Национальная Академия наук Таджикистана
Институт математики им. А.Джураева

На правах рукописи

УДК 517.948

КАРИМОВ ОЛИМДЖОН ХУДОЙБЕРДИЕВИЧ

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗДЕЛИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 –- Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент НАН Таджикистана, профессор
Исхоков Сулаймон Абунасрович

Душанбе — 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Работа посвящена исследованию коэрцитивных свойств и теоремам разделимости различных нелинейных дифференциальных операторов второго и более высокого порядка. На основе разделимости дифференциальных операторов изучается коэрцитивная разрешимость нелинейных дифференциальных уравнений.

Установление коэрцитивных неравенств является основной проблемой самостоятельного направления современной теории дифференциальных операторов. Наличие коэрцитивных оценок для дифференциальных операторов, позволяет сразу установить разделимость этих операторов и исследовать свойства гладкости решения дифференциальных уравнений.

Термин «разделимость дифференциального оператора» впервые был введен в научную литературу английским математиком В.Н. Эвериттом (W.N.Everitt) и шведский математиком М.Гирцом (M.Girtz) в начале семидесятых годов прошлого столетия. В своих работах ([66]-[69]) они, в основном, изучали разделимость оператора Штурма-Лиувилля

$$L[y] = -y^{''}(x) + q(x)y(x)$$

и его степеней.

Позже результаты статьи [66] обобщались в других работах этих авторов [67]-[73], а также в работах Ф.М.Аткинсона(F.V.Atkinson)[60], В.Н. Эверитта, М. Гирца, Дж. Вайдмана (J.Weidmann) [74], А.Цеттла (A.Zettl) [100], В.Д. Эванса (W.D.Evans), А.Цеттла [65], К.Х. Бойматова [12]-[25], М. Отелбаева [49], [50], М.М. Бакоевой, С.А. Исхокова [7], Р.С. Брауна

(R.C.Brown) [61], Р.С. Брауна, Д.Б. Хинтона (D.B.Hinton) [62], Н. Чернявской (N.Chernyaskaya), Л. Шустера (L.Shuster) [63], [64] и др.

В частности для оператора Штурма-Лиувилля впервые избавились от условии гладкости на потенциал $q(x)$ независимо друг о друга К.Х.Бойматова [12] и В.М.Аткинсон (F.V.Atcinson [60]. М. Отелбаев [49] исследовал разделимость оператора Штурма-Лиувилля в весовом пространстве $L_{2,k}(I)$, где I- открытий отрезок вещественной прямой.

Например, можно доказать, что при $0 < l < \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{p})$ для дифференциального выражения

$$A(x, D_x) = A^{(l)}(x, D_x) = -\frac{d}{dx^2} + l \cdot x^{-2},$$

L_p- разделимость не имеет смысла (см.Бойматов К.Х.([18])).

Разделимость обыкновенных дифференциальных выражений более высокого порядка исследовалась в работах К.Х. Бойматова, П.И. Лизоркина [20], Ф.В. Аткинсона(F.N.Atkinson)[60], В.Д. Эванса (Evans W.D.), А. Цеттла (Zettl.A) [65], С.А. Исхокова [36], Д.С. Гоибова [32] и др.

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х. Бойматова ([13]) и далее в работах К.Х. Бойматова ([14]-[16]) , М. Отелбаева [52], Р. Ойнарова [48] и их учеников.

Разделимость нелинейных обыкновенных дифференциальных выражений изучалась в работах А.А. Биргебаева, М. Отелбаева [9], Т.Т. Амановой, М.Б. Муратбекова [4], Э.З.Гриншпуна, М. Отелбаева [33], М.М. Бакоева [6], К.Н. Оспанова, Р.Д. Ахмедкалиевой [91], [92] и др.

Отметим, что разделимость оператора Штурма-Лиувилля с нелинейным потенциалом $q(x, |x|)$ в пространстве $L_1(-\infty, +\infty)$ получена в работе

Т.Т. Амановой, М.Б. Муратбекова. В работе Э.З. Гриншпуна, М. Отелбаева доказано, что нелинейный оператор Штурма-Лиувилля, с положительным потенциалом всегда разделим в пространстве $L_1(-\infty, +\infty)$.

В работах К.Х. Бойматова [22], А.С. Мохамеда [82] и др. рассмотрены дифференциальные операторы с матричными коэффициентами.

Отметим, что в работе А.С.Мохамеда [82] допускалась нелинейность рассматриваемого дифференциального оператора за счет слабого возмущения линейного оператора.

Нелинейные дифференциальные выражения с частными производными рассматривались в работах Б.М.Муратбекова, М.Отелбаева [44], К.Х. Бойматова ([18]),([19]), К.Х. Бойматова, А. Шарифова ([22]), З. Оера (Z.Oer) ([87]) и др.

В статьях К.Х.Бойматова [12], [13], [14], [17], [19], [22], [23], М.Б. Муратбекова, М. Отелбаева [44], М. Отелбаева [52], R.C. Brown [62], H.A.Atia, R.A. Mahmoud [58], W.N. Everitt, M. Gierz [70], [67], [74], A.S. Mohamed, H.A. Atia [82],З. Оера ([87]), S. Omran, K.A. Gepreel [88], [89], S. Omran, K.A. Gepreel, E.T.A. Nofal [90], K.N. Ospanov, R.D. Akhmedkaliyeva [91], [92], E.M.E.Zayed [94],[95], E.M.E. Zayed, O. Salem [96], [97] исследована L_2 - разделимость. А общий случай, то есть L_p - разделимость, рассматривался в работах К.Х. Бойматова [18], [24], А.С.Мохамеда [42], Н.Чернявской, Л.Шустера [64], И.Курбонова, М.Шодиева [40], З.Х.Рахимова [54], Д.С. Гоибова [32] и др.

В работах Х.А.Ати, Р.С.Алсаиди, А.Рамади (H.A.Atia, R.S.Alsaedi, A.Ramady) [59] и О.Милатовича (O.Milatovic) [83], [84], [85], [86] рассматривается разделимость дифференциальных операторов с частными производными, заданных на римановых многообразиях.

Дифференциальные выражения более высокого порядка исследованы в следующих работах: К.Х.Бойматов [20], М.Б. Муратбеков [43], М.Б. Муратбеков, М.М. Муратбеков, К.Н. Оспанов [47], М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков [29],[30], М.Г.Гадоев, С. А. Исхоков, Ф. С. Исхоков [31] и др.

В работе М.Г. Гадоева, С.А. Исхокова, Ф.С. Исхокова [31] впервые доказаны теоремы разделимости для вырождающихся эллиптических операторов общего вида в случае, когда область, в которой задается дифференциальный оператор и неотрицательные функции, которые характеризируют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и удовлетворяют условию погружения (см. П.И.Лизоркин [41]).

Коэрцитивная разрешимость дифференциальных операторов рассмотрена в следующих статьях: К.Х. Бойматова, А.Шарифова [22], М.Б.Муратбеков, М.М. Муратбеков, К.Н. Оспанов К.Н. [47], E.M.E. Zayed, A.S. Mohamed, H.A. Atia [93] и др.

Из приведенного выше краткого обзора результатов по теории разделимости дифференциальных операторов следует, что актуальной преблемой разделимости этой теории является исследование разделимости сильно нелинейных дифференциальных операторов, то есть операторов которые не являются слабыми возмущениями линейных операторов. Именно этой актуальной проблеме посвящена настоящая диссертационная работа.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы Института математики им. А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана на 2016-2020гг. по теме «Обобщенные краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами и нелинейные эволюционные уравнения дробного порядка».

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование коэрцитивных свойств широкого класса нелинейных операторов и систем нелинейных дифференциальных операторов второго и более высокого порядка, заданных во всем пространстве R^n, в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$; установление разделимости этих нелинейных дифференциальных операторов в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$; получение соответствующих коэрцитивных неравенств; изучение коэрцитивной разрешимости исследуемых уравнений на основе установленных коэрцитивных неравенств.

В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- изучить коэрцитивные свойства строго нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом пространстве, доказать соответствующие коэрцитивные неравенства и на их основе доказать разделимость соответствующих операторов;
- найти достаточные условия разделимости строго нелинейных дифференциальных операторов порядка выше второго и доказать соответствующие коэрцитивные неравенства;
- доказать теоремы существования и единственности решения строго нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Объекты исследования. Объектами исследования являются строго нелинейные дифференциальные операторы второго и более высокого порядка во всем пространстве, которые не являются слабыми возмущениями линейных дифференциальных операторов.

Методы исследования. Основными методами исследования являются современные методы функционального анализа и теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных; метод интегрирования по частям, впервые примененный В.Н. Эвериттом и М.Гирцом и в последующем получившей развитие в работах К.Х.Бойматова.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

- установлены коэрцитивные оценки и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами и нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом гильбертовом пространстве;
- изучены коэрцитивные свойства оператора Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом;
- изучены коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами в пространстве вектор-функций и доказана теорема о разделимости общих нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами;
- изучены коэрцитивные свойства бигармонического оператора с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$ и доказана

теорема о разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом;

- установлены коэрцитивные оценки, и доказана теорема о разделимости нелинейного обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка в гильбертовом пространстве;
- найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа–Бельтрами и доказана теорема о существование и единственности решение нелинейного уравнение Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве.
- найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и доказана теорема о существование и единственности решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве.

Положения, выносимые на защиту:

1. Теорема о разделимости нелинейного дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$.
2. Теорема о разделимости общего нелинейного дифференциального оператора второго порядка в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.
3. Теорема о разделимости строго нелинейного дифференциального оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.
4. Теорема о разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

5. Теорема о разделимости строго нелинейного дифференциального бигармонического оператора в пространстве $L_2(R^n)^l$.
6. Теорема о разделимости одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов шестого порядка в гильбертовом пространстве $L_2(R)$.
7. Теорема о существовании и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения Лапласа -Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$.
8. Теорема о существовании и единственности решения нелинейного дифференциального оператора второго порядка в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Личный вклад автора. Задачи исследования были сформулированы совместно с научным консультантом работы, который оказывал консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе "Научная новизна", получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в теории дифференциальных операторов с частными производными, в теории пространств дифференцируемых функции многих переменных и спектральной теории дифференциальных операторов. Матералы диссертации могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности "Математика".

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведенных в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы: Основные результаты работы обсуждены и получили положительные отзывы на следующих семинарах отдела теории функции и функционального анализа, общеинститутском семинаре Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвященная 60-летию академика К.Х.Бойматова, г.Душанбе, 24 июня, 2010г.; Международная научная конференция «Наука и инновационные разработки -Северу», Россия, г.Мирный, 10-12 марта 2014г.; Международная научная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященная 80-летию чл.-корр. НАН Таджикистана, д.ф.-м.н., профессора В.Л.Стеценко, г.Душанбе, 27-28 апреля 2015г.; Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения», посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, г.Москва, 25-29 мая 2015г.; VI-ая Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. СВФУ им. М.К. Аммосова, Политехнический институт, Россия, г.Мирный, 2015г.; Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвященная 25-летию независимости Республики Таджикистан. Филиал МГУ им М.В.Ломоносова, г.Душанбе, 3-4 июня 2016г.; Международная летняя математическая школа-конференция С.Б.Стечкина по теории функций, г.Душанбе, 15-25 августа 2016г.; Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию член.корр РАН СССР А.Ф. Леонтьева, Россия, г.Уфа, 27-30 мая, 2017г., С. 81-82; Уфимская международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Россия, Уфа, 27-30 сентября, 2016г.; Международная международная научная конференция «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций», посвященная 90-летию академика НАН Таджикистана, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Л.Г., г.Душанбе, 27-28 февраля 2018г.; IV-ая международная научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», Приэльбрусье, п. Терскол, Кабардино-Балкарская республика, 22-26 мая 2018г.; Международная научная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы», Россия, г.Уфа, 1-4 октября 2018г.; Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика РАН В.А. Садовничего МГУ, г.Москва, 13-15 мая 2019г.; Международная научно-практическая конференция «Наука и инновационные разработки - Северу», Россия, г.Мирный, 2019г, 14-15 марта 2019г.; XVI-ая международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза, Россия, г.Тула, 13–18 мая 2019г.; Международная конференция «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвященная 60-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова С.А., Душанбе, 13–14 декабря 2019г.; Международная конференция

«Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященная 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа, Душанбе, 30-31 января 2020г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 34 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-16] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки РФ. Работы [1]-[6] входят в международные библиографические и реферативные базы данных **Web of Science и Scopus**.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 135 наименований и заключения, занимает 157 страницу машинописного текста и набрана на LATEX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья-на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Глава 1

Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка

Настоящая глава посвящена доказательству неравенств коэрцитивности для нелинейных дифференциальных операторов с частными производными второго порядка. Из неравенств коэрцитивности следует разделимость нелинейных дифференциальных операторов в рассматриваемом пространстве.

В первом параграфе главы приведены основные обозначения, определения терминов и некоторые вспомогательные утверждения.

Во втором параграфе изучаются коэрцитивные свойства нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u]=-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+V(x,u)u(x)$$

в пространстве $L_2(R^n)$.

Доказывается теорема о разделимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве.

Во третьем параграфе первой главы изучаются коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов вида

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x)\in C^2(R^n)$, $b_j(x)\in C^1(R^n)$ в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, норма которого определяется равенством

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)\| = \left\{ \int\limits_{R^n} \rho(x)|u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\rho(x)$ - положительная функция, определенная в R^n.

Из полученных коэрцитивных оценок доказывается разделимость рассматриваемых операторов.

В четвертом параграфе изучаются коэрцитивные свойства нелинейного оператора Гельмгольца в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$. Доказывается теорема о разделимости нелинейного оператора Гельмгольца в весовом пространстве.

В пятом параграфе первой главы исследуются коэрцитивные свойства и разделимость общего нелинейного дифференциального оператора второго порядка. На основе полученных коэрцитивных оценок устанавливается разделимость этих дифференциальных операторов в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$

1.1. Основные обозначения и некоторые вспомогательные леммы

Пусть R^n - n - мерное евклидово пространство и $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ - произвольная точка этого пространства. Символом $L_p(R^n)$, где $1 \le p < +\infty$ обозначим пространство измеримых в R^n функций $\varphi(x)$ с конечной нормой

$$\|\varphi; L_p(R^n)\| = \left\{ \int\limits_{R^n} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть l- некоторое натуральное число. Символом $L_p(R^n)^l$ обозначим пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_l(x))$ таких, что $u_k(x) \in L_p(R^n), (k = \overline{1,l})$. Норму в пространстве $L_p(R^n)^l$ определяем следующим образом

$$\|u(x); L_p(R^n)^l\| = \left\{\sum_{k=1}^{l} \|u_k\|^p_{L_p(R^n)}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 2$ пространство $L_p(R^n)^l$ является гильбертовым, и скалярное произведение в $L_2(R^n)^l$ определяется с помощью равенства

$$(u, \upsilon) = \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{R^n} u_j(x)\overline{\upsilon_j(x)}dx \quad .$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс, т.е.вектор с целочисленными неотрицательными компонентами. Обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$,

$$D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Через $C_0^\infty(R^n)$ обозначим множество финитных и бесконечно дифференцируемых в R^n функций с компактным носителем. Говорят, что функция $\varphi(x)$ имеет обобщенную производную мультииндекса α в R^n в смысле Соболева, если существует локально суммируемая в R^n функция $\psi(x)$ такая, что

$$\int\limits_{R^n} \varphi(x) \cdot \overline{D^\alpha \omega(x)}dx = \int\limits_{R^n} \psi(x) \cdot \overline{\omega(x)}dx$$

для всех $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$, при этом $\psi(x) = D^\alpha \omega(x)$.

Пусть r- некоторое натуральное число и $1 \leq p < +\infty$. Символом $W_p^r(R^n)$ обозначим пространство комплекснозначных функций $\varphi(x) \in$

$L_p(R^n)$, имеющих в R^n всевозможные обобщенные производные $D^\alpha\varphi$ порядка $|\alpha| \le r$, также принадлежащие пространству $L_p(R^n)$. Норма в пространстве $W_p^r(R^n)$ определяется равенством

$$\|\varphi(x); W_p^r(R^n)\| = \left\{ \sum_{|\alpha|\le r} \int_{R^n} |D^\alpha \varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Будем говорить, что вектор-функция $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_l(x))$ принадлежит классу $W_p^r(R^n)^l$, если ее компоненты $u_k(x)(k = \overline{1,l})$ принадлежат $W_p^r(R^n)$.

Пространство $W_p^r(R^n)^l$ также является нормированным пространством, и его норма определяется следующим образом:

$$\|\varphi(x); W_p^r(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{k=1}^{l} \|u_k; W_p^r(R^n)\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 2$ пространства $W_p^r(R^n)^l$, то есть когда $W_2^r(R^n)^l$ является гильбертовым пространством, скалярное произведение определяется равенством

$$\langle u, \vartheta; W_2^r(R^n)^l \rangle = \sum_{k=1}^{l} \sum_{|\alpha|\le r} \int_{R^n} D^\alpha u_k(x) \overline{D^\alpha \vartheta_k(x)} dx.$$

Пусть l- некоторое натуральное число и B - нормированное пространство функций $u(x)$, $(x \in R^n)$. Символом B^l обозначим пространство всех вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots u_l(x))$ с компонентами $u_k(x) \in B,\ k = \overline{1,l}$. Пространство B^l также является нормированным.

Если вектор-функция $\varphi(x)u(x)$ принадлежит пространству $W_p^r(R^n)^l$ для всех $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, то говорят, что $u(x)$ принадлежит классу $W_{p,loc}^r(R^n)^l$.

Символом $\operatorname{End} C^l$ обозначим пространство $l \times l$ матриц $a = (a_{ij})_{i,j=1}^l$ с нормой $\|a\| = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$. (см. [39])

Определение 1.1.1. *Комплексная матрица* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *называется эрмитово-сопряженной или просто эрмитовой, если выполняется равенство*

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

для любых $i, j = 1, 2, \ldots, l$.

Лемма 1.1.1. *Пусть* $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$. *Тогда для любых двух вектор-функций* $u, \vartheta \in W_{2,loc}^1(R^n)^l$ *выполняется равенство*

$$(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \psi\vartheta) = -(u, \psi\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}) - (u, \vartheta\frac{\partial \psi}{\partial x_i}) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{1.1.1}$$

Доказательство. Доказательство этой леммы достаточно провести для случая $l = 1$. Пусть $u, \vartheta \in C^1(R^n)$. Тогда равенство (1.1.1) доказывается обычным интегрированием по частям. Пусть теперь $u, \vartheta \in W_{2,loc}^1(R^n)^l$, и $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область такая, что $supp\psi \subset \Omega$. Тогда существуют последовательности

$$\|u - u_k; W_2^1(\Omega)\| \to 0, \quad \|\vartheta - \vartheta_k; W_2^1(\Omega)\| \to 0 \tag{1.1.2}$$

при $k \to \infty$. Так как $u_k, \vartheta_k \in C^1(R^n)$, то для них выполняется равенство (1.1.1), и следовательно,

$$(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \psi\vartheta_k) = -(u_k, \psi\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i}) - (u_k, \vartheta_k\frac{\partial \psi}{\partial x_i}) \tag{1.1.3}$$

для любого $k = 1, 2, \ldots$

Из (1.1.2) и обычных свойств нормы следует, что

$$\|u_k; W_2^1(\Omega)\| \to \|u; W_2^1(\Omega)\| \qquad k \to \infty,$$

$$\|\vartheta_k; W_2^1(\Omega)\| \to \|\vartheta; W_2^1(\Omega)\| \qquad k \to \infty,$$

и существует положительное число M, удовлетворяющее неравенствам

$$\|u_k; W_2^1(\Omega)\| \le M, \qquad \|\vartheta_k; W_2^1(\Omega)\| \le M \qquad (\forall k = 1, 2, \dots)$$

$$\|u; W_2^1(\Omega)\| \le M, \qquad \|\vartheta; W_2^1(\Omega)\| \le M,$$

$$\sup_{R^n}\{|\psi(x) + \Delta\psi(x)|\} \le M.$$

Учитывая эти неравенства и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\left|(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \psi\vartheta_k) - (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \psi\vartheta)\right| = \left|(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}, \psi\vartheta_k) + (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \psi(\vartheta_k - \vartheta)\right| \le$$

$$\le \|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(\Omega)\| \times \|\psi\vartheta; L_2(\Omega)\| + \|\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(\Omega)\| \times \|\psi(\vartheta_k - \theta); L_2(\Omega)\| \le$$

$$\le M^2\|u_k - u; W_1^2(\Omega)\| + M^2\|\vartheta_k - \vartheta; W_1^2(\Omega)\|$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \psi\vartheta_k) = (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \psi\vartheta)$$

Аналогично доказываются равенства

$$\lim_{k\to\infty}(u_k, \psi\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}) = (u, \psi\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}),$$

$$\lim_{k\to\infty}(u_k, \vartheta_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}) = (u, \vartheta\frac{\partial\psi}{\partial x_i}).$$

Теперь, переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (1.1.3), получаем равенство (1.1.1).

Лемма 1.1.1 доказана.(см.[56])

Определение 1.1.2. *Если для оператора $A[\vartheta]$ оказывается возможным оценить в некоторой норме производные порядка $\leq 2m$ функции ϑ через норму $A[\vartheta]$ и норму самой функции ϑ, то такая оценка называется коэрцитивной.*

1.2. О коэрцитивной оценке и разделимости нелинейного дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве

В этом параграфе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x),$$

и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве. Исследуемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, то есть является строго нелинейным.

Рассматривается нелинейный уравнение Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x) = f(x),$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$- эрмитова матрица, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Установлены соответствующие неравенства коэрцитивности для оператора $L[u]$ и найдены новые достаточные условия разделимости этого оператора в пространстве $L_2(R^n)$. Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат

В.Н.Эверитту и М.Гирцу. В работах [66]–[70] они получили ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Ими был рассмотрен также многомерный случай оператора Шрёдингера. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[12]–[43] и имеющиеся там ссылки). Условия разделимость нелинейных операторов Шредингера и Дирака рассмотрены в [23]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [43]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [44], а также для линейных операторов Гельмгольца, бигармонического и трижды гармонического операторов в работах [94]-[95]. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [22], [15-A].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х.Бойматова [13]. Разделимость линейного оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u]=-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работе [94]. В данном параграфе мы обобщаем результаты работы [94] для нелинейного случая.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора.

Формулировка основного результата

В пространстве $L_2(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+V(x,u)u(x)=f(x), \quad (1.2.1)$$

$$u(x)\in W^2_{2,loc}(R^n),$$

где $g(x)=(g_{ij}(x))$- эрмитова матрица, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Определение 1.2.1. *Уравнение (1.2.1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в $L_2(R^n)$, если*

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],$$

$V(x,u(x))u(x)\in L_2(R^n)$ *для всех* $u(x)\in L_2(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x)\in L_2(R^n)$.

В дальнейшим предположим, что $V(x,z)\in C^1(R^n\times\mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta)=V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta)=V(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz.$$

Предположим, что для всех $x\in R^n$, $\omega=(\xi+i\eta)\in\mathbb{C}$, $\Omega=(\mu+i\nu)\in\mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x))];C\right\|^2\le\sigma_1, \quad (1.2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}};C\right\|^2\le\sigma_1, \quad (1.2.3)$$

$$\left\| g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial F}{\partial \eta})\omega; C\right\| \le \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}}\Omega; C\right\|. \tag{1.2.4}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| g^{-\frac{1}{2}} F \frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x))]; C\right\|^2 \le \sigma_3, \tag{1.2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2}; C\right\|^2 \le \sigma_4, \tag{1.2.6}$$

$$\left\| g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega; C\right\| \le \delta_2 \left\| F\Omega; C\right\|. \tag{1.2.7}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия (1.2.2) –(1.2.7), и пусть числа* σ_j, δ_j $(j = \overline{1,4})$ *такие, что*

$$n\sigma_1+2n\sigma_2 < 4,\ \sigma_1+2\sigma_2+4\delta_1 < 4,\ n\sigma_3+2n\sigma_4 < 4,\ \sigma_3+2\sigma_4+4\delta_2 < 4. \tag{1.2.8}$$

Тогда уравнение (1.2.1) разделяется в $L_2(R^n)$, *и для всех функций* $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_2(R^n)$ *справедливы включения*

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],$$

$$V(x,u)u, \quad g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n),\ i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]; L_2(R^n)\right\| + \|V(x,u)u; L_2(R^n)\| +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left\| g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n)\right\| \le M\|f(x); L_2(R^n)\|, \tag{1.2.9}$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

Замечание 1. *Легко можно видеть, что из коэрцитивного неравенства (1.2.9) следует разделимость нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами в пространстве* $L_2(R^n)$.

