АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. А.ДЖУРАЕВА

На правах рукописи

УДК 511.32

Аминов Асламбек Собирович

# Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой

## Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Душанбе – 2019

Работа выполнена в Институте математики имени А. Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | **Рахмонов Зарулло Хусенович,**<br>доктор физико-математических наук,<br>академик АН Республики Таджикистан,<br>профессор, директор института<br>математики им. А. Джураева АН РТ |
| Официальные оппоненты: | **Шабозов Мирганд Шабозович**,<br>доктор физико-математических наук,<br>академик АН Республики Таджикистан,<br>Таджикский национальный университет,<br>профессор кафедры функционального анализа<br>и дифференциальных уравнений |
| | **Мирзорахимов Шерали Хусенбоевич**,<br>кандидат физико–математических наук,<br>Бохтарский государственный<br>университет им. Н. Хусрава,<br>старший преподаватель кафедры<br>математического анализа |
| Ведущая организация: | Таджикский государственный педагогический<br>университет |

Защита состоится 11 октября 2019 г. в 09:00 часов на заседании диссертационного совета 6D.KOA-037 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA-037 Каримов О.Х.

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Пусть $\chi(n)$ – комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией *Дэвенпорта-Хейльбронна* называется функция, которая определяется соотношением

$$f(s) = \frac{1 - iæ}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + iæ}{2} L(s, \bar{\chi})$$

где $L(s, \chi)$ — функция Дирихле, соответствующая характеру $\chi$, то есть

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн[1], (см. также[2] с. 283 – 287). Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s), \qquad (1)$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется, и более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \le T$ превосходит $cT$, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1984 г. С.М. Воронин[3] доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) > c_2 T,$$

где $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

В 1980 г. С.М. Воронин[4] доказал, что тем не менее, *критическая прямая*, то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \le T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

---

[1] Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. V 11, pp. 181 -– 185 and 307 -– 312.

[2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана //–М.: Ил, 1953.

[3] Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1984. Т. 163, С. 74 – 77.

[4] Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой. // Известия АН СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44, № 1, С. 63 – 91.

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geq T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А.Карацуба. Он в 1989 году доказал [5,6], что *если* $\varepsilon$ *и* $\varepsilon_1$ *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0.001$*;* $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *и* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$*, то выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{2}$$

Оценку (6) назовём *неравенством А.А. Карацубы* для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой.

В 1993 г. А.А.Карацуба[7,8] получил более точную оценку: множитель $(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ в неравенстве (6) он заменил на $(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T})$, следствием чего явилось неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}).$$

В 2017 г. С.А.Гриценко[9] усилил последнюю оценку и получил неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Затем он[10] получил новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

**Цель исследования.** Целью работы является доказательство неравенства А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

**Методы исследования.** Степень обоснованности научных результатов диссертации подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно,

[5]Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2, С.303 – 315.

[6]Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета - функция Римана //– М.: Физматлит. 1994. –376с. –ISBN 5–02–014120–8.

[7]Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5, С. 3 – 14.

[8]Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1994. Т. 207, С. 180 – 196.

[9]Гриценко С.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна // Труды МИАН, 2017. Т. 296.С. 72 – 94.

[10]Гриценко С.А. О дробных моментах успокоенных $L$-функций Дирихле // Чебышевский сборник, 2017, Т. 18, № 4, С. 168 – 187.

- метода оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута, оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных, оценки полных рациональных сумм Хуа Ло – Кена и метода экспоненциальных пар;
- метода производящих функций, метода комплексного интегрирования и аналитических методов, применяемых в теории функций комплексного переменного;
- метода успокаивающих множителей Сельберга, формулы суммирования Эйлера и формулы обращения Мёбиуса.

**Научная новизна исследования.** Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получены новые оценки сумм Сельберга вида $S(Y)$ и $W(\theta)$;
- в терминах экспоненциальных пар получены новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра $H$ сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар;
- доказано неравенство А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину, а именно, если $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0.001$, $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, тогда для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках вида $[T, T+H]$ в критической прямой выполняется неравенство (6).

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах

- международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвящённая 75-летию со дня рождения Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015 г.

- XIV международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина, г. Саратов. 12 – 15 сентября 2016 г.

- международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- международная научная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения Л.Г. Михайлова, Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.

- международная научная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Душанбе, 20-21 июня 2018 г.

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2015 – 2019 гг.) и общеинститутский семинаре (2015 – 2019 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

**Публикации**. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работе, написанной совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.
**Структура и объём диссертации** Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 113 страниц. Список цитированной литературы включает 31 наименование.

## Краткое содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Введение к диссертации содержит обзор результатов, относящихся к теме диссертации, и формулировки основных полученных результатов.

Первая глава состоит из трёх параграфов, носит вспомогательный характер и посвящена выводу приближённых функциональных уравнений для двух специальных рядов Дирихле.

В первом параграфе первой главы приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Во втором параграфе первой главы доказана теорема 1.1 о приближённом функциональном уравнении для функции $G(t,\chi)$, которая получается из функции Дирихле $L(0,5+it,\chi)$ умножением на функцию $|\varphi(0,5+it)|^2$. Функция $|\varphi(0,5+it)|^2$ называется *успокаивающим множителем.*

Определение 1.1. *Функция $G(t,\chi)$ задаётся равенством*

$$G(t,\chi) = L(0,5+it,\chi)\,|\varphi\,(0,5+it)|^2\,,$$

*где*

$$\varphi(s) = \sum_{\nu<X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\le\nu<X, \\ \qquad 0, & \nu\ge X. \end{cases} \tag{3}$$

*а вещественные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac12}, \qquad Re\,s>1.$$

Из этого определения следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)|<1$ при любом $\nu>1$, а также

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0; \\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\ge1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5). \\ 0, & \text{если } k\ge1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5), \end{cases}$$

Заметим также, что значение характера $\chi(p)$ для простых чисел вида $p\equiv\pm1(mod\,5)$ является вещественным числом и $\chi(p^k)=(\pm1)^k$, то есть $\alpha(p^k)\chi(p^k)$ принимает только вещественные значения, поэтому

$$\alpha(p^k)\chi(p^k) = \alpha(p^k)\overline{\chi}(p^k).$$

Отсюда, а также из мультипликативности функции $\alpha(\nu)\chi(\nu)$ находим

$$\alpha(\nu)\chi(\nu) = \alpha(\nu)\overline{\chi}(\nu), \qquad |\alpha(\nu)\chi(\nu)|\le1.$$

Отсюда и из определения функции $\beta(\nu)$, найдем

$$\beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu) \equiv h(\nu), \qquad |h(\nu)|\le1,$$

то есть далее всюду, не ограничивая общности, будем считать, что $\overline{h}(\nu) = h(\nu)$.

