Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи
УДК 511.32

АМИНОВ АСЛАМБЕК СОБИРОВИЧ

НУЛИ ФУНКЦИИ ДЭВЕНПОРТА-ХЕЙЛЬБРОННА, ЛЕЖАЩИЕ В КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Специальность 01.01.06 — Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
академик АН РТ, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Пусть $\chi(n)$ - комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией *Дэвенпорта-Хейльбронна* называется функция, которая определяется соотношением

$$f(s) = \frac{1 - iæ}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + iæ}{2} L(s, \bar{\chi})$$

где $L(s, \chi)$ — функция Дирихле, соответствующая характеру χ, то есть

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1] , (см. также [2] с. 283 – 287). Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s), \qquad (1)$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется, и более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1984 г. С.М. Воронин [3] доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) > c_2 T,$$

где $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

В 1980 г. С.М. Воронин [4] доказал, что тем не менее, *критическая прямая*, то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leq T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geq T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А.Карацуба. Он в 1989 году доказал [5, 6], что *если* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0.001*;* $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *и* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$*, то выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \qquad (2)$$

Оценку (2) назовём *неравенством А.А. Карацубы* для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой.

В 1993 г. А.А.Карацуба [7, 8] получил более точную оценку: множитель $(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ в неравенстве (2) он заменил на $(\ln T)^{\frac{1}{2}}\exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T})$, следствием чего явилось неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}}\exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}).$$

В 2017 г. С.А.Гриценко [9] усилил последнюю оценку и получил неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Затем он [10] получил новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Цель работы. Целью работы является доказательство неравенства А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Методы исследования. Степень обоснованности научных результатов диссертации подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно,

- метода оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута, оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных, оценки полных рациональных сумм Хуа Ло – Кена и метода экспоненциальных пар;
- метода производящих функций, метода комплексного интегрирования и аналитических методов, применяемых в теории функций комплексного переменного;
- метода успокаивающих множителей Сельберга, формулы суммирования Эйлера и формулы обращения Мёбиуса.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получены новые оценки сумм Сельберга вида $S(Y)$ и $W(\theta)$;
- в терминах экспоненциальных пар получены новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$, и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар;
- доказано неравенство А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину, а именно, если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, тогда для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках вида $[T, T+H]$ в критической прямой выполняется неравенство (2).

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвящённая 75-летию со дня рождения Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015 г.

- XIV международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина, г. Саратов. 12-15 сентября 2016 г.

- международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- международная научная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения Л.Г. Михайлова, Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.

- международная научная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Душанбе, 20-21 июня 2018 г.

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2015 - 2019 гг.) и общеинститутские семинары (2015 - 2019 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работе, написанной совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 113 страниц. Список цитированной литературы включает 31 наименование.

Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Введение к диссертации содержит обзор результатов, относящихся к теме диссертации, и формулировки основных полученных результатов.

Первая глава состоит из трёх параграфов, носит вспомогательный характер и посвящена выводу приближённых функциональных уравнений для двух специальных рядов Дирихле.

В первом параграфе первой главы приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Во втором параграфе первой главы доказана теорема 1.1 о приближённом функциональном уравнении для функции $G(t,\chi)$, которая получается из функции Дирихле $L(0,5+it,\chi)$ умножением на функцию $|\varphi(0,5+it)|^2$. Функция $|\varphi(0,5+it)|^2$ называется *успокаивающим множителем.*

Определение 1.1. *Функция* $G(t,\chi)$ *задаётся равенством*

$$G(t,\chi) = L(0,5+it,\chi)\left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2,$$

где

$$\varphi(s) = \sum_{\nu<X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\le\nu<X, \\ 0, & \nu\ge X. \end{cases} \tag{3}$$

а вещественные числа $\alpha(\nu)$ *находятся из соотношения*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Re\,s>1.$$

Из этого определения следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)| < 1$ при любом $\nu > 1$, а также

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \equiv \pm 1 (mod\, 5). \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \not\equiv \pm 1 (mod\, 5), \end{cases}$$

