij}(x)| \le \sigma_2, \quad (\forall x \in R^n;\ i, j = 1, 2, \ldots, n);$

$III).\ \sum_{i=1}^{n} \left|s_i; \mathbb{C}^l\right|^2 \le \chi_1 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle a_{ij}(x)s_i, s_j; \mathbb{C}^l\right\rangle \left(\forall x \in R^n,\ \forall s = \{s_i\}_{i=1}^n,\ s_i \in \mathbb{C}^l\right),$

константы σ_1, σ_2, χ_1 в этих условиях не зависят от x и s.

Рассмотрим следующий нелинейный дифференциальный оператор второго порядка с переменными старшими коэффициентами:

$$L[u] = L_0[u] + V(x,u)u. \tag{29}$$

Пусть $V(x,\omega)$ - квадратная матрица-функция порядка l, определенная на всех $x \in R^n$, $\omega \in \mathbb{C}^l$, элементы которой непрерывно дифференцируемы по всем аргументам. Предполагается, что значения $V(x,\omega)$ являются положительно-определёнными эрмитовыми матрицами.

Определение 1.5.1. *Дифференциальный оператор (29), называется разделимым в весовом пространстве $L_{2,k}(R^n)^l$, если для всех вектор-функций $u(x) \in L_{2,k}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $L[u] \in L_{2,k}(R^n)^l$ выполняются включения*

$$L_0[u] \in L_{2,k}(R^n)^l, \quad V(x,u)u \in L_{2,k}(R^n)^l.$$

Здесь мы предполагаем, что матрица-функций $a_{ij}(x)$ коммутируется с $V(x,\omega)$, т.е.

$$[(a_{ij})^l_{i,j=1} \cdot V(x,\omega)] = (a_{ij})^l_{i,j=1} \cdot V(x,\omega) - V(x,\omega) \cdot (a_{ij})^l_{i,j=1} \equiv 0$$

для всех $x \in R^n$ и всех $\omega \in \mathbb{C}^l$.

Введём следующие обозначения:

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\xi_1,\xi_2,...,\xi_l,\eta_1,\eta_2,...,\eta_l) = V^{1/2}(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$
$$Q(x_1,x_2,...,x_n,\xi_1,\xi_2,...,\xi_l,\eta_1,\eta_2,...,\eta_l) = F^2(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

где ω определяется равенством $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Определение 1.5.2. *Будем считать, что матрица-функция $V(x,\omega)$ принадлежит классу $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$, если выполняются следующие условия для всех $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in C^l, \Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i\nu_l)$:*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}}(x,\omega) \right\|^2 \leq \chi, \tag{30}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \eta_j} \omega \right\| \leq \tag{31}$$
$$\leq \sigma \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega \right\|,$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-1}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial \eta_j} \omega \right\| \leq \tag{32}$$
$$\leq \delta \left\| F\Omega \right\|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial x_i} Q^{-1}(x,\omega) \right\|^2 \leq \gamma, \tag{33}$$

где знак $\|\bullet\|$ *обозначает норму вектора из* $\mathbb{C}^l$ *или матрицы из* $End\mathbb{C}^l$.

Основной результат этого параграфа сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1.5.1. *Пусть матрица-функция* $V(x,\omega)$ *принадлежит классу* $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$, *и матрица-функций* $a_{ij}(x)$ *коммутируется с* $V(x,\omega)$ *и удовлетворяет условиям I, II, III. Также пусть весовая функция* $k(x)$ *принадлежит классу* $C^1(R^n)$ *и для всех* $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in \mathbb{C}^l$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial k(x)}{\partial x_i} k^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \right\|^2 \leq \sigma_3. \tag{34}$$

Тогда при выполнении неравенств

$$\chi_1\sigma_1 < 2, \quad 0 < \sigma_3 < 2, \quad \chi + \sigma_3 < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{n(\chi+\sigma_3)}{2}, \tag{35}$$

$$\gamma + \sigma_3 < \frac{2}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{(\gamma+\sigma_3)n}{2},$$

где $\chi, \sigma, \delta, \gamma, \sigma_1, \sigma_3, \chi_1$ *– постоянные из условий (30) – (33) и I – III, нелинейный оператор (29) разделяется в весовом пространстве* $L_{2,k}(R^n)^l$. *При этом для всех вектор-функций* $u(x) \in W_{2,loc}(R^n)^l \cap L_{2,k}(R^n)^l$ *уравнения*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + V(x,u(x))u(x) = f(x) \tag{36}$$

с правой частью $f(x) \in L_{2,k}(R^n)^l$ *выполняется следующее коэрцитивное неравенство:*

$$\left\| V(x,u)u; L_{2,k}(R^n)^l \right\| + \sum_{j=1}^{n} \left\| V^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,k}(R^n)^l \right\| +$$
$$+ \left\| L_0[u]; L_{2,k}(R^n)^l \right\| \leq M \left\| f; L_{2,k}(R^n)^l \right\|, \tag{37}$$

где $M > 0$ число, которое не зависит от вектор – функций $f(x), u(x)$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию коэрцитивных свойств и разделимости некоторых классов нелинейных дифференциальных операторов более высокого порядка (то есть выше второго порядка).

В первом параграфе второй главы исследуются коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

с матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$, который не является слабым возмущением линейного оператора.

Разделимость линейного бигармонического оператора

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x)$$

ранее исследовалось в работе E.M.E.Zayed[50]. В данном параграфе обобщаем результаты E.M.E.Zayed[50] в нелинейном случае.

В пространстве $L_2(R^n)^l$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$\Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \quad u(x) \in W^4_{2,loc}(R^n)^l, \tag{38}$$

где значения $V(x, \omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in \mathbb{C}^l$ являются квадратными положительно определенными эрмитовыми матрицами из $\operatorname{End}\mathbb{C}^l$.

Определение 2.1.1. *Уравнение (38) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называется разделимым в $L_2(R^n)^l$, если*

$$\Delta^2 u(x),\, V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l$$

для всех $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)^l$.

Для $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \cdots, z_l^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ положим $\langle z^{(1)}, z^{(2)} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{l} z_j^{(1)} \overline{z_j^{(2)}}$.

Далее обозначим $\langle u, v \rangle = \int\limits_{R^n} \langle u(x), v(x) \rangle dx$, если интеграл в правой части абсолютно сходится.

В дальнейшем предположим, что $V(x, \omega) \in C^2(R^n \times \mathbb{C}^l; \operatorname{End}\mathbb{C}^l)$.

Введем новые матрица-функции

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$
$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

---

[50] Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math.Anal.Appl. –2008. –V.337. –P.659-666.

где ω определяется равенством $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x, \omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Предположим, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l)$, $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i\nu_l)$, $(\xi_j, \eta_j, \mu_j, \nu_j \in R)$ и $u \in W_2^1(R^n)$ – матрица-функция $F(x, \omega)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \leq \sigma_1, \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \sigma_2 \left\| F^{\frac{3}{2}} u \right\|^2, \tag{40}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j} \omega \right\| \leq \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega \right\|, \tag{41}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \omega \right\| \leq \delta_2 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega \right\|. \tag{42}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l), \Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i\nu_l), (\xi_j, \eta_j, \mu_j, \nu_j \in R)$ и $u \in W_2^1(R^n)$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} Q^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_3, \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \sigma_4 \|Vu\|^2, \tag{44}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-1} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j} \omega \right\| \leq \delta_3 \left\| F\Omega \right\|, \tag{45}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j} \omega \right\| \leq \delta_4 \left\| F\Omega \right\|, \tag{46}$$

где знак $\| \bullet \|$ обозначает норму вектора из $\mathbb{C}^l$ или матрицы из $End\mathbb{C}^l$.

Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия (39) –(46), и пусть числа* σ_j, δ_j $(j = \overline{1,4})$ *такие, что*

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 < 4,\ \delta_1 + 2\delta_2 < 1,\ \sigma_3 + 2\sigma_4 < 4,\ \ \delta_3 + 2\delta_4 < 1. \tag{47}$$

Тогда оператор $L[u]$ разделяется в $L_2(R^n)^l$, и для всех вектор-функций $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)^l$, справедливы включения

$$\Delta^2 u, \quad V(x,u)u, \quad V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L_2(R^n)^l,\ i = 1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\|\Delta^2 u(x); L_2(R^n)^l\| + \|V(x,u(x))u(x); L_2(R^n)^l\| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left\| V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}; L_2(R^n)^l \right\| \le M \|f(x); L_2(R^n)^l\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Пример. Условия теоремы выполняются для уравнения (38) при $V(x, u(x)) = (1 + |u(x)|^2)^\rho$, то есть $Q(x,\xi,\eta) = (1 + \xi^2 + \eta^2)^\rho$, когда $\rho \le min\{\frac{\delta_2}{2};\ \frac{\delta_4}{4}\}$.

Во втором параграфе второй главы исследуются коэрцитивные оценки и разделимость нелинейного обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка вида

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x,u(x))u(x) = f(x),$$

где $V(x,z)$-положительная функция. За область определения оператора L[u(x)] примем множество всех $u(x) \in L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$ таких, что $L[u(x)] \in L_2(R)$.

Представим функцию $V(x,z)$ в виде

$$V(x,z) = F(x,\xi,\eta),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz.$$

Определение 2.3.1. *Уравнение $-u^{VI}(x) + V(x,u(x))u(x) = f(x)$ (и соответствующий ему дифференциальный оператор $L[u]$) называются разделимыми в $L_2(R)$, если*

$$u^{VI}(x),\, V(x,u)u(x) \in L_2(R)$$

для всех $u(x) \in L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$ таких, что $f(x) \in L_2(R)$.

Предположим, что $F(x,\xi,\eta) \in C^3(R^3)$ и для всех $x \in R$, $\omega = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, $\Omega = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$, $u \in W^2_2(R)$ выполняются следующие неравенства:

$$|F^{-\frac{1}{2}} F'''_{xxx} F^{-1}| \le \sigma_1, \tag{48}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}F''_{xx}u'(x)| \le \sigma_2|Fu|, \tag{49}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}F'_{x}u''(x)| \le \sigma_3|Fu|, \tag{50}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}(F'_{\xi}\mu + F'_{\eta}\nu)\omega\| \le \delta_3|F^{\frac{1}{2}}\Omega|, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}|F^{-\frac{1}{2}}(F''_{\xi\xi}\mu^2 + F'_{\xi}\mu'_x + 2F''_{x\xi}\mu + 2F''_{\xi\eta}\mu\nu + 2F''_{x\eta}\nu + \\ + F'_{\eta}\nu'_x + F''_{\eta\eta}\nu^2)\omega\| \le \delta_2|F^{\frac{1}{2}}\Omega|;\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}|F^{-\frac{1}{2}}(F'''_{\xi\xi\xi}\mu^3 + F'_{\xi}\mu''_{xx} + 3F'''_{xx\xi}\mu + 3F'''_{xx\eta}\nu + 3F'''_{x\xi\xi}\mu^2 + \\ + 3F'''_{\xi\xi\eta}\mu^2\nu + 3F''_{\xi\xi}\mu\mu'_x + 3F''_{x\xi}\mu'_x + 6F'''_{x\xi\eta}\mu\nu + 3F'''_{x\eta\eta}\nu^2 + \\ + 3F''_{\xi\eta}\nu\mu'_x + 3F'''_{\xi\eta\eta}\mu\nu'_x + 3F''_{x\eta}\nu'_x + 3F''_{\eta\eta}\nu\nu'_x + 3F'''_{\xi\eta\eta}\mu\nu^2 + \\ + F'_{\eta}\nu''_{xx} + F'''_{\eta\eta\eta}\nu^3)\omega| \le \delta_1|F^{\frac{1}{2}}\Omega|.\end{aligned} \tag{53}$$

Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия (48)-(53), и пусть числа* $\sigma_j \quad j = \overline{1,3}, \ , \ \delta_i \quad (i = \overline{1,3})$ *такие, что*

$$3\sigma_1 + 9\sigma_2 + 9\sigma_3 + 4\delta_1 + 12\delta_2 + 12\delta_3 < 4. \tag{54}$$

Тогда нелинейный оператор $L[u(x)]$ *разделяется в пространстве* $L_2(R)$ *и для всех функций* $u(x) \in L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$ *уравнения* $-u^{VI}(x) + V(x,u(x))u(x) = f(x)$ *с правой частью* $f(x) \in L_2(R)$ *справедливы включения*

$$u^{VI}(x), \quad V(x,u(x))u(x), \quad V^{\frac{1}{2}}(x,u(x))u'''(x) \in L_2(R).$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned}\|u^{VI}(x); L_2(R)\| + \|V(x,u)u(x); L_2(R)\| + \\ + \|V^{\frac{1}{2}}(x,u)u'''(x); L_2(R)\| \le M\|f(x); L_2(R)\|,\end{aligned} \tag{55}$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$ *и* $f(x)$*.*

В третьем параграфе второй главы приводится несколько примеров неразделимых операторов.