Теорема 1.1. *При $t\ge t_0>0$ и $X\le t^{0,01}$ справедлива следующая формула:*

$$G(t,\chi) = \sum_{\lambda\le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} - \frac{\tau(\chi)}{\sqrt5}\,e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O\left(t^{-\frac14}X^2\right)$$

*, где*

$$a(\lambda)=\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2},\qquad \theta_1(t)=\frac{\pi}{4}+t-2t\ln P_1,\qquad P_1=\sqrt{\frac{5t}{2\pi}},$$

*$\lambda$ — положительные рациональные числа, знаменатель которых меньше $X$.*

Доказательство теоремы 1.1. проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных и методом $L$-рядов Дирихле.

Теорема 1.1. используется в третьем параграфе при доказательстве теоремы 1.2. о приближённом функциональном уравнении для функции $F(t)$.

Определение 1.2. *Функции $F(t)$ и $\theta(t)$ задаются равенствами*

$$F(t)=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2=$$
$$=e^{i\theta(t)}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$$

Из определения $F(t)$ и функционального уравнения (5) для функции $f(s)$ следует, что $F(t)$ при вещественных $t$ принимает вещественные значения, а вещественные нули $F(t)$ нечётного порядка являются нулями нечётного порядка $f(s)$, лежащими на критической прямой.

Теорема 1.2. *Пусть $T$ такое, что $T-\dfrac{\pi}{4}=4\pi k$, $k$ — целое число. Тогда при $T\le t\le T+H$ справедлива следующая формула:*

$$F(t)=2\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}+O(T^{-0{,}01}),\qquad P=\sqrt{\frac{5T}{2\pi}},$$

*где $\lambda$ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит $X$,*

$$A(\lambda)=\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},\qquad r(n)=\frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n)+\frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n).\tag{4}$$

Теорема 1.2 доказывается методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута и используется в третьей главе при доказательстве основной теоремы 3.1.

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена исследованию поведения сумм А. Сельберга вида $S(Y)$ и вида $W(\theta)$, а также тригонометрических сумм специального вида $W_j(T)$.

Определение 2.1. *Суммами А. Сельберга вида* $W(\theta)$ *и вида* $S(Y)$ *называются соответственно суммы*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$

$$S(Y) = \sum_{\lambda\le Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

*где* $\beta(\nu)$ *и* $A(\lambda)$ *— функции, определённые соответственно формулами* (7) *и* (8), *а* $\lambda$ *— положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит* $X$.

В первом параграфе второй главы для суммы А. Сельберга вида $S(Y)$ получена асимптотическая формула с двумя главными членами, коэффициенты которых, в свою очередь, являются соответственно суммами А. Сельберга вида $W(0)$ и вида $W(1-2\theta)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $T^{0,1} \le Y \le T$, $\frac{1}{4} \le \theta \le \frac{1}{2}$, *тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(0) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) W(1-2\theta) + O\left(Y^{-2\theta} X^2 \ln^2 X\right).$$

Доказательство леммы 2.1 проводится методом А. Сельберга с использованием свойств функции $r(n)$, природы чисел $\nu$ и формулы суммирования Эйлера.

Во втором параграфе второй главы найдена оценка сверху для суммы А. Сельберга вида $W(\theta)$.

Лемма 2.2. *При* $0 \le \theta \le \frac{1}{2}$ *для* $W(\theta)$ *справедлива оценка*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} = O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Доказательство леммы 2.2 также проводится методом А. Сельберга с применением формулы обращения Мёбиуса, природы чисел $\nu$, свойств рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, формулы Перрона, метода производящих функций и метода комплексного интегрирования.

При $j=0,1,2$ определим три вида сумм $W_j(T)$. Для этого введём параметры, от которых могут зависеть эти суммы: $P=\sqrt{5T/(2\pi)}$, $X=T^{0,01\varepsilon_1}$, $0<\varepsilon_1<0,001$, $\varepsilon_1$ — постоянное число; $\mathcal{L}=\ln P$; $k=[\ln\mathcal{L}]$; $\eta=c_1k\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$; $0<H<T^{\frac{1}{3}}$; $0<\varepsilon_2<0,001$, $\varepsilon_2$ и $c_1$ постоянные числа. Пользуясь определением чисел $A(\lambda)$ и обозначением $B(\varphi)=\left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k$, суммы $W_j=W_j(T)$ определим равенствами

$$W_0=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

А.А. Карацуба[5] при $H\geq T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ для этих сумм получил оценки вида

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,2;\quad W_1(T)\ll\left(\varepsilon_2^{-2k}(\ln T)^{-2k}+\varepsilon_2^{-k}\eta^k(\ln T)-k\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

В третьем параграфе в сочетании методов работ[5,11,12,13] и метода экспоненциальных пар для тригонометрических сумм $W_j(T)$ подобные оценки получены для параметра $H$ с меньшим порядком роста.

Теорема 2.1. *Пусть $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящее $0,001$, $k$ — натуральное число, $0<\eta<1$, $(\kappa,\lambda)$ — произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},\qquad æ(\kappa,\lambda)=\frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50},\qquad \sigma(\kappa)=\frac{\ln\mathcal{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

*Тогда при $H=T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ справедливы оценки:*

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\qquad j=0,\quad j=2;$$

$$W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathcal{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathcal{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}.$$

---

[5]Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] / А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2, С.303 – 315.

[11]Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета-функции Римана // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. В. 2. С. 161 – 162.

[12]Рахмонов З.Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы // Вестник Хорогского университета. 2002. Серия 1. №5. С. 1 – 25.

[13]Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

Оценки сумм $W_j(T)$ являются равномерными по введённым параметрам, тем самым, постоянные в знаках $\ll$ абсолютные.