Заметим также, что значение характера $\chi(p)$ для простых чисел вида $p \equiv \pm 1 (mod\, 5)$ является вещественным числом и $\chi(p^k) = (\pm 1)^k$, то есть $\alpha(p^k)\chi(p^k)$ принимает только вещественные значения, поэтому

$$\alpha(p^k)\chi(p^k) = \alpha(p^k)\overline{\chi}(p^k).$$

Отсюда, а также из мультипликативности функции $\alpha(\nu)\chi(\nu)$ находим

$$\alpha(\nu)\chi(\nu) = \alpha(\nu)\overline{\chi}(\nu), \qquad |\alpha(\nu)\chi(\nu)| \leq 1.$$

Отсюда и из определения функции $\beta(\nu)$, найдем

$$\beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu) \equiv h(\nu), \qquad |h(\nu)| \leq 1,$$

то есть далее всюду, не ограничивая общности, будем считать, что $\overline{h}(\nu) = h(\nu)$.

Теорема 1.1. *При $t \geq t_0 > 0$ и $X \leq t^{0{,}01}$ справедлива следующая формула:*

$$G(t, \chi) = \sum_{\lambda \leq P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} - \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}}\, e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda \leq P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}} X^2\right)$$

, где

$$a(\lambda) = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda \\ \nu_1, \nu_2 < X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2}, \qquad \theta_1(t) = \frac{\pi}{4} + t - 2t \ln P_1, \qquad P_1 = \sqrt{\frac{5t}{2\pi}},$$

λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых меньше X.

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных и методом L-рядов Дирихле.

Теорема 1.1 используется в третьем параграфе при доказательстве теоремы 1.2 о приближённом функциональном уравнении для функции $F(t)$.

Определение 1.2. *Функции $F(t)$ и $\theta(t)$ задаются равенствами*

$$F(t) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 = \\ = e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$$

Из определения $F(t)$ и функционального уравнения (1) для функции $f(s)$ следует, что $F(t)$ при вещественных t принимает вещественные значения, а вещественные нули $F(t)$ нечётного порядка являются нулями нечётного порядка $f(s)$, лежащими на критической прямой.

Теорема 1.2. *Пусть T такое, что $T - \dfrac{\pi}{4} = 4\pi k$, k — целое число. Тогда при $T \le t \le T+H$ справедлива следующая формула:*

$$F(t) = 2\sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0{,}01}), \qquad P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}},$$

где λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X,

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}, \qquad r(n) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n). \tag{4}$$

Теорема 1.2 доказывается методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута и используется в третьей главе при доказательстве основной теоремы 3.1.

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена исследованию поведения сумм А. Сельберга вида $S(Y)$ и вида $W(\theta)$, а также тригонометрических сумм специального вида $W_j(T)$.

Определение 2.1. *Суммами А. Сельберга вида $W(\theta)$ и вида $S(Y)$ называются соответственно суммы*

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$

$$S(Y)=\sum_{\lambda\le Y}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

где $\beta(\nu)$ и $A(\lambda)$ — функции, определённые соответственно формулами (3) *и* (4), *а λ — положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит X.*

В первом параграфе второй главы для суммы А. Сельберга вида $S(Y)$ получена асимптотическая формула с двумя главными членами, коэффициенты которых, в свою очередь, являются соответственно суммами А. Сельберга вида $W(0)$ и вида $W(1-2\theta)$.

Лемма 2.1. *Пусть $T^{0,1}\le Y\le T$, $\frac14\le\theta\le\frac12$, тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y)=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}W(0)+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2X\right).$$

Доказательство леммы 2.1 проводится методом А. Сельберга с использованием свойств функции $r(n)$, природы чисел ν и формулы суммирования Эйлера.

Во втором параграфе второй главы найдена оценка сверху для суммы А. Сельберга вида $W(\theta)$.

Лемма 2.2. *При $0\le\theta\le\frac12$ для $W(\theta)$ справедлива оценка*

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}=O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Доказательство леммы 2.2 также проводится методом А. Сельберга с применением формулы обращения Мёбиуса, природы чисел ν, свойств рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, формулы Перрона, метода производящих функций и метода комплексного интегрирования.

