ОТЗЫВ

научного консультанта на диссертацию Каримова Олимджона Худойбердиевича «Коэрцитивные оценки и разделимость нелинейных дифференциальных операторов», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертационная работа Каримова О.Х. посвящена исследованию разделимости дифференциальных операторов второго и более высокого порядка в некоторых L_2-пространствах, а также исследованию разрешимости некоторых нелинейных уравнений с частными производными. Наряду с теорем разделимости в работе доказываются некоторые коэрцитивные оценки для исследуемых операторов. В настоящее время теория разделимости дифференциальных операторов является одним из основных разделов современной теории дифференциальных операторов и результаты, полученные по этому разделу, используются в теории граничных задач для дифференциальных уравнений, в спектральной теории дифференциальных операторов и в теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных. Основоположниками этой теории считаются английский математик В.Н.Эверитта (W.N.Everitt) и шведский математик М.Гирца (M.Giertz), которые впервые в 1971 г. ввели в научную литературу понятие «разделимость дифференциального оператора». В своих пионерских работах они исследовали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Позже этому вопросу занимались многие математики, среди которых можно отметить Бойматова К.Х., Отелбаева М.О., Ойнарова Р.О., Гадоева М.Г., Муратбекова М.Б., Гоибова Д.С., Гриншпуна Э.З., Аткинсона В.М. (Atcinson F.V.), Эванса В.Д. (Evans W.D.), Цеттла А. (Zettl.A) Брауна Р.С. (Brown R.C.), Хинтона Д.Б. (Hinton D.B.), Чернявской Н. (Chernyaskaya N.), Шустера Л. (Shuster L.) и др.

Проблема разделимости дифференциальных операторов в случае операторов с частными производными впервые исследована Бойматовым К.Х. Он же показал, что результаты по разделимости операторов играют важную роль в исследовании асимптотики спектра операторов с частными производными и в доказательстве теорем вложения нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Основная часть опубликованных работ по теории разделимости относятся к случаю линейных дифференциальных операторов. Случай нелинейных дифференциальных операторов исследован, в основном, в случае, когда исследуемый оператор допускает представления в виде слабого нелинейного возмущения линейного оператора. Существенная отличия результатов Каримова О.Х. от результатов других авторов по разделимости дифференциальных операторов заключается в том, что они относятся к нелинейным операторам, которых нельзя представить в виде слабого нелинейного возмущения линейного оператора.

Диссертационная работа Каримова О.Х. состоит из введения, трех глав, списка литературы из 135 наименований, составляет 157 страниц текста, набранных на LaTeX.

Во введении дан исторический обзор результатов, связанных с темой работы и приведены формулировки основных теорем.

Первая глава состоит из пяти параграфов и посвящена исследованию разделимости нелинейных дифференциальных операторов с частными производными второго порядка. В этой главе найдены достаточные условия разделимости следующих операторов:

Оператор Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{\det g(x)}\ \ g^{-1}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right] + +V\big(x, u(x)\big)u(x); \tag{1}$$

Оператор Гельмгольца

$$L[u] = (-\Delta + k^2)u(x) + V\big(x, u(x)\big)u(x); \tag{2}$$

Нелинейный дифференциальный оператор следующего более общего вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + V\big(x, u(x)\big)u(x); \tag{3}$$

При этом разделимость оператора (1) изучается в пространстве $L_2(R^n)$, а разделимость операторов (2), (3) изучается в весовом пространстве $L_{2;\rho}(R^n)$, где $\rho = \rho(x)$ – весовая функция. В приведенных выше обозначениях $g(x) = \big(g_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{n}$ – невырожденная эрмитова матрица, $V(x,\ z), x \in R^n, z \in \mathbb{C}$, - положительная функция.

Во второй главе диссертационной работы Каримова О.Х. доказаны коэрцитивные неравенства для дифференциальных операторов порядка выше второго и как следствие из этих неравенств установлены разделимость исследуемых операторов. В этой главе автор изучает следующие дифференциальные операторы:

Нелинейный бигармонический оператор

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + V\big(x, u(x)\big)u(x); \tag{4}$$

Нелинейный обыкновенный дифференциальный оператор шестого порядка вида

$$L[u] = -u^{VI}(x) + V\big(x, u(x)\big)u(x). \tag{5}$$

Разделимость оператора (4) изучается в пространстве вектор-функций $L_2(R^n)^l$, где l – натуральное число, а разделимость оператора (5) исследуется в пространстве $L_2(R)$.

Как приложения результатов по разделимости дифференциальных операторов, полученных в первых двух глав диссертационной работы, в третьей главе работы изучается коэрцитивная разрешимость некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве.

Каримов О.Х. выступил с докладами о своих результатах в более 10 международных научных конференциях в известных научных центрах Российской Федерации. Основные результаты его диссертации опубликованы в 34 работах, 16 из которых входят в списке ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в том числе 5 статей входят в индексы цитирования Web of Science (WoS) и Scopus.

На основании вышесказанного считаю, что диссертационная работа Каримова Олимджона Худойбердиевича «Коэрцитивные оценки и разделимость нелинейных дифференциальных операторов» является законченным научным трудом и соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к докторским диссертациям, и её автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Научный консультант,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.01 – «Вещественный,
комплексный и функциональный анализ»),
заместитель директора Института
математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

С.А.Исхоков