Показатель $\theta(\kappa;\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$ также появляется в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2+y^2\le R$ в форме

$$K(R)=\#\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le R,\ x,y\in Z\right\}=\pi R+O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right)$$

и в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy\le N$, $x>0$, $y>0$. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ принадлежит М. Хаксли[14]. Он доказал, что

$$\theta_0=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda)=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}\le\frac{131}{416}=\frac{1}{3}-\frac{23}{3\cdot 416}\approx 0.31490,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Тогда из теоремы 2.1 следует

Следствие 2.1.1. *Пусть $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящее $0,001$, $k$ — натуральное число,*
$0<\eta<1$. *Тогда при $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ справедливы оценки:*

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,2;\qquad W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathcal{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathcal{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

В третьей главе, прилагая результаты предыдущих глав, а именно,

- теорему 1.2 о приближенном функциональном уравнении функции $F(t)$;
- лемму 2.1 об асимптотической формуле суммы А. Сельберга вида $S(Y)$;
- лемму 2.2 об оценке сверху суммы А. Сельберга вида $W(\theta)$;
- теорему 2.1 о новых оценках тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j=0,1,2$,

доказываем теорему 3.1 об оценке А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

[14]Huxley M.N. Sums and Lattice Points III // Proc. London Math. Soc. 2003. 87. 591 609.

Теорема 3.1. *Пусть $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$; $c_4$, $c_5$, $c_g$ *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* $1$,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

*Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$ такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T_0\cdot\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1.$$

Поэтому из теоремы 3.1 получим

Следствие 3.1.1. *Пусть $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Этот результат является уточнением теоремы А.А.Карацубы.

Доказательство теоремы 3.1 проводится по схеме работы[5] А.А.Карацубы. Основным утверждением, позволившим доказать эту теорему, является лемма 2.1 о новых оценках тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0,1,2$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику З.Х. Рахмонову за научное руководство, за постоянное внимание и помощь в работе.

## Публикации автора по теме диссертации

### В рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Минобрнауки РФ:

[5] Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] / А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2, С.303 – 315.

1 – А. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// ДАН РТ. 2016. Т. 59.№ 11-12. С. 453 – 456.

2 – А. Аминов А.С. О приближенном функциональном уравнении функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст] /А.С. Аминов// ДАН РТ. 2018. Т. 61.№ 9-10. С. 714 – 720.

3 – А. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов// ДАН РТ. 2018. Т. 61.№ 11-12. С.821 – 826.

## В других изданиях

4 – А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// «Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам». Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложение», посвященной 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ISSN: 1810-4134. Саратов 12-15 сентября 2016 г. № 8, С. 3 – 5.

5 – А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой[Текст] /А.С. Аминов // «Современные проблемы математики и её приложений». Материалы международной научной конференции, посвящённой 25-летию Государственной независимостми Республики Таджикистан. Филиал МГУ им.М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 3-4 июня 2016 г. С. 98 – 100.

6 – А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел» посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г. С. 14 – 17.

7 – А. Аминов А.С. О приближённом функциональном уравнение функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст] /А.С. Аминов// Материалы

научной конференции «Современные проблемы алгебры и теории чисел» посвященной 90 летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе. 14-15 ноября 2018 г. С.18 – 24.

8 – А. Аминов А.С. О числе нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А. С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений» Филиал Московского Государственного университета им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе. 21-22 июня 2018. С. 16 – 19.

9 – А. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции» посвященной 90 летию со дня рождения академика Михайлова Л.Г. Душанбе. 27-28 февраля 2018 г. С. 26 – 29.

10 – А. Аминов А.С. О доказательстве приближённого функционального уравнения функции Дэвенпорта-Хейлбронна [Текст] /А.С. Аминов // II Международная научно-практическая конференция "Наука и инновационные разработки-Северу 14-15 марта 2019 г., посвященная 25 летию Политехнического института (филиала) «Северо-Восточный федерального университета имени М.К. Аммосова» в г. Мирном. Сборник материалов в 2х частях. Часть 2. С. 161 – 165.

11 – А. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З. Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. Том 2. Издательство «МАКС Пресс». 2019. С. 498 – 501.

12 – А. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З. Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», Душанбе, РТСУ, 17-мая 2019 г. С. 275 – 280.

АКАДЕМИЯИ ИЛМҲОИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ИНСТИТУТИ МАТЕМАТИКАИ ба номи А.ҶӮРАЕВ

Бо ҳуқуқи дастхат

УДК 511.32

Аминов Асламбек Собирович

# Нулҳои дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобидаи функсияи Дэвенпорт-Хейлброн

## Автореферати

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси
01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Душанбе – 2019

Кор дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон таълиф шудааст

| | |
|---|---|
| Роҳбари илмӣ: | **Раҳмонов Зарулло Ҳусенович,**<br>доктори илмҳои физикаю математика,<br>академики АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон,<br>профессор, директори Институти<br>математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АИ ҶТ |
| Муқарризони расмӣ: | **Шабозов Мирганд Шабозович**,<br>доктори илмҳои физикаю математика,<br>академики АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон,<br>Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,<br>профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ<br>ва муодилаҳои диффиренсиалӣ |
| | **Мирзораҳимов Шерали Ҳусейнбоевич**,<br>номзади илмҳои физикаю математика,<br>Донишгоҳи давлатии Бохтар<br>ба номи Н. Хусрав, муаллими калони<br>кафедраи таҳлили математикӣ |
| Муассисаи пешбар: | Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон<br>ба номи С. Айнӣ |

Ҳимояи диссертатсия санаи 11-уми октябри соли 2019 соати 09:00 дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-037 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, к. Айнӣ 299/4, баргузор мегардад.

Бо матни пурраи диссертатсия дар китобхонаи Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон ва сомонаи http://www.mitas.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи “___” _______ соли 2019 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шӯрои диссертатсионии 6D.КОА-037,
номзади илмҳои физикаю математика Каримов О.Х.

## Тавсифи умумии диссертатсия

**Муҳиммияти мавзӯъ.** Бигузор $\chi(n)$ — характери комплексӣ аз рӯи модули 5 бошад, ки $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad 0 < æ < 1$$

аст.