При $j = 0, 1, 2$ определим три вида сумм $W_j(T)$. Для этого введём параметры, от которых могут зависеть эти суммы: $P = \sqrt{5T/(2\pi)}$, $X = T^{0{,}01\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 0{,}001$, ε_1 — постоянное число; $\mathscr{L} = \ln P$; $k = [\ln \mathscr{L}]$; $\eta = c_1 k \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; $0 < H < T^{\frac{1}{3}}$; $0 < \varepsilon_2 < 0{,}001$, ε_2 и c_1 постоянные числа. Пользуясь определением чисел $A(\lambda)$ и обозначением $B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k$, суммы $W_j = W_j(T)$ определим равенствами

$$W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right) \overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

А.А. Карацуба [5] при $H \geq T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ для этих сумм получил оценки вида

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, 2; \quad W_1(T) \ll \left(\varepsilon_2^{-2k}(\ln T)^{-2k} + \varepsilon_2^{-k}\eta^k(\ln T) - k\right) T^{-\varepsilon_1}.$$

В третьем параграфе в сочетании методов работ [5, 11, 12, 13] и метода экспоненциальных пар для тригонометрических сумм $W_j(T)$ подобные оценки получены для параметра H с меньшим порядком роста.

Теорема 2.1. *Пусть ε_1 и ε_2 — произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящее $0{,}001$, k — натуральное число, $0 < \eta < 1$, (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad æ(\kappa,\lambda) = \frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ справедливы оценки:

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \qquad j = 0, \quad j = 2;$$

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-0{,}5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2} \cdot T^{-\varepsilon_1}.$$

Оценки сумм $W_j(T)$ являются равномерными по введённым параметрам, тем самым, постоянные в знаках $\ll$ абсолютные.

Показатель $\theta(\kappa;\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$ также появляется в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2+y^2\le R$ в форме

$$K(R)=\#\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le R,\ x,y\in Z\right\}=\pi R+O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right)$$

и в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy\le N$, $x>0$, $y>0$. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ принадлежит М. Хаксли [14]. Он доказал, что

$$\theta_0=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda)=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}\le\frac{131}{416}=\frac{1}{3}-\frac{23}{3\cdot 416}\approx 0.31490,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Тогда из теоремы 2.1 следует

Следствие 2.1.1. *Пусть* ε_1 *и* ε_2 *— произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящее* $0,001$, k *— натуральное число,* $0<\eta<1$. *Тогда при* $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ *справедливы оценки:*

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,2;\qquad W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

В третьей главе, прилагая результаты предыдущих глав, а именно,

- теорему 1.2 о приближенном функциональном уравнении функции $F(t)$;
- лемму 2.1 об асимптотической формуле суммы А. Сельберга вида $S(Y)$;
- лемму 2.2 об оценке сверху суммы А. Сельберга вида $W(\theta)$;
- теорему 2.1 о новых оценках тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j=0,1,2$,

доказываем теорему 3.1 об оценке А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теорема 3.1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$*;* c_4, c_5, c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$ такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T_0\cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1.$$

Поэтому из теоремы 3.1 получим

Следствие 3.1.1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Этот результат является уточнением теоремы А.А.Карацубы.

Доказательство теоремы 3.1 проводится по схеме работы [5] А.А.Карацубы. Основным утверждением, позволившим доказать эту теорему, является лемма 2.1 о новых оценках тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0,1,2$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику З.Х. Рахмонову за научное руководство, за постоянное внимание и помощь в работе.

Глава 1

Приближённое функциональное уравнение для функции Дэвенпорта-Хейльбронна

В первой главе, носящей вспомогательный характер, доказываются приближённые функциональные уравнения для функции $G(t,\chi)$ (теорема 1.1) и функции $F(t)$ (теорема 1.2).

1.1. Известные леммы

Лемма 1.1. *Пусть* χ_q *— примитивный характер по модулю* q, $0<\sigma_0\leq\sigma\leq 2$, $\pi x\geq|t|\geq 2\pi$. *Тогда*

$$L(s,\chi_q)=\sum_{1\leq n\leq qx}\frac{\chi_q(n)}{n^s}+O\left(q^{1-\sigma}x^{-\sigma}\right).$$

где постоянная в знаке O *зависит только от* σ_0.

Доказательство см. [6], стр. 81.

Лемма 1.2. *Пусть* $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ *— вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке* $[a,b]$ *следующим условиям:*

1) $f''(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *непрерывны,* $|f'(x)|<\delta<1$, $0<f''(x)\ll 1$;

2) существуют числа H, $0<b-a\leq U$, *такие, что*

$$\varphi(x)\ll H,\quad \varphi'(x)\ll HU^{-1}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a<x\leq b}\varphi(x)e(f(x))=\int\limits_a^b\varphi(x)e(f(x))dx+O(H)$$

Доказательство см. [6], стр. 73.