Третья глава диссертационной работы посвящена коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве.

В первом параграфе третьей главы изучается разрешимость уравнения (1). Как следствие выводов теоремы 1.2.1. получим следующие результаты.

Теорема 3.1.1. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu$$

разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, *и пусть положительная функция* $\phi(x)$, *принадлежащая* $C^1(R^n)$, *удовлетворяет неравенствам*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(detg(x))] Q^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \gamma_1, \tag{56}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| g^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \gamma_2, \tag{57}$$

где $0 < \gamma_1 + 2\gamma_2 < 4$. *Тогда уравнение (1) для всех* $f \in L_2(R^n)$ *имеет единственное решение в пространстве* $L_2(R^n)$.

Во втором параграфе этой главы на основе разделимости оператора

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$, изучается коэрцитивная разрешимость соответствующего дифференциального уравнения (10). С помощью теоремы 1.3.1 докажем следующие результаты о коэрцитивной разрешимости уравнения (10).

Теорема 3.2.1. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + Vu$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, *и пусть положительная функция* $\phi(x)$, *принадлежащая в* $C^1(R^n)$, *удовлетворяет неравенствам*

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \theta_1, \tag{58}$$

где $0 < \theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 < \frac{1}{n^2}$. *Тогда уравнение (10) для всех* $f \in L_{2,\rho}(R^n)$ *имеет единственное решение в пространстве* $L_{2,\rho}(R^n)$.

Основные результаты и выводы

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

1. установлены коэрцитивные оценки и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами и нелинейных дифференциальных операторов второго порядка отличных от оператора Лапласа-Бельтрами в весовом гильбертовом пространстве [16-А];
2. изучены коэрцитивные свойства оператора Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом [9-А, 11-А, 13-А, 26-А, 27-А];
3. изучены коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами отличных от оператора Гельмгольца в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости общих нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами [6-А, 8-А, 21-А, 22-А];
4. изучены коэрцитивные свойства бигармонического оператора с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом [1-А, 2-А, 12-А, 23-А, 24-А, 25-А];
5. изучены коэрцитивные свойства обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка с нелинейным потенциалом в гильбертовом пространстве и доказана теорема о разделимости вышеуказанного нелинейного оператора [3-А];
6. найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейного оператора Лапласа–Бельтрами и доказана теорема о существование и единственности решение нелинейного уравнение Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве [16-А];
7. найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка отличных от оператора Лапласа-Бельтрами и доказана теорема о существование и единственности решение нелинейных дифференциальных уравнение второго порядка в весовом пространстве [5-А, 33-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в теории дифференциальных операторов с частными производными, в теории пространств дифференцируемых функции многих переменных и спектральной теории дифференциальных операторов.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Минобрнауки РФ.

[1-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9. –№ 1. – С. 55-62. DOI: https://doi.org/10.13108/2017-9-1-54. **(SCOPUS)**

[2-А]. Karimov O.Kh. On coercive properties and separability of biharmonic operator with matrix potential [Текст] /О.Х.Каримов // Ufimsk. Mat. Zh. –2017. Vol. 9, Issue –1. –PP.54-61. DOI: https://doi.org/10.13108/2017-9-1-54.**(SCOPUS)**

[3-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18.–№ 4. – С.245-254.DOI: http://dx.doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254. **(SCOPUS)**

[4-А]. Karimov O.Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces. [Текст] /O. Kh. Karimov // Journal of mathematical sciences, DOI: 10.1007/s10958-019-04447-y. – Vol. 241. –№ 5. – 2019. PP.589-595. **(SCOPUS)**

[5-А]. Каримов О.Х. О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов //Чебышевский сборник. –2019. – Т.20. –№4. С.170-187. DOI: http://dx.doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-170-187 **(SCOPUS)**

[6-А]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Дифференциальные уравнения. Спектральная теория, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. –Т. 141. –ВИНИТИ РАН. – 2017. –С.79-85.**(SCOPUS)**

[7-А].Каримов О.Х. О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2005. – Т. XLVIII. – № 3-4. – С.38-43.

[8-А].Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами [Текст] /О.Х.Каримов// Известия Академии Наук Республики Таджикистан, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2014. – № 4(157). –С.42-50.

[9-А].Каримов О.Х. О Коэрцитивных свойствах и разделимости оператора Гельмгольца [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. –№ 3. – С.198-203.

[10-А]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. –№ 8. – С.665-673.

[11-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст]/О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2016. – Т. 59. –№ 7-8. – С.299-304.

[12-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Ученые записки ХГУ. –2017. –№ 1. – С.789-790.

[13-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Вестник ТГНУ. – 2017. –№ 2. –С.1020-1023.

[14-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. –№ 11-12. – С.688-692.

[15-А]. Каримов О.Х. О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т. 62. –№ 9-10. – С.523-531.

[16-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного дифференциального уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов Известия Академии Наук Республики Таджикистан, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2018. – № 4(173). –С.62-72.

В других изданиях:

[17-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы научной конференции "Математика и информационные технологии, посвящённой 15-летию независимости Республики Таджикистан. г.Душанбе, 27 октября, 2006г., С. 33-35.

[18-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные оценки решений нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка на всей оси [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы научной конференции «Комплексный анализ и неклассические системы дифференциальных уравнений», посвященной 75-летию со дня рождения академика А. Джураева. Душанбе. 16 ноября 2007 г., С. 27-28.

[19-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов// Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвященной 60-летию академика К.Х.Бойматова, г.Душанбе, 24 июня, 2010г., С. 54-56.

[20-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость линейного оператора Шрёдингера с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов// Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения», посвященной 70-летию профессора Э.М.Мухамадиева, г. Душанбе, июнь, 2011г., С.56.

[21-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка [Текст] /О.Х.Каримов// Сборник тезисов докладов: международной научной конференции «Наука и инновационные разработки -Северу», Россия, г. Мирный, 10-12 марта 2014г., С.270-271.

[22-А]. Каримов О.Х.Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященной 80-летию чл.корр. АН РТ, д.ф.-м.н., профессора В.Л.Стеценко, г.Душанбе, 27-28 апреля 2015г., С. 25.

[23-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов //Материалы международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения», посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, г. Москва, 2015г., 25-29 мая, С.153-154.

[24-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Сборник докладов VI-й Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал), ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», в г. Мирном. 2015, С. 12-14.

[25-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвященной 25-летию независимости Республики Таджикистан. Филиал МГУ им М.В.Ломоносова, г. Душанбе, 2016г., 3-4 июня, С.79-80.

[26-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. Душанбе, 15-25 август 2016 г. С. 128-132.

[27-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и ее приложений», Россия, г.Уфа, 27-30 сентября 2016 - С.79-80.

[28-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и разделимость нелинейного трижды гармонического дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию член.корр РАН СССР А.Ф. Леонтьева, Россия, Уфа, 27-30 мая, 2017г, С.81-82.

[29-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе 27-28 октября, 2017г, С.54-55.

[30-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», 22-26 мая 2018 г., Приэльбрусье, п. Терскол, Кабардино-Балкарская Республика) С.116.

[31-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивной оценке и разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и его приложений», филиал МГУ в г.Душанбе, 2018, 21-22 июня, С.51-52.

[32-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа, 2018, 1-4 октября, С. 93-94.

[33-А]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и разделимость нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст]

/О.Х.Каримов // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвященной 60-летию академика Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова С.А., Душанбе, 2019, 13–14 декабря, С.88-89.

[34-А]. Каримов О.Х. О коэрцитивной оценке и разделимости нилинейного дифференциального оператора в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа, Душанбе, 30-31 января 2020г, С. 162-163.

АКАДЕМИЯИ МИЛЛИИ ИЛМҲОИ
ТОҶИКИСТОН
ИНСТИТУТИ МАТЕМАТИКАИ ба номи А.ҶӮРАЕВ

УДК 517.948

Бо ҳуқуқи дастхат

Каримов Олимҷон Худойбердиевич

БАҲОҲОИ КОЭРСИТИВӢ ВА ҶУДОШАВАНДАГИИ ОПЕРАТОРҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ҒАЙРИХАТТӢ

Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
доктори илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.01 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ

Душанбе – 2020

Кор дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон иҷро шудааст

Мушовири илмӣ:	**Исҳоқов Сулаймон Абунасрович,** доктори илмҳои физикаю математика, узви вобастаи АМИ Тоҷикистон, профессор
Муқарризони расмӣ:	**Азизов Музафар,** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ, **Исматӣ Муҳаммадҷон,** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи математика ва системаҳои информатсионӣ дар иқтисодиёти Институти саёҳӣ, соҳибкорӣ ва хизмат **Хасанов Юсуфалӣ,** доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи информатика ва технологияҳои информатсионии Донишгоҳи (Славянии) Россия ва Тоҷикистон
Муассисаи тақриздиҳанда:	Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Ҳимояи диссертатсия санаи 22 январи соли 2021 соати 10:00 дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-037 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ 299/4 баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.mitas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи "___" ________ соли 2020 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-037,
номзади илмҳои физикаю математика Хайруллоев Ш.А.

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Муҳиммияти мавзӯъ. Рисола ба тадқиқи хосиятҳои коэрситивӣ ва ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии гуногуни тартиби ду ва зиёда аз он бахшида шудааст. Дар асоси ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалӣ ҳалшавандагии коэрситивии муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ омӯхта мешавад.

Барқарор намудани нобаробариҳои коэрситивӣ проблемаи асосии равияи мустақили назарияи муосири операторҳои дифференсиалии ба ҳисоб меравад. Мавҷуд будани баҳоҳои коэрситивӣ барои операторҳои дифференсиалӣ имкон медиҳад, ки ҷудошавандагии ин гуна операторҳо, тадқиқи мавҷудият ва суфтагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ барқарор карда шаванд.

Истилоҳи «ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалӣ»-ро аввалин шуда математики англис В.Н. Эверитт (W.N.Everitt) ва математики шведӣ М. Гиртс (M.Girtz) дар аввалҳои солҳои ҳафтодуми асри гузашта ба адабиёти илмӣ дохил намудаанд.

Онҳо дар корҳои худ[1–4] асосан ҷудошавандагии оператори Штурм-Лиувилл

$$L[y] = -y''(x) + q(x)y(x)$$

ва дараҷаҳои онро тадқиқ намудаанд.

Баъдан натиҷаҳои мақола[1] дар корҳои дигари ин муаллифон ва дар корҳои Ф.М.Аткинсон(F.V.Atkinson)[5], В.Н.Эверитт, М.Гиртс, Дж.Вайдман (J.Weidmann)[6], А.Сеттл (A.Zettl)[7], В.Д.Эванс (W.D.Evans), А.Сеттл[8],

---

[1] Everitt W.N.,Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc.London Math.Soc., 1971, v.23, pp.301-324.

[2] Everitt W.N.,Gierz M. An example concerning the separation property for differential operators // Proc.London Math.Soc., 1973, vol.71, pp.159-165.

[3] Everitt W.N.,Gierz M. Some inequallities associated with certain differential operators // Math.Z., 1972, v.126, pp.308-326.

[4] Everitt W.N.,Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc.London Math.Soc., 1972, v.24, pp.149-170.

[5] Atcinson F.V. On some results of Everitt and Giertz // Proc. Royal Soc. Edinburg. –1973. –V.71A. –P.151-158.

[6] Everitt W.N., Gierz M., Weidmann J. Some remarks on a separation and limit-point criterion of second order ordinary differential expressions // Math.Ann. –1973. –V.203. –No 4.–P.335-346.

[7] Zettl A. Separation for differential operators on the L_p spaces // Proc.Amer. Math.Soc. –1976. –V.55. –№ 6. –P.44-46.

[8] Evans W.D. Dirichlet and separation results for Schrodinger type operators // Proc. Roy. Soc. Edinburg A, 1978, –V.80. –P.151-162.