Функсияи *Дэвенпорт-Хейлброн* гуфта, функсияеро меноманд, ки он бо баробарии

$$f(s) = \frac{1-iæ}{2}L(s,\chi) + \frac{1+iæ}{2}L(s,\bar{\chi})$$

муайян карда мешавад, ки дар инҷо $L(s,\chi)$ — функсияи Дирихле аз характери $\chi$, яъне

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Функсияи $f(s)$ — ро Дэвенпорт ва Хейлброн[1] дохил ва тадқиқ намуданд (инчунин нигаред [2] с. 283 – 287). Онҳо нишон доданд, ки функсияи $f(s)$ муодилаи функсионалии типи римании

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s) \qquad (5)$$

— ро қаноат менамояд, лекин барои функсияи $f(s)$ гипотезаи Риман (ҳамаи нулҳои комплексии функсияи $f(s)$ дар хати рости $Re\, s = 0.5$ мехобад) иҷро намешавад ва зиёда аз он миқдори зиёди нулҳои функсияи $f(s)$ дар соҳаи $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ аз $cT$, ($c > 0$ — доимии мутлақ) кам намебошад.

Соли 1984 С.М. Воронин[3] исбот намуд, ки ҳангоми $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) > c_2 T,$$

дар инҷо $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

Соли 1980 С.М. Воронин[4] исбот кард, ки дар айни ҳол, *хати рости критикӣ*, яъне $Res = \frac{1}{2}$ барои нулҳои функсияи $f(s)$ маҷмӯи фавқулода

---

[1] Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. V 11, pp. 181 -– 185 and 307 -– 312.

[2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана //–М.: Ил, 1953.

[3] Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1984. Т. 163, С. 74 – 77.

[4] Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой. // Известия АН СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44, № 1, С. 63 – 91.

мебошад, яъне барои $N_0(T)$ — миқдори нулҳои $f(s)$ дар порчаи $Res = 1/2$, $0 < Ims \leq T$ баҳои

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right)$$

ҷой дорад, ки дар инҷо $c > 0$ — доимии мутлақ, $T \geq T_0 > 0$ аст.

Бори аввал миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн $f(s)$ - ро дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ А.А.Каратсуба тадқиқ намуд. Ӯ соли 1989 исбот кард[5,6], ки *агар* $\varepsilon$ *ва* $\varepsilon_1$ *дилхоҳ ададҳои хурди мусбати фиксиронидашудаи аз* $0.001$ *калоннабуда;* $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *ва* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ *бошанд, пас муносибати зерин иҷро мешавад:*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{6}$$

Баҳои (6) – ро *нобаробарии А.А. Каратсуба* барои миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн $f(s)$ дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ меномем.

Соли 1993 А.А.Каратсуба[7,8] баҳои саҳеҳтар гирифт: зарбкунандаи $(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ — ро дар нобаробарии (6) ӯ бо $(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T})$ иваз намуд, ки аз он нобаробарии зерин бармеояд:

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}).$$

Ин баҳоро соли 2017 С.А.Гритсенко[9] беҳтар намуда, нишон дод, ки нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Сипас ӯ [10] баҳоҳои нави моментҳои касрии болоӣ ва поёнии қаторҳои оромкардашудаи Дирихлеро гирифт, ки аз онҳо муносибати зерин бармеояд:

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

---

[5] Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2, С.303 – 315.

[6] Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета - функция Римана //– М.: Физматлит. 1994. –376с. –ISBN 5–02–014120–8.

[7] Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5, С. 3 – 14.

[8] Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1994. Т. 207, С. 180 – 196.

[9] Гриценко С.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна // Труды МИАН, 2017. Т. 296.С. 72 – 94.

[10] Гриценко С.А. О дробных моментах успокоенных $L$-функций Дирихле // Чебышевский сборник, 2017, Т. 18, № 4, С. 168 – 187.

**Мақсади тадқиқот.** Мақсади кор барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот намудани нобаробарии А.А. Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн $f(s)$ дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ.

**Эътимоднокии натиҷаҳо ва методҳои тадқиқот.** Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои илмӣ дар рисолаи номзадӣ бо исботҳои қатъии математикӣ, ки бо татбиқи методҳои муосири зерини назарияи аналитикии ададҳо:

- методи Ван дер Корпут оиди баҳои суммаҳои тригонометрии махсус ва интегралҳо, баҳои интегралҳои тригонометрӣ аз рӯи бузургии модулҳои ҳосилаҳо, баҳои суммаи пурраи ратсионалии Хуа Ло Кен ва усули ҷуфтҳои экспоненсиалӣ;
- методи функсияҳои ҳосилкунанда, методи интегронии комплексӣ ва методҳои аналитикии дар назарияи функсияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ тадбиқшаванда;
- методи зарбкунандаҳои оромкунандаи Селберг, формулаи суммиронии Эйлер ва формулаи баргардандагии Мёбиус

гирифта шудаанд, тасдиқ карда шудааст.

**Навоварии илмии тадқиқот.** Дар диссертатсия натиҷаҳои нави бо исботҳои муфассал асосноккардашудаи зерин гирифта шудаанд:

- баҳои нави суммаҳои Селберги намудҳои $S(Y)$ ва $W(\theta)$ гирифта шудааст;
- дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ баҳои нави аз рӯи параметрҳо мунтазами суммаҳои махсуси тригонометрии $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$ гирифта шудааст ва масъала оиди баҳои ғайритривиалии ин суммаҳо нисбат ба параметри $H$ ба масъалаи ҷустуҷӯи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст;
- барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар нобаробарии А.А. Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн $f(s)$ дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ исбот карда шудаааст, яъне агар $\varepsilon$ ва $\varepsilon_1$ дилхоҳ ададҳои хурди мусбати фиксиронидашудаи аз 0.001 калоннабуда, $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ бошанд, пас барои миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн $f(s)$ дар порчаҳои кӯтоҳи намуди $[T, T+H]$ дар хати рости критикӣ нобаробарии (6) иҷро мешавад.

**Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ.** Кор характери назариявӣ дорад. Мутахассисони соҳаи назарияи аналитикии ададҳо метавонанд натиҷаҳо ва методикаи гирифтани онҳоро истифода баранд.