Лемма 1.3. *(О замене тригонометрических сумм более короткой) Пусть вещественные функции* $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ *удовлетворяют на отрезке* $[a,b]$ *следующим условиям:*

1) *$f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;*

2) *существуют числа H, U, A, $0<H$, $1\ll A\ll U$, $0<b-a\le U$, такие что*

$$f''(x)\asymp A^{-1},\quad f^{(3)}(x)\ll A^{-1}U^{-1},\quad f^{(4)}(x)\ll A^{-1}U^{-2},$$
$$\varphi(x)\ll H,\quad \varphi'(x)\ll HU^{-1},\quad \varphi''(x)\ll HU^{-2}.$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения $f'(x_n)=n$, получаем

$$\sum_{a<x\le b}\varphi(x)e(f(x))=\sum_{f'(a)\le n\le f'(b)}c(n)Z(n)+R,$$

где

$$R=O\left(H(A(b-a)^{-1}+T_a+T_b+\ln(f'(b)-f'(a)+2))\right);$$
$$T_\mu=\begin{cases}0, & \textit{если } f'(\mu)\textit{–целое число},\\ \min\left(\|f'(\mu)\|^{-1},\sqrt{A}\right), & \textit{если } \|f'(\mu)\|\ne 0;\end{cases}$$
$$c(n)=\begin{cases}1, & \textit{если}\quad f'(a)<n<f'(b),\\ 1/2, & \textit{если}\quad n=f'(a)\quad \textit{или}\quad n=f'(b);\end{cases}$$
$$Z(n)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}}exp(2\pi i(f(x_n)-nx_n)).$$

Доказательство см. [6], стр. 68.

Лемма 1.4. *Пусть χ_q — примитивный характер по модулю q. Тогда*

$$\tau(\bar{\chi}_q)\chi_q(n)=\sum_{m=1}^{q}\bar{\chi}_q(m)e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

где

$$\tau(\chi_q)=\sum_{m=1}^{q}\chi_q(m)e\left(\frac{m}{q}\right),\qquad |\tau(\chi_q)|=\sqrt{q}.$$

Доказательство см. [15]

Лемма 1.5. *При $\delta > 0$ и $-\pi + \delta \le \arg s \le \pi - \delta$ имеет место формула (Стирлинга):*

$$\ln\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \ln\sqrt{2\pi} + J, \quad J = \int\limits_0^{\infty} \frac{\rho(u)du}{u+s} = O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

причём постоянная в знаке O зависит только от δ. Кроме того,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \ln s + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Доказательство см. [16].

Лемма 1.6. *(формула суммирования Эйлера) Пусть $f(n)$–комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$, функция $\rho(x)$ определяется равенством $\rho(x) = 0,5 - \{x\}$. Тогда*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int\limits_a^b \rho(x)f'(x)dx.$$

Доказательство см. [6], стр. 315.

Лемма 1.7. *Пусть f — арифметическая функция и*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Тогда

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Доказательство. см. [17], стр. 78.

Лемма 1.8. *(Аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в полуплоскость $Res > 0$.) При $Res > 0$, $N \ge 1$ имеет место равенство*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int\limits_N^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}du,$$

где $\rho(u) = \dfrac{1}{2} - \{u\}$.

Доказательство см. [6], стр. 25.

Лемма 1.9. *(Аналитическое продолжение $L(s;\chi)$ в полуплоскость $Res > 0$.) Пуст $\chi \neq \chi_0$, тогда при $Res > 0$ справедливо равенство*

$$L(s,\chi) = s\int\limits_{1}^{\infty}\frac{S(x)}{x^{s+1}}dx, \qquad S(x) = \sum_{n\le x}\chi(n).$$

Доказательство см. [6], стр. 21.

Лемма 1.10. *(Теорема Ш.Валле-Пуссена о нулях $L(s,\chi)$.) Пусть χ — вещественный характер по модулю q; $s = \sigma + it$. Тогда $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области*

$$Re\, s = \sigma \ge 1 - \frac{c}{\ln q(|t|+2)}, \qquad |t| > 0,$$

Доказательство см. [6], стр. 38.