Вспомогательные леммы

Лемма 1.2.1. *Пусть в уравнении (1.2.1) функция* $f(x)$ *принадлежит пространству* $L_2(R^n)$, *и функция* $u(x)$ *принадлежит классу* $L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$. *Тогда функции* $V^{\frac{1}{2}}u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат пространству* $L_2(R^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, \varphi_\varepsilon u\rangle = \langle -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right], \varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \varphi_\varepsilon u\rangle$$

и после интегрирования по частям получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} u\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{detg(x)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[detg(x)\right]\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \varphi_\varepsilon u\rangle,$$

где $\langle , \rangle$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(R^n)$.

Так как функция φ_ε– вещественнозначная и

$$\left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1 \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i}\right| \le M_0 \varepsilon^2, \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla \varphi_\varepsilon(x)|, \; M_0 = sup|\Delta \varphi_\varepsilon(x)|,$$

то из равенства (1.2.10), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая неравенство (1.2.2), находим

$$\mathrm{Re}\,(f,u) \geq (1-\frac{\alpha\sigma_1}{4})\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + (1-\frac{\sigma_1}{4\alpha})(V(x,u)u,u),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 1.2.1 доказана.

Лемма 1.2.2. *Пусть выполнены условия (1.2.2) –(1.2.4), и пусть функция* $u(x)$ *из класса* $L_2(R^n) \cap \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *является решением уравнения (1.2.1) с правой частью* $f(x) \in L_2(R^n)$. *Тогда функции* $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1,...,n$, *принадлежат пространству* $L_2(R^n)$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1.2.1. Очевидно, что

$$\langle f, \varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right], \varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle +$$

$$+\langle V(x,u)u, \varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle.$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u)}{\partial x_i} &= \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,\xi,\eta)u + \varphi_\varepsilon\frac{\partial F(x,\xi,\eta)}{\partial x_i}u + \\ &+ \varphi_\varepsilon\,\frac{\partial F(x,\xi,\eta)}{\partial\xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \varphi_\varepsilon\,\frac{\partial F(x,\xi,\eta)}{\partial\eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \\ &+ \varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial x_i},\end{aligned}$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon F u\rangle = \frac{1}{2}A_1^\varepsilon(u) + A_2^\varepsilon(u) + A_3^\varepsilon(u) + A_4^\varepsilon(u) + A_5^\varepsilon(u) + \langle Vu, \varphi_\varepsilon F u\rangle, \tag{1.2.10}$$

где

$$A_1^{\varepsilon}(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\varphi_\varepsilon F u\rangle,$$

$$A_2^{\varepsilon}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} F u\rangle,$$

$$A_3^{\varepsilon}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u\rangle,$$

$$A_4^{\varepsilon}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial F}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i} u\rangle,$$

$$A_5^{\varepsilon}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.$$

Здесь и далее значения F, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \eta}$ взяты в точке

$$(x_1,\, \ldots, x_n,\, \mathrm{Re}u(x), \mathrm{Im}u(x)).$$

Поочередно оцениваем абсолютные значение функционалов $A_m^{\varepsilon}(u)$, $m = \overline{1,5}$.

Функционал $A_1^{\varepsilon}(u)$ преобразуем к виду

$$|A_1^{\varepsilon}(u)| = |-\sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\varphi_\varepsilon F u\rangle| =$$
$$= \left| -\sum_{i,j=1}^{n} \langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x)] u\rangle \right| =$$

далее применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая неравенство

(1.2.2), имеем

$$|A_1^\varepsilon(u)| \geq -\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\alpha}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{2\alpha}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)[ln(detg(x))]F^{\frac{1}{2}}u\|^2\right\} \geq$$

$$\geq -\frac{n\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 - \frac{n\sigma_1}{2\alpha}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{3}{2}}u\|^2.$$

Для функционала $A_2^\varepsilon(u)$ в силу леммы 1.2.1 находим, что функционал

$$A_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Fu\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}u\rangle$$

стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теперь оценим абсолютное значение функционала $A_3^\varepsilon(u)$.

$$|A_3^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle\right|$$

Далее применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая неравенство (1.2.3), имеем

$$|A_3^\varepsilon(u)| \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}u\right\|^2\right\} \leq$$

$$\leq \frac{n\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n\sigma_2}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{3}{2}}u\|^2,$$

Сначала функционал $A_4^\varepsilon(u)$ запишем в виде

$$A_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial F}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial F}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u)\rangle$$

теперь применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая неравенство (1.2.4), получим

$$|A_4^\varepsilon(u)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial F}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle \right| \le$$
$$\le n\delta_1 \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2,$$

Далее оценим абсолютное значение функционала $A_5^\varepsilon(u)$. Для функционала $A_5^\varepsilon(u)$ справедлива следующая оценка:

$$|A_5^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle| \le n \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Здесь α, β– произвольные положительные числа, а σ_1, σ_2 и δ_1 - константы из условий (1.2.2) – (1.2.4). На основе полученных оценок из равенства (1.2.10) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon F u)\rangle| \ge \left(1 - \frac{n\sigma_1}{4\alpha} - \frac{n\sigma_2}{2\beta}\right) \cdot \langle Vu, \varphi_\varepsilon F u\rangle - |A_2^\varepsilon(u)| +$$
$$+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} - \delta_1\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_2(R^n)\| \|Fu; L_2(R^n)\| \ge |(f, Fu)| \ge \left(1 - \frac{n\sigma_1}{4\alpha} - \frac{n\sigma_2}{2\beta}\right) \cdot (Vu, Fu) +$$
$$+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha\sigma_1}{4} - \frac{\beta\sigma_2}{2} - \delta_1\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \tag{1.2.11}$$

Теперь подбираем положительные числа α, β так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n\sigma_1}{4\alpha} + \frac{n\sigma_2}{2\beta} < 1, \ \frac{\alpha\sigma_1}{4} + \frac{\beta\sigma_2}{2} + \delta_1 < 1.$$

Так как по лемме 1.2.1 $Fu \in L_2(R^n)$, то из неравенства (1.2.11) следует, что функции $g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $(j = 1, 2, ..., n)$, $F^{\frac{3}{2}}u$ принадлежат пространству $L_2(R^n)$.

Лемма (1.2.2) доказана.

Доказательство теоремы 1.2.1.

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1.2.1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right], \varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle +$$

$$+\langle V(x,u)u, \varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle,$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Qu\rangle = \frac{1}{2}B_1^\varepsilon(u) + B_2^\varepsilon(u) + B_3^\varepsilon(u) + B_4^\varepsilon(u) + B_5^\varepsilon(u) + \langle Vu, \varphi_\varepsilon Qu\rangle, \tag{1.2.12}$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = -\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\varphi_\varepsilon Qu\rangle,$$

$$B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Qu\rangle,$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$B_5^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.$$

Здесь и далее значения Q, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial \eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Re}u(x), \mathrm{Im}u(x)).$$

Поочередно оцениваем абсолютные значение функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = \overline{1,5}$.

Функционал $B_1^\varepsilon(u)$ преобразуем к виду

$$|B_1^\varepsilon(u)| = | - \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\varphi_\varepsilon Q u\rangle| =$$

$$= | - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x)]u\rangle| =$$

далее применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая неравенство (1.2.5) имеем

$$|B_1^\varepsilon(u)| \geq - \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \frac{\alpha_1}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\alpha_1} \| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x)[ln(detg(x))] Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 \right\} \geq$$

$$\geq - \frac{n\alpha_1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 - \frac{n\sigma_3}{2\alpha_1} \| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2.$$

Для функционала $B_2^\varepsilon(u)$ в силу леммы (1.2.1) находим, что функционал

$$B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Q u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} u\rangle$$

стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теперь оценим абсолютное значение функционала $B_3^\varepsilon(u)$.

$$|B_3^\varepsilon(u)| = | \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u\rangle| =$$

$$= | \sum_{i,j=1}^{n} \langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} u\rangle|$$

Далее применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая неравенство (1.2.5), имеем

$$|B_3^\varepsilon(u)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \frac{\beta_1}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \right\|^2 \right\} \leq$$

$$\leq \frac{n\beta_1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2.$$

Сначала функционал $B_4^\varepsilon(u)$ напишем в виде

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial \xi} \mathrm{Re}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \mathrm{Im}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} (\frac{\partial Q}{\partial \xi} \mathrm{Re}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \mathrm{Im}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} u) \rangle;$$

теперь применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая неравенство (1.2.6), получим

$$|B_4^\varepsilon(u)| = | \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi} \mathrm{Re}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \mathrm{Im}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle | \leq$$

$$\leq n\delta_2 \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Далее оценим абсолютное значение функционала $B_5^\varepsilon(u)$. Для функционала $B_5^\varepsilon(u)$ справедлива следующая оценка:

$$|B_5^\varepsilon(u)| = | \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle | \leq n \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Здесь α_1, β_1– произвольные положительные числа, а σ_3, σ_4, и δ_2 – константы из условий (1.2.5) – (1.2.7).

На основе полученных оценок из равенства (1.2.12) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon V u) \rangle| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} - \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \right) \cdot \langle Vu, \varphi_\varepsilon V u \rangle - |B_2^\varepsilon(u)| +$$

$$+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1 \sigma_3}{4} - \frac{\beta_1 \sigma_4}{2} - \delta_2 \right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f;L_2(R^n)\|\|Vu;L_2(R^n)\| \geq |(f,Vu)| \geq \left(1-\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1}-\frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\right)\cdot(Vu,Vu)+$$
$$+n\cdot\left(1-\frac{\alpha_1\sigma_3}{4}-\frac{\beta_1\sigma_4}{2}-\delta_2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2. \tag{1.2.13}$$

Далее подбираем положительные числа $\alpha_1,\ \beta_1$ так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1}+\frac{n\sigma_4}{2\beta_1}<1,\ \frac{\alpha_1\sigma_3}{4}+\frac{\beta_1\sigma_4}{2}+\delta_2<1.$$

Из неравенство (1.2.13) в частности, следует, что

$$\|Vu;L_2(R^n)\| \leq \frac{1}{\left(1-\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1}-\frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\right)}\|f;L_2(R^n)\| \tag{1.2.14}$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]=V(x,u)u(x)-f(x),$$

то

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]\right\| \leq \tag{1.2.15}$$
$$\leq (1+\frac{1}{1-\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1}-\frac{n\sigma_4}{2\beta_1}})\|f;L_2(R^n)\|.$$

Из неравенств (1.2.13)-(1.2.15) следует, что

$$\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\| \leq \tag{1.2.16}$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1}-\frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\right)n\cdot\left(1-\frac{\alpha_1\sigma_3}{4}-\frac{\beta_1\sigma_4}{2}-\delta_2\right)}}\|f;L_2(R^n)\|.$$

Теперь можно легко заметить, что основная коэрцитивная оценка (1.2.9) теоремы 1.2.1 следует из неравенств (1.2.14)-(1.2.16).

Разделимость нелинейного оператора (1.2.1) в пространстве $L_2(R^n)$ следует из коэрцитивного неравенства (1.2.9).

Теорема 1.2.1 полностью доказана.

1.3. О коэрцитивной оценке и разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом пространстве

В настоящем параграфе первой главы изучаются коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n),\ b_j(x) \in C^1(R^n)$ в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Из полученных коэрцитивных оценок доказывается разделимость рассматриваемых операторов.

Пусть R^n - n- мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Символом $L_{p,\rho}(R^n)$, где $1 \leq p < +\infty$, обозначим пространство измеримых функций $u(x)$, определённых в R^n, с конечной нормой

$$\|u; L_{p,\rho}(R^n)\| = \left\{ \int\limits_{R^n} \rho(x)|u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где $\rho(x) \in C^1(R^n)$ - положительная функция. Определим также пространство $W_p^2(R^n)$ функций $u \in L_p(R^n)$, имеющих все обобщенные (в смысле С.Л.Соболева) частные производные до второго порядка включительно, с конечной нормой

$$\|u; W_p^2(R^n)\| = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{R^n} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p dx + \int\limits_{R^n} |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Символом $W_{2,loc}^2(R^n)$ обозначим линейное пространство всех функций $u(x)$, $x \in R^n$, для которых $\varphi(x)u(x) \in W_2^2(R^n)$ при всех $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$.

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u, v; L_{2,\rho}(R^n)) = \int\limits_{R^n} \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Основы теории разделимости дифференциальных операторов заложены в серии работ В.Н.Эверитта и М.Гирца, опубликованных в начале семидесятых годов прошлого столетия. В статьях [66]–[69] был получен ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики, (см.[12]–[52] и имеющуюся там библиографию). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шредингера и Дирака рассмотрены в [23]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [43]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [44], а в статье [27] исследовалась коэрцитивная разрешимость эллиптических операторов в банаховых пространствах. В публикациях [93]-[95] и [98] изучаются разделимость и разрешимость бигармонического и трижды гармонического операторов, операторов Шредингера и Лапласа-Бельтрами. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [13], [15-A]-[31-A].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в статье К.Х.Бойматова [13]. Разделимость линейного дифференциального оператора второго порядка

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работах [19], [27] и [97] . В данном параграфе обобщаются результаты работ [19], [27] и [97] на нелинейный случай.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы не являются слабым возмущением линейного оператора, т.е. строго нелинейны.

Формулировка основного результата

В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \qquad (1.3.1)$$

$$u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n),$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Определение 1.3.1. *Уравнение (1.3.1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в* $L_{2,\rho}(R^n)$, *если*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$$

для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$.

В дальнейшим предположим, что $V(x,z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$.

Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta) = V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = V(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz.$$

Пусть для всех $x \in R^n,\ \omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} F^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_1, \tag{1.3.2}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} F^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_2, \tag{1.3.3}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \leq \sigma_3, \tag{1.3.4}$$

$$\left\| \frac{1}{n} a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) b_j(x) F^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_4, \tag{1.3.5}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} (\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu + \nu \frac{\partial F}{\partial \eta})\omega; \mathbb{C} \right\| \leq \delta_1 \left| F^{\frac{1}{2}}\Omega; \mathbb{C} \right|. \tag{1.3.6}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства:

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2}; \mathbb{C} \right\|^2 \leq \sigma_5, \tag{1.3.7}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} (\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu + \nu \frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega; \mathbb{C} \right| \leq \delta_2 \left\| F\Omega; \mathbb{C} \right| . \tag{1.3.8}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены условия (1.3.2) –(1.3.8), и пусть числа* σ_j, $(j=\overline{1,5})$, δ_1, δ_2 *такие, что*

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4<\frac{4}{3n^2},\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}<1-\delta_1, \qquad (1.3.9)$$
$$\frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}<1-\delta_2$$

Тогда уравнение (1.3.1) разделяется в $L_{2,\rho}(R^n)$, *и для всех функций* $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$, *справедливы включения*

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\quad V(x,u(x))u(x)\in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L_{2,\rho}(R^n), i=1,2,...,n; j=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n)\right\|+\|V(x,u)u;L_{2,\rho}(R^n)\|+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|\le M\|f(x);L_{2,\rho}(R^n)\|, \qquad (1.3.10)$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

Замечание 2. *Легко можно видеть, что из коэрцитивного неравенства (1.3.10) следует разделимость оператора (1.3.1) в пространстве* $L_{2,\rho}(R^n)$.

Вспомогательные леммы

Следующая лемма является аналогом леммы 1.2.1 в случае дифференциальных операторов второго порядка.

Лемма 1.3.1. *Пусть в уравнении (1.3.1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho}(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$. Тогда функции $V^{\frac{1}{2}}u(x)$, $a^{\frac{1}{2}}_{ij}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε принимаем $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

после интегрирования по частям, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon u) = \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u + a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + \tag{1.3.11}$$

$$+ J_1^\varepsilon(u) + J_2^\varepsilon(u) + J_3^\varepsilon(u) + J_4^\varepsilon(u) + (V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

где

$$J_1^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$J_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$J_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

$$J_4^\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^n \langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle.$$

Преобразуем функционал $J_1^\varepsilon(u)$ к виду

$$ReJ_1^\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \tag{1.3.12}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \rho\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}a_{ij}(x)u\rangle).$$

Так как функция φ_ε - вещественнозначная и

$$\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \leq M_1\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_j\partial x_i}\right| \leq M_0\varepsilon^2, \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla\varphi_\varepsilon(x)|,\ M_0 = sup|\Delta\varphi_\varepsilon(x)|,$$

тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReJ_1^\varepsilon(u) = 0.$$

Далее, поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $J_m^\varepsilon(u),\ m = \overline{2,4}$, применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$|y_1y_2| \leq \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имея ввиду неравенства (1.3.2), (1.3.3) и (1.3.5), из равенства (1.3.11) получим следующие оценки:

$$|J_2^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \tag{1.3.13}$$

$$+\frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2,$$

$$|J_3^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \tag{1.3.14}$$

$$+\frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2,$$

$$|J_4^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \tag{1.3.15}$$
$$+\frac{n^2\sigma_4}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2.$$

Имея ввиду эти оценки, из равенства (1.3.11), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\operatorname{Re}(f,u) \ge (1-\frac{3\alpha_1}{2})\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + (1-\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\alpha_1})(V(x,u)u,u),$$

что и доказывает лемму. лемма 1.3.1 доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 1.2.2 в случае дифференциальных операторов второго порядка.

Лемма 1.3.2. *Пусть выполнены условия (1.3.2) –(1.3.6), и пусть функция* $u(x)$ *из класса* $L_{2,\rho}(R^n) \cap \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ *является решением уравнения (1.3.1) с правой частью* $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$. *Тогда функции* $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1,...,n$, *принадлежат пространству* $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1.3.1. Очевидно, что

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle +$$

$$+\langle\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle.$$

Отсюда, применяя лемму 1.1.1, учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u) = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}a_{ij}(x)F(x,u)u +$$
$$+ \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}u +$$
$$+ \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)(\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi} + \operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta})u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + G_1^{(\varepsilon)}(u) + G_2^{(\varepsilon)}(u) +$$
$$+ G_3^{(\varepsilon)}(u) + G_4^{(\varepsilon)}(u) + G_5^{(\varepsilon)}(u) + G_6^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle, \tag{1.3.16}$$

где

$$G_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$

$$G_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi} + \operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta})u\rangle,$$

$$G_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$G_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle,$$

$$G_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$

$$G_6^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u \rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов, находим, что в силу леммы 1.3.1 функционал $G_1^\varepsilon(u)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ReG_1^\varepsilon(u) = 0. \tag{1.3.17}$$

Относительно функционалов $G_m^\varepsilon(u)$, $(m = \overline{2,6})$ учитывая неравенство, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1 y_2 \le \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

получаем следующие оценки:

$$|G_2^\varepsilon(u)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial F}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle \right| \le$$
$$\le \delta_1 \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2,$$

$$|G_3^\varepsilon(u)| = | \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u \rangle | \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} u \right\|^2 \right\} \le$$
$$\le \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_3}{2\beta} \| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{3}{2}} u \|^2,$$

$$
\begin{aligned}
|G_4^\varepsilon(u)| &= |\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x_i} F u\rangle| \le \\
&\le \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac12} u \right\|^2 \right\} \le \\
&\le \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_2}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|G_5^\varepsilon(u)| &= |\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}^{-\frac12}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon F^{\frac12} u\rangle| \le \\
&\le \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{-\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} F^{-\frac32} F^{\frac32} u\|^2 \right\} \le \\
&\le \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_1}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|G_6^\varepsilon(u)| &= |\langle \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta) u\rangle| = \\
&= |\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{n} b_j(x) a_{ij}^{-\frac12}(x) F^{-1} F^{\frac32} u\rangle| \le \\
&\le \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_4}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2.
\end{aligned}
$$

Здесь $\beta-$ произвольное положительное число, а σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 и δ_1 - константы из условий (1.3.2) – (1.3.6). На основе полученных оценок из равенства (1.3.16) имеем

$$
\begin{aligned}
|\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F u)\rangle| \ge \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}{2\beta}\right) \cdot \langle Vu, \varphi_\varepsilon F u\rangle - |G_1^\varepsilon(u)| + \\
+ (1 - 2\beta - \delta_1) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.
\end{aligned}
$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\begin{gathered}\|f;L_{2,\rho}(R^n)\|\|Fu;L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f,Fu)| \geq \\ \geq \left(1-\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}{2\beta}\right)\cdot(Vu,Fu)+ \\ +(1-2\beta-\delta_1)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2.\end{gathered} \tag{1.3.18}$$

Теперь подбираем положительное числа β так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}{2\beta}<1, \quad 2\beta+\delta_1<1.$$

Так как по лемме 1.3.1 $Fu \in L_{2,\rho}$, то из неравенства (1.3.18) следует, что функции $a_{ij}(x)^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $(j=1,2,...,n)$, $F^{\frac{3}{2}}u$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Лемма 1.3.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1.3.1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f,\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle+\langle V(x,u)u(x),\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle$$

после несложных преобразований получим

$$\begin{gathered}\langle f,\rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon Q(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle+B_1^{(\varepsilon)}(u)+B_2^{(\varepsilon)}(u)+ \\ +B_3^{(\varepsilon)}(u)+B_4^{(\varepsilon)}(u)+B_5^{(\varepsilon)}(u)+B_6^{(\varepsilon)}(u)+\langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u\rangle,\end{gathered} \tag{1.3.19}$$

где

$$B_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta})u\rangle,$$

$$B_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$B_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_6^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \eta}$ взяты в точке

$$(x_1,\ \ldots, x_n,\ \mathrm{Re}\,u(x), \mathrm{Im}\,u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1,\ 6}$, находим, что функционал $B_1^\varepsilon(u)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $(m = \overline{2,6})$, получаем следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle\right| \le$$
$$\le \delta_2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle\right| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\right\|^2\right\} \le$$
$$\le \frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_5}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2,$$

$$|B_4^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}Qu\rangle\right| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}u\right\|^2\right\} \le$$
$$\le \frac{\beta}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2,$$

$$|B_5^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon V^{\frac{1}{2}}u\rangle\right| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-1}Vu\|^2\right\} \le$$
$$\le \frac{\beta_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2,$$

$$|B_6^\varepsilon(u)| = \left|\langle\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle\right| =$$
$$= \left|\sum_{i,j=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{n}b_j(x)a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}Vu\rangle\right| \le$$
$$\le \frac{\beta_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2.$$

Здесь β_1– произвольное положительное число, а σ_1, σ_2, σ_4, σ_5 и δ_2 – константы из условий (1.3.2),(1.3.3),(1.3.5),(1.3.7) и (1.3.8).

На основе полученных оценок из равенства (1.3.19) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon Vu)\rangle| \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1}\right)\cdot\langle Vu, \varphi_\varepsilon Vu\rangle - |B_1^\varepsilon(u)| +$$
$$+\cdot(1-2\beta_1-\delta_2)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)\|\|Vu; L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f, Vu)| \geq$$
$$\geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1}\right)\cdot(Vu, Vu) + \tag{1.3.20}$$
$$+(1-2\beta_1-\delta_2)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Далее подбираем положительное число β_1 так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1} < 1, \quad 2\beta_1 + \delta_2 < 1.$$

В частности, из (1.3.20) следует, что

$$\|Vu; L_{2,\rho}(R^n)\| \leq \frac{2\beta_1}{2\beta_1 - n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}\|f; L_{2,\rho}(R^n)\| \tag{1.3.21}$$

Так как

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x) - V(x, u(x))u(x),$$

то

$$\left\|-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| \leq \tag{1.3.22}$$
$$\leq (1 - \frac{2\beta_1}{2\beta_1 - n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)})\|f; L_{2,\rho}(R^n)\|$$

Из (1.3.21) и (1.3.22) также следует, что

$$(1-2\beta_1-\delta_2)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2\leq$$

$$\leq\|f;L_2(R^n)^l\|\|Vu;L_2(R^n)^l\|\leq\frac{1}{1-\frac{2\beta_1}{2\beta_1-n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}}\|f;L_{2,\rho}(R^n)\|^2;$$

отсюда имеем

$$\sum_{j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|\leq\theta\|f;L_{2,\rho}(R^n)\|, \tag{1.3.23}$$

где $\theta=\dfrac{1}{\sqrt{(1-2\beta_1-\delta_2)(1-\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5))}{2\beta_1})}}.$

Теперь из полученных неравенств (1.3.21)-(1.3.23) следует основная коэрцитивная оценка (1.3.10).