**Тасвиби кор.** Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар конференсияҳо ва семинарҳо маърӯза карда шудаанд:

- конференсияи байналмилалии «Таҳлили математикӣ, муодилаҳои диффенренсиалӣ ва назарияи ададҳо» бахшида ба 75-солагии профессор Т.С. Сабиров (Душанбе, 29-30 октябри 2015);
- XIV- ум конференсияи байналмилалии «Алгебра ва назарияи ададҳо: муаммоҳои муосир ва тадбиқи онҳо», бахшида ба 80-солагии мавлуди Г.И. Архипов ва С.М. Воронин, ш. Саратов. 2016 с.;
- конференсияи илмии байналмилалии «Муодилаҳои диффенренсиалӣ, таҳлили математикӣ ва назарияи ададҳо» бахшида ба 25-солагии XVI шӯрои Олии Ҷумҳурии Тоҷикистон (ш. Қурғонтеппа, 27-28-уми октябри соли 2017);
- конференсияи илмии байналмилалӣ бахшида ба 90-солагии академики АИ ҶТ, Михайлов Л.Г. ( Душанбе, 27-28 феврали соли 2018);
- конференсияи илмии байналмилалии «Муаммоҳои муосири математикӣ ва тадбиқи онҳо» (15-16 июни соли 2018 дар Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе);
- семинарҳои шӯъбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топология (солҳои 2015 – 2019) ва семинарҳои умумиинститутӣ (солҳои 2015 – 2019) дар Институти математикаи ба номи А. Джураевӣ АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон;
- семинари кафедраи «Алгебра ва назарияи ададҳо» дар Донишгоҳи милли Тоҷикистон.

**Интишорот.** Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар дувоздаҳ мақолаи номгӯи онҳо дар охири автореферат овардашуда нашр шудаанд. Дар корхои бо З.Ҳ. Раҳмонов навишташуда гузориши масъала ва интихоби методикаи исботи натиҷаҳо ба ҳаммуалллиф тааллуқ дорад.

**Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия.** Диссертатсия аз муқаддима ва се боб иборат аст, ки ба параграфҳо ҷудо шудааст. Ҳаҷми умумии кор 113 саҳифа мебошад. Рӯйхати адабиёти илмӣ фарогири 31 номгӯ мебошад.

# Муҳтавои мухтасари диссертатсия

Кори диссертатсионӣ аз муқаддима ва се боб иборат аст. Дар муқаддимаи диссертатсия шарҳи натиҷаҳои ба мавзӯи диссертатсия алоқаманд ва натиҷаҳои асосӣ оварда шудааст.

Боби якум аз 3 параграф иборат буда, характери ёрирасон дорад ва ба ҳосил намудани муодилаҳои тақрибии функсионалӣ барои ду қатори махсуси Дирихле бахшида шудааст.

Дар параграфи якуми боби якум леммаҳои маълум оварда шуданд, ки дар параграфҳои оянда истифода шудаанд.

Дар параграфи дуюми боби якум теоремаи 1.1 оиди муодилаи тақрибии функсионалии функсияи $G(t,\chi)$, ки он аз функсияи Дирихле $L(0,5{+}it,\chi)$ дар натиҷаи зарб намудан ба функсияи $|\varphi(0,5{+}it)|^2$ ҳосил мешавад, исбот карда шудааст. Функсияи $|\varphi(0,5{+}it)|^2$ *зарбкунандаи оромкунанда* номида мешавад.

Таърифи 1.1. *Функсияи $G(t,\chi)$ бо баробарии зерин дода мешавад:*

$$G(t,\chi) = L(0,5+it,\chi)\left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2,$$

*дар ин ҷо*

$$\varphi(s) = \sum_{\nu<X}\frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X}\frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\le\nu<X,\\ 0, & \nu\ge X.\end{cases} \qquad (7)$$

*ва ададҳои ҳақиқии $\alpha(\nu)$ аз муносибати*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Re\,s>1,$$

*муайян карда мешавад.*

Аз ин таъриф инчунин мултипликативӣ будани функсияи $\alpha(\nu)$ ва $|\alpha(\nu)|<1$, ҳангоми $\nu>1$, инчунин муносибати зайл бармеояд:

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{агар } k=0;\\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{агар } k\ge1 \text{ ва } p\equiv\pm1(mod\,5);\\ 0, & \text{агар } k\ge1 \text{ ва } p\not\equiv\pm1(mod\,5).\end{cases}$$

Қайд кардан ҷоиз аст, ки қимати характери $\chi(p)$ барои ҳамаи ададҳои соддаи намуди $p\equiv\pm1(mod\,5)$ адади ҳақиқӣ мебошад ва $\chi(p^k)=(\pm1)^k$, яъне $\alpha(p^k)\chi(p^k)$ танҳо қиматҳои ҳақиқӣ қабул мекунанд, пас

$$\alpha(p^k)\chi(p^k) = \alpha(p^k)\overline{\chi}(p^k).$$

Аз ин ҷо, инчунин аз мултипликативӣ будани функсияи $\alpha(\nu)\chi(\nu)$ ҳосил мекунем:

$$\alpha(\nu)\chi(\nu) = \alpha(\nu)\overline{\chi}(\nu), \qquad |\alpha(\nu)\chi(\nu)| \leq 1.$$

Аз ин ҷо ва аз таърифи функсияи $\beta(\nu)$ меёбем:

$$\beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu) \equiv h(\nu), \qquad |h(\nu)| \leq 1,$$

яъне минбаъд умумиятро маҳдуд накарда, ҳисоб мекунем, ки $\overline{h}(\nu) = h(\nu)$.

Теоремаи 1.1. *Ҳангоми $t \geq t_0 > 0$ ва $X \leq t^{0,01}$ будан, формулаи зерин ҷой дорад:*

$$G(t,\chi) = \sum_{\lambda \leq P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} - \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}}\, e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda \leq P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right),$$

*дар ин ҷо*

$$a(\lambda) = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2}, \qquad \theta_1(t) = \frac{\pi}{4} + t - 2t\ln P_1, \qquad P_1 = \sqrt{\frac{5t}{2\pi}},$$

*$\lambda$ — ададҳои ратсионалии мусбати махраҷашон хурд аз $X$.*

Исботи теоремаи 1.1. бо методи Ван дер Корпут оиди баҳои суммаҳои тригонометрии махсус бо татбиқи баҳои интегралҳои тригонометрӣ аз рӯи бузургии модулҳои ҳосилаҳо ва методи $L$ — қаторҳои Дирихле гузаронида мешавад.

Теоремаи 1.1. дар параграфи сеюм ҳангоми исботи теоремаи 1.2. оиди муодилаи тақрибии функсионалӣ барои функсияи $F(t)$ истифода бурда мешавад.

