

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Каримова Олимджона Худойбердиевича «Коэрцитивные оценки и разделимость нелинейных дифференциальных операторов», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена доказательству теорем разделимости и установлению коэрцитивных неравенств для нелинейных дифференциальных операторов в случае, когда их нельзя представить в виде слабого нелинейного возмущения линейного оператора. Такие операторы обычно называются строго нелинейными дифференциальными операторами.

Проблема разделимости дифференциальных операторов привлекала внимание многих исследователей в связи с ее важностью в теории вложения функциональных пространств, спектральной теории дифференциальных операторов и в исследованиях качественных свойств решений дифференциальных уравнений. Впервые термин «разделимость» введен в научную литературу В. Н. Эвериттом и М. Гирцом (W. N. Everitt, M. Giertz) в начале семидесятых годов прошлого столетия. Они, в основном, исследовали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Впоследствии эти результаты Эверитта и Гирца были обобщены и развиты многими авторами, среди которых следует отметить К.Х.Бойматова, М.Отелбаева, Р.Ойнарова, Г.С.Гоибова, А.Цеттла (A.Zettl), А.С.Мохамеда (A.S.Mohamed), Х.А.Атии (H.A.Atia), Р.С.Брауна (R.C.Brown), Н.Чернявской (N.Chernyavskaya), Л.Шустера (L.Shuster) и др. Следует отметить, что ранее в основном, разделимость нелинейных дифференциальных операторов исследовалось в случае, когда они допускали представления в виде слабого возмущения линейного оператора.

Оценка содержания диссертации. Диссертационная работа О.Х.Каримова состоит из введения, трех глав, заключения и списка

литературы из 135 наименований. Она изложена на 157 страницах и набрана в текстовом редакторе LaTeX.

Во введении даётся исторический обзор результатов, связанных с темой работы, обосновывается актуальность выбранной темы и приводятся формулировки основных теорем.

Глава первая состоит из пяти параграфов. Она посвящена изучению коэрцитивных свойств и разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка. Первый параграф первой главы носит вспомогательный характер и содержит некоторые известные леммы, которые используются в последующих параграфах этой главы.

Во втором параграфе доказываются теоремы разделимости и коэрцитивное неравенство в пространстве $L_2(R^n)$ для нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] + V(x, u(x))u(x).$$

В третьем параграфе первой главы изучается разделимость и коэрцитивные свойства более общего нелинейного дифференциального оператора второго порядка

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + V(x, u(x))u(x)$$

в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

В следующих двух параграфах первой главы рассматриваются нелинейные дифференциальные операторы с матричными коэффициентами. В четвертом параграфе доказываются разделимость и коэрцитивное неравенство в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ для нелинейного оператора Гельмгольца

$$L[u] = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x, u(x))u(x).$$

Здесь считается, что l – некоторое натуральное число, и значения $V(x, \omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in C^l$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми $(l \times l)$ матрицами.

В последнем параграфе первой главы изучается разделимость общего нелинейного дифференциального оператора второго порядка

$$L[u] = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + V(x, u(x))u(x)$$

с матричными коэффициентами в весовом пространстве $L_{2,k}(R^n)^l$. Для этого оператора также доказывается коэрцитивное неравенство.

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению разделимости нелинейных дифференциальных операторов выше второго порядка. В этой главе, в основном, изучаются бигармонический оператор

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

и обыкновенный дифференциальный оператор шестого порядка

$$L[u] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x).$$

В этой главе также подробно рассмотрены некоторые примеры неразделимых операторов.

Третья глава диссертационной работы состоит из двух параграфов и посвящается проблеме коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве. В процессе доказательств основных результатов этой главы существенно используются коэрцитивные неравенства, установленные в первой главе диссертационной работы.

Новизна полученных результатов. Основными достижениями автора при выполнении диссертационной работы являются следующие результаты:

- установлены коэрцитивные оценки, и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами и нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в гильбертовом пространстве;
- изучены коэрцитивные свойства оператора Гельмгольца с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_{2,p}(R^n)^l$, и доказана теорема о разделимости нелинейного оператора Гельмгольца с матричным потенциалом;

- изучены коэрцитивные свойства нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными старшими коэффициентами в пространстве вектор – функций, и доказана теорема о разделимости общих нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами;
- изучены коэрцитивные свойства бигармонического оператора с нелинейным матричным потенциалом в пространстве $L_2(R^n)'$, и доказана теорема о разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом;
- установлены коэрцитивные оценки, и доказана теорема о разделимости нелинейного обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка в гильбертовом пространстве;
- найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами, и доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве;
- найдены условия коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка, и доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве.

Степень достоверности и апробация результатов исследования.

Научные положения, выводы и рекомендации, приведённые в диссертации, обоснованы строгими математическими доказательствами с применением общих методов теории операторов в гильбертовом пространстве и теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных. Достоверность и новизна полученных автором результатов не вызывает сомнений.

Основные результаты диссертации неоднократно обсуждались на международных научных конференциях, проходивших в Республике Таджикистан и Российской Федерации. Они опубликованы в научной печати, в том числе, в 16 публикациях в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте

Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки РФ. Шесть из этих работ входят в международные библиографические и реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический характер и могут найти применение в дальнейшем развитии теории делимости дифференциальных операторов, а также в теории граничных задач для уравнений с частными производными, в теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных и в спектральной теории дифференциальных операторов.

Приведенные в работе исследования могут быть использованы в специальных курсах по специальности «Математика» для студентов и аспирантов высших учебных заведений.

Достоинство и недостатки по содержанию и оформлению диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования. Безусловное достоинство диссертационной работы Каримова О.Х. заключается в строгой нелинейности дифференциальных операторов, для которых доказаны теоремы делимости и коэрцитивные неравенства.

К диссертационной работе имеются некоторые замечания по оформлению и содержанию диссертации, которые легко могут быть исправлены:

1. на стр. стр. 3 автореферата, 3-й абзац сверху вместо «впервые» написано «в первые», на стр. 4, 2-й абзац сверху вместо «К.Х.Бойматов» написано «К.Х.Бойматова», на стр.7, 2-й абзац сверху вместо «проблемой» написано «проблемой». Такие небрежности иногда встречаются и в тексте диссертации;

2. в диссертации встречаются фраза «легко можно проверить». Однако, чтобы убедиться в этом требуется выполнить большое количество математических выкладок и это затрудняет чтение работы.

Однако отметим, что все замеченные недостатки имеют технический характер и не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.

Автореферат диссертации достаточно полно отражает её содержание. Оформление диссертации и автореферата соответствует требованиям.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней». На основании вышеизложенного считаем, что диссертационная работа Каримова Олимджона Худойбердиевича «Коэрцитивные оценки и делимость нелинейных дифференциальных операторов» соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а ее автор Каримов Олимджон Худойбердиевич заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», профессор кафедры информатики и информационных технологий Российско-Таджикского (Славянского) университета

Ю.Хасанов

Место работы:

734025, г. Душанбе, ул. М. Турсун-заде, 30.
Российско-Таджикский (Славянский) университет.
Веб сайт: www.rtsu.tj
E-mail: yukhas60@mail.ru
Телефон: (+992) 93-500-40-86

Подпись Хасанова Ю. заверяю
Начальник ОК Российско-Таджикского
(Славянского) университета



Х.Х. Давлатов