Разделимость нелинейного оператора (1.3.1) в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ следует из коэрцитивного неравенства (1.3.10).

Теорема 1.3.1 полностью доказана.

1.4. О коэрцитивных свойствах и разделимости оператора Гельмгольца

Пусть $\rho(x)$ - положительная функция, определенная в R^n, l - некоторое натуральное число. Символом $L_{2,\rho}(R^n)^l$ обозначим пространство вектор-функций $u(x)=(u_1(x),...,u_l(x)),u_j(x)\in L_{2,\rho}(R^n),(j=\overline{1,\ l})$ с конечной нормой

$$\|u;L_{2,\rho}(R^n)^l\|=\left\{\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{R^n}\rho(x)|u_j(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)^l$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$\langle u, \upsilon\rangle_\rho = \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{R^n} \rho(x) u_j(x) \overline{\upsilon_j(x)} dx \quad .$$

Рассмотрим оператор Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом

$$L[u] = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x), \tag{1.4.1}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, а значения $V(x,\omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in C^l$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми $(l \times l)$ матрицами. Здесь и далее l -некоторое фиксированное натуральное число.

Определение 1.4.1. *Уравнение (1.4.1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор), называется разделимым в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, если для всех вектор-функций $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $L[u] \in L_{2,\rho}(R^n)^l$, выполняются включения*

$$(-\Delta + k^2)u(x), \quad V(x, u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l.$$

Разделимость дифференциальных выражений и соответствующие неравенства коэрцитивности исследованы во многих работах (см. [66]-[71], [12]-[18], [49]-[52] и имеющиеся там ссылки). Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических операторов второго порядка в линейном случае при $l = 1$ изучалась в работе Бойматова К.Х. [19]. Вопрос о разделимости оператора Гельмгольца в линейном случае, то есть, в случае $V(x, u(x))u(x)) = q(x)$, исследовался в работах [88] и [17-А].

В данном параграфе рассматривается нелинейный оператор Гельмгольца в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$. Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные оператор не являются слабым возмущением линейного оператора.

Для $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \cdots, z_l^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ положим $\langle z^{(1)}, z^{(2)} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{l} z_j^{(1)} \overline{z_j^{(2)}}$. Далее обозначим $(u, v) = \int\limits_{R^n} \langle u(x), v(x) \rangle dx$, если интеграл в правой части абсолютно сходится.

Предположим, что значения матрица-функции $V(x, \omega) \in C(R^n \times C^l; \operatorname{End} C^l)$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами порядка l. Известно, что понятие квадратный корень от положительно-определенной матрицы определяется однозначно.

Для удобства вводим следующие обозначения

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = V^{1/2}(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_l) = F^2(x, \omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

где ω определяется по формуле $\omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x, \omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Определение 1.4.2. *Будем говорить, что матрица-функция $V(x, \omega)$ принадлежит классу $T_{\sigma_1, \sigma_2}^{\delta_1, \delta_2, \chi_1, \chi_2}$, если выполняются следующие условия для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in C^l$, $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l +$*

$i\nu_l) \in C^l$:

$$\left\| F^{-\frac{1}{2}}(x,u)u \right\|^2 \leq \delta_1 \|F(x,u)u\|^2, \tag{1.4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}}(x,u) \right\|^2 \leq \chi_1, \tag{1.4.3}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_i} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_i} \omega; C^l \right\| \leq \tag{1.4.4}$$
$$\leq \sigma_1 \left\| F^{\frac{1}{2}}(x,u)\Omega; C^l \right\|,$$

$$\left\| V^{-1}(x,u)u \right\|^2 \leq \delta_2 \|u\|^2, \tag{1.4.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial Q(x,u)}{\partial x_i} Q^{-1}(x,u) \right\|^2 \leq \chi_2, \tag{1.4.6}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1}(x,u) \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_i} \omega + \nu_j F^{-1}(x,u) \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta_i} \omega; C^l \right\| \leq \tag{1.4.7}$$
$$\leq \sigma_2 \left\| F(x,u)\Omega; C^l \right\|.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть матрица-функция* $V(x,\omega)$ *принадлежит классу* $T^{\delta_1,\delta_2,\chi_1,\chi_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$, *и пусть весовая функция* $\rho(x)$ *принадлежит классу* $C^1(R^n)$ *и для всех* $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in C^l$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} \rho^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \right\| \leq \sigma_3. \tag{1.4.8}$$

Тогда при выполнении условий

$$0<\sigma_1<1,\ 0<\sigma_2<1,\ \chi_1+2\delta_1k^2+\sigma_3<4,\ \chi_2+2\delta_2k^2+\sigma_3<4,$$

нелинейный оператор Гельмгольца (1.4.1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, *и для всех решений* $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)^l\cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ *уравнения*

$$-(\Delta+k^2)u(x)+V(x,u(x))u(x)=f(x)$$

с правой частью $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)^l$ *выполняется следующее коэрцитивное неравенство:*

$$\begin{gathered}\|(\Delta+k^2)u(x);L_{2,\rho}(R^n)^l\|+\|V(x,u(x))u(x);L_{2,\rho}(R^n)^l\|+\\ +\sum_{i=1}^n\|V^{\frac12}(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\|+\|V^{\frac12}(x,u(x))u(x);L_{2,\rho}(R^n)^l\|\le\\ \le M\|f(x);L_{2,\rho}(R^n)^l\|,\end{gathered}\tag{1.4.9}$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

Замечание 3. *Легко видеть, что из коэрцитивного неравенства (1.4.9) следует разделимость нелинейного оператора Гельмгольца (1.4.1) в пространстве* $L_{2,\rho}(R^n)^l$

Переходим к доказательству теоремы (1.4.1). Для этого докажем следующую лемму

Лемма 1.4.1. *Пусть в уравнении*

$$-(\Delta+k^2)u(x)+V(x,u(x))u(x)=f(x)$$

вектор-функция $f(x)$ *принадлежит пространству* $L_{2,\rho}(R^n)^l$, *и вектор-функция* $u(x)$ *принадлежит классу* $L_{2,\rho}(R^n)^l\cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$. *Тогда при* *выполнении условия (1.4.5) вектор-функции* $V^{\frac{1}{2}}(x,u(x))u(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ *принадлежат пространству* $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Очевидно, что $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(R^n)$ и $\varphi_\varepsilon(x) \equiv 1$ при $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$. Так как

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

и

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \langle -\Delta u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle - k^2\langle u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

где $\langle\ ,\rangle$ скалярное произведение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, то применяя лемму (1.1.1), получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon u)\rangle - k^2\langle u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle =$$

$$(1.4.10)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u\rangle + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}u\rangle + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle -$$
$$- k^2\langle u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle$$

Отсюда следует, что

$$|\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle| \geq \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle - \tag{1.4.11}$$
$$- k^2\langle u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle - |F_{1,\varepsilon}(u)| - |F_{2,\varepsilon}(u)|,$$

где

$$F_{1,\varepsilon}(u) = \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u\rangle$$

$$F_{2,\varepsilon}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u \rangle.$$

Так как $\left| \dfrac{\partial \varphi_\varepsilon(x)}{\partial x_i} \right| \le M \cdot \varepsilon \quad (\forall x \in R^n)$ и

$$|\langle u, k\vartheta \rangle| = |\langle \sqrt{k} u, \sqrt{k} \vartheta \rangle| \le \|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|\vartheta; L_{2,\rho}(R^n)^l\|,$$

то

$$|F_{1,\varepsilon}(u)| \le \varepsilon \cdot M \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\| \cdot \|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|.$$

Используя неравенство

$$c \cdot d \le \frac{\beta}{2} \cdot c^2 + \frac{1}{2\beta} \cdot d^2 \quad (\beta,\ c,\ d > 0), \tag{1.4.12}$$

получим оценку для функционала

$$|F_{1,\varepsilon}(u)| \le \varepsilon \cdot \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{n} (\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2 + \|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2). \tag{1.4.13}$$

Теперь оценим функционал $F_{2,\varepsilon}(u)$

$$|F_{2,\varepsilon}(u)| \le \sum_{i=1}^{n} \langle \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho^{-1}} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u \rangle$$

Теперь, применяя неравенство Коши-Буняковского, затем неравенство (1.4.12), находим

$$|F_{2,\varepsilon}(u)| \le \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n} \|\sqrt{\varphi_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2 + \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho^{-1}} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u; L_2(R^n)^l \right\|^2.$$

В силу условия (1.4.8)

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho^{-1}} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u; L_2(R^n)^l \right\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\| \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}(x,u) \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho} V^{\frac{1}{2}}(x,u) u; L_2(R^n)^l \right\|^2 \le$$

$$\le \sigma_3 \|\sqrt{\varphi_\varepsilon} V^{\frac{1}{2}}(x,u) u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|.$$

Поэтому

$$|F_{2,\varepsilon}(u)| \leq \tag{1.4.14}$$
$$\leq \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \frac{\sigma_3}{2\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2.$$

Так как

$$\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle = \langle\sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle = \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2,$$

$$\langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle = \langle\sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u, \sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u\rangle =$$
$$= \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2,$$

то из неравенств (1.4.11), (1.4.13), (1.4.14) с учетом неравенства (1.4.5) следует, что

$$\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|\sqrt{\varphi_\varepsilon}u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geq |\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle| \geq$$
$$\geq (1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{M\varepsilon}{2}) \cdot \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle +$$
$$+ (1 - \frac{\sigma_3}{2\alpha} - k^2\delta_2)\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2 - \frac{M\varepsilon}{2}\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geq (1 - \frac{\alpha}{2}) \cdot \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + \tag{1.4.15}$$
$$+ (1 - \frac{\sigma_3}{2\alpha} - k^2\delta_2)\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2.$$

Отсюда следует, что при $\sigma_3 + 2\alpha k^2 \cdot \delta_2 < 2\alpha$ и $\alpha < 2$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 \leq |\langle f, u\rangle| \leq \|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left\|V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 = \langle V^{\frac{1}{2}}(x,u)u, V^{\frac{1}{2}}(x,u)u\rangle = \langle V(x,u)u, u\rangle \leq$$
$$\leq |\langle f, u\rangle| \leq \|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|.$$

Полученные неравенства означают, что если $f(x)$ и $u(x)$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$, то вектор-функции $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$, $V^{\frac{1}{2}}(x,u)u$ также принадлежат $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Лемма 1.4.1 доказана.

Лемма 1.4.2. *Пусть выполнены условия (1.4.2) – (1.4.5), и пусть вектор-функция $u(x)$ из класса $L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ является решением уравнения*

$$-(\Delta+k^2)u(x)+V(x,u(x))u(x)=f(x)$$

с правой частью $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)^l$, то вектор-функции $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1,...,n$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Доказательство. Используя равенство

$$\langle f,\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle = -\langle\Delta u,\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle - k^2\langle u,\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle+ \\ +\langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle$$

и применяя Лемму 2.5.1, имеем

$$\langle f,\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u)\rangle - k^2\langle u,\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle+ \\ +\langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u) = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F(x,u)u+\rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,u)u+\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}u+ \\ +\rho\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi_j}+\operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta_j})u+\rho\varphi_\varepsilon F\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

то

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + B_1^\varepsilon(u) + B_2^\varepsilon(u) + B_3^\varepsilon(u) +$$

$$+B_4^\varepsilon(u) - k^2\langle u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle + (V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle, \qquad (1.4.16)$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$

$$B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta_j})u\rangle,$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\xi_j}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\eta_j}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re}u_1(x), \ldots, \operatorname{Re}u_l(x), \operatorname{Im}u_1(x), \ldots, \operatorname{Im}u_l(x)).$$

Так как

$$\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M\cdot\varepsilon, \qquad (\forall x\in R^n), \qquad (1.4.17)$$

где $M = \sup\limits_{R^n}|\nabla\varphi(x)| < +\infty$, и согласно лемме 1.4.1, вектор-функции $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$, $F(x,u)u$ принадлежат $L_{2,\rho}(R^n)^l$, то применяя неравенство Коши-Буняковского, можно получить оценку:

$$|B_1^\varepsilon(u)| \le M\cdot\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|\cdot\left\|F(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_1^\varepsilon(u) = 0. \qquad (1.4.18)$$

Из условии (1.4.4) при

$$\omega = u(x), \quad \Omega = \sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

т.е.

$$\xi_j = Reu_j(x), \eta_j = Imu_j(x), \quad \mu_j = \sqrt{\varphi_\varepsilon}Re\frac{\partial u}{\partial x_i}, \nu_j = \sqrt{\varphi_\varepsilon}Im\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

получаем

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\sqrt{\varphi_\varepsilon}Re\frac{\partial u}{\partial x_i}F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_i}\omega + \sqrt{\varphi_\varepsilon}Im\frac{\partial u}{\partial x_i}F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial \eta_i}\omega\right\| \leq \qquad (1.4.19)$$
$$\leq \sigma_1\left\|F^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|.$$

Так как $F(x,u(x)) = F^*(x,u(x))u(x)$, то

$$B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^{l}(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_j})u\rangle.$$

Отсюда, применяя оценку (1.4.19), получим

$$|B_2^\varepsilon(u)| \leq \sigma_1\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2$$

Далее заметим, что

$$\left\|F^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 = \langle F^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho F^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle = \langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.$$

Поэтому

$$|B_2^\varepsilon(u)| \leq \sigma_1\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle. \qquad (1.4.20)$$

Теперь оценим функционал $B_3^\varepsilon(u)$. Учитывая $F(x,u(x)) = F^*(x,u(x))u(x)$, имеем

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon \frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i} u\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon} F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i} u\rangle.$$

Далее применяя неравенство Коши-Буняковского, а также неравенство (1.4.12), находим

$$|B_3^\varepsilon(u)| \le \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^l \right\| \cdot \left\| \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon} F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i} u; L_2(R^n)^l \right\| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2 + \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i} u; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2.$$

Отсюда и из условия (1.4.6) следует, что

$$|B_3^\varepsilon(u)| \le \tag{1.4.21}$$
$$\le \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^l \right\|^2 + \frac{\chi_1}{2\alpha} \left\| \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon} F^{\frac{3}{2}} u; L_2(R^n)^l \right\|^2.$$

Теперь переходим к оценке функционала $|B_4^\varepsilon(u)|$. Сначала представим функционал в виде

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x_i} F u\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho^{-1}\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u\rangle.$$

Далее применяя неравенство Коши-Буняковского и неравенства (1.4.12), получим

$$|B_4^\varepsilon(u)| \le \tag{1.4.22}$$
$$\le \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^l \right\|^2 + \frac{1}{2\alpha} \left\| \sqrt{\rho^{-1}\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}} u; L_2(R^n)^l \right\|^2.$$

Так как

$$\sqrt{\rho^{-1}(x)} F(x,u) \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} u(x) = \rho^{-1}(x) \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} F^{-\frac{1}{2}}(x,u) \sqrt{\rho(x)} F^{\frac{3}{2}}(x,u) u(x),$$

то применяя условия (1.4.8) из (1.4.22), получим

$$|B_4^\varepsilon(u)| \leq \tag{1.4.23}$$
$$\leq \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \frac{\sigma}{2\alpha}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{3}{2}}u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2.$$

Так как

$$|\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle| = |\langle\sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}f, \sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)u\rangle| \leq$$

$$\leq \|\sqrt{\varphi_\varepsilon}f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)u\rangle; L_{2,\rho}(R^n)^l\|$$

и

$$\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle = \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2$$

$$\langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle = \langle F^2(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle = \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{3}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2,$$

то из равенства (1.4.16) следует, что

$$\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{3}{2}}(x,u); L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 -$$
$$-k^2(u, \rho\varphi_\varepsilon Fu) - |B_1^\varepsilon(u)| - |B_2^\varepsilon(u)| - |B_3^\varepsilon(u)| - |B_4^\varepsilon(u)|.$$

Отсюда и из неравенств (1.4.20), (1.4.21), (1.4.23) получим

$$\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geq$$
$$\geq (1-\sigma_1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 +$$
$$+ (1 - \frac{\sigma+\chi_1}{2\alpha} - k^2\cdot\delta_1)\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{3}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 - |B_1^\varepsilon(u)|.$$

Согласно лемме 1.4.1 вектор-функция $F(x,u)u \equiv V^{\frac{1}{2}}(x,u)$ принадлежит весовому пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$. Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последнем неравенстве с учетом (1.4.18), имеем

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|F(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geq (1-\sigma_1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \tag{1.4.24}$$

$$+\,(1-\frac{\sigma+\chi_1}{2\alpha}-k^2\cdot\delta_1)\left\|F^{\frac{3}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2.$$

Далее подбираем числа $\alpha > 0$ так,чтобы выполнялись условия

$$\sigma_1+\alpha<1,\ \frac{\chi_1+\sigma}{2\alpha}+k^2\delta_1<1$$

Тогда из неравенства (1.4.24) находим, что вектор-функции $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1,...,n$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Лемма 1.4.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.4.1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1.4.1. Применяя лемму 1.1.1, из равенства

$$\langle f,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)\rangle = \langle -\Delta u,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle - k^2\langle u,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle +$$
$$+\langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle$$

получим

$$\langle f,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u)\rangle - k^2\langle u,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle +$$
$$+\langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u) = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon V(x,u)u + \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}V(x,u)u + \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial V(x,u)}{\partial x_i}u +$$

$$+\rho\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^{l}(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial V(x,u)}{\partial\xi_j} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial V(x,u)}{\partial\eta_j})u + \rho\varphi_\varepsilon V\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

то

$$\langle f,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + A_1^\varepsilon(u) + A_2^\varepsilon(u) + A_3^\varepsilon(u) +$$

$$+A_4^\varepsilon(u) - k^2\langle u,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle + (V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle, \qquad (1.4.25)$$

где

$$A_1^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle,$$

$$A_2^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon\sum_{j=1}^{l}(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial V(x,u)}{\partial\xi_j} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial\eta_j})u\rangle,$$

$$A_3^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q(x,u)}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$A_4^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $Q(x,u)$, $\dfrac{\partial Q(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial Q(x,u)}{\partial\xi_j}$, $\dfrac{\partial Q(x,u)}{\partial\eta_j}$ взяты в точке

$$(x_1,\,\ldots,x_n,\,\mathrm{Re}\,u_1(x),\,\ldots,\,\mathrm{Re}\,u_l(x),\,\mathrm{Im}\,u_1(x),\,\ldots,\,\mathrm{Im}\,u_l(x)).$$

Так как $F^{\frac{1}{2}}(x,\omega)\cdot F^{\frac{3}{2}}(x,\omega) = Q(x,\omega)$, и согласно леммы 1.4.2 вектор-функции $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,...,n$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$, то действуя так же как при доказательстве леммы 1.4.2, получим

$$|A_1^\varepsilon(u)| \le M\cdot\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|\cdot\left\|F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x);L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|.$$

Следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_1^\varepsilon(u) = 0. \tag{1.4.26}$$

Из условия 1.4.7 при

$$\omega = u(x), \quad \Omega = \sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

находим

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\sqrt{\varphi_\varepsilon}Re\frac{\partial u}{\partial x_i}F^{-1}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_i}\omega + \sqrt{\varphi_\varepsilon}Im\frac{\partial u}{\partial x_i}F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial \eta_i}\omega\right\| \leq \tag{1.4.27}$$

$$\leq \sigma_2\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|$$

Представляя функционал $A_2^\varepsilon(u)$ в виде

$$A_2^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sum_{j=1}^{l}(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}F^{-1}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_j}u\rangle +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\langle\sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}F^{-1}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta_j})u\rangle$$

и применяя (1.4.7), получим следующую оценку:

$$|A_2^\varepsilon(u)| \leq \sigma_2\sum_{i=1}^{n}\left\|F(x,u)\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2. \tag{1.4.28}$$

Так как $Q^{\frac{1}{2}}(x,u(x)) = V^{\frac{1}{2}}(x,u(x)) = F(x,u(x))$, то

$$A_3^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q(x,u)}{\partial x_i}u\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\langle\sqrt{\rho\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial Q}{\partial x_i}Q^{-1}(x,u)V(x,u)u\rangle.$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского и условие (1.4.12), имеем

$$|A_3^\varepsilon(u)| \le \tag{1.4.29}$$
$$\le \frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \frac{\chi_2}{2\beta}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2.$$

Теперь переходим к оценке функционала $A_4^\varepsilon(u)$. Представим функционал $A_4^\varepsilon(u)$ в виде

$$A_4^\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\langle\sqrt{\rho\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho\varphi_\varepsilon}\rho^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V(x,u)u\rangle.$$

Применяя неравенства Коши-Буняковского, а также неравенство (1.4.12) и условия (1.4.8), переходим к следующей оценке:

$$|A_4^\varepsilon(u)| \le \tag{1.4.30}$$
$$\le \frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \frac{\sigma_3}{2\beta}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2$$

Из равенства (1.4.26) следует, что

$$|\langle f, \rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u\rangle| \ge \sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 +$$
$$+ \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 - k^2(u, \rho\varphi_\varepsilon V(x,u)u) -$$
$$- |A_1^\varepsilon(u)| - |A_2^\varepsilon(u)| - |A_3^\varepsilon(u)| - |A_4^\varepsilon(u)|.$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского и оценки (1.4.28)-(1.4.30) имеем

$$\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geq \tag{1.4.31}$$
$$\geq (1-\sigma_2-\beta)\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 +$$
$$+ (1-\frac{\sigma+\chi_2}{2\beta}-k^2\cdot\delta_2)\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 - |A_1^\varepsilon(u)|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом равенства (1.4.26) получим

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \geq \tag{1.4.32}$$
$$\geq (1-\sigma_2-\beta)\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 +$$
$$+ (1-\frac{\sigma+\chi_2}{2\beta}-k^2\cdot\delta_2)\left\|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2.$$

Далее подбираем числа $\beta > 0$ так, чтобы выполнялись условия

$$\sigma_1+\beta<1,\ \frac{\chi_1+\sigma}{2\beta}+k^2\delta_1<1.$$

Поэтому из неравенства (1.4.32) частично следует, что

$$\left\|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \leq \frac{2\beta}{2\beta(1+k^2\delta_2)-(\sigma+\chi_2)}\|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\|. \tag{1.4.33}$$

Применяя это неравенство в (1.4.32), находим

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 \leq$$
$$\leq \frac{1}{(1-\sigma_2-\beta)}\|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \cdot \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| \leq$$
$$\leq \frac{2\beta}{(2\beta(1+k^2\delta_2)-(\sigma+\chi_2))(1-\sigma_2-\beta)} \cdot \|f; L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|\leq\tau\cdot\|f;L_{2,\rho}(R^n)^l\|, \tag{1.4.34}$$

где

$$\tau=\sqrt{\frac{2\beta}{(2\beta(1+k^2\delta_2)-(\sigma+\chi_2))(1-\sigma_2-\beta)}}$$

Так как $(\Delta+k^2)u(x)=V(x,u(x)u(x)-f(x)$, то из оценки (1.4.33) следует, что

$$\begin{aligned}&\|(\Delta+k^2)u(x);L_{2,\rho}(R^n)^l\|\leq\\&\leq(1+\frac{2\beta}{2\beta(1+k^2\delta_2)-(\sigma+\chi_2)})\|f;L_{2,\rho}(R^n)^l\|.\end{aligned} \tag{1.4.35}$$

Теперь, легко можно заметить, что основное коэрцитивное неравенство теоремы 1.4.1. следует из неравенств (1.4.33)-(1.4.35). Разделимость нелинейного дифференциального оператора Гельмгольца в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ следует из коэрцитивного неравенства (1.4.9).

Теорема 1.4.1 полностью доказана.

1.5. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами

Этот параграф посвящен исследованию коэрцитивных свойств нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричным потенциалом. Здесь обобщаем результаты четвертого параграфа на случай общего дифференциального оператора второго порядка. Сначала приводится основной результат параграфа, а потом доказываются некоторые вспомогательные леммы и, наконец, приводится полное доказательство.

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами:

$$L_0[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора L_0 являются квадратными матрицами порядка l с элементами из класса $C^1(R^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

I). $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \qquad Im a_{ij}(x) \equiv 0;$

II). $|a_{ij}(x)| \leq \sigma_1, \quad |\nabla a_{ij}(x)| \leq \sigma_2, \quad (\forall x \in R^n;\ i,j = 1,2,\ldots,n);$

III). $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|s_i; C^l\right|^2 \leq \chi_1 \cdot \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left\langle a_{ij}(x)s_i, s_j; C^l\right\rangle \left(\forall x \in R^n,\ \forall s = \{s_i\}_{i=1}^{n},\ s_i \in C^l\right)$,

константы σ_1, σ_2, χ_1 в этих условиях не зависят от x и s.