Таърифи 1.2. *Функсияҳои $F(t)$ ва $\theta(t)$ бо баробариҳои зерин дода мешаванд:*

$$F(t) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 =$$
$$= e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2.$$

Аз таърифи $F(t)$ ва муодилаи функсионалии (5) барои функсияи $f(s)$ бармеояд, ки $F(t)$ барои $t$–ҳои ҳақиқӣ қимати ҳақиқӣ қабул мекунад ва нулҳои ҳақиқии тартибашон тоқи $F(t)$ нулҳои тартибашон тоқи дар хати рости критикӣ хобидаи $f(s)$ мебошанд.

ТЕОРЕМАИ 1.2. *Бигузор $T$ шарти $T-\dfrac{\pi}{4}=4\pi k$ – ро қаноат кунонад, $k$ — адади бутун. Он гоҳ, ҳангоми $T\le t\le T+H$ формулаи зерин ҷой дорад:*

$$F(t)=2\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}+O(T^{-0{,}01}),\qquad P=\sqrt{\frac{5T}{2\pi}},$$

*$\lambda$ — ададҳои ратсионалии мусбати махраҷашон хурд аз $X$,*

$$A(\lambda)=\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},\qquad r(n)=\frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n)+\frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n).\qquad (8)$$

Теоремаи 1.2. бо методи Ван дер Корпут оиди баҳои суммаҳои тригонометрии махсус исбот карда мешавад ва дар боби сеюм ҳангоми исботи теоремаи асосии 3.1. истифода бурда мешавад.

Боби дуюм аз се параграф иборат буда, ба тадқиқи рафторҳои суммаҳои А.Селберги намуди $S(Y)$ ва $W(\theta)$ ва инчунин суммаҳои тригонометрии махсуси намуди $W_j(T)$ бахшида шудааст.

ТАЪРИФИ 2.1. *Суммаҳои А. Селберги намуди $W(\theta)$ ва намуди $S(Y)$ гуфта, мувофиқан суммаҳои зеринро меноманд:*

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$
$$S(Y)=\sum_{\lambda\le Y}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

*дар ин ҷо $\beta(\nu)$ ва $A(\lambda)$ — функсияҳое мебошанд, ки мувофиқан бо формулаҳои (7) ва (8) муайян карда мешаванд, $\lambda$ — ададҳои ратсионалии мусбати махраҷашон хурд аз $X$.*

Дар параграфи якуми боби дуюм бароисуммаҳои А.Селберги намуди $S(Y)$ формулаи асимптотӣ бо ду аъзои асосӣ, ки коэффитсиентҳои онҳо дар навбати худ мувофиқан суммаҳои А.Селберги намуди $W(0)$ ва намуди $W(1-2\theta)$ мебошанд, ҳосил карда шудааст.

ЛЕММАИ 2.1. *Бигузор $T^{0,1}\le Y\le T$, $\frac{1}{4}\le\theta\le\frac{1}{2}$, он гоҳ формулаи асимптотии зерин ҷой дорад:*

$$S(Y)=\frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}W(0)+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2 X\right).$$

Исботи леммаи 2.1. бо методи А.Селберг, истифодаи хосиятҳои функсияи $r(n)$, табиати ададҳои $\nu$ ва формулаи суммиронии Эйлер гузаронида мешавад.

Дар параграфи дуюми боби дуюм барои суммаҳои А.Селберги намуди $W(\theta)$ аз боло баҳо гирифта шудааст.

Леммаи 2.2. *Ҳангоми $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ барои $W(\theta)$ баҳои зерин дуруст аст:*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} = O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Исботи леммаи 2.2. ҳам бо методи А.Селберг ва тадбиқи формулаи баргардандаи Мёбиус, табиати ададҳои $\nu$, хосиятҳои қаторҳои Дирихле бо коэффитсиентҳои мултипликативӣ, формулаи Перрон, методи функсияҳои ҳосилкунанда ва методи интегронии комплексӣ гузаронида мешавад.

Ҳангоми $j = 0, 1, 2$ се суммаҳои намуди $W_j(T)$ – ро муайян мекунем. Барои ин параметрҳоеро, ки аз онҳо ин суммаҳо метавонанд вобаста бошанд, дохил мекунем: $P = \sqrt{5T/(2\pi)}$, $X = T^{0,01\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 0,001$, $\varepsilon_1$ — адади доимӣ; $\mathcal{L} = \ln P$; $k = [\ln \mathcal{L}]$; $\eta = c_1 k \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$; $0 < H < T^{\frac{1}{3}}$; $0 < \varepsilon_2 < 0,001$, $\varepsilon_2$ ва $c_1$ адади доимӣ. Таърифи ададҳои $A(\lambda)$ ва ишораи $B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k$ - ро истифода бурда, суммаҳои $W_j = W_j(T)$ - ро бо баробариҳои зерин муайян мекунем:

$$-W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right) \overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

А.А. Каратсуба[5] ҳангоми $H \geq T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ барои ин суммаҳо баҳоҳои зеринро гирифт:

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, 2; \quad W_1(T) \ll \left(\varepsilon_2^{-2k}(\ln T)^{-2k} + \varepsilon_2^{-k}\eta^k(\ln T) - k\right) T^{-\varepsilon_1}.$$

[5] Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] / А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2, С.303 – 315.

Дар параграфи сеюм якҷоя бо методҳои корҳои [5,11,12,13] ва методи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ барои суммаҳои тригонометрии $W_j(T)$ бо параметри $H$–и тартибаш хурдтар, баҳоҳои ба ин монанд гирифта шудаанд.

ТЕОРЕМАИ 2.1. *Бигузор* $\varepsilon_1$ *ва* $\varepsilon_2$ *— дилхоҳ ададҳои хурди фиксиронидашудаи мусбати аз* $0,001$ *калоннабуда бошанд,* $k$ *— адади натуралӣ,* $0 < \eta < 1$, $(\kappa,\lambda)$ *— ҷуфти экспоненсиалии дилхоҳ,*

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad æ(\kappa,\lambda) = \frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln\mathcal{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

*Он гоҳ, барои* $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ *баҳои зерин ҷой дорад:*

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \qquad j = 0, \quad j = 2;$$
$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathcal{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k\mathcal{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}.$$

Баҳоҳои суммаҳои $W_j(T)$ нисбат ба параметрҳои дохилнамуда мунтазам мебошанд, яъне доимиҳои дар зери аломати $\ll$ мутлақанд.