Лемма 1.11. *(Теорема Пейджа.) Пусть χ — вещественный примитивный характер по модулю q; $s = \sigma + it$. Тогда $L(\sigma,\chi)$ не имеет нулей при*

$$Re\, s = \sigma \ge 1 - \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}.$$

Доказательство см. [6], стр 43.

Лемма 1.12. *Пусть $f(x)$ - комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$, c_n — произвольные комплексные числа, тогда*

$$\sum_{a<n\le b} c_n f(n) = -\int\limits_{a}^{b} C(x)f'(x)dx + C(b)f(b),$$

где

$$C(x) = \sum_{a<n\le x} c_n.$$

Доказательство см. [6], стр 315.

Лемма 1.13. *Пусть $C(u)$ — количество чисел k, не превосходящих u, все простые делители p которых принадлежат прогрессиям*

$$qm+l_1, \quad qm+l_2, \quad \ldots, \quad qm+l_r, \qquad r \le \varphi(q),$$

справедлива следующая оценка:

$$C(u) \ll u(\ln u)^{1-\frac{r}{\varphi(q)}}.$$

Доказательство [18], с. 166.

1.2. Приближённое функциональное уравнение функции $G(t,\chi)$

Определение 1.1. *Функция $G(t,\chi)$ задаётся равенством*

$$G(t,\chi) = L(0,5+it,\chi)\left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2,$$

где

$$\varphi(s) = \sum_{\nu<X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\le\nu<X, \\ 0, & \nu\ge X. \end{cases}$$

а вещественные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Re\,s>1.$$

Простыми числами p, удовлетворяющими сравнению $p\equiv 1(mod\,5)$, являются все простые числа, которые заканчиваются цифрой 1, то есть 11, 31, 41, 71, 101, 131, 151 и т.д., а простыми числами p, удовлетворяющими сравнению $p\equiv -1(mod\,5)$ или $p\equiv 4(mod\,5)$, являются все простые числа, которые заканчиваются цифрой 9: 19, 29, 59, 79, 89, 109, 139, 149 и т.д. Следует заметить, что значение характера $\chi(p)$ для простых чисел вида $p\equiv\pm1(mod\,5)$ является вещественным числом и

$$\chi(p^k) = (\chi(p))^k = (\chi(\pm1))^k = \left(e\left(\frac{ind\,(\pm1)}{4}\right)\right)^k = (\pm1)^k. \tag{1.1}$$

Из формулы

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}\cdot\frac{1}{p^{ks}}=1-\frac{1}{2p^s}-\frac{1}{8p^{2s}}-\frac{1}{16p^{3s}}-\frac{5}{128p^{4s}}-\dots,$$

где $(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)$ и определения чисел $\alpha(\nu)$, из того, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}=\prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}\cdot\frac{1}{p^{ks}}\right)=\prod_{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k)=\begin{cases}1, & \text{если } k=0;\\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5).\\ 0, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5).\end{cases}$$

следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)|<1$ при любом $\nu>1$. Отсюда и (1.1) также следует равенство

$$\alpha(p^k)\chi(p^k)=\begin{cases}1, & \text{если } k=0;\\ -\dfrac{(\pm1)^k\,(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5).\\ 0, & \text{если } k\geq 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5),\end{cases}$$

то есть $\alpha(p^k)\chi(p^k)$ принимает только вещественные значения, поэтому

$$\alpha(p^k)\chi(p^k)=\alpha(p^k)\overline{\chi}(p^k).$$

Отсюда и из мультипликативности функции $\alpha(\nu)\chi(\nu)$, находим

$$\alpha(\nu)\chi(\nu)=\alpha(\nu)\overline{\chi}(\nu),\qquad |\alpha(\nu)\chi(\nu)|\leq 1.$$

Тогда из определения функции $\beta(\nu)$ найдем

$$\beta(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)\overline{\chi}(\nu)\equiv h(\nu),\qquad |h(\nu)|\leq 1,$$

то есть далее всюду, не ограничивая общности, можно считать, что $\overline{h}(\nu)=h(\nu)$.