Формулировка основного результата

Рассмотрим следующий нелинейный дифференциальный оператор второго порядка с переменными старшими коэффициентами

$$L[u] = L_0[u] + V(x,u)u \tag{1.5.1}$$

Пусть $V(x,\omega)$ - квадратная матрица-функция порядка l , определенная на всех $x \in R^n$, $\omega \in C^l$, элементы которой непрерывно дифференцируемы по всем аргументам. Предполагается, что значения $V(x,\omega)$ являются положительно-определёнными эрмитовыми матрицами.

Определение 1.5.1. *Дифференциальный оператор (1.5.1), называется разделимым в весовом пространстве* $L_{2,k}(R^n)^l$, *если для всех вектор-функций* $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ *таких, что* $L[u] \in L_{2,k}(R^n)^l$

выполняются включения

$$L_0[u] \in L_{2,k}(R^n)^l, \quad V()x,u)u \in L_{2,k}(R^n)^l$$

Здесь мы предполагаем, что матрица-функций $a_{ij}(x)$ коммутируются с $V(x,\omega)$, т.е.

$$[a_{ij}(x)V(x,\omega)] = a_{ij}(x)\cdot V(x,\omega) - V(x,\omega)\cdot a_{ij}(x) \equiv 0$$

для всех $x \in R^n$ и всех $\omega \in {}^l$.

Введём следующие обозначения

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\xi_1,\xi_2,...,\xi_l,\eta_1,\eta_2,...,\eta_l) = V^{1/2}(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

$$Q(x_1,x_2,...,x_n,\xi_1,\xi_2,...,\xi_l,\eta_1,\eta_2,...,\eta_l) = F^2(x,\omega),\ (x_i \in R,\ \xi_j,\ \eta_j \in R),$$

где ω определяется равенством $\omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Определение 1.5.2. *Предположим, что матрица-функция $V(x,\omega)$ принадлежит классу $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$, если выполняются следующие условия для всех $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l) \in C^l, \Omega = (\mu_1 + i\nu_1,\ \ldots,\ \mu_l + i\nu_l)$:*

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega)\frac{\partial F(x,\omega)}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}(x,\omega)\right\|^2 \le \chi, \tag{1.5.2}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega)\frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \xi_j}\omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega)\frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \eta_j}\omega; C^l\right\| \le \tag{1.5.3}$$

$$\le \sigma\left\|F^{\frac{1}{2}}\Omega; C^l\right\|,$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_j F^{-1}(x,\omega)\frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_j}\omega + \nu_j F^{-1}(x,\omega)\frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial \eta_j}\omega; C^l\right\| \le \tag{1.5.4}$$

$$\le \delta\left\|F\Omega; C^l\right\|.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial x_i} Q^{-1}(x,\omega) \right\|^2 \leq \gamma. \tag{1.5.5}$$

Основной результат этого параграфа сформулируем в виде следующей теоремы

Теорема 1.5.1. *Пусть матрица-функция $V(x,\omega)$ принадлежит классу $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$, и матрица-функций $a_{ij}(x)$ коммутируется с $V(x,\omega)$ и удовлетворяет условиям I), II), III). Также пусть весовая функция $k(x)$ принадлежит классу $C^1(R^n)$ и для всех $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l) \in C^l$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial k(x)}{\partial x_i} k^{-\frac{1}{2}}(x) Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \right\|^2 \leq \sigma_3. \tag{1.5.6}$$

Тогда при выполнении неравенств

$$\chi_1\sigma_1 < 2, \quad 0 < \sigma_3 < 2, \quad \chi + \sigma_3 < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{n(\chi+\sigma_3)}{2}, \tag{1.5.7}$$

$$\gamma + \sigma_3 < \frac{2}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{(\gamma+\sigma_3)n}{2},$$

где $\chi, \sigma, \delta, \gamma, \sigma_1, \sigma_3, \chi_1$ – постоянные из условий (1.5.2)–(1.5.5) и I – III, нелинейный оператор (1.5.1) разделяется в весовом пространстве $L_{2,k}(R^n)^l$. При этом для всех решений $u(x) \in W_{2,loc}(R^n)^l \cap L_{2,k}(R^n)^l$ уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + V(x,u(x))u(x) = f(x) \tag{1.5.8}$$

с правой частью $f(x) \in L_{2,k}(R^n)^l$ выполняется следующее коэрцитивное *неравенство*

$$\left\|V(x,u)u; L_{2,k}(R^n)^l\right\| + \sum_{j=1}^{n} \left\|V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,k}(R^n)^l\right\| +$$

$$+\left\|L_0[u]; L_{2,k}(R^n)^l\right\| \leq M \left\|f; L_{2,k}(R^n)^l\right\|, \qquad (1.5.9)$$

где $M > 0$ число, которое не зависит от вектор – функций $f(x), u(x)$.

Результат, сформулированный в этой теореме, ранее был получен только в случае оператора Шрёдингера [4-А].

Замечание 4. *Легко можно видеть, что из коэрцитивного неравенства (1.5.9) следует разделимость оператора (1.5.1) в пространстве $L_{2,k}(R^n)^l$.*

Вспомогательные леммы

Следующая лемма является аналогом леммы 1.4.1 в случае эллиптических дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами.

Лемма 1.5.1. *Пусть выполнены условия I-III. Пусть в уравнении (1.5.8) вектор-функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,k}(R^n)^l$ и вектор-функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,k}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$. Тогда при условии (1.5.6), где σ_3 удовлетворяет условию (1.5.7), вектор-функции $V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, принадлежат пространству $L_{2,k}(R^n)^l$.*

Доказательство. Пусть положительная функция $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1.4.1. Так как

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)u\rangle = \langle L_0[u], \rho\varphi_\varepsilon(x)u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)u\rangle.$$

то учитывая равенство

$$L_0[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

и, применяя лемму 1.1.1, получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon u)\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle. \tag{1.5.10}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon u) = \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\varphi_\varepsilon u + \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u + \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

то

$$\begin{aligned}\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = &\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + \\ &+ J_1^\varepsilon(u) + J_2^\varepsilon(u) + J_3^\varepsilon(u) + (V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle,\end{aligned} \tag{1.5.11}$$

где

$$\begin{aligned} J_1^\varepsilon(u) &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle \\ J_2^\varepsilon(u) &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle, \\ J_3^\varepsilon(u) &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_j}u\rangle, \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.1.1, преобразуем функционал $J_2^\varepsilon(u)$

$$\begin{aligned} J_2^\varepsilon(u) = &-\sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}^*(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u)\rangle = \\ &-\sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \frac{\partial a_{ij}^*(x)}{\partial x_i}\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}a_{ij}^*(x)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \\ &-\sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \rho\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}a_{ij}^*(x)u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle u, \rho a_{ij}^*(x)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle; \end{aligned}$$

отсюда, учитывая условия I), получим

$$ReJ_2^\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial a_{ij}^*(x)}{\partial x_i}\rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial\rho}{\partial x_i}a_{ij}^*(x)\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \tag{1.5.12}$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \rho\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}a_{ij}^*(x)u\rangle.$$

Из условия II) следует, что все элементы матрицы $\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}$ и $a_{ij}(x)$ ограничены. Поэтому, в силу неравенства Коши-Буняковского, оценок

$$\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1\cdot\varepsilon \quad (\forall x\in R^n)$$

и

$$\left|\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}\right| \le M_2\cdot\varepsilon^2 \quad (\forall x\in R^n),$$

имеем

$$|ReJ_2^\varepsilon(u)| \le (M_3\cdot\varepsilon + M_4\cdot\varepsilon + M_5\cdot\varepsilon^2)\cdot\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2.$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReJ_2^\varepsilon(u) = 0. \tag{1.5.13}$$

Согласно условию I)

$$ImJ_1^\varepsilon(u) = Im\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle \equiv 0. \tag{1.5.14}$$

Теперь оценим функционал $J_3^\varepsilon(u)$. Для этого функционал $J_3^\varepsilon(u)$ представим в следующем виде

$$|J_3^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_j}u\rangle| = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho^{-1}}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}u\rangle|.$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, а затем неравенство (1.4.12), находим

$$|J_3^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha_1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2 + \\ + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho^{-1}} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u; L_2(R^n)^l \right\|^2 .$$

В силу условия (1.5.6)

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} \rho^{-\frac{1}{2}}(x) u \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| \rho^{-1} \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}(x,u) \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho} V^{\frac{1}{2}}(x,u) u \right\|^2 \leq \\ \leq \sigma_3 \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho} V^{\frac{1}{2}}(x,u) u; L_2(R^n)^l \right\|^2 .$$

Поэтому, учитывая условия I) имеем

$$|J_3^\varepsilon(u)| \leq \frac{n\sigma_1\alpha_1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2 + \\ + \frac{n\sigma_3}{2\alpha_1} \sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} \sqrt{\rho} V^{\frac{1}{2}}(x,u) u; L_2(R^n)^l \right\|^2 . \tag{1.5.15}$$

Так как $V(x,u)u = V^*(x,u)u)$, то из (1.5.11) и (1.5.14) следует, что

$$Re\langle f, \varphi_\varepsilon \rho u\rangle = ReJ_1^\varepsilon(u) + ReJ_3^\varepsilon(u) + (V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу равенства (1.5.13) имеем

$$Re\langle f, \rho u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho \frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle + ReJ_3^\varepsilon(u) + (V(x,u)u, \rho u\rangle. \tag{1.5.16}$$

Из условия эллиптичности III), при $s_i = \sqrt{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_i}; C^l \right|^2 \leq \chi_1 \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho \frac{\partial u}{\partial x_j}; C^l\rangle \quad (\forall x \in R^n).$$

Интегрируя это равенство по x, в R^n, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 \leq \chi_1\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle \tag{1.5.17}$$

Из равенства (1.5.16), имея в виду неравенство (1.5.17), окончательно находим

$$Re\langle f,\rho u\rangle \geq (\frac{1}{\chi_1}-\frac{n\sigma_1\alpha_1}{2})\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \tag{1.5.18}$$
$$+(1-\frac{n\sigma_3}{2\alpha_1})\|V^{\frac{1}{2}}(x,u)u;L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2.$$

Далее подбираем числа $\alpha_1>0$ так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{1}{\chi_1}-\frac{n\sigma_1\alpha_1}{2}<1,\quad 1-\frac{n\sigma_3}{2\alpha_1}<1.$$

Тогда из неравенства (1.5.18) находим, что если $f(x)$ и $u(x)$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$, то вектор-функции $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$, $V^{\frac{1}{2}}(x,u)u$ также принадлежат $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Лемма 1.5.1 доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 1.4.2 в случае эллиптических дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами.

Лемма 1.5.2. *Пусть выполнены условия I)-III), и пусть вектор-функция $u(x)$ из класса $L_{2,k}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ является решением уравнения (1.5.8) с правой частью $f(x)\in L_{2,k}(R^n)^l$. Тогда при условии (1.5.6), где σ_3 удовлетворяет условию (1.5.7), вектор – функции $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$ принадлежат пространству $L_{2,k}(R^n)^l$.*

Доказательство. Действуя так же, как в доказательстве леммы 1.5.1, с помощью леммы 1.1.1 из равенства

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \langle L_0[u], \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle$$

находим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u)\rangle +$$

$$+\langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle.$$

Отсюда, используя равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u) = \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\varphi_\varepsilon F(x,u)u + \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}F(x,u)u + \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_j}u +$$

$$+\rho\varphi_\varepsilon\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_k} + \operatorname{Im}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_k})u + \rho\varphi_\varepsilon F\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

имеем

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle + G_1^{(\varepsilon)}(u) + G_2^{(\varepsilon)}(u) +$$

$$+ G_3^{(\varepsilon)}(u) + G_4^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle, \qquad (1.5.19)$$

где

$$G_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}F(x,u)u\rangle,$$

$$G_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_k} + \operatorname{Im}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_k})u\rangle,$$

$$G_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_j}u\rangle,$$

$$G_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_k}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_k}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re} u_1(x), \ldots, \operatorname{Re} u_l(x), \operatorname{Im} u_1(x), \ldots, \operatorname{Im} u_l(x)).$$

Так как $F^{\frac{1}{2}}(x,\omega) \cdot F^{\frac{3}{2}}(x,\omega) = Q(x,\omega)$ и согласно Леммы 1.5.1 вектор-функции $F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))u(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,...,n$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$. Поэтому, действуя так же, как в доказательстве леммы 1.5.1, доказывается, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReG_1^{\varepsilon}(u) = 0. \tag{1.5.20}$$

С целью оценки функционала $G_2^{\varepsilon}(u)$ сначала применяем условие (1.5.3) при

$$\omega = u(x), \quad \Omega = \sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{l} \sqrt{\varphi_\varepsilon} Re\frac{\partial u}{\partial x_i} F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_k}\omega + \sqrt{\varphi_\varepsilon} Im\frac{\partial u}{\partial x_i} F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial \eta_k}\omega\right\| \le \tag{1.5.21}$$
$$\le \sigma \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|.$$

Учитывая эрмитово-сопряженность матрицы $V(x,u)$ представим функционал $G_2^{\varepsilon}(u)$, в следующем виде:

$$G_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho} a_{ij}(x) F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}\sum_{k=1}^{l} F^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi_k} u\rangle +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \langle \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho} a_{ij}(x) F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}\sum_{k=1}^{l} F^{-\frac{1}{2}}\operatorname{Im}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta_k}) u\rangle.$$

Теперь, применяя неравенства Коши-Буняковского и оценку 1.5.21, имеем

$$\left\|G_2^{(\varepsilon)}(u)\right\| \le \sigma \sum_{i,j=1}^{n} \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}}(x,u) a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\| \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|.$$

Применяя условия I) находим

$$\left\|G_2^{(\varepsilon)}(u)\right\| \le \sigma\sigma_1 \sum_{i,j=1}^{n} \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\| \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|.$$

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - неотрицательные числа, то

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot a_j \le \tag{1.5.22}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i^2 + a_j^2) = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

поэтому

$$\left\|G_2^{(\varepsilon)}(u)\right\| \le n \cdot \sigma \cdot \sigma_1 \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2. \tag{1.5.23}$$

Функционал $G_3^{(\varepsilon)}(u)$ представим в виде

$$G_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho} a_{ij}(x) F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho} F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_j} u\rangle$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\|G_3^{(\varepsilon)}(u)\| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} a_{ij}(x) F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \cdot \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_j} u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|.$$

Теперь применяя неравенства (1.4.9) и условия I), имеем

$$\|G_3^{(\varepsilon)}(u)\| \le \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \frac{\alpha_2\sigma_1}{2} \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\alpha_2}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_j} u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 \right\}.$$

Используя неравенства (1.5.2), имеем

$$\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_j} u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 \le \left\|F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_j} F^{-\frac{3}{2}} u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{3}{2}} u\right\|^2 \le$$

$$\le \chi \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} F^{\frac{3}{2}} u\right\|^2 = \chi\langle V(x,u)u, \varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle.$$

Тогда для функционала $G_3^{(\varepsilon)}(u)$ получаем следующую оценку:

$$\left\|G_3^{(\varepsilon)}(u)\right\| \leq \frac{\alpha_2\sigma_1 \cdot n}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \qquad (1.5.24)$$
$$+\frac{\chi \cdot n}{2\alpha_2}\langle V(x,u)u, \varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle.$$

Оценим функционал $G_4^{(\varepsilon)}(u)$. Сначала для этого, представим его в виде

$$G_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}a_{ij}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho^{-1}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \rho}{\partial x_j}u\rangle,$$

а затем применяя неравенство Коши-Буняковского и неравенство (1.4.12), получим

$$\left\|G_4^{(\varepsilon)}(u)\right\| \leq \frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}a_{ij}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^l\right\|^2 +$$
$$+\frac{1}{2\alpha_2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho^{-1}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \rho}{\partial x_j}u; L_2(R^n)^l\right\|^2.$$

В силу условия (1.5.11)

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_i}\rho^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left\|\rho^{-1}\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_i}Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F^{\frac{3}{2}}(x,u)u\right\|^2 \leq$$
$$\leq \sigma_3\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F^{\frac{3}{2}}(x,u)u; L_2(R^n)^l\right\|^2.$$

Поэтому, учитывая условия I), имеем

$$|J_4^\varepsilon(u)| \leq \frac{n\sigma_1\alpha_2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 + \qquad (1.5.25)$$
$$+\frac{n\sigma_3}{2\alpha_2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F^{\frac{3}{2}}(x,u)u; L_2(R^n)^l\right\|^2$$

Из равенства (1.5.19), учитывая неравенства (1.5.23)- (1.5.25) следует, что

$$|\langle f,\rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle| \geq \tag{1.5.26}$$
$$\geq \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle - |G_1^{(\varepsilon)}(u)| - |G_2^{(\varepsilon)}(u)| -$$
$$-|G_3^{(\varepsilon)}(u)| - |G_4^{(\varepsilon)}(u)| + \langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle.$$

Из условия эллиптичности III), при $s_i = \sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i};C^l\right|^2 \leq \chi_1\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j};C^l\rangle$$

для любого $x\in R^n$.

Интегрируя это равенство по x, в R^n, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 \leq \tag{1.5.27}$$
$$\leq \chi_1\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle.$$

Так как матрица-функции $a_{ij}(x)$ и $F(x,u)$ коммутируются и

$$\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 = \langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle \leq \chi_1\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\rangle.$$

В силу этого неравенства из (1.5.26) следует, что

$$|\langle f,\rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle| \geq \tag{1.5.28}$$
$$\geq \frac{1}{\chi_1}\sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle - |G_1^{(\varepsilon)}(u)| - |G_2^{(\varepsilon)}(u)| -$$
$$-|G_3^{(\varepsilon)}(u)| - |G_4^{(\varepsilon)}(u)| + \langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle.$$

Далее, применяем оценки (1.5.23)- (1.5.25), получим

$$|\langle f,\rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle| \geq (\frac{1}{\chi_1}-n\sigma\sigma_1-\frac{\alpha_2\sigma_1 n}{2})\sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle-$$
$$-|G_1^{(\varepsilon)}(u)|+(1-\frac{\chi\cdot n}{2\alpha_2}-\frac{n\sigma_3}{2\alpha_2})\langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle.$$

Согласно лемме 1.5.1 вектор-функция $F(x,u)u\equiv V^{\frac{1}{2}}(x,u)u$ принадлежит весовому пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$. Поэтому, переходя к приделу при $\varepsilon\to 0$, с учетом (1.5.20), имеем

$$\|f;L_{2,\rho}(R^n)^l\|\cdot\|F(x,u)u;L_{2,\rho}(R^n)^l\|\geq \tag{1.5.29}$$
$$\geq(\frac{1}{\chi_1}-n\sigma\sigma_1-\frac{\alpha_2\sigma_1 n}{2})\sum_{i=1}^{n}\|F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2+$$
$$+(1-\frac{\chi\cdot n+n\sigma_3}{2\alpha_2})F^{\frac{3}{2}}(x,u)u;L_{2,\rho}(R^n)^l\|^2.$$

Далее подбираем числа $\alpha_2>0$ так, чтобы выполнялись условия

$$n\sigma\sigma_1+\frac{\alpha_2\sigma_1 n}{2}<\frac{1}{\chi_1}\quad,\quad\frac{\chi\cdot n+n\sigma_3}{2\alpha_2}<1$$

Тогда из неравенства (1.5.29) находим, что если $f(x)$ и $F(x,u)u(x)$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$, то вектор-функции $F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$, $F^{\frac{3}{2}}(x,u)u$ также принадлежат $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Лемма 1.5.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.5.1

Теперь переходим к непосредственному доказательству теоремы. Действуя как в доказательстве леммы 1.5.2 используя равенство

$$(f,\varphi_\varepsilon\rho V(x,u)u)=\left(-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right),\varphi_\varepsilon\rho V(x,u)u\right)+$$
$$+(V(x,u)u,\varphi_\varepsilon\rho V(x,u)u), \tag{1.5.30}$$

после несложных преобразований получим равенство:

$$(f, \varphi_\varepsilon \rho V(x,u)u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \rho V(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ P_1^{(\varepsilon)}(u) + P_2^{(\varepsilon)}(u) + P_3^{(\varepsilon)}(u) + P_4^{(\varepsilon)}(u) + (V(x,u)u, \varphi_\varepsilon \rho V(x,u)u),$$

где

$$P_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j} \rho Q(x,u)u \right),$$

$$P_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \sum_{m=1}^{l} \left(Re \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \rho \frac{\partial Q}{\partial \xi_m} u \right) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \sum_{m=1}^{l} \left(Im \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \rho \frac{\partial Q}{\partial \eta_m} u \right),$$

$$P_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \rho \frac{\partial Q}{\partial x_j} u \right),$$

$$P_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x_j} Q(x,u)u \right).$$

Здесь и далее значения матрица-функций $Q, \dfrac{\partial Q}{\partial x_j}, \dfrac{\partial Q}{\partial \xi_m}, \dfrac{\partial Q}{\partial \eta_m}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \, Re u_1(x), \ldots, Re u_l(x), \, Im u_1(x), \ldots, Im u_l(x)).$$

Так как $\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right| \leq M_0 \varepsilon$, применяя неравенство Коши-Буняковского, можно получить оценку:

$$\left| P_1^{(\varepsilon)}(u) \right| \leq \varepsilon M \left\| F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x); L_{2,\rho}(R^n)^l \right\| \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\| F^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|.$$

В силу леммы 1.5.2 отсюда следует, что $\lim_{\varepsilon\to 0} P_1^{(\varepsilon)}(u) = 0$.

Теперь переходим к оценке функционала $P_2^{(\varepsilon)}(u)$. Из условия (1.5.4) при $\omega = u(x)$, $\Omega = \sqrt{\varphi_\varepsilon(x)} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left|P_2^{(\varepsilon)}(u)\right| \le \sum_{i,j=1}^{n} \left\|a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \times$$

$$\times \left\|\sum_{m=1}^{l} \sqrt{\rho}\left\{\left(\sqrt{\varphi_\varepsilon} Re\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial \xi_m}u + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sqrt{\varphi_\varepsilon} Re\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial \eta_m}u\right\}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|.$$

Далее, применяя условие II), имеем

$$\left|P_2^{(\varepsilon)}(u)\right| \le \sigma_1\delta \sum_{i,j=1}^{n} \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \times$$

$$\times \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,k}(R^n)^l\right\| \le$$

$$\le \sigma_1\delta n \sum_{i=1}^{n} \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\left|P_2^{(\varepsilon)}(u)\right| \le n\delta\sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \rho V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

где σ_1, δ – константы из условия II), (1.5.4).

Переходим к оценке функционала $P_3^{(\varepsilon)}(u)$. Учитывая эрмитово–сопряжённые значения матрица – функций $Q(x,\omega)$, получаем следующее представление для $P_3^{(\varepsilon)}(u)$:

$$P_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}a_{ij}Q^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial x_j}u\right).$$

Так как $Q^{\frac{1}{2}}(x,u) = F(x,u)$ и, согласно лемме 1.5.1, вектор-функции $F(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=\overline{1,n})$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)^l$, тогда, применяя неравенство Коши-Буняковского и условие II), имеем

$$\left|P_3^{(\varepsilon)}(u)\right| \le \sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \times$$

$$\times\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial x_j}u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \le$$

$$\le \frac{\sigma_1 n\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2 +$$

$$+\frac{n}{2\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial x_j}u; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\|^2.$$

Здесь α – произвольное положительное число. В силу условия (1.5.4) получим

$$|P_3^{(\varepsilon)}(u)| \le \frac{\sigma_1 n\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon kV(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{n\gamma}{2\alpha}(V(x,u)u, \varphi_\varepsilon kV(x,u)u),$$

где σ_1, γ – константы из условия II), (1.5.4).

Теперь переходим к оценке функционала $P_4^{(\varepsilon)}(u)$. С этой целью представим его в виде

$$P_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}a_{ij}V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\rho}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial \rho}{\partial x_j}k^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)V(x,u)u\right).$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и условие II), имеем

$$\left|P_4^{(\varepsilon)}(u)\right| = \sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}V^{\frac{1}{2}}(x,u)a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l\right\| \times$$

$$\times \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_j} Q^{-\frac{1}{2}}(x,u)V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|.$$

Используя условие (1.4.12), приходим к следующей оценке:

$$\left| P_4^{(\varepsilon)}(u) \right| \le \frac{\alpha n \sigma_1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(R^n)^l \right\|^2 +$$

$$+\frac{\sigma_3 n}{2\alpha} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} V(x,u)u; L_{2,k}(R^n)^l \right\|^2,$$

где $\alpha > 0$, σ_1, σ_3 – константы из условия II), (1.5.6).