Нишондиҳандаи $\theta(\kappa;\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$ инчунин дар муаммои Гаусс оиди миқдори нуқтаҳои бутун дар доираи $x^2+y^2 \le R$ дар шакли

$$K(R) = \#\left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le R,\ x,y \in Z\right\} = \pi R + O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right)$$

ва дар баҳои аъзои боқимонда дар муаммои тақсимкунандаҳои Дирихле оиди нуқтаҳои бутун дар гиперболаи $xy \le N$, $x > 0$, $y > 0$ пайдо мешаванд.

Беҳтарин баҳо аз боло барои $\theta(\kappa;\lambda)$ ба М. Хаксли[14] тааллуқ дорад. Ӯ нишон дод, ки

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \le \frac{131}{416} = \frac{1}{3} - \frac{23}{3\cdot 416} \approx 0.31490,$$

дар ин ҷо $\mathcal{P}$ — маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ.

Ҳамин тавр аз теоремаи 2.1. бармеояд

НАТИҶАИ 2.1.1. *Бигузор* $\varepsilon_1$ *ва* $\varepsilon_2$ *— дилхоҳ ададҳои хурди фиксиронидашудаи мусбати аз* $0,001$ *калоннабуда,* $k$ *— адади натуралӣ,*

[11] Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета-функции Римана // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. В. 2. С. 161 – 162.

[12] Рахмонов З.Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы // Вестник Хорогского университета. 2002. Серия 1. №5. С. 1 – 25.

[13] Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

[14] Huxley M.N. Sums and Lattice Points III // Proc. London Math. Soc. 2003. 87. 591 609.

$0 < \eta < 1$ *бошанд. Он гоҳ ҳангоми* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ *баҳои зерин ҷой дорад:*

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0,2; \qquad W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathcal{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathcal{L}\right) T^{-\varepsilon_1}.$$

Дар боби сеюм бо тадбиқи натиҷаҳои бобҳои пешина, маҳз

- теоремаи 1.2 оиди муодилаи тақрибии функсионалии функсияи $F(t)$;
- леммаи 2.1 оиди формулаи асимптотикии суммаи А.Селберги намуди $S(Y)$;
- леммаи 2.2 оиди баҳо аз болои суммаи А.Селберги намуди $W(\theta)$;
- теоремаи 2.1 оиди баҳои нави суммаҳои тригонометрии $W_j(T)$, $j = 0,1,2$,

барои порчаҳои дорои дарозии кӯтоҳтар теоремаи 3.1 оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн $f(s)$ дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ исбот карда шудаааст.

Теоремаи 3.1. *Бигузор* $\varepsilon_1$ *ва* $\varepsilon_2$ *— дилхоҳ ададҳои хурди фиксиронидашудаи мусбати аз* $0,001$ *калоннабуда;* $c_4$, $c_5$, $c_g$ *- доимиҳои мусбати мутлақи аз* $1$ *калон,*

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

*Он гоҳ ҳангоми* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *муносибати зерин иҷро мешавад:*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Умумиятро маҳдуд накарда, ҳисоб мекунем, ки барои $T_0 = T_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$ муносибати зерин иҷро мешавад:

$$c_7 (\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1.$$

Аз ин ҷо аз теоремаи 3.1 ҳосил мекунем

Натиҷаи 3.1.1. *Бигузор $\varepsilon_1$ ва $\varepsilon_2$ — дилхоҳ ададҳои хурди фиксиронидашудаи мусбати аз $0,001$ калоннабуда бошанд. Он гоҳ ҳангоми $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ муносибати зерин иҷро мешавад:*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Ин натиҷа теоремаи А.А. Каратсубаро аниқтар мекунад.

Исботи теоремаи 3.1. бо нақшаи кори[5] гузаронида мешавад. Натиҷаи асосие, ки ба исботи ин теорема имкон медиҳад, леммаи 2.1. оиди баҳои нави суммаҳои тригонометрии намуди $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ мебошад.

Дар охир муаллиф миннатдории самимии худро ба роҳбари илмӣ академики АИ ҶТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Раҳмонов З.Ҳ. барои гузориши масъала ва ёрии пурарзишашон дар иҷрои рисола баён менамояд.

## Интишороти муаллиф оид ба мавзӯи диссертатсия

### Дар маҷаллаҳои тақризшаванда аз номгӯи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Вазорати Маориф ва илми ФР нашр шудаанд:

1 – А. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// ДАН РТ. 2016. Т. 59.№ 11-12. С. 453 – 456.

2 – А. Аминов А.С. О приближенном функциональном уравнении функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст] /А.С. Аминов// ДАН РТ. 2018. Т. 61.№ 9-10. С. 714 – 720.

3 – А. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов// ДАН РТ. 2018. Т. 61.№ 11-12. С.821 – 826.

### дар дигар нашрияҳо

4 – А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// «Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным

[5] Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] / А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2, С.303 – 315.

вопросам». Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложение», посвященной 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ISSN: 1810-4134. Саратов 12-15 сентября 2016 г. № 8, С. 3 – 5.

5 – А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой[Текст] /А.С. Аминов // «Современные проблемы математики и её приложений». Материалы международной научной конференции, посвящённой 25-летию Государственной независимостми Республики Таджикистан. Филиал МГУ им.М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 3-4 июня 2016 г. С. 98 – 100.

6 – А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел» посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г. С. 14 – 17.

7 – А. Аминов А.С. О приближённом функциональном уравнение функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст] /А.С. Аминов// Материалы научной конференции «Современные проблемы алгебры и теории чисел» посвященной 90 летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе. 14-15 ноября 2018 г. С.18 – 24.

8 – А. Аминов А.С. О числе нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А. С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений» Филиал Московского Государственного университета им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе. 21-22 июня 2018. С. 16 – 19.

9 – А. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст] /А.С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции» посвященной 90 летию со дня рождения академика Михайлова Л.Г. Душанбе. 27-28 февраля 2018 г. С. 26 – 29.