К.Х.Бойматов[9,10], М. Отелбаев[11,12] , М.М.Бакоева, С.А.Исхоков[13], Р.С. Брауна (R.C.Brown)[14], Р.С. Браун, Д.Б. Хинтон (D.B.Hinton)[15], Н.Чернявская (N.Chernyaskaya), Л.Шустер (L.Shuster)[16,17] ва дигарон умумӣ карда шудаанд.

Алалхусус барои оператори Штурм-Лиувилл аввалин шуда новобаста аз ҳамдигар К.Х.Бойматов[9] ва В.М.Аткинсон(F.V.Atcinson)[5] аз шарти суфтагии потенсиали $q(x)$ озод шуданд. М. Отелбаев[11] ҷудошавандагии оператори Штурм-Лиувиллро дар фазои вазндори $L_{2,k}(I)$, ки $I-$ интервали кушоди хати ҳақиқӣ мебошад, тадқиқ намуд.

Масалан, исбот намудан мумкин аст, ки ҳангоми $0 < l < \frac{1}{p}(1+\frac{1}{p})$ барои ифодаи дифференсиалии

$$A(x, D_x) = A^{(l)}(x, D_x) = -\frac{d}{dx^2} + l \cdot x^{-2},$$

L_p- ҷудошавандагӣ маъно надорад (ниг. Бойматов К.Х.[18]).

Ҷудошавандагии ифодаҳои дифференсиалии маъмулии тартиби болоӣ дар корҳои К.Х. Бойматов, П.И. Лизоркин[19], Ф.В. Аткинсон(F.N.Atkinson)[5], В.Д. Эванс (Evans W.D.), А. Цеттл (Zettl.A)[8], С.А. Исхоков[20], Д.С. Гаибов[21] ва дигарон тадқиқ карда шудааст.

[9]Бойматов К.Х. Теоремы разделимости для оператора Штурма-Лиувилля // Математические заметки. 1973, Т.14, № 33, С. 349 - 359.

[10] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР, 1973. Т.213, № 5, С. 1009 –1011.

[11]Отелбаев М. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма-Лиувилля // Математические заметки, 1974, Т.16 № 6, С. 969-980.

[12]Отелбаев М. О гладкости решений дифференциальных уравнений // Изв. АН. Каз.ССР., Серия физ.-мат., 1977. № 5, С.45-48.

[13]Бакоева М.М., Исхоков С.А. О разделимости оператора Штурма-Лиувилля с несимметричным матричным потенциалом // Вест. Хорогского университета. Серия 1. –2002. –№ 5. –С. 43-51.

[14]Brown R.C. Separation and disconjugacy // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. –2003. –V.4. –Is.3. –Article 56.–16p.

[15]Р.С.Брауна, Д.Б.Хинтона(D.B.Hinton) Two separation criteria for second ordinary or partial differential operators // Mathematica Bohemica. –1999. –V.124. –№ 2-3.–P.273-292.

[16]N.Chernyavskaya, L.Shuster. Correct solvability, embedding theorems and separability for the Sturm-Liouvelle equation // arXiv:1307.5611v1[math.CA] –22.–Jul. –2013. 9p.

[17]Chernyavskaya N., L.Shuster. Weighted estimates for solutions if the general Sturm-Liouvelle equation and the Everitt-Giertz problem // Proc. Edinburgh Math.Soc. –2015. –V.58. –Is.01. –P.125-147.

[18]Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им.В.А. Стеклова АН СССР. –1984. –Т.170. –С. 37-76.

[19]Бойматов К.Х., Лизоркин П.И. Оценки роста решений дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. –1989. –Т.25. –№ 4. –С. 578-588.

[20]Исхоков С.А. О разделимости обыкновенных дифференциальных выражений // В сб.: Функциональный анализ и его приложения в механике и теории вероятностей. Москва. Изд-во МГУ. –1984. –С. 130-131.

[21]Гаибов Д.С. Обыкновенные дифференциальные операторы класса Трибеля на полуоси // Доклады АН Республики Таджикистан. –1993. –Т.36. –№ 12. –С. 571-574.

Ҷудошавандагии ифодаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ аввалин маротиба дар кори К.Х. Бойматов[10] ва баъдан дар корҳои К.Х. Бойматов[22,23], М. Отелбаев[24], Р. Ойнаров[25] ва шогирдони онҳо тадқиқ карда шудааст.

Ҷудошавандагии ифодаҳои ғайрихаттии дифференсиалии маъмули дар корҳои А.А. Биргебаев, М. Отелбаев[26], Т.Т. Аманова, М.Б. Муратбеков[27], Э.З.Гриншпун, М. Отелбаев[28], К.Н. Оспанов, Р.Д. Ахмедкалиева[29,30] ва дигарон омӯхта шудааст.

Қайд кардан лозим аст, ки ҷудошавандагии оператори Штурм-Лиувилл бо потенсиали ғайрихаттии намуди $q(x,|x|)$ дар фазои $L_1(-\infty,+\infty)$ дар кори Т.Т. Аманова, М.Б. Муратбеков[27] омӯхта шудааст. Дар мақолаи Э.З. Гриншпун, М. Отелбаев[28] исбот карда шудааст, ки оператори ғайрихаттии Штурм-Лиувилл дар фазои $L_1(-\infty,+\infty)$ бо потенциали мусбат дар хама холат ҷудошаванда мебошад.

Дар корҳои К.Х. Бойматов[31], А.С. Мохамед[32] ва дигар муаллифон операторҳои дифференсиалии бо коэффисиентҳои матрисавӣ тадқиқ карда шудааст.

Қайд мекунем, ки дар кори А.С. Мохамед[32] ғайрихаттӣ будани оператори дифференсиалӣ, ҳангоми ошӯби сусти оператори хаттӣ будани он дида баромада шудааст.

Ифодаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар корҳои Б.М.Муратбеков, М.Отелбаев[33], К.Х. Бойматов[18,34], К.Х. Бойматов, А.

[22]Бойматов К.Х. L_2- оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // ДАН СССР. –1975. –Т.223. –№ 3. –С. 521-524.

[23]Бойматов К.Х. Об области определения оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. –1976. –Т.12. –№ 7. –С. 1151-1160.

[24]Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. –1983. –Т.161. –С. 195-217.

[25]Ойнаров Р. О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций // Доклады АН СССР. –1985. –Т.285. –№ 5. –С. 1062-1064.

[29]Ospanov K.N., Akhmedkaliyeva R.D. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space // SRM Preprint Series. –2011. –№ 1080. –12P.

[30]Ospanov K.N., Akhmedkaliyeva R.D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. –2012. –№ 66. –P.1-12:http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[31]Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для дифференциальных операторов произвольного порядка // Успехи математических наук. –1989. –Т.44. –№ 3. –С. 147-148.

[32]Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the Schrodinger operator with an operator potential in the Hilbert spaces // Applicable Analysis. –2005. –V.84. –№ 1. –P.103-111.

[33]Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шрёдингера // Известия вузов.Математика. –1989. –№ 3. –С. 44-48.

[34]Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // Доклады АН СССР. –1988. –Т.301. –№ 5. –С. 1033-1036.

Шарифов[35], З. Оер (Z.Oer)[36] ва дигар муаллифон дида баромада шудааст.

Дар корҳои Х.А.Ати, Р.С.Алсаиди, А.Рамади(H.A.Atia, R.S.Alsaedi, A.Ramady)[37] ва О.Милатович(O.Milatovic)[38,39,40,41] ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии бо ҳосилаҳои хусусӣ дар бисёршаклаҳои Риманӣ додашуда дида баромада шудааст.

Ифодаҳои дифференсиалии тартибашон нисбатан олӣ дар корҳои зерин ва дигарон тадқиқ карда шудааст: К.Х.Бойматов[31], М.Б.Муратбеков[42], М.Б. Муратбеков, М.М.Муратбеков, К.Н. Оспанов[43], М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков[44,45], М.Г.Гадоев, С.А.Исхоков, Ф.С.Исхоков[46].

Дар маколаи М.Г.Гадоев, С.А.Исхокоа, Ф.С.Исхоков[46] аввалин маротиба теорема ҷудошавандаги барои операторҳои эллиптикии таназулёбанда намуди умумӣ дар ҳолате исбот карда шудааст, ки соҳае, ки дар он оператори дифференсиалӣ дода шудааст, ва функсияҳои мусбате, ки таназзулёбии коэффитсиентҳои оператори дифференсиалиро тавсиф мекунанд, дар ҳамҷуфтӣ бо ҳамдигар дода мешаванд ва шарти ғутонишро (погружение) қаноат мекунонанд (ниг. П.И.Лизоркин[47]).

---

[35]Бойматов К.Х., Шарифов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады АН России. –1992. –Т.326. –№ 3. –С. 393-398.

[36]Oer Z. Separation theorem for Sturm-Liouville equation with operator coefficient // Proyecciones, Universidad Catolica del Norte Antofagasta-Chile. –2001. –V.20. –№ 2. –P.177-191.

[37] Atia H.A., Alsaedi R. S., Ramady A. Separation of bi-harmonic operators on Riemannian manifolds // Forum Math. –2014. –V.26. –P.953-966.

[38]Milatovic O. The form sum and the Friedrichs extension of Schrodinger operators on Riemannian manifolds // Proceedings of the American mathematical society. –2003. –V.132. –№ 1.–P.147-156.

[39]Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators on Riemannian manifolds // Journal of Geometry and Physics. –2006. –V.56. –P.1283-1293.

[40]Milatovic O. A separation property for Schrodinger operators on Riemannian manifolds // Journal of Geometry and Physics. –2011. –V.61. –P.1-7.

[41]Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators in L_p –spaces on noncompact manifolds // Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. –2013. –V.58. –№ 6.–P.853-854.

[42]Муратбеков М.Б. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора высокого порядка // Дифференциальные уравнения. –1981. –Т.17. –№ 3. –С. 893-901.

[43]Муратбеков М.Б., Муратбекова М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. –2010. –Т.435. –№ 3. –С. 310-313.

[44]Гадоев М.Г., Исхоков Ф.С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Математические заметки СВФУ. –2016. –Т.23. –№ 3(91). –С. 3-26.

[45]Гадоев М.Г., Исхоков Ф.С. Об относительной ограниченности одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Математические заметки СВФУ. –2018. –Т.25. –№ 1(97). –С. 3-14.

[46]Гадоев М.Г., Исхоков С.А.,Исхоков Ф.С. О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Чебышевский сборник, 2019г, т.18, № 4, стр. 85-105.

[47]Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p – нормах // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. –1980. –Т.156. –С. 130-142.

Ҳалшавандагии коэрситивии операторҳои дифференсиалӣ дар мақолаҳои К.Х.Бойматов, А.Шарифов[35], М.Б.Муратбеков, М.М. Муратбеков, К.Н.Оспанов[43], E.M.E. Zayed, A.S.Mohamed, H.A.Atia[48] ва ғайраҳо дида баромада шудааст.

Аз тафсири кӯтоҳи дар боло овардашудаи натиҷаҳои назарияи ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалӣ бармеояд, ки муаммоҳои актуалии ҷудошавандагии ин назария, аз тадқиқи ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии қавӣ иборат аст, яъне операторҳое, ки ошӯби сусти операторҳои хаттӣ намебошанд. Хусусан ба ин муаммои актуалӣ рисолаи мазкур бахшида шудааст.

Алоқаи кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо), мавзӯъҳо. Рисолаи мазкур дар доираи амаликунии нақшаи кории дурнамои илмӣ-тадқиқотии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон барои солҳои 2016-2020 дар мавзӯи «Масъалаҳои умумикардашудаи канорӣ барои муодилаҳои эллиптикии таназзулёбанда бо коэффициентҳои ченшаванда ва муодилаҳои эволютсионии ғайрихаттии тартиби касрӣ» иҷро карда шудааст.

Мақсад ва вазифаҳои кор. Мақсади рисолаи илмӣ иборат аст аз тадқиқи хосиятҳои коэрситивии синфи васеи операторҳои ғайрихаттӣ ва системаҳои ғайрихаттии дифференсиалии операторҳои дараҷаи дуюм ва аз он боло дар ҳамаи фазои R^n, дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)^l$; барқароркунии ҷудошавандагии ин операторҳои ғайрихаттӣ дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)^l$; ҳосил намудани нобаробариҳои коэрситивии мувофиқ; омӯзиши ҳалшавандагии коэрситивии операторҳои тадқиқшаванда дар асоси нобаробариҳои коэрситивии барқароркардашуда.