Так как матрица – функции a_{ij} коммутируются с $V(x,u)$, то применяя условие эллиптичности III), находим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon \rho V(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho} F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(R^n)^l \right\|^2 \le$$

$$\le \chi_1 \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \le$$

$$\le \chi_1 \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{\rho}V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

На основе полученных оценок из равенства (1.5.30) следует, что

$$|(f, \varphi_\varepsilon k V(x,u)u)| \ge \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ (Vx,u)u, \varphi_\varepsilon V(x,u)u) - P_1^{(\varepsilon)}(u) - P_2^{(\varepsilon)}(u) - P_3^{(\varepsilon)}(u) - P_4^{(\varepsilon)}(u).$$

Далее, применяя неравенство Коши -Буняковского, имеем

$$\theta_1 \sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(R^n)^l \right\|^2 + \theta_2 \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2 -$$

$$- \left| P_1^{(\varepsilon)}(u) \right| \le \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} f; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\| \cdot \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|, \qquad (1.5.31)$$

где $\theta_1 = \sigma_1 n \left(\frac{1}{\chi_1 \sigma_1 n} - \delta - \alpha \right)$, $\theta_2 = \left(1 - \frac{n\gamma}{2\alpha} - \frac{\sigma_3}{2\alpha}\right)$.

Пусть β – положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\beta < \sigma_1 n \left(\frac{1}{\chi_1 \sigma_1 n} - \delta - \frac{1}{4\alpha}(n\gamma + \sigma_3) \right).$$

Положим $\alpha = \frac{1}{2}(n\gamma + \sigma_3) + \beta$. Тогда

$$\theta_1 = \sigma_1 n \left(\frac{1}{\chi_1 \sigma_1 n} - \delta - \left(\frac{1}{2}(n\gamma + \sigma_3) \right) \right) > 0,\ \theta_2 = \left(1 - \frac{n\gamma + \sigma_3}{n\gamma + \sigma_3 + 2\beta} \right) > 0.$$

Теперь, переходя в неравенстве (1.5.31) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\theta_1 \sum_{i=1}^{n} \left\| F(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(R^n)^l \right\|^2 + \theta_2 \left\| V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2 \le$$
$$\le \left\| f; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\| \cdot \left\| V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|, \tag{1.5.32}$$

поэтому из неравенства (1.5.32) следует, что

$$\left\| V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\| \le \frac{1}{\theta_2} \| f; L_{2,\rho}(R^n)^l \|. \tag{1.5.33}$$

Применяя это неравенство в (1.5.32), находим

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| V^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\|^2 \le \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \| f; L_{2,\rho}(R^n)^l \|^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| V^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,\rho}(R^n)^l \right\| \le \tau_1 \cdot \| f; L_{2,\rho}(R^n)^l \|. \tag{1.5.34}$$

где

$$\tau_1 = \sqrt{\theta_1 \theta_2}.$$

Так как

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = V(x, u(x)u(x) - f(x),$$

то из оценки 1.5.34 следует, что

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right); L_{2,\rho}(R^n)^l \right\| \leq (\frac{1}{\theta_2} - 1) \| f; L_{2,\rho}(R^n)^l \|. \qquad (1.5.35)$$

Теперь легко можно заметить, что основное коэрцитивное неравенство теоремы 1.5.1 следует из неравенств (1.5.33)-(1.5.35). Разделимость нелинейного дифференциального оператора с переменными старшими коэффициентами в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ следует из коэрцитивного неравенства (1.5.9).

Теорема 1.5.1 полностью доказана.

Глава 2

Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов более высокого порядка

Настоящая глава диссертации, состоящий из трех параграфов, посвящена доказательству неравенств коэрцитивности для нелинейных дифференциальных операторов с частными производными более высокого порядка. Как следствие, из неравенств коэрцитивности получается разделимость нелинейных дифференциальных операторов в рассматриваемом пространстве. В первом параграфе второй главы исследуются коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

с матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$, который не является слабым возмущением линейного оператора.

Доказывается теорема о разделимости нелинейного бигармонического оператора. Линейный случай бигармонического оператора рассматривается отдельно.

Во втором параграфе этой главы исследуются коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка вида

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x),$$

где $V(x,z)$-положительная функция. За область определения оператора L[u(x)] примем множество всех $u(x) \in L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$ таких, что $L[u(x)] \in L_2(R)$.

В третьем параграфе второй главы приводится несколько примеров неразделимых операторов.

2.1. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом

В настоящем параграфе исследуется разделимость нелинейного бигармонического оператора

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

с матричным потенциалом, который не является слабым возмущением линейного оператора.

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. В работах [68]–[71] они получили ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Ими был рассмотрен также многомерный случай оператора Шрёдингера. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[18]–[43] и имеющиеся там ссылки). Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака рассмотрены в [23]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [43].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х.Бойматова [12]. Разделимость линейного бигармонического оператора $L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x)$ ранее исследовалась в работах [95] и [21-А]. Разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными матричными коэффициентами во всём n-мерном евклидовом пространстве ранее изучалась в работе [15-A]. Данное исследование обобщает работу [95] в нелинейном случае.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, изучалась в случае, когда оператор являйся слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы могут не являться слабым возмущением линейного оператора.

Формулировка основного результата

В пространстве $L_2(R^n)^l$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$\Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \quad u(x) \in W^4_{2,loc}(R^n)^l \tag{2.1.1}$$

где значения $V(x, \omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in C^l$ являются квадратными положительно определенными эрмитовыми матрицами из $\operatorname{End} C^l$. Здесь и далее через B^l, обозначим пространство элементов $(y_1, y_2, \ldots, y_l)$ с компонентами y_j из ($B-$ линейного пространства).

Определение 2.1.1. *Уравнение (2.1.1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называется разделимым в $L_2(R^n)^l$, если*

$$\Delta^2 u(x),\, V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l$$

для всех $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)^l$.

Для $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \cdots, z_l^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ положим $\langle z^{(1)}, z^{(2)} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{l} z_j^{(1)} \overline{z_j^{(2)}}$.

Далее обозначим $\langle u, v \rangle = \int\limits_{R^n} \langle u(x), v(x) \rangle dx$, если интеграл в правой части абсолютно сходится.

В дальнейшем предположим, что $V(x,\omega)\in C^2(R^n\times C^l;\operatorname{End}C^l)$.

Введем новые матрица-функции

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\xi_1,\xi_2,...,\xi_l,\eta_1,\eta_2,...,\eta_l)=V^{1/2}(x,\omega),\ (x_i\in R,\ \xi_j,\ \eta_j\in R),$$

$$Q(x_1,x_2,...,x_n,\xi_1,\xi_2,...,\xi_l,\eta_1,\eta_2,...,\eta_l)=F^2(x,\omega),\ (x_i\in R,\ \xi_j,\ \eta_j\in R),$$

где ω определяется равенством $\omega=(\xi_1+i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l+i\eta_l)$.

Здесь $V^{\frac{1}{2}}(x,\omega)$ определяется как квадратный корень от положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Предположим, что для всех $x\in R^n$, $\omega=(\xi_1+i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l+i\eta_l)$, $\Omega=(\mu_1+i\nu_1,\ \ldots,\ \mu_l+i\nu_l)$, $(\xi_j,\ \eta_j,\ \mu_j,\ \nu_j\in R)$ и $u\in W_2^1(R^n)$ – матрица-функция $F(x,\omega)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2F}{\partial x_i^2}F^{-\frac{3}{2}};C^l\right\|^2\le\sigma_1, \tag{2.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i};L_2(R^n)^l\right\|^2\le\sigma_2\left\|F^{\frac{3}{2}}u;L_2(R^n)^l\right\|^2, \tag{2.1.3}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_jF^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial\xi_j}\omega+\nu_jF^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial\eta_j}\omega;C^l\right\|\le\delta_1\left\|F^{\frac{1}{2}}\Omega;C^l\right\|, \tag{2.1.4}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_jF^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial\xi_j}\omega+\nu_jF^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial\eta_j}\omega;C^l\right\|\le\delta_2\left\|F^{\frac{1}{2}}\Omega;C^l\right\|. \tag{2.1.5}$$

Также предполагается, что для всех $x\in R^n$, $\omega=(\xi_1+i\eta_1,\ldots,\xi_l+i\eta_l),\Omega=(\mu_1+i\nu_1,\ldots,\mu_l+i\nu_l),(\xi_j,\eta_j,\mu_j,\nu_j\in R)$ и $u\in W_2^1(R^n)$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|Q^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2Q}{\partial x_i^2}Q^{-1};C^l\right\|^2\le\sigma_3, \tag{2.1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|Q^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i};L_2(R^n)^l\right\|^2\le\sigma_4\|Vu;L_2(R^n)^l\|^2, \tag{2.1.7}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_j F^{-1}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\partial\xi_j}\omega+\nu_j F^{-1}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\partial\eta_j}\omega;C^l\right\|\le\delta_3\left\|F\Omega;C^l\right\|, \qquad (2.1.8)$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{l}\mu_j F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}\omega+\nu_j F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\eta_j}\omega;C^l\right\|\le\delta_4\left\|F\Omega;C^l\right\|. \qquad (2.1.9)$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия (2.1.2) –(2.1.9), и пусть числа* σ_j, δ_j $(j=\overline{1,4})$ *такие, что*

$$\sigma_1+2\sigma_2<4,\ \delta_1+2\delta_2<1,\ \sigma_3+2\sigma_4<4,\ \delta_3+2\delta_4<1. \qquad (2.1.10)$$

Тогда уравнение (2.1.1) разделяется в $L_2(R^n)^l$*, и для всех вектор-функций* $u(x)\in L_2(R^n)^l\cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ *таких, что* $f(x)\in L_2(R^n)^l$*, справедливы включения*

$$\Delta^2 u,\quad V(x,u)u,\quad V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\in L_2(R^n)^l,\ i=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned}&\|\Delta^2 u(x);L_2(R^n)^l\|+\|V(x,u(x))u(x);L_2(R^n)^l\|+\\&+\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2};L_2(R^n)^l\right\|\le M\|f(x);L_2(R^n)^l\|,\end{aligned} \qquad (2.1.11)$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

Пример. Условия теоремы выполняются для уравнения (2.1.1) при $V(x,u(x))=(1+|u(x)|^2)^{\rho}$, то есть $Q(x,\xi,\eta)=(1+\xi^2+\eta^2)^{\rho}$, когда $\rho\le min\{\frac{\delta_2}{2};\ \frac{\delta_4}{4}\}$.

Замечание 5. *Легко можно видеть, что из коэрцитивного неравенства (2.1.11) следует разделимость нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами (2.1.1) в пространстве* $L_2(R^n)^l$.

Некоторые вспомогательные леммы

Следующая лемма является аналогом леммы 1.4.1 в случае бигармонического нелинейного дифференциального оператора.

Лемма 2.1.1. *Пусть в уравнении (2.1.1) вектор-функция* $f(x)$ *принадлежит пространству* $L_2(R^n)^l$, *и вектор-функция* $u(x)$ *принадлежит классу* $L_2(R^n)^l \cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$. *Тогда вектор-функции* $V^{1/2}(x,u(x))u(x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат пространству* $L_2(R^n)^l$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Используя равенства $\triangle u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ и

$$\langle f, \varphi_\varepsilon u) = (\Delta^2 u, \varphi_\varepsilon u) + (V(x,u)u, \varphi_\varepsilon u\rangle,$$

применяя лемму 1.1.1, интегрируя по частям два раза, имеем

$$\langle f, \varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\rangle + 2 \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + \qquad (2.1.12)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i^2} u\rangle + \langle Vu, \varphi_\varepsilon u\rangle,$$

где $\langle , \rangle$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(R^n)^l$.

Так как функция φ_ε вещественнозначная, и

$$\left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1 \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_k \partial x_i}\right| \le M_0 \varepsilon^2, \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla \varphi_\varepsilon(x)|, \; M_0 = sup|\Delta \varphi_\varepsilon(x)|,$$

то из равенства (2.1.12), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ находим

$$\mathrm{Re}\,\langle f, u\rangle \geq \sum_{k,i=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\rangle + \langle Vu, u\rangle,$$

что и доказывает лемму. Лемма 2.1.1 доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 1.4.2 в случае бигармонического нелинейного дифференциального оператора.

Лемма 2.1.2. *Пусть выполнены условия (2.1.2) –(2.1.5), и пусть вектор-функция* $u(x)$ *из класса* $L_2(R^n)^l \cap W^4_{2,loc}(R^n)^l$ *является решением уравнения (2.1.1) с правой частью* $f(x) \in L_2(R^n)^l$*. Тогда вектор-функции* $F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x)$, $F^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$, $k = 1, ..., n$, *принадлежат пространству* $L_2(R^n)^l$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1.4.1. Очевидно, что

$$\langle f, \varphi_\varepsilon F u\rangle = \langle \Delta^2 u, \varphi_\varepsilon F u\rangle + \langle V(x, u)u, \varphi_\varepsilon F u\rangle.$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\frac{\partial(\varphi_\varepsilon F u)}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} F u + \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u + \sum_{j=1}^{l} \varphi_\varepsilon \,\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} u + \sum_{j=1}^{l} \varphi_\varepsilon \,\mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} u + \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{2.1.13}$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon F u\rangle = A_1^\varepsilon(u) + 2A_2^\varepsilon(u) + 2A_3^\varepsilon(u) + A_4^\varepsilon(u) + 2A_5^\varepsilon(u) + A_6^\varepsilon(u) + 2A_7^\varepsilon(u) + 2A_8^\varepsilon(u) + 2A_9^\varepsilon(u) + 2A_{10}^\varepsilon(u) + \langle Vu, \varphi_\varepsilon F u\rangle, \tag{2.1.14}$$

где

$$A_1^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i^2} F u\rangle,$$

$$A_2^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$A_3^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} F \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle,$$

$$A_4^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} u \rangle,$$

$$A_5^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle,$$

$$A_6^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon F \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \rangle,$$

$$A_7^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} u) \rangle,$$

$$A_8^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j}) u \rangle,$$

$$A_9^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) u \rangle,$$

$$A_{10}^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle.$$

Здесь и далее значения F, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \eta_j}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re} u_1(x), \ldots, \operatorname{Re} u_l(x), \operatorname{Im} u_1(x), \ldots, \operatorname{Im} u_l(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов, находим, что в силу леммы 2.1.1 функционалы $A_1^\varepsilon(u)$, $A_2^\varepsilon(u)$, $A_3^\varepsilon(u)$, $A_7^\varepsilon(u)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теперь оценим функционалы $A^{\varepsilon}_m(u),\ m=4,5,6,8,9,10$

$$|A^{\varepsilon}_4(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}u\rangle\right|,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}u\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}F^{-\frac{3}{2}}F^{\frac{3}{2}}u\rangle,$$

учитывая неравенство (2.1.2), в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|A^{\varepsilon}_4(u)| \le \frac{\beta_1}{2}\sum_{k=1}^{n}\langle F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_{\varepsilon}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\rangle + \frac{\sigma_1}{2\beta_1}\langle Vu, \varphi_{\varepsilon}Fu\rangle.$$

Для функционала $A^{\varepsilon}_5(u)$ имеем

$$|A^{\varepsilon}_5(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle\right|,$$

учитывая неравенство (2.1.3), в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|A^{\varepsilon}_5(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle\right| \le$$
$$\le \frac{\beta_2}{2}\sum_{k=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_{\varepsilon}F\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\rangle + \frac{\sigma_2}{2\beta_2}\langle Vu, \varphi_{\varepsilon}Fu\rangle.$$

Для функционала $A^{\varepsilon}_6(u)$ получим следующую оценку:

$$|A^{\varepsilon}_6(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon}F\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\rangle\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\rangle\right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n}\left\|\varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l\right\|^2.$$

Оценим функционал $A_8^\varepsilon(u)$

$$|A_8^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j})u\rangle\right|$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j})u\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}F^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j})u\rangle,$$

учитывая неравенство (2.1.4) в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|A_8^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}F^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_j} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \eta_j})u\rangle\right| \le \delta_1 \sum_{k=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l\right\|^2.$$

Для функционала $A_9^\varepsilon(u)$ получим следующую оценку:

$$|A_9^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \eta_j})u\rangle\right|$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n}\varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^{l}(\operatorname{Re}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \eta_j})u\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}F^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{Re}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \eta_j})u\rangle,$$

учитывая неравенство (2.1.5) в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|A_9^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}F^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{Re}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial F}{\partial \eta_j})u\rangle\right|$$

$$\leq \delta_2 \sum_{k=1}^{n} \left\| \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l \right\|^2 .$$

Теперь оценим функционал $A_{10}^{\varepsilon}(u)$:

$$|A_{10}^{\varepsilon}(u)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle \right|$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n} \langle (\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} F^{-\frac{1}{2}} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle.$$

Учитывая неравенство (2.1.5) в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|A_{10}^{\varepsilon}(u)| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} F^{-\frac{1}{2}} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle \right| \leq$$

$$\leq \delta_2 \sum_{k=1}^{n} \| \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l \|^2.$$

Здесь β_1, β_2– произвольные положительные числа, а $\sigma_1, \sigma_2, \delta_1$ и δ_2 - константы из условий (2.1.2) – (2.1.5). При оценке функционалов $A_9^{\varepsilon}(u)$ и $A_{10}^{\varepsilon}(u)$ неравенство (2.1.5) используется дважды: в случаях, когда

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l) = u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_l(x)),$$

и

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l) = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right).$$

На основе полученных оценок из равенства (2.1.13) имеем

$$|\langle f,\varphi_\varepsilon Fu\rangle|\geq\left(1-\frac{\sigma_1}{2\beta_1}-\frac{\sigma_2}{\beta_2}\right)\cdot\langle Vu,\varphi_\varepsilon Fu\rangle-|A_1^\varepsilon(u)|-|A_2^\varepsilon(u)|-|A_3^\varepsilon(u)|-$$
$$-|A_7^\varepsilon(u)|+\left(1-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-2\delta_1-2\delta_2-2\delta_2\right)\cdot\sum_{k=1}^n\langle\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\rangle.$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим неравенство

$$\|f;L_2(R^n)^l\|\|Fu;L_2(R^n)^l\|\geq|\langle f,Fu\rangle|\geq\left(1-\frac{\sigma_1}{2\beta_1}-\frac{\sigma_2}{\beta_2}\right)\cdot\langle Vu,Fu\rangle+$$
$$+\left(1-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-2\delta_1-4\delta_2\right)\cdot\sum_{k=1}^n\langle\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\rangle. \tag{2.1.15}$$

Теперь подбираем положительные числа β_1, β_2 так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\sigma_1}{2\beta_1}+\frac{\sigma_2}{\beta_2}<1,\quad \frac{\beta_1}{2}+\beta_2+2\delta_1+4\delta_2<1.$$

Так как, по лемме 2.1.1 $Fu\in L_2(R^n)^l$, то из неравенства (2.1.15) следует, что вектор – функции $F^{\frac12}\dfrac{\partial^2u}{\partial x_k^2}$, $(k=1,2,...,n)$, $F^{\frac32}u$ принадлежат пространству $L_2(R^n)^l$.

Лемма 2.1.2 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 2.1.1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 2.1.1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f,\varphi_\varepsilon Vu\rangle=\langle\Delta^2u,\varphi_\varepsilon Vu\rangle+\langle V(x,u)u,\varphi_\varepsilon Vu\rangle$$

после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}\langle f,\varphi_\varepsilon Vu\rangle&=B_1^\varepsilon(u)+2B_2^\varepsilon(u)+2B_3^\varepsilon(u)+B_4^\varepsilon(u)+2B_5^\varepsilon(u)+\\&+B_6^\varepsilon(u)+2B_7^\varepsilon(u)+2B_8^\varepsilon(u)+2B_9^\varepsilon(u)+2B_{10}^\varepsilon(u)+\langle Vu,\varphi_\varepsilon Vu\rangle,\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i^2} Q u \rangle,$$

$$B_2^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} u \rangle,$$

$$B_5^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle,$$

$$B_6^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle (\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon Q \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \rangle,$$

$$B_7^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \sum_{j=1}^l (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) u \rangle,$$

$$B_8^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle (\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^l (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j}) u \rangle,$$

$$B_9^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^l (\operatorname{Re} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) u \rangle,$$

$$B_{10}^\varepsilon(u) = \sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^l (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle.$$

Здесь и далее значения Q, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_j}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial \eta_j}$, $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j}$, $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re} u_1(x), \ldots, \operatorname{Re} u_l(x), \operatorname{Im} u_1(x), \ldots, \operatorname{Im} u_l(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1,\,10}$, находим, что функционалы $B_1^\varepsilon(u)$, $B_2^\varepsilon(u)$, $B_3^\varepsilon(u)$, $B_7^\varepsilon(u)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теперь оценим функционалы $B^\varepsilon_m(u)$, $m=4,5,6,8,9,10$:

$$|B^\varepsilon_4(u)|=\left|\sum_{k=1}^n\langle\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon\frac{\partial^2Q}{\partial x_i^2}u\rangle\right|=\left|\sum_{k=1}^n\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{\frac12}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{-\frac12}\frac{\partial^2Q}{\partial x_i^2}u\rangle\right|,$$

так как

$$\sum_{k=1}^n\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{\frac12}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{-\frac12}\frac{\partial^2Q}{\partial x_i^2}u\rangle)=$$
$$=\sum_{k=1}^n\langle(\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{\frac12}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{-\frac12}\frac{\partial^2Q}{\partial x_i^2}Q^{-1}Qu\rangle;$$

учитывая неравенство (2.1.6), в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|B^\varepsilon_4(u)|\le\frac{\beta_3}{2}\sum_{k=1}^n\langle F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon F\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\rangle+\frac{\sigma_3}{2\beta_3}\langle Vu,\varphi_\varepsilon Vu\rangle.$$

Для функционала $B^\varepsilon_5(u)$ имеем

$$|B^\varepsilon_5(u)|=\left|\sum_{k=1}^n\langle\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle\right|$$

Учитывая неравенство (2.1.8) в силу неравенства Коши-Буняковского получаем, что

$$|B^\varepsilon_5(u)|=\left|\sum_{k=1}^n\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{\frac12}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{-\frac12}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle\right|\le$$

$$\le\frac{\beta_4}{2}\sum_{k=1}^n\langle\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\varphi_\varepsilon Q\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\rangle+\frac{\sigma_4}{2\beta_2}\langle Vu,\varphi_\varepsilon Vu\rangle.$$

Для функционала $B^\varepsilon_6(u)$ получим следующую оценку:

$$|B^\varepsilon_6(u)|=\left|\sum_{k=1}^n\langle\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon Q\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\rangle\right|=\left|\sum_{k=1}^n\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{\frac12}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2},\sum_{i=1}^n\varphi_\varepsilon^{\frac12}(x)Q^{\frac12}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\rangle\right|\le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left\| \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l \right\|^2.$$

Оценим функционал $A_8^{\varepsilon}(u)$:

$$|B_8^{\varepsilon}(u)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j}) u \rangle \right|$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j}) u \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} Q^{-\frac{1}{2}} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j}) u \rangle$$

С учетом неравенства (2.1.9) в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|B_8^{\varepsilon}(u)| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} Q^{-\frac{1}{2}} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial \eta_j}) u \rangle \right| \le$$

$$\le \delta_3 \sum_{k=1}^{n} \left\| \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l \right\|^2.$$

Для функционала $B_9^{\varepsilon}(u)$ получим следующую оценку:

$$|B_9^{\varepsilon}(u)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) u \rangle \right| =$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) u \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} Q^{-\frac{1}{2}} (\mathrm{Re}\, \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \mathrm{Im}\, \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) u \rangle.$$

Учитывая неравенство (2.1.9), в силу неравенства Коши-Буняковского имеем

$$|B_9^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=1}^n \langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l Q^{-\frac{1}{2}} (\operatorname{Re} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) u \rangle\right|$$

$$\leq \delta_4 \sum_{k=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l \right\|^2,$$

Теперь оценим функционал $B_{10}^\varepsilon(u)$:

$$|B_{10}^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^l (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle\right|$$

так как

$$\sum_{k=1}^n \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \sum_{i=1}^n \varphi_\varepsilon \sum_{j=1}^l (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^n \langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l Q^{-\frac{1}{2}} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle.$$

Из неравенства (2.1.9) в силу неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|B_{10}^\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=1}^n \langle \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l Q^{-\frac{1}{2}} (\operatorname{Re} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} + \operatorname{Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle\right| \leq$$

$$\leq \delta_4 \sum_{k=1}^n \| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}; L_2(R^n)^l \|^2.$$

Здесь β_3, β_4– произвольные положительные числа, а σ_3, σ_4, δ_3 и δ_4 – константы из условий (2.1.6) – (2.1.9). При оценке функционалов $B_9^\varepsilon(u)$ и $B_{10}^\varepsilon(u)$ неравенство (2.1.9) используется дважды: в случаях, когда

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l) = u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_l(x)),$$

и

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l) = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right).$$

На основе полученных оценок из равенства (1.4.12) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon V u\rangle| \geq \left(1 - \frac{\sigma_3}{2\beta_3} - \frac{\sigma_4}{\beta_4}\right) \cdot \langle Vu, \varphi_\varepsilon V u\rangle -$$

$$- |B_1^\varepsilon(u)| - |B_2^\varepsilon(u)| - |B_3^\varepsilon(u)| - |B_7^\varepsilon(u)| +$$

$$+ \left(1 - \frac{\beta_3}{2} - \beta_4 - 2\delta_3 - 2\delta_4 - 2\delta_4\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi_\varepsilon V \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\rangle.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_2(R^n)^l\| \|Vu; L_2(R^n)^l\| \geq |(f, Vu)| \geq \left(1 - \frac{\sigma_3}{2\beta_3} - \frac{\sigma_4}{\beta_4}\right) \cdot \langle Vu, Vu\rangle +$$

$$+ \left(1 - \frac{\beta_3}{2} - \beta_4 - 2\delta_3 - 4\delta_4\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, V \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\rangle. \tag{2.2.2}$$

Далее подбираем положительные числа β_3, β_4 так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{\sigma_3}{2\beta_3} + \frac{\sigma_4}{\beta_4} < 1, \quad \frac{\beta_3}{2} + \beta_4 + 2\delta_3 + 4\delta_4 < 1.$$

В частности, из (2.2.2) следует, что

$$\|Vu; L_2(R^n)^l\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\sigma_3}{2\beta_3} - \frac{\sigma_4}{\beta_4}} \|f; L_2(R^n)^l\| \tag{2.2.3}$$

Так как $\triangle u^2(x) = f(x) - V(x, u(x))u(x)$, то

$$\|\triangle^2 u; L_2(R^n)^l\| \leq (1 - \frac{1}{1 - \frac{\sigma_3}{2\beta_3} - \frac{\sigma_4}{\beta_4}}) \|f; L_2(R^n)^l\| \tag{2.2.4}$$

Из (2.2.2) и (2.2.3) также следует, что

$$\left(1 - \frac{\beta_3}{2} - \beta_4 - 2\delta_3 - 4\delta_4\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, V \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\rangle \leq$$

$$\leq \|f; L_2(R^n)^l\| \|Vu; L_2(R^n)^l\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\sigma_3}{2\beta_3} - \frac{\sigma_4}{\beta_4}} \|f; L_2(R^n)^l\|^2;$$

отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right\| \leq \tag{2.2.5}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\sigma_3}{2\beta_3}-\frac{\sigma_4}{\beta_4})(1-\frac{\beta_3}{2}-\beta_4-2\delta_3-4\delta_4)}}\|f;L_2(R^n)^l\|$$

Теперь из полученных неравенств (2.2.3) - (2.2.5) следует основная коэрцитивная оценка (2.1.11).