10 – A. Аминов А.С. О доказательстве приближённого функционального уравнения функции Дэвенпорта-Хейлбронна [Текст] /А.С. Аминов // II Международная научно-практическая конференция "Наука и инновационные разработки-Северу 14-15 марта 2019 г., посвященная 25 летию Политехнического института (филиала) «Северо-Восточный федерального университета имени М.К. Аммосова» в г. Мирном. Сборник материалов в 2х частях. Часть 2. С. 161 – 165.

11 – A. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З. Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. Том 2. Издательство «МАКС Пресс». 2019. С. 498 – 501.

12 – A. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З. Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», Душанбе, РТСУ, 17-мая 2019 г. С. 275 – 280.

**Аннотация диссертации Аминова Асламбека Собировича на тему «Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких промежутках критической прямой» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел**

**Ключевые слова:** функция Дэвенпорта-Хейльбронна, экспоненциальная пара, критическая прямая.

**Актуальность темы.** Английские математики Дэвенпорт и Хейльбронн ввели функцию $f(s)$, которая удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа, однако для $f(s)$ гипотеза Римана не выполняется, и более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ превосходит $cT$, $c > 0$ — абсолютная постоянная. А.А.Карацуба, исследуя количество нулей функции $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой, доказал, что если $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0.001$; $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, то выполняется соотношение $N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

В отличие от этого, в диссертационной работе вывод неравенства А.А. Карацубы относительно параметра $H$ исследуется в терминах экспоненциальных пар.

**Цель работы.** Целью работы является доказательство неравенства А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получены новые оценки сумм Сельберга вида $S(Y)$ и $W(\theta)$;
- в терминах экспоненциальных пар получены новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра $H$ сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар;
- доказано, что если $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0.001$, $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, тогда для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках вида $[T, T+H]$ критической прямой выполняется неравенство А.А. Карацубы .

## Шарҳи мухтасар ба рисолаи диссертатсионии Аминов Асламбек Собирович дар мавзӯи «Нулҳои дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобидаи функсияи Дэвенпорт-Хейлброн» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

**Калимаҳои калидӣ:** функсияи Дэвенпорт-Хейлброн, ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, хати рости критикӣ.

**Муҳимияти мавзӯъ.** Математикони англис Дэвенпорт ва Хейлброн функсияи $f(s)$ – ро дохил намуданд, ки он муодилаи функсионалии навъи Риманро қаноат намуда, лекин барои функсияи $f(s)$ гипотезаи Риман иҷро намешавад ва зиёда аз он миқдори нулҳои функсияи $f(s)$ дар соҳаи $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ аз $cT$, ($c > 0$ — доимии мутлақ) кам намебошад. А.А.Каратсуба миқдори нулҳои ин функсияро дар порчаҳои кӯтоҳи хати критикӣ тадқиқ намуда, исбот намуд, ки агар $\varepsilon$ ва $\varepsilon_1$ дилхоҳ ададҳои хурди мусбати фиксиронидашудаи аз 0.001 калоннабуда; $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ ва $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ бошанд, он гоҳ муносибати $N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ ҷой дорад.

Дар кори диссертатсионӣ бошад, ҳосил намудани нобаробарии А.А. Каратсуба нисбат ба параметри $H$ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ тадқиқ карда мешавад.

**Мақсади тадқиқот.** Исбот намудани нобаробарии А.А. Каратсуба оиди миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар.

**Навигариҳои илмӣ.** Дар диссертатсия натиҷаҳои нави бо исботҳои муфассал асосноккардашудаи зерин гирифта шудаанд:

- баҳои нави суммаҳои Селберги намудҳои $S(Y)$ ва $W(\theta)$ гирифта шудааст;
- дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ баҳои нави аз рӯи параметрҳо мунтазами суммаҳои махсуси тригонометрии $W_j(T)$, $j = 0;1;2$ гирифта шудааст ва масъала оиди баҳои ғайритривиалии ин суммаҳо нисбат ба параметри $H$ ба масъалаи ҷустуҷӯи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст;
- исбот карда шудааст, ки агар $\varepsilon$ ва $\varepsilon_1$ дилхоҳ ададҳои хурди мусбати фиксиронидашудаи аз 0.001 калоннабуда, $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ бошанд, пас барои миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлброн $f(s)$ дар порчаҳои кӯтоҳи намуди $[T, T+H]$ дар хати рости критикӣ нобаробарии А.А. Каратсуба иҷро мешавад.

**Abstract of the thesis of Aminov Aslambek Sobirovich on the topic "Zeros of the Davenport-Heilbronn function, lying in short intervals of the critical line" for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.06 – Mathematical logic, algebra and number theory**

**Keywords:** Davenport-Heilbronn function, exponential pair, critical line.

**Relevance of the topic.** English mathematicians Davenport and Heilbronn introduced the function $f(s$, which satisfies the functional equation of Riemann type, but for $f(s)$ the Riemann hypothesis does not hold, and moreover, the number of zeros of $f(s)$ in the region $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ exceeds $cT$, $c > 0$ is the absolute constant. Investigating the number of zeros of the function $f(s)$ in short intervals of the critical line, AA Karatsuba proved that if $\varepsilon$ and $\varepsilon_1$ — arbitrarily small fixed positive numbers not exceeding $0.001$; $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ and $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, then the relation $N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

In contrast, in the dissertation, the A. A. Karatsuba inequality derivation with respect to the parameter $H$ is investigated in terms of exponential pairs.

**Objective.** The aim of the paper is to prove the A.A.Karatsuba inequality for the number of zeros of the Davenport-Heilbronn function $f(s)$ in short intervals of the critical line for intervals having a shorter length.

**Scientific novelty.** The main results of the thesis are new, they are substantiated by detailed evidence and are as follows:

- new estimates of the Selberg sums of the form $S(Y)$ and $W(\theta)$ were obtained;

- in terms of exponential pairs, new uniform estimates with respect to the parameters of special trigonometric sums $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$ were obtained, and the problem of estimating these sums with respect to the $H$ parameter is nontrivial to the problem of finding exponential pairs;

- it was proved that if $\varepsilon$ and $\varepsilon_1$ are arbitrarily small fixed positive numbers not exceeding $0.001$, $H = T^{\frac{131}{416}\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, then for the number of zeros of the Davenport - Heilbronn function $f(s)$ in short intervals of the form $[T, TH]$ of the critical line, the A.A. Karatsuba. inequality is satissfaid.