Дар асоси мақсади гузошташуда масъалаҳои зерин интихоб карда шуданд:

- омӯзиши хосиятҳои коэрситивии операторҳои дифференсиалии қатъи ғайрихаттии тартиби дуюм дар фазои вазндор, исботи нобаробариҳои коэрситивии мувофиқ ва дар асоси онҳо исбот намудани ҷудошавандагии операторҳои мувофиқ;
- ёфтани шартҳои кифоягии ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии қатъи ғайрихаттии тартибашон аз ду боло ва исботи нобаробариҳои коэрситивии мувофиқ;

[48]Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math.Anal.Appl. –2007. –V.336. –P.81-92.

- исботи теоремаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалии қатъи ғайрихатти тартиби дуюм.

Обеъктҳои тадқиқот. Обеъктҳои тадқиқот иборатанд аз операторҳои қатъи ғайрихаттии тартиби дуюм ва аз он калон дар тамоми фазо, ки дорои ошӯби сусти операторҳои дифференсиалии хаттӣ намебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Усулҳои асосии тадқиқот ин усулҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва назарияи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ мебошад; усули интегронӣ аз руйи ҳиссаҳо, ки аввалин маротиба аз тарафи В.Н. Эверитт ва М. Гирц истифода бурда шуда, баъдтар дар корҳои К.Х. Бойматов инкишоф ёфтааст, мебошанд.

Нововарии илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои илмии диссертатсия, нав буда характери назариявӣ дошта, аз инҳо иборатанд:

- баҳоҳои коэрситивӣ барқарор карда шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои ғайрихаттии Лаплас-Белтрам ва операторҳои ғайрихаттии дифференсиалии тартиби дуюм дар фазоҳои гилбертӣ исбот карда шудааст;
- хосиятҳои коэрситивии оператори Гелмголтс бо потенсиали матритсавии ғайрихаттӣ дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)^l$ омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии оператори ғайрихаттии Гелмголтс бо потенсиали матритсавӣ исбот карда шудааст;
- хосиятҳои коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои калони тағирёбанда дар фазои вектор-функсия омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии умумии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои матритсавӣ исбот карда шудааст;
- хосиятҳои коэрситивии оператори бигармоникӣ бо потенсиали матритсавии ғайрихаттӣ дар фазои $L_2(R^n)^l$ омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии оператори ғайрихаттии бигармоникӣ бо потенсиали матритсавӣ исбот карда шудааст;
- баҳоҳои коэрситивӣ барқарор карда шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии оддии ғайрихаттии тартиби шашум дар фазои гилбертӣ исбот карда шудааст;
- шартҳои ҳалшавандагии коэрситивии оператори Лаплас-Белтрами ёфта шуда, теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаи ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои гилбертӣ исбот карда шудааст;

- шартҳои ҳалшавандагии коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм ёфта шуда, теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм дар фазои вазндор исбот карда шудааст.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

1. Теорема оиди ҷудошавандагии оператори дифференсиалии ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои гилбертии $L_2(R^n)$.

2. Теорема оиди ҷудошавандагии оператори дифференсиалии умумии ғайрихаттии тартиби дуюм дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)$.

3. Теорема оиди ҷудошавандагии оператори дифференсиалии қатъи ғайрихаттии Гелмголтс дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

4. Теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои калони тағйирёбанда дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

5. Теорема оиди ҷудошавандагии оператори дифференсиалии бигармоникии қатъи ғайрихаттии дар фазои $L_2(R^n)^l$.

6. Теорема оиди ҷудошавандагии як синфи операторҳои оддии ғайрихаттии тартиби шашум дар фазои гилбертии $L_2(R)$.

7. Теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои гилбертии $L_2(R^n)$.

8. Теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм дар фазои вазндори гилбертии $L_{2,\rho}(R^n)$.

Саҳми шахсии муаллиф. Вазифаҳои тадқиқот аз ҷониби машваратчии илмӣ, ки ба унвонҷӯ ҳамчун кӯмаки машваратӣ расонидааст, таҳия шудаанд. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсиониро шахсан худи муаллиф ба даст овардааст, ки дар қисмати «Навгонии илмӣ» дарҷ гардидаанд.

Арзиши назариявӣ ва амалии кор. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар рушди назарияи операторҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, дар назарияи фазои функсияҳои дифференсиронидашавандаи бисёртағйирёбанда ва назарияи спектралии операторҳои дифференсиалӣ истифода шаванд. Маводҳои диссертатсияро метавон ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ ва магистрони донишгоҳҳои олӣ аз рӯйи ихтисоси «Математика» истифода бурд.

Эътимоднокӣ ва асоснокии натиҷаҳои илмии тадқиқот. Эътимоднокии натиҷаҳои кори диссертатсионӣ бо исботҳои қатъии математикии ҳамаи тасдиқотҳо, ки дар диссертатсия оварда шудааст, таъмин карда шуда, аз тарафи тадқиқотҳои муаллифони дигар асоснок карда мешаванд.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар семинарҳои шӯъбаи таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳо ва семинари умумиинститутии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон муҳокима шуда, тақризҳои мусбӣ гирифтанд. Натиҷаҳои диссертатсия дар рафти конференсияҳои зерин баррасӣ шуданд: конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои муосири таҳлили математикӣ ва тадбиқи онҳо», бахшида ба 60-солагии академик К.Х. Бойматов, ш. Душанбе, 24 июни соли 2010; конференсияи илмии байналхалқии «Илм ва коркарди инноватсионии Шимол» Россия, ш. Мирний, 10-12 марти соли 2014; конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба 80-солагии узви вобастаи АМИ Тоҷикистон, профессор В.Л. Стетсенко, ш. Душанбе, 27-28 апрели соли 2015; конференсияи байналхалқии «Фазоҳои функсионалӣ ва назарияи наздиккунӣ», бахшида ба 110-солагии таваллуди академик С.М. Николский, ш. Москва, 25-29 майи соли 2015; VI-умин конференсияи умумироссиягии илмӣ-амалии донишҷӯён, аспирантон ва олимони ҷавон. СВФУ ба номи М.К. Аммосов, Институти Политехникӣ, Россия, ш. Мирный, соли 2015; конференсияи байналхалқии тобистонаи мактаб-конференсияи ба номи С.Б. Стечкин оид ба назарияи функсияҳо. ш. Душанбе, 15-25 августи соли 2016; конференсияи байналхалқии математикӣ оид ба назарияи функсияҳо, бахшида ба 100 солагии узви вобастаи АИ Иттифоқи Шӯравӣ А.Ф. Леонтев, Россия, ш. Уфа, 27-30 майи соли 2017; конференсияи байналхалқии Уфа «Муаммоҳои муосири математика ва тадбиқи онҳо», Россия, Уфа, 27-30 сентябри соли 2016; конференсияи илмии байналхалқии «Муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва масъалаҳои канонии назарияи функсияҳо», бахшида ба 90-солагии академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, дорандаи ҷоизаи давлатии ба номи Абуали Ибни Сино Михайлов Л.Г., ш. Душанбе, 27-28 феврали соли 2018; IV-умин конференсияи байналхалқии илмӣ «Муаммоҳои актуалии математикаи амалӣ», Дар Элбрус, Ҷумҳурии Кабардин-Балкар, 22-26 майи соли 2018; конференсияи илмии байналхалқии «Назарияи спектралӣ ва масъалаҳои ҳамҷавор», Россия, ш. Уфа, 1-4 октябри соли 2018; конференсияи илмии байналхалқии «Муаммоҳои муосири математика ва механика», бахшида ба 80-солагии академик В.А. Садовничий, МГУ, ш. Москва, 13-15 майи соли 2019; конференсияи байналхалқии илмӣ-назариявии «Илм ва коркарди инноватсионӣ – Шимол», Россия, ш. Мирный, 14-15 марти соли 2019; XVI-умин конференсияи байналхалқӣ, бахшида ба 80-солагии таваллуди профессор Мишел Деза, Россия, ш. Тула, 13–18 майи соли 2019; конференсияи байналхалқии «Муаммоҳои муосир ва тадбиқи алгебра, назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 60-солагии академики АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Рахмонов З.Х. ва узви вобастаи АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Исхоков С.А., Душанбе, 13–14 декабри соли 2019; конференсияи байналхалқии «Муодилаҳои интегралии сингулярӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ», бахшида ба 70-солагии профессор Джангибеков Гулходжа, Душанбе, 30-31 январи соли 2020.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар 34 интишороти муаллиф, ки руйхати онҳо дар охири автореферат оварда шудаанд, дарҷ гардидаанд. Корҳои [1]-[16] дар маҷаллаҳои тақризшаванда, ки ба рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА Вазорати маориф ва илмӣ Федератсияи Россия тааллуқ доранд, чоп шудаанд. Корҳои [1]-[6] ба библиографияи байналхалқӣ ва базаи маълумотҳои реферативии **Web of Science ва Scopus** шомил мебошанд.

Сохтор ва ҳаҷми кор. Диссертатсия аз муқадима, се боб, хулоса ва феҳристи адабиёти истифодашуда, ки 135 номгӯйро ташкил мекунад, иборат буда, ҳаҷми умумии он 157 саҳифаи чопиро ташкил карда, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст.

Барои қулай шудани хондан дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, таърифҳо ва формулаҳо мавриди истифода қарор дода шудааст, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, таърифҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мувофиқат мекунад.

Муҳтавои асосии диссертатсия

Дар муқаддима шарҳи кӯтоҳи таърихии натиҷаҳо оиди муаммоҳои дахлдори мавзӯъ оварда шуда, актуалӣ будани мавзӯъро асоснок мекунад.

Боби якуми диссертатсия аз панҷ параграф иборат буда, ба омӯзиши хосиятҳои коэрситивӣ ва ҷудогардонии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби ду дар фазои $L_2(R^n)$ ва ба системаҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)^l$ бахшида шудааст.

Параграфи якум характери ёрирасон дошта, дар он леммаҳои маълум, ки дар параграфҳои оянда истифода бурда мешаванд, оварда шудаанд.

Бигузор R^n фазои евклидии n - ченака буда, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ - нуқтаи ихтиёрии ин фазо бошад. Бо рамзи $L_p(R^n)$, ки $1 \leq p < +\infty$ аст, фазои функсияҳои ченшавандаи $\varphi(x)$–ро дар R^n бо нормаи охирноки

$$\|\varphi; L_p(R^n)\| = \left\{ \int\limits_{R^n} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

ишора мекунем.

Бигузор l- ягон адади натуралӣ бошад. Бо рамзи $L_p(R^n)^l$ фазои вектор-функсияҳои $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_l(x))$, ки дар он $u_k(x) \in L_p(R^n), (k = \overline{1, l})$ ишорат мекунем. Нормаро дар фазои $L_p(R^n)^l$ чунин муайян мекунем:

$$\|u; L_p(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{k=1}^{l} \|u_k\|^p_{L_p(R^n)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ҳангоми $p = 2$ будан, фазои $L_p(R^n)^l$ гилбертӣ мебошад ва зарби скалярӣ дар $L_2(R^n)^l$ бо баробарии

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{R^n} u_j(x)\overline{v_j(x)} dx$$

муайян карда мешавад.

Бигузор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - мултииндекс, яъне вектор бо компонентаҳои ғайриманфии бутун бошад. Бо $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,

$$D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

ишора мекунем.

Бо воситаи $C_0^\infty(R^n)$ маҷмӯи функсияҳои финитӣ ва беохир дифференсиронидашавандаро дар фазои R^n бо барандаи компактӣ ишорат мекунем. Мегуянд, ки функсияи $\varphi(x)$ дорои ҳосилаи умумикардашудаи мултииндекси α дар R^n бо маънои Соболев мебошад, агар функсияи локалии суммиронидашавандаи $\psi(x)$ дар R^n мавҷуд бошад, ки

$$\int\limits_{R^n} \varphi(x) \cdot \overline{D^\alpha \omega(x)} dx = \int\limits_{R^n} \psi(x) \cdot \overline{\omega(x)} dx$$

барои ҳамаи $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$ иҷро гардад, ки дар он $\psi(x) = D^\alpha\varphi(x)$ мебошад.

Бигузор r- ягон адади натуралӣ ва $1 \le p < +\infty$ бошад. Бо рамзи $W_p^r(R^n)$ фазои функсияҳои коплексии $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, ки дар R^n дорои ҳосилаҳои умумикардашудаи гуногуни $D^\alpha\varphi$ тартиби $|\alpha| \le r$, ки ба фазои $L_p(R^n)$ дахл дорад, ишорат мекунем. Норма дар фазои $W_p^r(R^n)$ бо баробарии

$$\|\varphi(x); W_p^r(R^n)\| = \left\{ \sum_{|\alpha|\le r} \int_{R^n} |D^\alpha\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

муайян карда мешавад.