Разделимость нелинейного оператора (2.1.1) в пространстве $L_2(R^n)^l$ следует из коэрцитивного неравенства (2.1.11).

Теорема 2.1.1 полностью доказана.

Линейный случай

Далее для наглядности сформулируем утверждения теоремы 2.1.1 в случае линейного бигармонического оператора. Предположим, что $V(x,\omega)$ не зависит от ω и имеет вид $V(x,\omega) = V(x)$, где $V(x) = V^*(x) \in C^2(R^n, EndC^l)$. Также предположим, что для всех $x \in R^n, \omega = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_l + i\eta_l), \Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i\nu_l), (\xi_j, \eta_j, \mu_j, \nu_j \in R)$ и $u \in W_2^1(R^n)$ выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}F^{-\frac{3}{2}};C^l\right\|^2 \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i};L_2(R^n)^l\right\|^2 \leq \sigma_2\left\|F^{\frac{3}{2}}u;\ ;\ L_2(R^n)^l\right\|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}V^{-1};C^l\right\|^2 \leq \sigma_3,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i};\ L_2(R^n)^l\right\|^2 \leq \sigma_4\|Vu;\ ;\ L_2(R^n)^l\|^2,$$

где σ_j, $j = \overline{1,\,4}$, – некоторые положительные числа.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены сформулированные выше в этом разделе условия, и пусть числа* σ_j, $j=\overline{1,\,4}$, *такие, что* $0<\sigma_1+2\sigma_2<4$, $0<\sigma_3+2\sigma_4<4$. *Тогда уравнение (2.1.1) разделяется в* $L_2(R^n)^l$ *и для всех вектор-функций* $u(x)\in L_2(R^n)^l\cap W_{2,loc}^4(R^n)^l$ *таких, что* $f(x)\in L_2(R^n)^l$, *справедливы включения* $\Delta^2 u, \quad Vu, \quad V^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\in L_2(R^n)^l$, $i=1,2,...,n$.

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|\Delta^2 u(x); L_2(R^n)^l\right\| + \left\|V(x)u(x); L_2(R^n)^l\right\| +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}; L_2(R^n)^l\right\| \le M\left\|f(x); L_2(R^n)^l\right\|,$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

Это теорема доказана другим методом в [95].

Замечание 6. *Легко можно видеть, что из последнего коэрцитивного неравенства следует разделимость линейного бигармонического оператора в пространстве* $L_2(R^n)^l$.

2.3. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного обыкновенного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве

Термин *«разделимость»* впервые введен В.Н. Эвериттом и М. Гирцом [68], где исследовалась разделимость оператора Штурма - Лиувилля

$$L[y] = -y^{''}(x) + V(x)y(x), \qquad x\in I,$$

в пространстве $L_2(I)$, I – некоторый отрезок вещественной оси. В последующих своих работах (например, [67]-[69]), они также исследовали разделимость степеней оператора Штурма - Лиувилля. В дальнейшем в исследовании и развитии данной теории внесли свой вклад К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[12]–[44] и имеющиеся там ссылки).

Впервые разделимость дифференциальных выражений с частными производными исследовалась К.Х. Бойматовым [13]. Из последних работ, посвященных разделимости линейных операторов с частными производными, отметим [93] – [95] и [11-А]. В статье [93] рассматривается разделимость линейного оператора Гельмгольца

$$Au(x) = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x)u(x)$$

в гильбертовом пространстве.

В работах [95] и [20-А] исследовалась разделимость линейного бигармонического оператора $L[u(x)] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x)$ в пространстве $L_2(R^n)$. Случай линейного трижды гармонического дифференциального оператора

$$L[u(x)] = -\Delta^3 u(x) + V(x)u(x)$$

рассматривался в статье [96]. Работа [94] посвящена исследованию разделимости и разрешимости уравнения Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, рассматривалась тогда, когда исследуемый оператор является слабым возмущением линейного оператора (см., например, [20] и [43]). Лишь в отдельных работах (см., например, [23], [15-А], [31-А]) изучалась разделимость строго нелинейных дифференциальных операторов, то есть операторов не представляющихся в виде слабого возмущения линейного оператора. В работах [22] и [23] изучались коэрцитивные свойства нелинейного оператора Шредингера и Дирака, в статье [18-A] рассматривается вопрос о разделимости нелинейного дифференциального операторов второго порядка с матричными коэффициентами. В работе [28-A] изучались коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом

$$L[u(x)] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

во всём n-мерном евклидовом пространстве.

Здесь мы исследуем разделимость обыкновенного нелинейного дифференциального оператора

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x), \quad x \in R = (-\infty, +\infty),$$

в гильбертовом пространстве $L_2(R)$. То есть, как в [23], [18-A], [31-A], [33-A], рассматриваемый нами оператор является строго нелинейным.

В пространстве $L_2(R)$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \tag{2.3.1}$$

где $V(x, z)$-положительная функция. За область определения оператора (2.3.1) примем множество всех $u(x) \in L_2(R) \cap W_{2,loc}^6(R)$ таких, что $L[u(x)] \in L_2(R)$.

Представим функцию $V(x, z)$ в виде

$$V(x, z) = F(x, \xi, \eta), \ \xi = Rez, \ \eta = Imz.$$

Определение 2.3.1. *Уравнение (2.3.1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор $L[u]$) называются разделимыми в $L_2(R)$,* *если*

$$u^{VI}(x),\, V(x,u)u(x)\in L_2(R)$$

для всех $u(x)\in L_2(R)\cap W^6_{2,loc}(R)$ *таких, что* $f(x)\in L_2(R)$.

Предположим, что $F(x,\xi,\eta)\in C^3(R^3)$ и для всех $x\in R$, $\omega=\xi+i\eta\in C$, $\Omega=\mu+i\nu\in C$, $u\in W_2^2(R)$ выполняются следующие неравенства:

$$|F^{-\frac{1}{2}}F^{'''}_{xxx}F^{-1};L_2(R)|\le\sigma_1, \tag{2.3.2}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}F^{''}_{xx}u^{'}(x);L_2(R)|\le\sigma_2\|Fu;L_2(R)\|, \tag{2.3.3}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}F^{'}_{x}u^{''}(x);L_2(R)|\le\sigma_3|Fu;L_2(R)|, \tag{2.3.4}$$

$$|F^{-\frac{1}{2}}(F^{'}_{\xi}\mu+F^{'}_{\eta}\nu)\omega;C|\le\delta_3|F^{\frac{1}{2}}\Omega;C|, \tag{2.3.5}$$

$$\begin{aligned}|F^{-\frac{1}{2}}(&F^{''}_{\xi\xi}\mu^2+F^{'}_{\xi}\mu^{'}_{x}+2F^{''}_{x\xi}\mu+2F^{''}_{\xi\eta}\mu\nu+2F^{''}_{x\eta}\nu+\\&+F^{'}_{\eta}\nu^{'}_{x}+F^{''}_{\eta\eta}\nu^2)\omega;C|\le\delta_2\|F^{\frac{1}{2}}\Omega;C|;\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{aligned}|F^{-\frac{1}{2}}(&F^{'''}_{\xi\xi\xi}\mu^3+F^{'}_{\xi}\mu^{''}_{xx}+3F^{'''}_{xx\xi}\mu+3F^{'''}_{xx\eta}\nu+3F^{'''}_{x\xi\xi}\mu^2+\\&+3F^{'''}_{\xi\xi\eta}\mu^2\nu+3F^{''}_{\xi\xi}\mu\mu^{'}_{x}+3F^{''}_{x\xi}\mu^{'}_{x}+6F^{'''}_{x\xi\eta}\mu\nu+3F^{'''}_{x\eta\eta}\nu^2+\\&+3F^{''}_{\xi\eta}\nu\mu^{'}_{x}+3F^{'''}_{\xi\eta\eta}\mu\nu^{'}_{x}+3F^{''}_{x\eta}\nu^{'}_{x}+3F^{''}_{\eta\eta}\nu\nu^{'}_{x}+3F^{'''}_{\xi\eta\eta}\mu\nu^2+\\&+F^{'}_{\eta}\nu^{''}_{xx}+F^{'''}_{\eta\eta\eta}\nu^3)\omega;C|\le\delta_1|F^{\frac{1}{2}}\Omega;C|.\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия (2.3.2)-(2.3.7), и пусть числа* $\sigma_j\quad j=\overline{1,3},\ ,\ \delta_i\quad(i=\overline{1,3})$ *такие, что*

$$3\sigma_1+9\sigma_2+9\sigma_3+4\delta_1+12\delta_2+12\delta_3<4. \tag{2.3.8}$$

Тогда нелинейный оператор (2.3.1) разделяется в пространстве $L_2(R)$ *и для всех функций* $u(x) \in L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$ *уравнения (2.3.1) с правой частью* $f(x) \in L_2(R)$ *справедливы выключения*

$$u^{VI}(x), \quad V(x,u(x))u(x), \quad V^{\frac{1}{2}}(x,u(x))u^{'''}(x) \in L_2(R).$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\|u^{VI}(x); L_2(R)\| + \|V(x,u)u(x); L_2(R)\| + \\ + \|V^{\frac{1}{2}}(x,u)u^{'''}(x); L_2(R)\| \leq M\|f(x); L_2(R)\|, \tag{2.3.9}$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$ *и* $f(x)$.

Замечание 7. *Легко можно видеть, что из коэрцитивного неравенства (2.3.9) следует разделимость обыкновенного нелинейного оператора (2.3.1) в пространстве* $L_2(R^n)$.

Некоторая вспомогательная лемма.

Следующая лемма является аналогом леммы 1.4.1 в случае нелинейных дифференциальных операторов шестого порядка.

Лемма 2.3.1. *Пусть в уравнении (2.3.1) функция* $f(x)$ *принадлежит пространству* $L_2(R)$, *и функция* $u(x)$ *принадлежит классу* $L_2(R) \cap \cap W^6_{2,loc}(R)$. *Тогда функции* $V^{1/2}(x,u(x))u(x)$, $u^{'''}(x)$ *принадлежат пространству* $L_2(R)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Имеет место равенство

$$\langle f(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle = \langle u^V(x), (\varphi_\varepsilon(x))' u(x)\rangle + \tag{2.3.10}$$
$$+ \langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x)u'(x)\rangle + \langle V(x, u(x))u(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle,$$

где $\langle , \rangle$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(R)$.

Далее несколько раз применяя лемму 1.1.1, из равенства (2.3.10) получим

$$\langle f(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle = \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''' u(x)\rangle + 3\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'')u'(x)) +$$
$$+3\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))' u''(x)\rangle + \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)u'''(x)\rangle +$$
$$+\langle V(x, u(x))u(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle\!\rangle. \tag{2.3.11}$$

Так как функция $\varphi_\varepsilon(x)$ вещественнозначная, и

$$\left|(\varphi_\varepsilon(x))'\right| \leq M_0\varepsilon, \quad \left|(\varphi_\varepsilon(x))''\right| \leq M_1\varepsilon^2, \quad \left|(\varphi_\varepsilon(x))'''\right| \leq M_2\varepsilon^3, \quad \forall x \in R,$$

где

$$M_0 = \sup|\varphi'(x)|,\ M_1 = \sup|\varphi''(x)|,\ M_2 = \sup|\varphi'''(x)|,$$

то из равенства (2.3.11), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, используя неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\|f(x)\|\|u(x)\| \geq \operatorname{Re}\langle f(x), u(x)\rangle \geq \langle u'''(x), u'''(x)\rangle + \langle V(x, u(x))u(x), u(x)\rangle,$$

что и доказывает лемму 2.3.1.

2.4. Доказательство теоремы 2.3.1

Для любого $\nu > 0$ выполняется равенство

$$\langle f(x), \varphi_\varepsilon f(x)\rangle = \langle Fu(x), \varphi_\varepsilon Fu(x)\rangle + \tag{2.4.1}$$
$$+ \nu\langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon u^{VI}(x)\rangle + A_1^\varepsilon(u) - A_2^\varepsilon(u),$$

где

$$A_1^\varepsilon(u) = -(1+\nu)Re\langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon Fu(x)\rangle,$$

$$A_2^\varepsilon(u) = (1-\nu)Re\langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon f(x)\rangle.$$

Для любого $\alpha_1 > 0$ справедливо неравенство

$$|A_2^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)u^{VI}(x)\|^2 + \frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)f(x)\|^2,$$

где $\|,\|$ - норма в пространстве $L_2(R)$.

Далее, имеем

$$A_1^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^V(x), (\varphi_\varepsilon(x))' Fu(x)\rangle +$$
$$+ (1+\nu)Re\langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u(x)\rangle + (1+\nu)Re\langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x)Fu'(x)\rangle.$$

Используя лемму 1.1.1 несколько раз, после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} A_1^\varepsilon(u) =& (1+\nu)\langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u'''(x)\rangle + B_1^\varepsilon(u) + \\ &+ B_2^\varepsilon(u) + 3B_3^\varepsilon(u) + 3B_4^\varepsilon(u) + 3B_5^\varepsilon(u) + \\ &+ 6B_6^\varepsilon(u) + 3B_7(\varepsilon) + 3B_8^\varepsilon(u) + 3B_9^\varepsilon(u), \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''' F(x,u)u(x)\rangle,$$

$$B_2^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]\right]\right]u(x)\rangle,$$

$$B_3^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u(x)\rangle,$$

$$B_4^{\varepsilon}(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{''}F(x,u)u^{'}(x)\rangle,$$

$$B_5^{\varepsilon}(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{'}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]\right]\right]u(x)\rangle,$$

$$B_6^{\varepsilon}(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{'}\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u^{'}(x)\rangle,$$

$$B_7^{\varepsilon}(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{'}F(x,u)u^{''}(x)\rangle,$$

$$B_8^{\varepsilon}(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon(x)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]\right]\right]u^{'}(x)\rangle,$$

$$B_9^{\varepsilon}(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u^{''}(x)\rangle.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[F(x,\xi,\eta)] = \frac{\partial}{\partial x}[F(x, Reu(x), Imu(x)] = F_x^{'} + F_\xi^{'}\cdot Reu_x^{'} + F_\eta^{'}\cdot Imu_x^{'}.$$

преобразуем функционалы $B_i(u)$, $i=\overline{1,9}$ к следующему виду:

$$B_1^{\varepsilon}(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{'''}F(x,u)u(x)\rangle,$$

$$\begin{aligned}B_2^{\varepsilon}(u) = {} & (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon(x)\Big(F_{xxx}^{'''} + F_{\xi\xi\xi}^{'''}\Big(Reu^{'}(x)\Big)^3 + F_\xi^{'}Reu^{'''}(x) + 3F_{xx\xi}^{'''}Reu^{'}(x) + \\ & +3F_{xx\eta}^{'''}Imu^{'}(x) + 3F_{x\xi\xi}^{'''}\Big(Reu^{'}(x)\Big)^2 + 3F_{\xi\xi\eta}^{'''}\Big(Reu^{'}(x)\Big)^2 Imu^{'}(x) + \\ & +3F_{\xi\xi}^{''}Reu^{'}(x)Reu^{''}(x) + 3F_{x\xi}^{''}Reu^{''}(x) + 6F_{x\xi\eta}^{'''}Reu^{'}(x)Imu^{'}(x) + \\ & +3F_{x\eta\eta}^{'''}\Big(Imu^{'}(x)\Big)^2 + 3F_{\xi\eta}^{''}Imu^{'}(x)Reu^{''}(x) + 3F_{\xi\eta\eta}^{'''}Reu^{'}(x)Imu^{''}(x) + \\ & +3F_{x\eta}^{''}Imu^{''}(x) + 3F_{\eta\eta}^{''}Imu^{'}(x)Imu^{''}(x) + 3F_{\xi\eta\eta}^{'''}Reu^{'}(x)\Big(Imu^{'}(x)\Big)^2 + \\ & +F_\eta^{'}Imu^{'''}(x) + 3F_{\eta\eta\eta}^{'''}\Big(Imu^{'}(x)\Big)^3\Big)u(x)\rangle,\end{aligned}$$

$$B_3^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{''}\left(F_x^{'} + F_\xi^{'} Re u^{'}(x) + F_\eta^{'} Im u^{'}(x)\right) u(x)\rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{''} F(x,u) u^{'}(x)\rangle,$$

$$B_5^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon^{'}(x)\left(F_{xx}^{''} + F_{\xi\xi}^{''}\left(Re u^{'}(x)\right)^2 + F_\xi^{'} Re u^{''}(x) + 2F_{x\xi}^{''} Re u^{'}(x) + \right.$$
$$\left. +2F_{\xi\eta}^{''} Re u^{'}(x) Im u^{'}(x) + 2F_{x\eta}^{''} Im u^{'}(x) + F_\eta^{'} Im u^{''}(x) + F_{\eta\eta}^{''}\left(Im u^{'}(x)\right)^2\right) u(x)\rangle,$$

$$B_6^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon^{'}(x)\left(F_x^{'} + F_\xi^{'} Re u^{'}(x) + F_\eta^{'} Im u^{'}(x)\right) u^{'}(x)\rangle,$$

$$B_7^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{'} F(x,u) u^{''}(x)\rangle,$$

$$B_8^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon(x)\left(F_{xx}^{''} + F_{\xi\xi}^{''}\left(Re u^{'}(x)\right)^2 + F_\xi^{'} Re u^{''}(x) + 2F_{x\xi}^{''} Re u^{'}(x) + \right.$$
$$\left. +2F_{\xi\eta}^{''} Re u^{'}(x) Im u^{'}(x) + 2F_{x\eta}^{''} Im u^{'}(x) + F_\eta^{'} Im u^{''}(x) + F_{\eta\eta}^{''}\left(Im u^{'}(x)\right)^2\right) u^{'}(x)\rangle,$$

$$B_9^\varepsilon(u) = \langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon(x)\left(F_x^{'} + F_\xi^{'} Re u^{'}(x) + F_\eta^{'} Im u^{'}(x)\right) u^{''}(x)\rangle.$$

Здесь и далее значения F, $F_x^{'}$, $F_\xi^{'}$, $F_\eta^{'}$, $F_{x\xi}^{''}$, $F_{x\eta}^{''}$, $F_{xx}^{''}$, $F_{\xi\eta}^{''}$, $F_{xx\xi}^{'''}$, $F_{x\xi\xi}^{'''}$, $F_{x\eta\eta}^{'''}$, $F_{xx\eta}^{'''}$, $F_{x\xi\eta}^{'''}$, $F_{\eta\eta\xi}^{'''}$, $F_{\eta\xi\xi}^{'''}$, $F_{xxx}^{'''}$ взяты в точке $(x, \operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x))$.

Оцениваем каждый член равенства (2.4.1), используя неравенство Коши - Буняковского

$$Re\langle u, f\rangle \le |\langle u, f\rangle| \le \|u\|\|f\|.$$

Функционалы $B_1^\varepsilon(u)$, $B_3^\varepsilon(u)$, $B_4^\varepsilon(u)$, $B_5^\varepsilon(u)$, $B_6^\varepsilon(u)$ и $B_7^\varepsilon(u)$ в силу леммы 2.3.1 стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

При оценке функционалов $B_2^\varepsilon(u)$, $B_8^\varepsilon(u)$ и $B_9^\varepsilon(u)$ для любого $x \in R$, $\omega = \xi + i\eta, \Omega = \mu + i\nu$ и $u \in W_2^3(R)$, учитывая неравенство (1.4.12), получим следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{2}\langle F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\rangle + \\ + \frac{\sigma_1}{2\alpha}(Fu, \varphi_\varepsilon Fu) + \delta_1\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2, \tag{2.4.3}$$

$$|B_8^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{2}\langle F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\rangle + \\ + \frac{\sigma_2}{2\alpha}\langle Fu, \varphi_\varepsilon Fu\rangle + \delta_2\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2, \tag{2.4.4}$$

$$|B_9^\varepsilon(u)| \leq\leq \frac{\alpha}{2}\langle F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\rangle + \\ + \frac{\sigma_3}{2\alpha}\langle Vu, \varphi_\varepsilon Fu\rangle + \delta_3\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2. \tag{2.4.5}$$

Здесь α - произвольное положительное число, а $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \delta_1, \delta_2$ и δ_3 - константы из условий (2.3.2) – (2.3.7).

На основе полученных оценок из равенства (2.4.1), учитывая неравенство

$$-|Z| \leq ReZ \leq |Z|,$$

переходим к неравенству при любых ν, $\beta > 0$:

$$\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(x))\right\|^2 \geq \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Fu(x)\|^2 + \nu\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u^{VI}(x)\|^2 + \\ - \frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u^{VI}(x)\|^2 - \frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(x)\|^2 + \\ + (1+\nu)\left\{\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2 - |B_2(\varepsilon)| - |B_8(\varepsilon)| - |B_9(\varepsilon)|\right\}.$$

Далее имея в виду неравенства (2.4.3) – (2.4.5) при любых $\nu,\ \alpha_1,\ \alpha > 0$ получим неравенство

$$\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x))\right\|^2 \geq \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Fu(x)\|^2 + \nu\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{VI}(x)\|^2 -$$

$$-\frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{VI}(x)\|^2 - \frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x)\|^2 +$$

$$+(1+\nu)\left\{\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u^{'''}(x)\|^2 -\right.$$

$$\left.-(\frac{3\alpha}{2}+\delta_1+3\delta_2+3\delta_3)\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u^{'''}(x)\|^2 - \frac{\sigma_1+3\sigma_2+3\sigma_3}{2\alpha}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Fu(x)\|^2\right\}.$$

Окончательно переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\left(1+\frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\right)\|f(x))\|^2 \geq \left(1-\frac{(1+\nu)(\sigma_1+3\sigma_2+3\sigma_3)}{2\alpha}\right)\|Fu(x)\|^2 +$$

$$+\left(\nu-\frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\right)\|u^{VI}(x)\|^2 + (1+\nu)\left(1-\frac{3\alpha+2\delta_1+6\delta_2+6\delta_3}{2}\right)\|F^{\frac{1}{2}} u^{'''}(x)\|^2$$

Отсюда очевидно, что если

$$|1-\nu| < 2\alpha_1, \quad \alpha_1|1-\nu| < 2\nu, \quad (1+\nu)(\sigma_1+3\sigma_2+3\sigma_3) < 2\alpha$$

и

$$3\alpha+2\delta_1+6\delta_2+6\delta_3 < 2,$$

то коэрцитивная оценка (2.3.9) имеет место. Существование чисел $\alpha_1,\ \alpha,\ \nu > 0$ выводится из неравенства (2.3.8).