Мегӯем, ки вектор-функсияи $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_l(x))$ ба синфи $W_p^r(R^n)^l$ таалуқ дорад, агар компонентҳои $u_k(x)(k = \overline{1,l})$ ба фазои $W_p^r(R^n)$ таалуқ дошта бошад.

Фазои $W_p^r(R^n)^l$ инчунин фазои нормиронидашуда буда, нормаи он чунин муайян карда мешавад:

$$\|\varphi(x); W_p^r(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{k=1}^{l} \|u_k; W_p^r(R^n)\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ҳангоми $p = 2$ фазои $W_p^r(R^n)^l$ фазои гирбертӣ буда зарби скалярӣ дар ин фазо бо баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$\langle u, \vartheta; W_2^r(R^n)^l \rangle = \sum_{k=1}^{l} \sum_{|\alpha|\le r} \int_{R^n} D^\alpha u_k(x) \overline{D^\alpha \vartheta_k(x)} dx.$$

Агар вектор-функсияи $\varphi(x)u(x)$ ба фазои $W_p^r(R^n)^l$ таалуқ дошта бошад, барои ҳамаи $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, он гоҳ мегуянд, ки $u(x)$ ба синфи $W_{p,loc}^r(R^n)^l$ таалуқ дорад.

Бо рамзи $\mathrm{End}\,\mathrm{C}^l$ фазои $l \times l$ матритсаҳои $a = (a_{ij})_{i,j=1}^l$ бо нормаи $\|a\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$ ишора мекунем.

Дар параграфи дуюми ин боб хосиятҳои коэрситивии оператори ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои $L_2(R^n)$ тадқиқ карда шудааст:

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x)$$

ва дар асоси баҳоҳои коэрситивӣ ҷудошавандагии ин оператор дар фазои додашуда исбот карда шудааст.

Дар фазои $L_2(R^n)$ муодилаи дифференсиалии

$$-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+V(x,u)u(x)=f(x), \qquad (1)$$

$$u(x)\in W^2_{2,loc}(R^n)$$

–ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $g(x) = (g_{ij}(x))$- матритсаи эрмитӣ, $V(x,z)$ -функсияи мусбат мебошад.

Таърифи 1.2.1. *Муодилаи (1) (ва оператори ба он мувофиқ) ҷудошаванда дар фазои $L_2(R^n)$ номида мешавад, агар*

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],$$

$V(x,u(x))u(x)\in L_2(R^n)$ *барои ҳамаи* $u(x)\in L_2(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$*, ки барои онҳо* $f(x)\in L_2(R^n)$ *аст, ҷой дошта бошад.*

Дар оянда фарз мекунем, ки $V(x,z)\in C^1(R^n\times\mathbb{C})$ аст. Барои таҳия намудани натиҷаи асосӣ функсияҳои зеринро дохил менамоем:

$$F(x,\xi,\eta)=V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta)=V(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz.$$

Фарз мекунем, ки барои ҳамаи $x\in R^n$, $\omega=\xi+i\eta\in\mathbb{C}$, $\Omega=\mu+i\nu\in\mathbb{C}$ функсияи $F(x,\xi,\eta)$ шартҳои зеринро қаноат кунонад:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x))]\right\|^2\le\sigma_1, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}\right\|^2\le\sigma_1, \qquad (3)$$

$$\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial\xi}\mu+\nu\frac{\partial F}{\partial\eta})\omega\right\|\le\delta_1\left\|F^{\frac{1}{2}}\Omega\right\|. \qquad (4)$$

Инчунин фарз мекунем, ки барои ҳамаи $x\in R^n$, $\omega=\xi+i\eta\in\mathbb{C}$, $\Omega=\mu+i\nu\in\mathbb{C}$ нобаробариҳои

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}F\frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x))]\right\|^2\le\sigma_3, \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2}\right\|^2\leq\sigma_4, \tag{6}$$

$$\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial\xi}\mu+\nu\frac{\partial Q}{\partial\eta})\omega\right\|\leq\delta_2\left\|F\Omega\right\| \tag{7}$$

ҷой доранд.

Натиҷаи асосии параграфро баён мекунем.

Теоремаи 1.2.1. *Бигузор шартҳои (2) –(7) иҷро гарданд ва бигузор ададҳои σ_j, δ_j $(j=\overline{1,4})$ чунон бошанд, ки*

$$n\sigma_1+2n\sigma_2<4,\ \sigma_1+2\sigma_2+4\delta_1<4,\ n\sigma_3+2n\sigma_4<4,\ \sigma_3+2\sigma_4+4\delta_2<4. \tag{8}$$

Он гоҳ оператори $L[u]$ дар фазои $L_2(R^n)$ ҷудошаванда мебошад ва барои ҳамаи функсияҳои $u(x)\in L_2(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$, ки барои онҳо $f(x)\in L_2(R^n)$ аст, дохилшавии

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],$$

$$V(x,u)u,\quad g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L_2(R^n),\ i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n$$

мавҷуд буда, инчунин нобаробарии коэрситивии зерин ҷой дорад

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right];L_2(R^n)\right\|+\|V(x,u)u;L_2(R^n)\|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n)\right\|\leq M\|f(x);L_2(R^n)\|, \tag{9}$$

ки дар ин ҷо адади мусбати M аз $u(x)$, $f(x)$ вобаста нест.

Дар параграфи сеюми боби якум хосиятҳои коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии намуди

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+V(x,u)u,$$

ки $a_{ij}(x)\in C^2(R^n)$, $b_j(x)\in C^1(R^n)$ аст, дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)$ омӯхта мешавад, ки нормаи он бо баробарии

$$\|u;L_{2,\rho}(R^n)\|=\left\{\int\limits_{R^n}\rho(x)|u(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

муайян карда мешавад. Дар ин ҷо $\rho(x)$ – функсияи мусбати дар R^n муайянбуда мебошад.

Аз баҳоҳои коэрситивии ҳосилшуда ҷудошавандагии операторҳои дидабаромадашуда бармеояд.

Дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)$ муодилаи дифференсиалии

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \qquad (10)$$
$$u(x) \in W^2_{2,loc}(R^n),$$

–ро, ки $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$, $V(x,z)$ - функсияи мусбат мебошад, дида мебароем.

Таърифи 1.3.1. *Муодилаи (10) (ва оператори дифференсиалии ба он мувофиқ) дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)$ ҷудошаванда номида мешавад, агар*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_2(R^n)$$

барои ҳамаи $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, ки барои онҳо $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$ дошта бошад.

Дар оянда фарз мекунем, ки $V(x,z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$ бошад.

Барои таҳияи натиҷаи асосӣ фунсияҳои зеринро дохил менамоем:

$$F(x,\xi,\eta) = V^{\frac{1}{2}}(x,z), \ \xi = Rez, \ \eta = Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = V(x,z), \ \xi = Rez, \ \eta = Imz.$$

Бигузор барои ҳамаи $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}, \Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функсияи $F(x,\xi,\eta)$ шартҳои

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1} \right\|^2 \le \sigma_1, \qquad (11)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}F^{-1} \right\|^2 \le \sigma_2, \qquad (12)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \le \sigma_3, \qquad (13)$$

$$\left\| \frac{1}{n}a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)b_j(x)F^{-1} \right\|^2 \le \sigma_4, \qquad (14)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu + \nu \frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\omega \right\| \le \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega \right\| \tag{15}$$

-ро қаноат кунонад, ки дар ин ҷо аломати $\| \bullet \|$ нормаи вектор дар $\mathbb{C}$-ро ифода мекунад.

Инчунин фарз карда мешавад, ки барои ҳамаи $x \in R^n$, $\omega = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, $\Omega = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ нобаробариҳои зерин иҷро мегарданд:

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2} \right\|^2 \le \sigma_5, \tag{16}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu + \nu \frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)\omega \right\| \le \delta_2 \left\| F\Omega \right| , \tag{17}$$

ки аломати $\| \bullet \|$ нормаи вектор дар $\mathbb{C}$-ро ифода мекунад.

Натиҷаи асосии ин параграфро баён месозем.

Теоремаи 1.3.1. *Бигузор шартҳои (11) –(17) иҷро гарданд ва бигузор ададҳои σ_j, $(j = \overline{1,5})$, δ_1, δ_2 чунон бошанд, ки*

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 < \frac{4}{3n^2}, \ \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)} < 1 - \delta_1, \tag{18}$$
$$\frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_5)} < 1 - \delta_2.$$

Он гоҳ оператори $L[u]$ дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)$ ҷудошаванда мебошад ва барои ҳамаи функсияҳои $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, ки барои онҳо $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$ аст, дохилшавии зерин ҷой дорад

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad V(x, u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n), i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n.$$

Инчунин нобаробарии коэрситивии

$$\left\| -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| + \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\| +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| \le M \|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|, \tag{19}$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо адади мусбати M аз $u(x)$, $f(x)$ вобаста нест.

Дар параграфи чорум оператори дифференсиалии ғайрихаттии Гелмголтс дар вазои ваздори $L_{2,\rho}(R^n)^l$ дида баромада шудааст.

Оператори Гелмголтс бо потенсиали ғайрихаттии матритсавии

$$L[u] = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x) \tag{20}$$

-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, қиматҳои $V(x, \omega)$, $x \in R^n, \omega \in C^l$ матритсаҳои квадратии эрмитии мусбат-муаяншудаи тартиби $(l \times l)$ мебошанд. Дар ин ҷо ва баъдан l - ягон адади натуралии муаяншуда мебошад.

Таърифи 1.4.1. *Оператори (20) дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)^l$ ҷудошаванда номида мешавад, агар барои ҳамаи вектор-функсияҳои $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$, ки барои онҳо $L[u] \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ мебошад, дохилшавии зерин иҷро шавад:*

$$(-\Delta + k^2)u(x), \quad V(x, u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l.$$

Баҳоҳои коэрситивӣ ва ҷудошавандагӣ барои операторҳои эллиптикии тартиби дуюм дар ҳолати хаттӣ будан, ҳангоми $l = 1$ дар кори К.Х.Бойматова[31] дида баромада шудааст. Масъалаи ҷудошавандагии оператори Гелмголтс дар ҳолати хаттӣ будан, яъне ҳангоми $V(x, u(x))u(x)) = q(x)$ будан, дар кори S. Omran, K.A. Gepreel[49] омӯхта шудааст.

Қайд кардан ҷоиз аст, ки ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихатти дар умум, ҳангоми операторҳо ошуби сусти операторҳои хатти будан, тадқиқ шудааст. Дар фарқият аз ин, операторҳои дар поён тадқиқшаванда ошуби сусти операторҳои хатти намебошанд.

Фарз мекунем, ки қиматҳои матритса-функсияи $V(x, \omega) \in C(R^n \times \mathbb{C}^l; \mathrm{End}\,\mathbb{C}^l)$ матритсаҳои квадратии эрмитии мусбат-муайяншудаи тартиби l бошад. Маълум аст, ки мафҳуми решаи квадратӣ аз матритсаи мусбат-муайянкардашуда яккиматта ифода меёбад.

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

[49] Omran S., Gepreel K.A. Separation of the Helmholtz partial differential equation in Hilbert space // Adv. Studies Theor. Phys. –2012. –V.6. –№ 9. –P.399-410.

ки дар ин ҷо ω бо формулаи $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l)$ муайян карда мешавад.

Дар ин ҷо $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ ҳамчун решаи квадратӣ аз матритсаи эрмитии мусбат-муаянкардашуда ифода карда мешавад.

Таърифи 1.4.2. *Фарз мекунем, ки матритса-функсияи $V(x,\omega)$ ба синфи $T^{\delta_1,\delta_2,\chi_1,\chi_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ таалуқ дорад, агар чунин шартҳо барои ҳамаи $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in \mathbb{C}^l$, $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i\nu_l) \in \mathbb{C}^l$ иҷро гардад:*

$$\left\|F^{-\frac{1}{2}}(x,u)u\right\|^2 \le \delta_1 \|F(x,u)u\|^2, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|F^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}(x,u)\right\|^2 \le \chi_1, \tag{22}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_i}\omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_i}\omega\right\| \le \tag{23}$$
$$\le \sigma_1 \left\|F^{\frac{1}{2}}(x,u)\Omega\right\|,$$

$$\left\|V^{-1}(x,u)u\right\|^2 \le \delta_2 \|u\|^2, \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial Q(x,u)}{\partial x_i}Q^{-1}(x,u)\right\|^2 \le \chi_2, \tag{25}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_i}\omega + \nu_j F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta_i}\omega\right\| \le \tag{26}$$
$$\le \sigma_2 \left\|F(x,u)\Omega\right\|,$$

ки дар ин ҷо аломати $\| \bullet \|$ нормаи векторро аз $\mathbb{C}^l$ ё ин ки матритса аз $End\mathbb{C}^l$ ифода мекунад.

Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 1.4.1. *Бигузор матритса-функцияи $V(x,\omega)$ ба синфи $T^{\delta_1,\delta_2,\chi_1,\chi_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ таалуқ дошта бошад ва бигузор функсияи вазндори $\rho(x)$ ба синфи $C^1(R^n)$ таалуқ дошта, барои ҳамаи $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in \mathbb{C}^l$ нобаробарии зеринро қаноат кунонад:*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i}\rho^{-\frac{1}{2}}(x)Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega)\right\| \le \sigma_3. \tag{27}$$

Он гоҳ ҳангоми иҷрои шарти

$$0 < \sigma_1 < 1,\ 0 < \sigma_2 < 1,\ \chi_1 + 2\delta_1 k^2 + \sigma_3 < 4,\ \chi_2 + 2\delta_2 k^2 + \sigma_3 < 4,$$

оператори ғайрихаттии Гелмголтс (20) дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)^l$ *ҷудошаванда буда ва барои ҳамаи ҳалҳои* $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ *муодилаи*

$$-(\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x)$$

бо тарафи рости $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ *нобаробарии коэрситивии зерин иҷро мегардад:*

$$\|(\Delta + k^2)u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\| + \|V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\| \leq$$
$$\leq M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)^l\|, \tag{28}$$

ки дар ин ҷо M адади мусбати аз $u(x)$, $f(x)$ *вобастанабуда мебошад.*

Параграфи панҷум ба тадқиқи хосиятҳои коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм бо потенсиали матритсавӣ бахшида шудааст. Дар ин ҷо мо натиҷаи параграфи чорумро ҳангоми умумӣ будани оператори дифференсиалии тартиби ду умумӣ мекунонем. Дар аввал натиҷаи асосии ин параргаф оварда шуда, баъдан баъзе леммаҳои ёрирасон исбот карда шуда ва дар охир исботи пурраи теоремаи асосӣ оварда мешавад.

Оператори дифференсиалии тартиби дуюми бо коэффисиентҳои тағйирёбандаи

$$L_0[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

-ро дида мебароем.

Фарз карда мешавад, ки коэффитсиентҳои $a_{ij}(x)$ оператори L_0 матритсаҳои квадратии тартиби l бо элементҳои аз синфи $C^1(R^n)$ буда шартҳои зеринро қаноаткунанда бошанд:

I). $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \qquad Im a_{ij}(x) \equiv 0;$

II). $|a_{ij}(x)| \leq \sigma_1, \quad |\nabla a_{ij}(x)| \leq \sigma_2, \quad (\forall x \in R^n;\ i, j = 1, 2, \ldots, n);$

III). $\sum_{i=1}^{n} \left|s_i; \mathbb{C}^l\right|^2 \leq \chi_1 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle a_{ij}(x)s_i, s_j; \mathbb{C}^l\right\rangle \left(\forall x \in R^n,\ \forall s = \{s_i\}_{i=1}^n,\ s_i \in \mathbb{C}^l\right),$

доимиҳои σ_1, σ_2, χ_1 дар ин шартҳо аз x ва s вобаста нестанд.

Оператори дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюми коэффисиентҳои калонашон тағйирёбандаро дида мебароем:

$$L[u] = L_0[u] + V(x,u)u. \tag{29}$$

Бигузор $V(x,\omega)$ - матритса-функсияи квадратии тартиби l бошад, ки барои ҳамаи $x \in R^n$, $\omega \in \mathbb{C}^l$ муайян буда, элементҳояш бефосила ва дифференсиронидашаванда аз рӯи ҳамаи аргументҳо мебошад. Фарз карда мешавад, ки қиматҳои $V(x,\omega)$ матритсаҳои эрмитии мусбат-майянкардашуда мебошанд.

Таърифи 1.5.1. *Оператори дифференсиалии (29) дар фазои вазндори $L_{2,k}(R^n)^l$ ҷудошаванда номида мешавад, агар барои ҳамаи вектор-функсияҳои $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$, ки барои онҳо $L[u] \in L_{2,k}(R^n)^l$ аст, дохилкунии*

$$L_0[u] \in L_{2,k}(R^n)^l, \quad V(x,u)u \in L_{2,k}(R^n)^l$$

иҷро мешавад. Дар ин ҷо мо фарз мекунем, ки матритса-функсияи $a_{ij}(x)$ бо $V(x,\omega)$ ҷойивазнок мебошад, яъне баробарии

$$[(a_{ij})^l_{i,j=1} \cdot V(x,\omega)] = (a_{ij})^l_{i,j=1} \cdot V(x,\omega) - V(x,\omega) \cdot (a_{ij})^l_{i,j=1} \equiv 0$$

барои ҳамаи $x \in R^n$ ва ҳамаи $\omega \in \mathbb{C}^l$ ҷой дорад.

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x,\omega), \ (x_i \in R, \ \xi_j, \ \eta_j \in R),$$

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x,\omega), \ (x_i \in R, \ \xi_j, \ \eta_j \in R),$$

дар ин ҷо ω бо баробарии $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ \ldots, \ \xi_l + i\eta_l)$ муайян карда мешавад.

Дар ин ҷо $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ ҳамчун решаи квадратӣ аз матритсаи эрмитии мусбат-мауйянкардашуда мебошад.

Таърифи 1.5.2. *Фарз мекунем, ки матритса-функсияи $V(x,\omega)$ ба синфи $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$ таалуқ дорад, агар шартҳои зерин барои ҳамаи $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ \ldots, \ \xi_l + i\eta_l) \in C^l, \Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ \ldots, \ \mu_l + i\nu_l)$ иҷро гардад:*

$$\sum_{i=1}^n \left\| F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}}(x,\omega) \right\|^2 \le \chi, \tag{30}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^l \mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \eta_j} \omega \right\| \le \tag{31}$$

$$\le \sigma \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega \right\|,$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-1}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial \eta_j} \omega \right\| \leq \tag{32}$$
$$\leq \delta \left\| F\Omega \right\|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial x_i} Q^{-1}(x,\omega) \right\|^2 \leq \gamma, \tag{33}$$

ки дар ин ҷо аломати $\| \bullet \|$ *нормаи вектор дар* $\mathbb{C}^l$ *ё ин ки матритса аз* $End\mathbb{C}^l$ *ифода мекунад.*

Натиҷаи асосии параграфро дар намуди теоремаи зерин баён карда шудааст.

Теоремаи 1.5.1. *Бигузор матритса-функсияи* $V(x,\omega)$ *ба синфи* $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$ *таалуқ дошта бошад ва матритса-функсияи* $a_{ij}(x)$ *бо* $V(x,\omega)$ *ҷойивазнок буда, шартҳои I, II, III -ро қаноат кунонад. Инчунин бигузор функсияи вазндори* $k(x)$ *ба синфи* $C^1(R^n)$ *таалуқ дошта ва барои ҳамаи* $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in \mathbb{C}^l$ *нобаробарии*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial k(x)}{\partial x_i} k^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \right\|^2 \leq \sigma_3 \tag{34}$$

-ро қаноат кунонад. Он гоҳ ҳангоми иҷрошавии нобаробарии

$$\chi_1\sigma_1 < 2, \quad 0 < \sigma_3 < 2, \quad \chi + \sigma_3 < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{n(\chi + \sigma_3)}{2},$$
$$\gamma + \sigma_3 < \frac{2}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{(\gamma + \sigma_3)n}{2}, \tag{35}$$

ки $\chi, \sigma, \delta, \gamma, \sigma_1, \sigma_3, \chi_1$ *– доимиҳо аз шартҳои (30) – (33) ва I – III мебошанд, оператори ғайрихаттии (29) дар фазои вазндори* $L_{2,k}(R^n)^l$ *ҷудошаванда мебошад. Инчунин барои ҳамаи ҳалҳои* $u(x) \in W_{2,loc}(R^n)^l \cap L_{2,k}(R^n)^l$ *муодилаи*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + V(x, u(x))u(x) = f(x) \tag{36}$$

бо тарафи рости $f(x) \in L_{2,k}(R^n)^l$ *нобаробарии коэрситивии зерин ҷой дорад:*

$$\left\|V(x,u)u; L_{2,k}(R^n)^l\right\| + \sum_{j=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,k}(R^n)^l\right\| +$$
$$+ \left\|L_0[u]; L_{2,k}(R^n)^l\right\| \le M \left\|f; L_{2,k}(R^n)^l\right\|, \quad (37)$$

ки дар ин ҷо адади $M > 0$ *аз вектор – функсияҳои* $f(x), u(x)$ *вобаста намебошад.*

Боби дуюми диссертатсия ба омӯзиши хосиятҳои коэрситивӣ ва ҷудошавандагии баъзе синфҳои операторҳои ғайрихаттии дифференсиалии тартибашон нисбатан калон (яъне тартибашон аз ду калон) бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби дуюм хосиятҳои коэрситивӣ ва ҷудошавандагии оператори ғайрихаттии бигармоникии

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

бо потенсиали матритсавӣ дар фазои $L_2(R^n)^l$, ки дорои ошӯби сусти оператори хаттӣ намебошад, тадқиқ карда мешавад.

Ҷудошавандагии оператори хаттии бигармоникӣ

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x)$$

дар кори Zayed E.M.E.[50] тадқиқ карда шудааст. Дар ин параграф натиҷаи Zayed E.M.E.[50] дар ҳолати ғайрихаттӣ будан, умумӣ карда шудааст.

Дар фазои $L_2(R^n)^l$ муодилаи дифференсиалии

$$\Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \quad u(x) \in W^4_{2,loc}(R^n)^l \quad (38)$$

дида баромада мешавад, ки қимати $V(x, \omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in \mathbb{C}^l$ матритсаҳои эрмитии квадратии мусбат-муайянкардашуда аз $\operatorname{End}\mathbb{C}^l$ мебошад.

Таърифи 2.1.1. *Муодилаи (38) (ва оператори дифференсиалии ба он мувофиқ) дар фазои* $L_2(R^n)^l$ *ҷудошаванда номида мешавад, агар*

$$\Delta^2 u(x),\ V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l$$

барои ҳамаи $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$, *ки барои онҳо* $f(x) \in L_2(R^n)^l$ *мебошад, иҷро шаванд.*

---

[50] Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math.Anal.Appl. –2008. –V.337. –P.659-666.

Барои $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \cdots, z_l^{(i)})$ $(i = 1,2)$ фарз мекунем, ки $\langle z^{(1)}, z^{(2)}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{l} z_j^{(1)}\overline{z_j^{(2)}}$ бошад.

Бо $\langle u, v\rangle = \int\limits_{R^n} \langle u(x), v(x)\rangle dx$ ишорат мекунем, агар интеграл дар тарафи рост мутлақ наздикшаванда бошад.

Дар оянда фарз мекунем, ки $V(x,\omega) \in C^2(R^n \times \mathbb{C}^l; \mathrm{End}\,\mathbb{C}^l)$ бошад.

Матритса-функсияҳои нави зеринро дохил мекунем:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$
$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

ки дар ин ҷо ω бо баробарии $\omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l)$ муайян карда мешавад.

Дар ин ҷо $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ ҳамчун решаи квадратӣ аз матритсаҳои эрмитии квадратии мусбат-муайянкардашуда мебошад.