Разделимость нелинейного оператора (2.3.1) в пространстве $L_2(R)$ следует из коэрцитивного неравенства (2.3.9).

Теорема 2.3.1 полностью доказана.

2.5. Примеры неразделимых дифференциальных операторов

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$A[x, D_x] = -\frac{d^2}{dx^2} + l \cdot x^{-2}, \tag{2.5.1}$$

где $l > 0$. Покажем , что при $0 < l < \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ для дифференциального выражения (2.5.1) L_p - -разделимость не имеет смысл (см. [18]).

Доказательства. В самом деле, если $0 < l < \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)$, то найдется число $a \in (0, \frac{1}{p})$ такое, что $l = a(a+1)$. Тогда функция $y_0(x) = x^{-a}$ является решением уравнения

$$-y^{''}(x) + l \cdot x^{-2} y_0(x) \equiv 0, \quad (0 < x < +\infty). \tag{2.5.2}$$

Действительно, для функция $y_0(x) = x^{-a}$ имеем

$$y_0^{'}(x) = -a \cdot x^{-a-1},$$

$$y_0^{''}(x) = a(a+1) \cdot x^{-a-2},$$

$$\begin{aligned} y_0^{''}(x) + l \cdot x^{-2} y_0(x) = -y_0^{''}(x) + a(a+1) \cdot x^{-a-2} = \\ = -a(a+1) x^{-a-2} + a(a+1) \cdot x^{-a-2} \equiv 0. \end{aligned}$$

Зафиксируем некоторую функцию $h(x) \in C_0^{\infty}(0; +\infty)$, равную 1 при $x < 1$ и нулю $x > 2$. Положим $y(x) = h(x) y_0(x)$. Поскольку $ap \in (0; 1)$, то

$$\begin{aligned} \|y : L_p(0, +\infty)\|^p = \int\limits_0^{+\infty} h^p(x) \cdot x^{-ap}(x) dx = \\ = \int\limits_0^1 x^{-ap} dx + \int\limits_1^2 h^p(x) x^{-ap}(x) dx < +\infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $A[x, D_x] y(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} A[x, D_x] y(x) = & - y_0^{''}(x) h(x) - y_0^{'}(x) h^{'}(x) - y_0(x) h^{''}(x) + l \cdot x^{-2} h(x) \cdot y_0(x) = \\ = & (-y_0^{''}(x) + l \cdot x^{-2}) h(x) - y_0^{'}(x) h^{'}(x) - y_0(x) h^{''}(x) = \\ = & -y_0^{'}(x) h^{'}(x) - y_0(x) h^{''}(x). \end{aligned}$$

Функции $h^{'}(x), h^{''}(x)$ отличный от нуля только на интервале [1,2], где $y_0(x), y_0'(x)$ не имеют особенностей. Следовательно

$$A[x, D_x]y(x) \in L_p(0; +\infty).$$

С другой стороны

$$\|l \cdot x^{-2}y(x); L_p(0; +\infty)\|^p = l^p \int\limits_0^{+\infty} x^{-2p}h^p(x)x^{-ap}dx =$$

$$= l^p \int\limits_0^1 x^{-2p-ap}dx + \int\limits_1^2 x^{-2p}h^p(x)x^{-ap}dx < +\infty.$$

Очевидно, что первый интегральный член в последнем неравенстве расходится. Поэтому $l \cdot x^{-2}y(x) \notin L_p(0; +\infty)$. Таким образом мы показали, что $y(x) \in L_p(0; +\infty)$, $A[x, D_x]y(x) \in L_p(0; +\infty)$ и $l \cdot x^-2y(x) \notin L_p(0; +\infty)$, то есть дифференциальное выражение $A[x, D_x]y(x)$ не разделяется в пространстве $L_p(0; +\infty)$.

Пример 2. Рассмотрим на функциях $u \in C_0^{\infty}(a, b)$ оператор

$$(Pu(x)) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)u(x),$$

где $p(\cdot), q(\cdot)$ - локально ограниченные измеримые положительные функции; $q(\cdot)$ имеет положительную нижнюю грань, $p(\cdot)$ абсолютно непрерывна на компактных подмножествах интервала (a, b).

Пусть $A, B, C, \delta, \varepsilon$ -неотрицательные числа такие, что

$$\chi = \frac{A^2}{2C} + \varepsilon \cdot A^2 + A \cdot B(\frac{\pi}{2})^2 \cdot \delta^2 < 1. \tag{2.5.3}$$

Пусть в некоторых окрестностях V_a, V_b граничных точек интервала $I = (a, b)$ выполняется условие для $\delta|x - y| \cdot q^{0,5}(x) \leq P^{0,5}(x)$

$$B^{-1} \leq \frac{p(x)}{p(y)} \leq B, \quad A^{-1} \leq \frac{q(x)}{q(y)} \leq A \tag{2.5.4}$$

и неравенство

$$|p^{'}(x)| \leq \varepsilon \cdot q(x). \qquad (2.5.5)$$

Предположим $p(x) \equiv 1$, $I = (a,b)$-конечный интервал. Положим $q_c(x) = c \cdot (x-a)^2$, $y(x) = (x-a)^\gamma$ так, что $\gamma \cdot (\gamma - 1) = c$.

Тогда

$$-y^{''}(x) + q_c(x)y(x) \equiv 0.$$

Если $\gamma < \frac{5}{2}$, то $q_c(x) \cdot y(x) \notin L_2$. , если $c < \frac{15}{4}$, то дифференциальное выражение

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q_c(x) \quad (a < x < b)$$

не разделяется.

Пример 3. Обозначим через $Q_\chi(a, +\infty)$ множество потенциалов $q(x)$ $(a, +\infty)$, которые с некоторыми δ, A таких, что $\delta \cdot \sqrt{A} = \chi$, удовлетворяют условию

$$A^{-1} \leq \frac{q(x)}{q(y)} \leq A$$

для любых $\delta|x-y|\sqrt{q(x)} \leq 1$. Тогда если $\chi \geq 9,5$ существует $q \in Q_\chi(a, +\infty)$ такое, что дифференциальное выражение

$$P[\cdot] = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (a < x < +\infty)$$

не разделяется (см. [15], стр.1159-1160.).

Пример 4. Рассмотрим линейные операторы B и C действующие из $C[0,1]$ в $C[0,1]$ следующем образом

$$(Bu)(x) = 1 - \frac{1}{u(x)},$$

$$(Cu)(x) = \frac{1}{u(x)}.$$

области определения операторов B и C определяются равенствами:

$$D(B) = \left\{ u(x) \in C[0,1] : sup_{x\in[0,1]} \left| 1 - \frac{1}{u(x)} \right| < \infty \right\},$$

$$D(C) = \left\{ u(x) \in C[0,1] : sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{1}{u(x)} \right| < \infty \right\}.$$

В пространстве $C[0,1]$ также рассмотрим оператор A сопоставляющий каждой функции $u(x) \in C[0,1]$ единичную функцию $u(x) \equiv 1$.

Очевидно, если $u(x) \in D(B) \cap D(C)$, то

$$(Bu)(x) + (Cu)(x) \equiv 1 = (Au)(x),$$

то есть $A = B + C$. Однако, легко можно проверить, что функция $u(x)$ принадлежит области определения $D(A)$ оператора A, но не принадлежит ни области определения $D(B)$ оператора B, ни области определения $D(C)$ оператора C:

$$u(x) \equiv x \in D(A), u(x) \equiv x \notin D(B), u(x) \equiv x \notin D(C).$$

(см.[11]).

Глава 3

О некоторых приложениях теорем разделимости

Настоящая глава посвящена коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в пространстве $L_2(R^n)$ и весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

В первом параграфе главы исследуются коэрцитивная разрешимость нелинейного дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + V(x,u)u(x),$$

в пространстве $L_2(R^n)$. Основной результат параграфа сформулирован в виде теоремы 3.1.2.

Во втором параграфе этой главы изучаются коэрцитивная разрешимость нелинейных дифференциальных операторов вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$ в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Основной результат параграфа сформулирован в виде теоремы 3.2.1.

3.1. Коэрцитивная разрешимость нелинейного дифференциального уравнения Лапласа-Бельтрами

В этом параграфе изучается разрешимость уравнения Лапласа -Бельтрами

$$-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + V(x,u)u(x) = f(x), \quad (3.1.1)$$

$$u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n),$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$- эрмитова матрица, а $V(x,z)$ -положительная функция Чтобы использовать результаты теоремы 1.2.1, еще раз сформулируем эту теорему

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия (1.2.2) –(1.2.7), и пусть числа* σ_j, δ_j $(j=\overline{1,4})$ *такие, что*

$$n\sigma_1+2n\sigma_2<4,\ \sigma_1+2\sigma_2+4\delta_1<4,\ n\sigma_3+2n\sigma_4<4,\ \sigma_3+2\sigma_4+4\delta_2<4. \quad (3.1.2)$$

Тогда уравнение (3.1.1) разделяется в $L_2(R^n)$, *и для всех функций* $u(x)\in L_2(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x)\in L_2(R^n)$ *справедливы включения*

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],$$

$$V(x,u)u,\quad g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L_2(R^n),\ i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right];L_2(R^n)\right\|+\|V(x,u)u;L_2(R^n)\|+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n)\right\|\le M\|f(x);L_2(R^n)\|, \quad (3.1.3)$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

Как следствие выводов теоремы 3.1.1 получим следующие результаты.

Теорема 3.1.2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u]=-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+Vu$$

разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, *и пусть положительная функция* $\phi(x)$, *принадлежащая в* $C^1(R^n)$, *удовлетворяет неравенствам*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(detg(x))] Q^{-\frac{1}{2}} \right|^2 \leq \gamma_1 \tag{3.1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| g^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 \leq \gamma_2 \tag{3.1.5}$$

где $0 < \gamma_1 + 2\gamma_2 < 4$. *Тогда уравнение (3.1.1) для всех* $f \in L_2(R^n)$ *имеет единственное решение в пространстве* $L_2(R^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu = 0 \tag{3.1.6}$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle Vu, \phi\psi u \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right], \phi\psi u \rangle = \tag{3.1.7}$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle \sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \phi\psi u] \rangle =$$

$$= -\langle \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}] \phi\psi u \rangle -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \langle \sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u) \rangle -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.$$

Теперь выделим реальную часть скалярного произведения

$$Re\langle Vu,t\psi u\rangle=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}[\ln(detg(x)))\phi\psi u]\rangle-$$
$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u\rangle-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}u)\rangle-$$
$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle. \qquad (3.1.8)$$

Имея в виду

$$2Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\|[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j}\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+g^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+g^{-1}\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}]^{\frac{1}{2}}u;L_2(R^n)\right\|^2. \qquad (3.1.9)$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle=$$
$$=-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j},\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i})Q^{-\frac{1}{2}}u\rangle$$
$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i})Q^{-\frac{1}{2}}u\|, \qquad (3.1.10)$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\phi\psi u]\rangle =$$
$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j},\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]Q^{-\frac{1}{2}})Q^{\frac{1}{2}}u\rangle \leq$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]Q^{-\frac{1}{2}})Q^{\frac{1}{2}}u\|. \tag{3.1.11}$$

Учитывая неравенство (1.4.12), имеем

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\phi\psi u]\rangle \leq$$
$$\leq \frac{\alpha_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n\gamma_1}{2\alpha_1}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}u\|^2, \tag{3.1.12}$$

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle \leq$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})Q^{\frac{1}{2}}u\| \leq$$
$$\leq \frac{n\alpha_2}{2}\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n\gamma_2}{2\alpha_2}\|\psi^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}u\|^2. \tag{3.1.13}$$

Далее для равенства (3.1.8), применяя неравенства (3.1.12)-(3.1.13), получим

$$(1-\frac{n\gamma_1}{4\alpha_1}-\frac{n\gamma_2}{2\alpha_2})\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq \tag{3.1.14}$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j}\phi\frac{\partial \psi}{\partial x_i}+g^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}+g^{-1}\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}]^{\frac{1}{2}}u;L_2(R^n\right\|^2+$$
$$+(\frac{n\alpha_1}{4}+\frac{n\alpha_2}{2})\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n\|^2-n\cdot\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n\|^2.$$

Пусть $\psi(x) \equiv 1$ для любых $x \in R^n$ и $n\gamma_1 + 2n\gamma_2 < 4\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$, тогда имеем

$$0 < (1 - \frac{n\gamma_1 + 2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2})\|\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u; L_2(R^n\|^2 \leq 0. \tag{3.1.15}$$

Следовательно, получим

$$0 < (1 - \frac{n\gamma_1 + 2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2})\int\limits_{R^n} |\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u|^2 dx \leq 0. \tag{3.1.16}$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x) \equiv 0$. Это доказывает, что $u(x) = 0$ является единственным решением уравнения (3.1.6).

Далее пусть $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ - решение уравнения

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + Vu = f(x) \tag{3.1.17}$$

с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1, f_2, \dots f_n \in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_2(R^n)$. Положим $\vartheta_p = A^{-1}f_p$, где A-означает замыкание оператора $\acute{A} = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] + V$, $D(\acute{A} = C_0^\infty(R^n))$ в $L_2(R^n)$. Функция $\vartheta_p \in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial\vartheta_p}{\partial x_j}\right] + V\vartheta_i = f_i.$$

Используя коэрцитивное неравенство (3.1.3), находим

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial(\vartheta_p - \vartheta_k)}{\partial x_j}\right]; L_2(R^n)\right\| + \tag{3.1.18}$$

$$+\|V(x)(\vartheta_i - \vartheta_j); L_2(R^n)\| +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial(\vartheta_p - \vartheta_k)}{\partial x_j}; L_2(R^n)\right\| \leq M\|f_p - f_k; L_2(R^n)\|.$$

Переходя к пределу $p,\ k \to \infty$, заключаем, что последовательности

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, V\vartheta_1, V\vartheta_2, \dots,$$

$$g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_j}, g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_j}, \dots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_j}\right], \frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_j}\right], \dots$$

будучи фундаментальными, сходятся в $L_2(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(3)} \in L_2(R^n)$. Легко проверить, что

$$\vartheta \in W_{2,loc}^2(R^n), \quad \vartheta^{(1)} = V\vartheta, \quad \vartheta^{(2)} = g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j},$$

$$\vartheta^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\right].$$

Переходя в неравенстве (3.1.18) к приделу при $p,\ k \to \infty$, получим $\vartheta_p = \vartheta_k = \vartheta$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, то есть теорема 3.1.2 полностью доказана.

3.2. Коэрцитивная разрешимость нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

В этом параграфе изучается разрешимость уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \tag{3.2.1}$$

$$u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n),$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция. Чтобы использовать результаты теоремы 1.3.1, еще раз сформулируем эту теорему

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены условия (1.3.2) –(1.3.8), и пусть числа* σ_j, $(j=\overline{1,5})$, δ_1, δ_2 *такие, что*

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4<\frac{4}{3n^2},\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}<1-\delta_1, \tag{3.2.2}$$
$$\frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}<1-\delta_2$$

Тогда уравнение (3.2.1) разделяется в $L_{2,\rho}(R^n)$, *и для всех функций* $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$, *справедливы включения*

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n),$$
$$a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n), i=1,2,...,n; j=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n)\right\|+\|V(x,u)u;L_{2,\rho}(R^n)\|+$$
$$+\sum_{i,j=1}^n\left\|a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|\le M\|f(x);L_{2,\rho}(R^n)\|, \tag{3.2.3}$$

где положительное число M *не зависит от* $u(x)$, $f(x)$.

С помощью теоремы 3.2.1 докажем следующие результаты о коэрцитивной разрешимости уравнения (3.2.1).

Теорема 3.2.2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+Vu$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$*, и пусть положительная функция* $\phi(x)$*, принадлежащая в* $C^1(R^n)$*, удовлетворяет неравенствам*

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \theta_1, \tag{3.2.4}$$

где $0 < \theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 < \frac{1}{n^2}$*. Тогда уравнение (3.2.1) для всех* $f \in L_{2,\rho}(R^n)$ *имеет единственное решение в пространстве* $L_{2,\rho}(R^n)$*.*

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + Vu = 0 \tag{3.2.5}$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
\langle Vu, \rho\phi\psi u \rangle &= \langle \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u \rangle = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)\rho\phi\psi u] \rangle - \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u \rangle = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \rho\phi\psi u \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi\psi u \rangle - \\
&- - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u) \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u) \rangle - \\
&- \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\phi\psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle - \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u \rangle.
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Теперь выделяем реальную часть скалярного произведения

$$Re\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle = -Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle -$$
$$- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle -$$
$$- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle - Re\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u\rangle. \qquad (3.2.7)$$

Имея в виду, что

$$2Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n}\Bigg\|\Bigg[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi + \frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi +$$
$$+a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\phi\Bigg]^{\frac{1}{2}}u; L_{2,\rho}(R^n)\Bigg\|^2, \qquad (3.2.8)$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle =$$
$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\rangle \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\|, \qquad (3.2.9)$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle =$$
$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}})V^{\frac{1}{2}}u\rangle \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\|, \qquad (3.2.10)$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u)\rangle =$$

$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\rangle \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\|, \qquad (3.2.11)$$

$$Re\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u)\rangle =$$

$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{n}b_j(x)a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\rangle \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{n}b_j(x)a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\|. \qquad (3.2.12)$$

Учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2 \leq \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имеем

$$- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\phi\psi u]\rangle \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2\theta_1}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2, \qquad (3.2.13)$$

$$- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle \leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\times$$

$$\times \|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})]V^{\frac{1}{2}}u\| \leq$$

$$\leq \frac{n\alpha_2}{2}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2, \qquad (3.2.14)$$

$$
\begin{aligned}
&-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\phi\psi u)\rangle=\\
&\le\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Q^{-\frac12}]V^{\frac12}u\|\\
&\le\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}V^{\frac12}u\|^2,
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&-Re\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u)\rangle=\\
&\le\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[\frac{1}{n}b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)Q^{-\frac12}]Q^{\frac12}u\|\\
&\le\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\sigma_4}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}Q^{\frac12}u\|^2.
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

Применяя далее для равенства (3.2.7) неравенства (3.2.13)-(3.2.16), получим

$$
\begin{aligned}
&(1-\frac{n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\alpha_2})\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}V^{\frac12}u\|^2\le\\
&\le\frac12\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg\|\Bigg[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+\frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+\\
&+a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\phi\Bigg]^{\frac12}u;L_{2,\rho}(R^n)\Bigg\|^2+\\
&+2\alpha_2\cdot\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2-\\
&-\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2.
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

Пусть $\psi(x)\equiv 1$ для любых $x\in R^n$ и $\alpha_2=\frac12$, тогда имеем

$$
0<(1-(n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)\|\phi^{\frac12}V^{\frac12}u;L_{2,\rho}(R^n\|^2\le 0. \tag{3.2.18}
$$

Следовательно, получим

$$0<(1-n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)\int\limits_{R^n}|\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u|^2dx\le 0. \qquad (3.2.19)$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x)\equiv 0$. Это доказывает, что $u(x)=0$ является единственным решением уравнения (3.2.4).

Пусть далее $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ и является решением уравнения

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+Vu=f(x) \qquad (3.2.20)$$

с правой частью $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1,f_2,\dots f_n\in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_{2,\rho}(R^n)$. Положим $\vartheta_p=A^{-1}f_p$, где A-означает замыкание оператора $\acute{A}=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+V$, $D(\acute{A}=C_0^\infty(R^n))$ в $L_{2,\rho}(R^n)$. Функция $\vartheta_p\in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2\vartheta_p}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial\vartheta_p}{\partial x_j}+V\vartheta_p=f_p.$$

Используя коэрцитивное неравенство (3.2.3), находим, что

$$\left\|-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|+$$
$$+\|V(\vartheta_p-\vartheta_k);L_{2,\rho}(R^n)\|+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|\le M\|f_p-f_k;L_{2,\rho}(R^n)\|. \qquad (3.2.21)$$

Переходя к пределу $p,\ k\to\infty$, заключаем, что последовательности

$$\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,V\vartheta_1,V\vartheta_2,\dots,a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_j},\quad a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_j},\dots,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_1)}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial \vartheta_1)}{\partial x_j},-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_2)}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial \vartheta_2)}{\partial x_j},$$

будучи фундаментальными, сходятся в $L_{2,\rho}(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(3)} \in L_{2,\rho}(R^n)$. Легко проверить, что $\vartheta \in W^2_{2,loc}(R^n)$, $\vartheta^{(1)} = V\vartheta$,

$$\vartheta^{(2)} = a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j},\ \vartheta^{(3)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}.$$

Переходя в неравенстве (3.2.21) к пределу при $p,\ k \to \infty$, получим $\vartheta_p = \vartheta_k = \vartheta$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, то есть теорема 3.2.2 полностью доказана.

Основные результаты и выводы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют теоретический интерес и состоят в следующем:

1. установлены коэрцитивные оценки и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами и нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом гильбертовом пространстве;[16-A];
2. изучены коэрцитивные свойства оператора Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом;[9-A, 11-A, 13-A, 26-A, 27-A];
3. изучены коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами в пространстве вектор-функций и доказана теорема о разделимости общих нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами;[6-A, 8-A, 21-A, 22-A];
4. изучены коэрцитивные свойства бигармонического оператора с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)^l$ и доказана теорема о разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом;[1-A, 2-A, 12-A, 23-A, 24-A, 25-A];
5. установлены коэрцитивные оценки, и доказана теорема о разделимости нелинейного обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка в гильбертовом пространстве;[3-A];

6. найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейного оператора Лапласа–Бельтрами и доказана теорема о существование и единственности решение нелинейного уравнение Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве.[16-A];
7. найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка и доказана теорема о существование и единственности решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве.[5-A, 33-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут найти применение в теории дифференциальных операторов с частными производными, в теории пространств дифференцируемых функции многих переменных и спектральной теории дифференциальных операторов.

Список литературы

[1]. Абудов А.А. О разделимости одного оператора, порожденного операторно-дифференциальным выражением [Текст] /А.А. Абудов // В сб.: Спектральная теория операторов. Баку. «Элм». –1982. –С. 4-11.

[2]. Алиев Б.И. Теоремы разделимости операторного уравнения высокого порядка с нормальным операторным коэффициентом.[Текст] /Б.И. Алиев, Б.И. Исмоилов //–В кн: Численные методы механики деформируем. сплош. сред. и оптимиз. Азерб. Политехн. инс-т. Баку. –1986. –С.136-142..(Рукопись деп. в АЗИНИТИ 26.0386, № 486-Аз.

[3]. Аманова Т.Т. О разделимости одного дифференциального оператора [Текст] /Т.Т. Аманова // Известия АН КазССР. Сер.физ.-мат. –1981. –№ 3. –С. 48-51.

[4]. Аманова Т.Т. Разделимость нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля в $L_1(-\infty, +\infty)$ [Текст] /Т.Т. Аманова, М.Б.Муратбеков // Известия АН КазССР. Сер.физ.-мат. –1984. –№ 3, –С. 57-59.

[5]. Байрамаоглы М. О существенной самосопряженности операторов Штурма-Лиувилля с операторными коэффициентами [Текст] /М. Байрамоглы А.А.Абудов // В сб.: Спектральная теория операторов. Баку. «Элм». –1982. –С. 12-20.

[6].Бакоева М.М. Коэрцитивные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами [Текст] /М.М.Бакоева, З.Х.Рахимов // Доклады АН Республики Таджикистан. –1996.–Т.39. –№ 9-10. –С. 75-81.