Фарз мекунем, ки барои ҳамаи $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l)$, $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1,\ \ldots,\ \mu_l + i\nu_l)$, $(\xi_j,\ \eta_j,\ \mu_j,\ \nu_j\ \in R)$ ва $u \in W_2^1(R^n)$ – матритса-функсияи $F(x,\omega)$ шартҳои зеринро қаноат мекунонад:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \le \sigma_1, \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \le \sigma_2 \left\| F^{\frac{3}{2}} u \right\|^2, \tag{40}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j} \omega \right\| \le \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega \right\|, \tag{41}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \omega \right\| \le \delta_2 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega \right\|. \tag{42}$$

Инчунин фарз карда мешавад, ки барои ҳамаи $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l), \Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i\nu_l), (\xi_j, \eta_j, \mu_j, \nu_j \in R)$ и $u \in W_2^1(R^n)$ нобаробариҳои

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} Q^{-1} \right\|^2 \le \sigma_3, \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \le \sigma_4 \|Vu\|^2, \tag{44}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_j F^{-1}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\partial\xi_j}\omega+\nu_j F^{-1}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\partial\eta_j}\omega\right\|\leq\delta_3\left\|F\Omega\right\|, \qquad (45)$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_j F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}\omega+\nu_j F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\eta_j}\omega\right\|\leq\delta_4\left\|F\Omega\right\| \qquad (46)$$

иҷро мегарданд, ки аломати $\|\bullet\|$ нормаи вектор аз $\mathbb{C}^l$ ё ин ки матритса аз $End\mathbb{C}^l$ -ро ифода мекунад.

Натиҷаи асосии ин параграфро баён мекунем.

Теоремаи 2.1.1. *Бигузор шартҳои (39) –(46) иҷро гарданд ва бигузор ададҳои σ_j, δ_j $(j=\overline{1,4})$ чунин бошанд, ки*

$$\sigma_1+2\sigma_2<4,\ \delta_1+2\delta_2<1,\ \sigma_3+2\sigma_4<4,\ \ \delta_3+2\delta_4<1. \qquad (47)$$

Он гоҳ оператори $L[u]$ дар фазои $L_2(R^n)^l$ ҷудошаванда буда барои ҳамаи вектор-функсияи $u(x)\in L_2(R^n)^l\cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$, ки барои он $f(x)\in L_2(R^n)^l$ мебошад, дохилкунии зерин ҷой дорад:

$$\Delta^2 u,\quad V(x,u)u,\quad V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\in L_2(R^n)^l,\ i=1,2,...,n.$$

Инчунин нобаробарии коэрситивии

$$\|\Delta^2 u(x);L_2(R^n)^l\|+\|V(x,u(x))u(x);L_2(R^n)^l\|+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2};L_2(R^n)^l\right\|\leq M\|f(x);L_2(R^n)^l\|,$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо адади M аз $u(x)$, $f(x)$ вобаста нест.

Мисол. Шартҳои теоремаи 2.1.1 барои муодилаи (38) ҳангоми $V(x,\,u(x))=(1+|u(x)|^2)^\rho$ будан, яъне $Q(x,\xi,\eta)=(1+\xi^2+\eta^2)^\rho$, дар ҳолати $\rho\leq min\{\frac{\delta_2}{2};\ \frac{\delta_4}{4}\}$ иҷро мешаванд.

Дар параграфи дуюми боби ду баҳоҳои коэрситивӣ ва ҷудошавандагии операторҳои ғайрихаттии дифференсиалии маъмулии тартиби шашуми намуди

$$L[u(x)]=-u^{VI}(x)+V(x,u(x))u(x)=f(x),$$

тадқиқ карда шудааст, ки $V(x,z)$- функсияи мусбат мебошад. Соҳаи муайянии оператори $L[u(x)]$ ҳамчун маҷмӯи ҳамаи $u(x)\in L_2(R)\cap W^6_{2,loc}(R)$, ки дар онҳо $L[u(x)]\in L_2(R)$ мебошад, интихоб карда шудааст.

Функсияи $V(x,z)$-ро дар намуди

$$V(x,z)=F(x,\xi,\eta),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz$$

ифода мекунем.

Таърифи 2.3.1. *Муодилаи $-u^{VI}(x)+V(x,u(x))u(x)=f(x)$ (ва оператори дифференсиалии ба он мувофиқ $L[u]$) дар фазои $L_2(R)$ ҷудошаванда номида мешавад, агар шартҳои*

$$u^{VI}(x),\,V(x,u)u(x)\in L_2(R)$$

барои ҳамаи $u(x)\in L_2(R)\cap W^6_{2,loc}(R)$, ки дар онҳо $f(x)\in L_2(R)$, иҷро шаванд.

Фарз мекунем, ки $F(x,\xi,\eta)\in C^3(R^3)$ ва барои ҳамаи $x\in R$, $\omega=\xi+i\eta\in\mathbb{C}$, $\Omega=\mu+i\nu\in\mathbb{C}$, $u\in W^2_2(R)$ нобаробариҳои зерин иҷро гарданд:

$$|F^{-\frac{1}{2}}F^{'''}_{xxx}F^{-1}|\le\sigma_1, \tag{48}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}F^{''}_{xx}u^{'}(x)|\le\sigma_2|Fu|, \tag{49}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}F^{'}_{x}u^{''}(x)|\le\sigma_3|Fu|, \tag{50}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}(F^{'}_{\xi}\mu+F^{'}_{\eta}\nu)\omega\|\le\delta_3|F^{\frac{1}{2}}\Omega|, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}|F^{-\frac{1}{2}}(&F^{''}_{\xi\xi}\mu^2+F^{'}_{\xi}\mu^{'}_{x}+2F^{''}_{x\xi}\mu+2F^{''}_{\xi\eta}\mu\nu+2F^{''}_{x\eta}\nu+\\&+F^{'}_{\eta}\nu^{'}_{x}+F^{''}_{\eta\eta}\nu^2)\omega\|\le\delta_2|F^{\frac{1}{2}}\Omega|;\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}|F^{-\frac{1}{2}}(&F^{'''}_{\xi\xi\xi}\mu^3+F^{'}_{\xi}\mu^{''}_{xx}+3F^{'''}_{xx\xi}\mu+3F^{'''}_{xx\eta}\nu+3F^{'''}_{x\xi\xi}\mu^2+\\&+3F^{'''}_{\xi\xi\eta}\mu^2\nu+3F^{''}_{\xi\xi}\mu\mu^{'}_{x}+3F^{''}_{x\xi}\mu^{'}_{x}+6F^{'''}_{x\xi\eta}\mu\nu+3F^{'''}_{x\eta\eta}\nu^2+\\&+3F^{''}_{\xi\eta}\nu\mu^{'}_{x}+3F^{'''}_{\xi\eta\eta}\mu\nu^{'}_{x}+3F^{''}_{x\eta}\nu^{'}_{x}+3F^{''}_{\eta\eta}\nu\nu^{'}_{x}+3F^{'''}_{\xi\eta\eta}\mu\nu^2+\\&+F^{'}_{\eta}\nu^{''}_{xx}+F^{'''}_{\eta\eta\eta}\nu^3)\omega|\le\delta_1|F^{\frac{1}{2}}\Omega|.\end{aligned} \tag{53}$$

Натиҷаи асосии параграфро баён мекунем.

Теоремаи 2.3.1. *Бигузор шартҳои (48)-(53) иҷро гарданд ва бигузор ададҳои σ_j $\;j=\overline{1,3},$, δ_i $\;(i=\overline{1,3})$ чунон бошанд, ки*

$$3\sigma_1+9\sigma_2+9\sigma_3+4\delta_1+12\delta_2+12\delta_3<4. \tag{54}$$

Он гоҳ оператори ғайрихаттии $L[u(x)]$ дар фазои $L_2(R)$ ҷудошаванда мебошад ва барои ҳамаи функсияҳои $u(x) \in L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$ муодилаи $-u^{VI}(x) + V(x,u(x))u(x) = f(x)$ бо қисми рости $f(x) \in L_2(R)$ дорои дохилкунии зерин мебошад:

$$u^{VI}(x), \quad V(x,u(x))u(x), \quad V^{\frac{1}{2}}(x,u(x))u^{'''}(x) \in L_2(R).$$

Инчунин нобаробарии коэрситивии

$$\|u^{VI}(x); L_2(R)\| + \|V(x,u)u(x); L_2(R)\| + \\ + \|V^{\frac{1}{2}}(x,u)u^{'''}(x); L_2(R)\| \leq M\|f(x); L_2(R)\| \tag{55}$$

ҷой дорад, ки адади мусбати M аз $u(x)$ ва $f(x)$ вобаста нест.

Дар параграфи сеюми боби дуюм мисолҳои операторҳои ҷудонашаванда оварда шудааст.

Боби сеюми диссертатсия ба ҳалшавандагии коэрситивии муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм дар фазои гилбертӣ бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби сеюм ҳалшавандагии муодилаи (1) омӯхта мешавад. Ҳамчун натиҷа аз теоремаи 1.2.1. натиҷаҳои зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 3.1.1. *Бигузор оператори дифференсиалии*

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + Vu$$

дар фазои $L_2(R^n)$ ҷудошаванда буда, бигузор функсияи мусбати $\phi(x)$, ки мутаалиқи $C^1(R^n)$ мебошад, нобаробариҳои зеринро қаноат кунонад:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x))]Q^{-\frac{1}{2}}\right\|^2 \leq \gamma_1, \tag{56}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\|^2 \leq \gamma_2, \tag{57}$$

ки дар ин ҷо $0 < \gamma_1 + 2\gamma_2 < 4$. Он гоҳ муодилаи (1) барои ҳамаи $f \in L_2(R^n)$ дорои ҳалли ягона дар фазои $L_2(R^n)$ мебошад.

Дар параграфи дуюми ин боб дар асоси ҷудошавандагии оператори

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u,$$

ки дар ин ҷо $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$ аст, ҳалшавандагии коэрситивии муодилаи (10) тадқиқ карда мешавад. Бо ёрии теоремаи 1.3.1. натиҷаи зерин оиди ҳалшавандагии коэрситивии муодилаи (10) исбот карда шудааст.

Теоремаи 3.2.1. *Бигузор оператори дифференсиалии*

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + Vu$$

дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)$ ҷудошаванда буда ва бигузор функсияи мусбати $\phi(x)$-и ба $C^1(R^n)$ таалуқ дошта, нобаробарии зеринро қаноат кунад:

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \theta_1, \tag{58}$$

дар ин ҷо $0 < \theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 < \frac{1}{n^2}$ мебошад. Он гоҳ муодилаи (10) барои ҳамаи $f \in L_{2,\rho}(R^n)$ дорои ҳалли ягона дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)$ мебошад.

Натиҷаҳои асосӣ ва хулосаҳо

Ҳамаи натиҷаҳои асосии диссертатсия нав буда, хусусияти назарявӣ дошта, аз инҳо иборатанд:

1. баҳоҳои коэрситивӣ барқарор карда шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои ғайрихаттии Лаплас-Белтрами ва операторҳои ғайрихаттии дифференсиалии тартиби дуюм дар фазоҳои гилбертӣ исбот карда шудааст [16-М];
2. хосиятҳои коэрситивии оператори Гелмголтс бо потенсиали матритсавии ғайрихаттӣ дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)^l$ омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии оператори ғайрихаттии Гелмголтс бо потенсиали матритсавӣ исбот карда шудааст [9-М, 11-М, 13-М, 26-М, 27-М];
3. хосиятҳои коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои калони тағйирёбанда дар фазои вектор-функсия омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии умумии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои матритсавӣ исбот карда шудааст [6-М, 8-М, 21-М, 22-М];
4. хосиятҳои коэрситивии оператори бигармоникӣ бо потенсиали матритсавии ғайрихаттӣ дар фазои $L_2(R^n)^l$ омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии оператори ғайрихаттии бигармоникӣ бо потенсиали матритсавӣ исбот карда шудааст [1-М, 2-М, 12-М, 23-М, 24-М, 25-М];
5. баҳоҳои коэрситивӣ барқарор карда шуда ва теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии муқаррарии ғайрихаттии тартиби шашум дар фазои гилбертӣ исбот карда шудааст [3-М];
6. шартҳои ҳалшавандагии коэрситивии оператори Лаплас-Белтрами ёфта шуда, теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаи ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои гилбертӣ исбот карда шудааст [16-М];
7. шартҳои ҳалшавандагии коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм ёфта шуда, теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм дар фазои вазндор исбот карда шудааст [5-М, 33-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар рушди назарияи операторҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, дар назарияи фазои функсияҳои дифференсиронидашавандаи бисёртағйирёбанда ва назарияи спектралии операторҳои дифференсиалӣ истифода шаванд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ АЗ РӮИ МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Дар маҷаллаҳои тақризшаванда аз руйхати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Вазорати маориф ва илми Федератсияи Россия.

[1-М]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9. –№ 1. – С. 55-62. DOI: https://doi.org/10.13108/2017-9-1-54. **(SCOPUS)**

[2-М]. Karimov O.Kh. On coercive properties and separability of biharmonic operator with matrix potential [Текст] /О.Х.Каримов // Ufimsk. Mat. Zh. –2017. Vol. 9, Issue –1. –PP.54-61. DOI: https://doi.org/10.13108/2017-9-1-54.**(SCOPUS)**

[3-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18.–№ 4. – С.245-254.DOI: http://dx.doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254. **(SCOPUS)**

[4-М]. Karimov O.Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces. [Текст] /O. Kh. Karimov // Journal of mathematical sciences, DOI: 10.1007/s10958-019-04447-y. – Vol. 241. –№ 5. – 2019. PP.589-595. **(SCOPUS)**

[5-М]. Каримов О.Х. О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов //Чебышевский сборник. –2019. –Т.20. –№4. –С.170-187. DOI: http://dx.doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-170-187 **(SCOPUS)**

[6-М]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Дифференциальные уравнения. Спектральная теория, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. –Т. 141. –ВИНИТИ РАН. – 2017. –С.79-85.**(SCOPUS)**

[7-М]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. 2005. – Т. XLVIII. – № 3-4. – С.38-43.

[8-М]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами [Текст] /О.Х.Каримов// Известия Академии Наук Республики Таджикистан, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2014. – № 4(157). –С.42-50.

[9-М]. Каримов О.Х. О Коэрцитивных свойствах и разделимости оператора Гельмгольца [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. –№ 3. – С.198-203.

[10-М]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. –№ 8. – С.665-673.

[11-М]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст]/О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2016. – Т. 59. –№ 7-8. – С.299-304.

[12-М]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Ученые записки ХГУ. –2017. –№ 1. – С.789-790.

[13-М]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Вестник ТГНУ. – 2017. –№ 2. –С.1020-1023.

[14-М]. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. –№ 11-12. – С.688-692.

[15-М]. Каримов О.Х. О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т. 62. –№ 9-10. – С.523-531.

[16-М]. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного дифференциального уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов Известия Академии Наук Республики Таджикистан, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2018. – № 4(173). –С.62-72.

Дар маҷаллаҳои дигар:

[17-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы научной конференции "Математика и информационные технологии, посвящённой 15-летию независимости Республики Таджикистан. г.Душанбе, 27 октября, 2006г., С. 33-35.

[18-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивные оценки решений нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка на всей оси [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы научной конференции «Комплексный анализ и неклассические системы дифференциальных уравнений», посвященной 75-летию со дня рождения академика А. Джураева. Душанбе. 16 ноября 2007 г., С. 27-28.

[19-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов// Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвященной 60-летию академика К.Х.Бойматова, г.Душанбе, 24 июня, 2010г., С. 54-56.

[20-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость линейного оператора Шрёдингера с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов//Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения», посвященной 70-летию профессора Э.М.Мухамадиева, г. Душанбе, июнь, 2011г., С.56.

[21-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка [Текст]

/О.Х.Каримов// Сборник тезисов докладов: международной научной конференции «Наука и инновационные разработки -Северу», Россия, г. Мирный, 10-12 марта 2014г., С.270-271.

[22-М]. Каримов О.Х.Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященной 80-летию чл.корр. АН РТ, д.ф.-м.н., профессора В.Л.Стеценко, г.Душанбе, 27-28 апреля 2015г., С. 25.

[23-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов //Материалы международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения», посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, г. Москва, 2015г., 25-29 мая, С.153-154.

[24-М]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Сборник докладов VI-й Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал), ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», в г. Мирном. 2015, С. 12-14.

[25-М]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвященная 25-летию независимости Республики Таджикистан. Филиал МГУ им М.В.Ломоносова, г. Душанбе, 2016г., 3-4 июня, С.79-80.

[26-M]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. Душанбе, 15-25 август 2016 г. С. 128-132.

[27-M]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве«Современные проблемы математики и ее приложений», Россия, г.Уфа, 27-30 сентября 2016 - С.79-80.

[28-M]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и разделимость нелинейного трижды гармонического дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию член.корр РАН СССР А.Ф. Леонтьева, Россия, Уфа, 27-30 мая, 2017г, С.81-82.

[29-M]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе 27-28 октября, 2017г, С.54-55.

[30-M].Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», 22-26 мая 2018 г., Приэльбрусье, п. Терскол, Кабардино-Балкарская Республика) С.116.

[31-M].Каримов О.Х. О коэрцитивной оценке и разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и его приложений», филиал МГУ в г.Душанбе, 2018, 21-22 июня, С.51-52.

[32-M]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа, 2018, 1-4 октября, С. 93-94.

[33-M]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и разделимость нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст]

/О.Х.Каримов // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвященной 60-летию академика Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова С.А., Душанбе, 2019, 13–14 декабря, С.88-89.

[34-М].Каримов О.Х. О коэрцитивной оценке и разделимости нилинейного дифференциального оператора в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа, Душанбе, 30-31 января 2020г, С. 162-163.

АННОТАЦИЯ

диссертации Каримова Олимджона Худойбердиевича на тему "Коэрцитивные оценки и разделимость нелинейных дифференциальных операторов", представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: коэрцитивные оценки, разделимость, разрешимость, нелинейные операторы, весовые пространство, гильбертово пространство.

Объекты исследования: Объектами исследования являются строго нелинейные дифференциальные операторы второго и более высокого порядка во всем пространстве, которые не являются слабыми возмущениями линейных дифференциальных операторов.

Цель исследования: Целью диссертационной работы является исследование коэрцитивных свойств широкого класса нелинейных операторов и систем нелинейных дифференциальных операторов второго и более высокого порядка, заданных во всем пространстве R^n, в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$; установление разделимости этих нелинейных дифференциальных операторов в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$; получение соответствующих коэрцитивных неравенств; изучение коэрцитивной разрешимости исследуемых операторов на основе установленных коэрцитивных неравенств.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем: установлены коэрцитивные оценки и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами и нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в гильбертовом пространстве; изучены коэрцитивные свойства оператора Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом; изучены коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами в пространстве вектор-функций и доказана теорема о разделимости общих нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами; изучены коэрцитивные свойства бигармонического оператора с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$

и доказана теорема о разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом; установлены коэрцитивные оценки, и доказана теорема о разделимости нелинейного обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка в гильбертовом пространстве; найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейного оператора Лапласа–Бельтрами и доказана теорема о существование и единственности решение нелинейного уравнение Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве; найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка и доказана теорема о существование и единственности решение нелинейных дифференциальных уравнение второго порядка в весовом пространстве.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в теории дифференциальных операторов с частными производными, в теории пространств дифференцируемых функции многих переменных и спектральной теории дифференциальных операторов.

АННОТАТСИЯ

ба диссертатсияи Каримов Олимҷон Худойбердиевич "Баҳоҳои коэрситивӣ ва ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ", ки барои дарёфти дараҷаи илмии доктори илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01-Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ пешниҳод шудааст

Вожаҳои калидӣ: баҳоҳои коэрситивӣ, ҷудошавандагӣ, ҳалшавандагӣ, операторҳои ғайрихаттӣ, фазоҳои вазндор, фазоҳои гилбертӣ.

Чизҳои тадқиқшаванда: Чизҳои тадқиқшаванда инҳо операторҳои ғайрихаттии қатъӣ тартиби дуюм ва аз он калон дар тамоми фазо, ки дорои ошӯби сусти операторҳои дифференсиалии хаттӣ намебошанд, мебошад.

Мақсади тадқиқот: Мақсадҳои рисолаи илмӣ иборат аст аз тадқиқи хосиятҳои коэрситивии синфи васеи операторҳои ғайрихаттӣ ва системаҳои ғайрихаттии операторҳои дифференсиалии тартиби дуюм ва аз он боло дар ҳамаи фазои R^n, дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)^l$; барқароркунии ҷудошавандагии ин операторҳои ғайрихаттӣ дар фазои вазндори $L_{2,\rho}(R^n)^l$; ҳосил намудани нобаробариҳои коэрситивии мувофиқ; омӯзиши ҳалшавандагии коэрситивии операторҳои тадқиқшаванда дар асоси нобаробариҳои коэрситивии муқарраркардашуда.

Навигариҳои илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои илмии диссертатсия нав буда, характери назариявӣ дошта, аз инҳо иборатанд: баҳоҳои коэрситивӣ барқарор карда шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои ғайрихаттии Лаплас-Белтрами ва операторҳои ғайрихаттии дифференсиалии тартиби дуюм дар фазоҳои гилбертӣ исбот карда шудааст; хосиятҳои коэрситивии оператори Гелмголтс бо потенсиали матритсавии ғайрихаттӣ дар фазои $L_{2,\rho}(R^n)^l$ омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии оператори ғайрихаттии Гелмголтс бо потенсиали матритсавӣ исбот карда шудааст; хосиятҳои коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм бо тағйирёбандаҳои коэффисиентҳои калон дар фазои вектор-функсия омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии умумии тартиби дуюм бо коэффитсиентҳои матритсавӣ исбот карда шудааст; хосиятҳои коэрситивии оператори бигармоникӣ бо потенсиали матритсавии ғайрихаттӣ дар фазои $L_2(R^n)^l$ омӯхта шуда, теорема оиди ҷудошавандагии оператори ғайрихаттии бигармоникӣ бо потенсиали матритсавӣ исбот карда шудааст; баҳоҳои коэрситивӣ барқарор карда шуда, теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии муқаррарии ғайрихаттии тартиби шашум дар фазои гилбертӣ исбот карда шудааст; шартҳои ҳалшавандагии коэрситивии оператори Лаплас-Белтрами ёфта шуда, теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаи ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои гилбертӣ исбот карда шудааст; шартҳои ҳалшавандагии коэрситивии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм ёфта шуда, теорема оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуюм дар фазои вазндор исбот карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда хусусияти назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар рушди назарияи операторҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, дар назарияи фазои функсияҳои дифференсиронидашавандаи бисёртағйирёбанда ва назарияи спектралии операторҳои дифференсиал¯и истифода шаванд.

SUMMARY

of the thesis of Karimov Olimjon Khudoyberdiyevich "Coercive estimates and separability of nonlinear differential operators" presented for doctor physico-mathematical sciences degree on the speciality 01.01.01 – Real, complex and functional analysis

Key words: coercive estimates, separability, solvability of nonlinear operators, weighted space, Hilbert space.

Research objects: Research objects are strongly nonlinear differential operators of the second and higher orders in the whole space, which are not weak perturbations of linear differential operators.

Purpose of the study: The purpose of the thesis is to study the coercive properties of a wide class of nonlinear operators and systems of second-order and higher-order nonlinear differential operators defined in the whole space R^n in the weited space $L_{2,\rho}(R^n)^l$; establishing the separability of these nonlinear differential operators in the weight space $L_{2,\rho}(R^n)^l$; obtaining the corresponding coercive inequalities; the study of coercive solvability of the studied operators on the basis of established coercive inequalities.

Scientific novelty. All the main results of the dissertation are new, of theoretical interest, and consist of the following: coercive estimates are established and a theorem on the separability of the nonlinear Laplace-Beltrami operator and second-order nonlinear differential operators in Hilbert space is proved; the coercive properties of the Helmholtz operator with a nonlinear matrix potential in the space $L_{2,\rho}(R^n)^l$ are studied and the theorem on the separability of the nonlinear Helmholtz operator with the matrix potential is proved; the coercive properties of second-order nonlinear differential operators with variable highest coefficients in the space of vector functions are studied and a theorem on the separability of general second-order nonlinear differential operators with matrix coefficients is proved; the coercive properties of a biharmonic operator with a nonlinear matrix potential in the space $L_2(R^n)^l$ are studied and the separability theorem for a nonlinear biharmonic operator with a matrix potential is proved; coercive estimates are established, and a theorem on the separability of a sixth-order nonlinear ordinary differential operator in a Hilbert space is proved; conditions for coercive solvability of the nonlinear Laplace – Beltrami operator are found and a theorem on the existence and uniqueness of the solution of the nonlinear Laplace – Beltrami equation in Hilbert space is proved; conditions for coercive

solvability of second-order nonlinear differential operators are found and a theorem on the existence and uniqueness of a solution of second-order nonlinear differential equations in weighted space is proved.

Theoretical and practical value. The results obtained in the dissertation are theoretical. They can find applications in the theory of partial differential operators, in the theory of spaces of differentiable functions of several variables, and in the spectral theory of differential operators.