[7]. Бакоева М.М. О разделимости оператора Штурма-Лиувилля с несимметричным матричным потенциалом [Текст] /М.М.Бакоева,

С.А.Исхоков // Вест. Хорогского университета. Серия 1. –2002. –№ 5. –С. 43-51.

[8]. Биргебаев А. Разделимость одного дифференциального оператора в L_p [Текст] /А. Биргебаев // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. –1984. –№ 5, С. 26-29.

[9]. Биргебаев А. О разделимости нелинейного дифференциального оператора третьего порядка [Текст] /А. Биргебаев, М.Отелбаев// Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. –1984. –№ 3, С. 11-13.

[10]. Биргебаев А. Гладкость решений нелинейного дифференциального уравнения с матричным потенциалом [Текст] /А. Биргебаев// В.сб.: Тезисы докладов VIII республиканской межвузовской научной конференции по математике и механике. Алма-Ата–1984. –С. 11.

[11]. Биргебаев А. Теоремы о разделимости оператора Штурма-Лиувилля [Текст] /А. Биргебаев // Вестник ИГУ. –2010. –№ 26(1), С. 245-254.

[12]. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости для оператора Штурма-Лиувилля [Текст] /К.Х.Бойматов //– Математические заметки. 1973. –Т.14. –№ 33, –С. 349 - 359.

[13]. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости [Текст] /К.Х., Бойматов// ДОКЛАДЫ АН СССР. –1973. –Т.213. –№ 5. –С. 1009 –1011.

[14]. Бойматов К.Х. L_2- оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений [Текст] /К.Х. Бойматов// ДАН СССР. –1975. –Т.223. –№ 3. –С. 521-524.

[15]. Бойматов К.Х. Об области определения оператора Штурма-Лиувилля [Текст] /К.Х. Бойматов// Дифференциальные уравнения. –1976. –Т.12. –№ 7. –С. 1151-1160.

[16].Бойматов К.Х. Асимптотика спектра оператора Шредингера с сингулярным потенциалом [Текст] /К.Х. Бойматов// УМН. –1976. –Т.31. –№ 1. –С. 241-242.

[17]. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения к краевым задачам [Текст] /К.Х. Бойматов// ДАН СССР. –1979. –Т.247. –№ 3. –С. 532-536.

[18]. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения [Текст] /К.Х. Бойматов// Труды Математического института им.В.А. Стеклова АН СССР. –1984. –Т.170. –С. 37-76.

[19]. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] /К.Х. Бойматов// Доклады АН СССР. –1988. –Т.301. –№ 5. –С. 1033-1036.

[20]. Бойматов К.Х. Оценки роста решений дифференциальных уравнений [Текст] /К.Х. Бойматов, П.И.Лизоркин// Дифференциальные уравнения. –1989. –Т.25. –№ 4. –С. 578-588.

[21]. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка [Текст] /К.Х. Бойматов// Математические заметки. –1989. –Т.46. –№ 6. –С. 110-112.

[22]. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для дифференциальных операторов произвольного порядка [Текст] /К.Х. Бойматов, А.Шарифов// Успехи математических наук. –1989. –Т.44. –№ 3. –С. 147-148.

[23].Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака [Текст] /К.Х. Бойматов, А.Шарифов// Доклады АН России. –1992. –Т.326. –№ 3. –С. 393-398.

[24]. Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений [Текст] /К.Х. Бойматов// Доклады АН СССР. –1993. –Т.330. –№ 4. –С. 409-414.

[25]. Бойматов К.Х. О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств [Текст] /К.Х. Бойматов// Докл. АН России, 1997. Т.356, № 1, С. 10-12.

[26]. Бойматов К.Х. О спектре эллиптических операторов [Текст] /К.Х. Бойматов// Автореф. канд. дис. Москва, МГУ, 1974. С. 19.

[27]. Гадоев М.Г., Конобулов С.И. Коэрцитивная разрешимость эллиптических операторов в банаховых пространствах [Текст] /М.Г.Гадоев, С.И. Конобулов// Сибирский журнал индустриальной математики, 2003, Т.VI, № 2(14), С. 27-30.

[28].Гадоев М.Г. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве [Текст] /М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков// Доклады АН Республики Таджикистан. –2015. –Т.58. –№ 7. –С. 558-563.

[29]. Гадоев М.Г. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве [Текст] /М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков// Математические заметки СВФУ. –2016. –Т.23. –№ 3(91). –С. 3-26.

[30]. Гадоев М.Г. Об относительной ограниченности одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве [Текст] /М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков// Математические заметки СВФУ. –2018. –Т.25. –№ 1(97). –С. 3-14.

[31]. Гадоев М.Г., Исхоков С. А., Исхоков Ф. С. О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом

пространстве [Текст] /М.Г.Гадоев, С. А. Исхоков, Ф. С. Исхоков. // Чебышевский сборник, 2019г, т.18, № 4, стр. 85-105.DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-85-105.

[32]. Гаибов Д.С. Обыкновенные дифференциальные операторы класса Трибеля на полуоси [Текст] /Д.С. Гаибов // Доклады АН Республики Таджикистан. –1993. –Т.36. –№ 12. –С. 571-574.

[33]. Гриншпун Э.З. О гладкости решений нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля в $L_1(-\infty, +\infty)$ [Текст] /Э.З. Гриншпун, М.Отелбаев// Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. –1984. –№ 5. –С.26-29.

[34]. Замонов М.З. Коэрцитивные неравенства и разделимость для несекториального эллиптического дифференциального оператора в пространстве вектор-функции [Текст] /М.З. Замонов, О.Т.Муртазов// Доклады АН Республики Таджикистан. –1997. –Т.40. –№ 9-10, С. 32-40.

[35].Измаилов А.Л. О суммеримости с весом решения дифференциального уравнения в неограниченной области [Текст] /А.Л. Измайлов, М.Отелбаев // Изв. АН КазССР, 1977. –№ 1, С.36-40.

[36]. Исхоков С.А. О разделимости обыкновенных дифференциальных выражений [Текст] /С.А. Исхоков// В сб.: Функциональный анализ и его приложения в механике и теории вероятностей. Москва. Изд-во МГУ. –1984. –С. 130-131.

[37]. Исхоков С.А., Мохамед А.С. Разделимость общего эллиптического дифференциального оператора второго порядка с матричными коэффициентами в весовых пространствах [Текст] /С.А. Исхоков, А.С. Мохамед// Доклады АН Республики Таджикистан. –1995. –Т.36. № 10-11. –С. 310-315.

[38]. Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением [Текст] /С.А. Исхоков// Дифференциальные уравнения. –2003. –С. 536-542.

[39]. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] /А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин// М.: Наука. –1976. –С.544.

[40]. Курбанов И. Разделимость оператора Штурма-Лиувилля в пространстве вектор-функции с взвешенно-суммируемыми компонентами [Текст] /И.Курбонов, М.Шодиев// Доклады АН Республики Таджикистан. –1995. –Т.38. –№ 1-2. –С. 79-86.

[41]. Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p – нормах [Текст] /П.И. Лизоркин// Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. –1980. –Т.156. –С. 130-142.

[42]. Мохамед А.С. Разделимость оператора Шредингера с матричным потенциалом [Текст] /А.С.Мохамед// Доклады АН Республики Таджикистан. –1992. –Т.35 –№ 3. –С. 510-515.

[43]. Муратбеков М.Б. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора высокого порядка [Текст] /М.Б.Муратбеков// Дифференц. уравнения. –1981. –Т.17. –№ 3. –С. 893-901.

[44].Муратбеков М.Б. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шрёдингера [Текст] /М.Б.Муратбеков, М.Отелбаев// Известия вузов.Математика. –1989. –№ 3. –С. 44-48.

[45]. Муратбеков М.Б. Разделимость и оценки поперечников множеств, связанных с областью определения нелинейного оператора типа Шредингера [Текст] /М.Б.Муратбеков// Дифференциальные уравнения. –1991. –Т.27. –№ 6. –С. 1034-1042.

[46]. Муратбеков М.Б. Разделимость оператора смешанного типа и полнота его корневых векторов [Текст] /М.Б.Муратбеков// Дифференц. уравнения. –1991. –Т.27. –№ 12. –С. 2128-2137.

[47]. Муратбеков М.Б. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения [Текст] /М.Б.Муратбеков, М.М.Муратбекова, К.Н. Оспанов// Доклады Академии наук России. –2010. –Т.435. –№ 3. –С. 310-313.

[48]. Ойнаров Р. О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций [Текст] /Р.Ойнаров// Доклады АН СССР. –1985. –Т.285. –№ 5. –С. 1062-1064.

[49]. Отелбаев М. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма-Лиувилля [Текст] /М.Отелбаев// Математические заметки. –1974. –Т.16. –№ 6. –С. 969-980.

[50]. Отелбаев М. О гладкости решения дифференциальных уравнений [Текст] /М.Отелбаев// Известия АН КазССР. Серия физ-мат. –1977. –№ 5. –С. 45-48.

[51].Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов [Текст] /М.Отелбаев// Доклады АН СССР. –1977. –Т.234. –№ 3. –С. 540-543.

[52]. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n [Текст] /М.Отелбаев// Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. –1983. –Т.161.

–С. 195-217.

[53]. Оспанов К.Н. О разделимости вырожденного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /К.Н.Оспанов, Р.Д. Ахметкалиева//Вестник Карагандинского университета. Серия математика. –2013. –Т.70. –№ 2. –С. 132-141.

[54]. Рахимов З.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для дифференциальных операторов нечетного порядка [Текст] /З.Х.Рахимов// Доклады АН Тадж.ССР. –1991. –№ 5. –С. 278-281.

[55]. Розенблюм Г.В. Асимптотика собственных чисел оператора Шредингера [Текст] /Г.В.Розенблюм// Математический сборник. –1974, –Т.93(135). –№ 3. –С. 347-367.

[56]. Треногин В.А. Функциональный анализ [Текст] /В.А.Треногин// М.: Наука. –1980.

[57]. Atia H.A. Separation of the Grushin differential operators in weighted Hilbert spaces [Текст] /H.A.Atia// Lobachevskii Journal of Mathematics. –2011. –V.32.–№ 3. –P.180-188.

[58]. Atia H.A. Separation of the two-dimensional Laplace operator by disconjugacy property [Текст] /H.A.Atia, R.A.Mahmoud// Forum Mathematicum. –2014. –V.26. –P.953-966.

[59]. Atia H.A. Separation of bi-harmonic operators on Riemannian manifolds [Текст] /H.A. Atia, R. S.Alsaedi, A. Ramady // Forum Math. –2014. –V.26. –P.953-966.

[60]. Atcinson F.V. On some results of Everitt and Giertz [Текст] /F.V.Atcinson// Proc. Royal Soc. Edinburg. –1973. –V.71A. –P.151-158.

[61]. Brown R.C. Separation and disconjugacy [Текст] /R.C.Brown// Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. –2003. –V.4. –Is.3. –Article 56.–16p.

[62]. Brown R.C. Two separation criteria for second ordinary or partial differential operators [Текст] /R.C.Brown, D.B.Hunton// Mathematica Bohemica. –1999. –V.124. –№ 2-3.–P.273-292.

[63].Chernyavskaya N. Correct solvability, embedding theorems and separability for the Sturm-Liouvelle equation [Текст] /N.Chernyavskaya, L.Shuster // arXiv:1307.5611v1[math.CA] –22.–Jul. –2013. 9p.

[64]. Chernyavskaya N. Weighted estimates for solutions if the general Sturm-Liouvelle equation and the Everitt-Giertz problem [Текст] /N.Chernyavskaya, L.Shuster//Proc. Edinburgh Math.Soc. –2015. –V.58. –Is.01. –P.125-147.

[65]. Evans W.D. Dirichlet and separation results for Schrodinger type operators [Текст] /W.D.Evans, A.Zettl// Proc. Roy. Soc. Edinburg A, 1978, –V.80. –P.151-162.

[66]. Everitt W.N. Some properties of the domains of certain differential operators [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz // Proc.London Math.Soc.(3) –1971. –V.23. No 4. –P.301-324.

[67]. Everitt W.N. Some inequalities associated with certain differential operators [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz// Math.Z. –1972.–V.126. –P.308-326.

[68]. Everitt W.N. On properties of the powers of a formally self -adjoint differential expression [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz// Proc.London Math.Soc. –1972. –V.24. –No 1. –P.149-170.

[69]. Everitt W.N. On some properties of the domains of power of certain differential operators [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz // Proc.London Math.Soc.(3) –1972. –V.24. No 4. –P.756-768.

[70]. Everitt W.N. On limit-point and separation criteria for linear differential expressions [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz// Proceedings of the 1972 Equadiff Conference. Brno. –1972. –P.31-41.

[71].Everitt W.N. An example concerning the separation property for differential operators [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz// Proc. Roy. Edinburgh A. –1973. –V.71. -P.159-165.

[72]. Everitt W.N. A Dirichlet type result for ordinary differential operators [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz// Math.Ann. –1973. –V.200. –No 2. –P.119-128.

[73]. Everitt W.N. Inequalities and separation for certain ordinary differential operators [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz// Proc.London Math.Soc. (3) –1974. –V.28. –No 2.–P.352-372.

[74]. Everitt W.N. Some remarks on a separation and limit-point criterion of second order ordinary differential expressions [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz, J.Weidmann// Math.Ann. –1973. –V.203. –No 4.–P.335-346.

[75]. Everitt W.N. Inequalities and separation for Schrodinger type operators in $L_2(R^n)$ [Текст] /W.N.Everitt, M.Gierz// Proc.Roy.Soc.Edinburg. –1977. –V.79A. –P.257-265.

[76]. Mohamed A.S. On the existence and uniqueness of the solution for ordinary differential equation with matrix coefficient in the weighted spaces [Текст] /A.S.Mohamed, B.A.El-Gendi // Asw.Sc.Tech.Bull.Sovth Valley Univ. –1995. –V.16. –P.118-125.

[77]. Mohamed A.S. On the existence and uniqueness in weighted spaces of solution of a higher order ordinary differential equation with positive matrix coefficient [Текст] /A.S.Mohamed, B.A.El-Gendi // Bull.Fac. Sci. C.Vath. Assiut Univ. –1995. –V.24. –No 2.–P.13-14.

[78]. Mohamed A.S. Separation for ordinary differential equation with matrix coefficient [Текст] /A.S.Mohamed, B.A.El-Gendi // Collect. Math. –1997. –V.48. –No 3. –P.243-252.

[79]. Mohamed A.S. Existence and uniqueness of the solution for certain second order elliptic differential equation [Текст] /A.S.Mohamed// Applicable Analysis. –2000. –V.76. –No 3. –P.179-184.

[80]. Mohamed A.S. Separation of the Sturm-Liouville differential operators potential [Текст] /A.S.Mohamed, H.A.Atia // App.Mathematics and Computation.–2004. –№ 2. –P.387-394.

[81]. Mohamed A.S. Separation of general second order elliptic differential operators potential in the weighted Hilbert spaces [Текст] /A.S.Mohamed, H.A.Atia// App.Mathematics and Computation. –2005. –V.162. –P.155-163.

[82]. Mohamed A.S. Separation of the Schrodinger operator with an operator potential in the Hilbert spaces [Текст] /A.S.Mohamed, H.A.Atia// Applicable Analysis. –2005. –V.84. –№ 1. –P.103-111.

[83]. Milatovic O. The form sum and the Friedrichs extension of Schrodinger operators on Riemannian manifolds [Текст] /O.Milatovic// Proceedings of the American mathematical society. –2003. –V.132. –№ 1.–P.147-156.

[84]. Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators on Riemannian manifolds [Текст] /O.Milatovic// Journal of Geometry and Physics. –2006. –V.56. –P.1283-1293.

[85]. Milatovic O. A separation property for Schrodinger operators on Riemannian manifolds [Текст] /O.Milatovic// Journal of Geometry and Physics. –2011. –V.61. –P.1-7.

[86]. Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators in L_p –spaces on noncompact manifolds [Текст] /O.Milatovic// Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. –2013. –V.58. –№ 6.–P.853-854.

[87]. Oer Z. Separation theorem for Sturm-Liouville equation with operator coefficient [Текст] /Z.Oer// Proyecciones, Universidad Catolica del Norte Antofagasta-Chile. –2001. –V.20. –№ 2. –P.177-191.

[88].Omran S. Separation of the Helmholtz partial differential equation in Hilbert space [Текст] /S.Omran, K.A.Gepreel// Adv. Studies Theor. Phys. –2012. –V.6. –№ 9. –P.399-410.

[89]. Omran S. Separation of the general Tricomi differential operator in Hilbert space and its application [Текст] /S.Omran, K.A.Gepreel, S.Khalil// International Journal of mathematical archive. –2012. –V.3. –№ 1. –P.64-71.

[90]. Omran S. Separation of the general differential wave equation in Hilbert space [Текст] /S.Omran, K.A.Gepreel, E.T.A. Nofal// International Journal of Nonlinear Science. –2011. –V.11. –№ 3. –P.358-365.

[91]. Ospanov K.N. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space [Текст] /K.N.Ospanov, R.D.Akhmedkaliyeva// SRM Preprint Series. –2011. –№ 1080. –12P.

[92].Ospanov K.N. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation [Текст] /K.N.Ospanov, R.D.Akhmedkaliyeva//

Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. –2012. –№ 66. –P.1-12:http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[93]. Zayed E.M.E Separation for Schrodinger-type operators with operators potentials in Banach spaces [Текст] /E.M.E.Zayed, A.S.Mohamed, H.A.Atia // J. Math.Appl.Anal. –2005. –V.84. –P.211-220.

[94].Zayed E.M.E Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces [Текст] /E.M.E.Zayed, A.S.Mohamed, H.A.Atia // J. Math.Anal.Appl. –2007. –V.336. –P.81-92.

[95]. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem [Текст] /E.M.E.Zayed// J. Math.Anal.Appl. –2008. –V.337. –P.659-666.

[96]. Zayed E.M.E. Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert [Текст] /E.M.E.Zayed, O.Salem // International J. Math.Combin. –2010. –V.4. –P.13-23.

[97]. Zayed E.M.E. Separation of the Tricomi differential operator in the Hilbert space with application to the existence and uniqueness theorem [Текст] /E.M.E.Zayed, O.Salem // International J. Contemp.Math.Sciences. –2011. –V.6. –P.353-364.

[98]. Zayed E.M.E. Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem [Текст] /E.M.E.Zayed// Dynamist of continuous, discrete and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis. –2015. –№22. –P.409-421.

[99]. Zayed E.M.E. Inequalities and separation for a biharmonic Laplace-Beltrami differential operator in a Hilbert space associated with the existence and uniqueness theorem [Текст] /E.M.E.Zayed// Journal of partial differential equations. –2016. –V.29. –№1. –P.59-70.

[100]. Zettl A. Separation for differential operators on the L_p spaces [Текст] /A.Zettl // Proc.Amer. Math.Soc. –1976. –V.55. –№ 6. –P.44-46.

[101]. Абдуваитов Х. Об ограниченной обратимости одного дифференциального оператора второго порядка [Текст] /Х. Абдуваитов // Успехи математических наук. –1986. –Т.41. –Вып.2(248). –С. 181-182.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Минобрнауки РФ:

[$1-A$]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. –2005. –Т. XLVIII. –№ 3-4. –С.38-43.

[$2-A$]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами [Текст] /О.Х.Каримов// Известия Академии Наук Республики Таджикистан, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. –2014. –Т.157. –№ 4. –С.42-50.

[$3-A$]. Каримов О.Х. О Коэрцитивных свойствах и разделимости оператора Гельмгольца [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. –2015. –Т.58. —-№ 3. –С.198-203.

[$4-A$]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов Доклады Академии наук Республики Таджикистан. –2015. –Т.58. —-№ 8. –С.665-673.

[$5-A$]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. –2016. –Т.59. —-№ 7-8. –С.299-304.

[$6-A$]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Ученые записки ХГУ. –2017. —-№ 1. –С.789-790.

[$7-A$]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Вестник ТГНУ. –2017. –№ 2. –С.1020-1023.

[$8-A$]. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Дифференциальные уравнения. Спектральная теория. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. –Т.141. ВИНИТИ РАН. –М. –2017. –С.79-85.

[$9-A$]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Уфимский математический журнал. –2017. –Т.9. –№ 1. –С.55-62.(SCOPUS)

[$10-A$]. Karimov O.Kh. On coercive properties and separability of biharmonic operator with matrix potential [Текст] /О.Х.Каримов // Ufimsk. Mat. Zh.. –2017. –V.9. –Is.1. -P.54-61.
DOI: https://doi.org/10.13108/2017-9-1-54.(SCOPUS)

[11 − A]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Чебышевский сборник. –2017. –Т.18.–№ 4. –С.245-254.
DOI: http://dx.doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254.(SCOPUS)

[12 − A]. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. –2018. –Т.61.–№ 11-12. –С.688-692.

[13 − A]. Karimov O.Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces. [Текст] /O. Kh. Karimov // Journal of mathematical sciences, DOI: 10.1007/s10958-019-04447-y. –V.241. –№ 5. –2019. -P.589-595.(SCOPUS)

[14 − A]. Каримов О.Х. О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Чебышевский сборник. –2019. –Т.18.–№ 4. –С.167-184.
DOI: http://dx.doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-167-184 (SCOPUS)

[15 − A]. Каримов О.Х. О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т. 62. –№ 7-8. –

С.688-692.

[16 – A]. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости нелинейного дифференциального уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Известия Академии Наук Республики Таджикистан, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. –2018. –Т.173. –№ 4. –С.62-72.

В других изданиях:

[17 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивные оценки решений нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка на всей оси [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы научной конференции «Комплексный анализ и неклассические системы дифференциальных уравнений"посвященной 75-летию со дня рождения академика А. Джураева.» Душанбе. –16 ноября. –2007. –С.27-28.

[18 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов// Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и их приложений посвященной 60-летию академика К.Х.Бойматова, г.Душанбе. 24 июня. –2010г. –С. 54-56.

[19 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость линейного оператора Шрёдингера с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов// Материалы международной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения посвященной

70-летию профессора Э.М.Мухамадиева, г. Душанбе, июнь, 2011г., С.56.

[20 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка [Текст] /О.Х.Каримов// Сборник тезисов докладов: международной научной конференции "Наука и инновационные разработки -Северу Россия, г. Мирный, 10-12 марта 2014г., С.270-271.

[21 – A]. Каримов О.Х.Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященной 80-летию чл.корр. АН РТ, д.ф.-м.н., профессора В.Л.Стеценко, г.Душанбе, 27-28 апреля 2015г., С. 25.

[22 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов //Материалы международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения», посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, г. Москва, 2015г., 25-29 мая, С.153-154.

[23 – A]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Сборник докладов VI-й Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал), ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова"в г. Мирном. 2015, С. 12-14.

[$24 - A$]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященной 75-летию Т.С.Сабирова, г. Душанбе, 29-30 октября 2015г., С.110-111.

[$25 - A$]. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] /О.Х.Каримов // Международная научная конференция "Современные проблемы математики и её приложений посвященная 25-летию независимости Республики Таджикистан. Филиал МГУ им М.В.Ломоносова, г. Душанбе, 2016г., 3-4 июня, С.79-80.

[$26 - A$]. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. Душанбе, 15-25 август 2016 г. С. 128-132.

[$27 - A$]. Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом в весовом пространстве «Современные проблемы математики и ее приложений», Россия, г.Уфа, 27-30 сентября 2016 - С.79-80.

[28 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и разделимость нелинейного трижды гармонического дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию член.корр РАН СССР А.Ф. Леонтьева, Россия, Уфа, 27-30 мая, 2017г, С.81-82.

[29 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе 27-28 октября, 2017г, С.54-55.

[30 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы "IV Международная научная конференция "Актуальные проблемы прикладной математики"(22-26 мая 2018 г., Приэльбрусье, п. Терскол, Кабардино-Балкарская Республика) С.116.

[31 – A]. Каримов О.Х. О коэрцитивной оценке и разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и его приложений"филиал МГУ в г.Душанбе, 2018, 21-22 июня, С.51-52.

[32 – A]. Каримов О.Х. Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы Международной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа, 2018, 1-4 октября, С. 93-94.

[33−A]. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и разделимость нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной конференции "Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа посвященной 60-летию академика Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова С.А., Душанбе, 2019, 13–14 декабря, С.88-89.

[34 − A]. Каримов О.Х. О коэрцитивной оценке и разделимости нелинейного дифференциального оператора в весовом пространстве [Текст] /О.Х.Каримов // Материалы международной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа, Душанбе, 30-31 января 2020г, С. 162-163.