Теорема 1.1. *При $t\geq t_0>0$ и $X\leq t^{0,01}$ справедлива следующая формула*

$$G(t,\chi)=\sum_{\lambda\leq P_1}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}-\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}}\,e^{i\theta_1(t)}\sum_{\lambda\leq P_1}\frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it}+O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right)$$

где

$$a(\lambda)=\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2},\qquad \theta_1(t)=\frac{\pi}{4}+t-2t\ln P_1,\qquad P_1=\sqrt{\frac{5t}{2\pi}},$$

λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых меньше X.

Доказательство. Оценим сверху $\varphi(0,5+it)$. Воспользовавшись соотношением $|h(\nu)|<1,\ \nu>1$, имеем

$$|\varphi(0,5+it)|=\left|\sum_{\nu<X}\frac{h(\nu)}{\sqrt{\nu}}\nu^{-its}\right|\le\sum_{\nu<X}\frac{1}{\sqrt{\nu}}\le 1+\int\limits_1^X\frac{du}{\sqrt{u}}\ll\sqrt{X}.$$

Воспользовавшись полученной оценкой и леммой 1.1, имеем

$$\begin{aligned}G(t,\chi)&=L(0,5+it)\left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2=\\&=\left(\sum_{1\le n\le 5tX^2}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}n^{-it}+O\left((tX^2)^{-0,5}\right)\right)\left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2=\\&=\sum_{1\le n\le 5tX^2}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}n^{-it}\sum_{\nu_1<X}\frac{h(\nu_1)}{\nu_1^{0,5+it}}\sum_{\nu_2<X}\frac{h(\nu_2)}{\nu_2^{0,5-it}}+O\left(t^{-0,5}X^{-1}|\varphi(0,5+it)|^2\right)=\\&=\sum_{1\le n\le 5tX^2}\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{\left(\frac{n\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it}}{\sqrt{\frac{n\nu_1}{\nu_2}}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2}+O\left(t^{-0,5}\right)=\\&=\sum_{\lambda\le 5tX^3}\frac{\lambda^{-it}}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ n\le 5tX^2,\,\nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2}+O\left(t^{-0,5}\right)=\\&=\sum_{\lambda\le 5tX^3}\frac{b(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}+O\left(t^{-0,5}\right),\end{aligned}$$

где λ — положительное рациональное число, знаменатель которого меньше X,

$$b(\lambda)=\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ n\le 5tX^2\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2}.\tag{1.2}$$

Разбивая сумму по λ на три части, имеем

$$G(t,\chi) = \Sigma_0 + \Sigma + R_1 + O\left(t^{-0,5}\right), \tag{1.3}$$

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda \le P_1} \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}, \qquad \Sigma = \sum_{P_1 < \lambda \le 5tX} \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}, \qquad R_1 = \sum_{5tX < \lambda \le 5tX^3} \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}.$$

Так как в суммах Σ_0 и Σ выполняются условия $\lambda = n\nu_1/\nu_2 \le 5tX$, то для n получаем неравенство

$$n = \frac{\lambda\nu_2}{\nu_1} \le \frac{5tX\nu_2}{\nu_1} \le 5tX^2,$$

поэтому в представлении $b(\lambda)$ вида (1.2) условие $n \le 5tX^2$ выполняется всегда, его можно опустить, и функция $b(\lambda)$ для Σ_0 и Σ принимает вид

$$\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda \\ \nu_1, \nu_2 < X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2} = a(\lambda), \tag{1.4}$$

то есть для Σ_0 и Σ функция $b(\lambda)$ равна функции $a(\lambda)$.

Преобразуем сумму Σ. В силу определения λ и $a(\lambda)$, имеем равенство

$$\Sigma = \sum_{P_1 < \lambda \le 5tX} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} = \sum_{\substack{P_1 < \frac{n\nu_1}{\nu_2} \le 5tX \\ \nu_1, \nu_2 < X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\sqrt{n\nu_1\nu_2}} \left(\frac{n\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} =$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2 < X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{P_1\frac{\nu_2}{\nu_1} < n \le 5tX\frac{\nu_2}{\nu_1}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \cdot \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv n (mod\, 5)}}^{5} 1 =$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2 < X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{m=1}^{5} \chi(m) \sum_{\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5} < n \le tX\frac{\nu_2}{\nu_1} - \frac{m}{5}} (5n+m)^{-0,5-it}.$$

Разбивая последнюю сумму по n на две суммы, получим

$$\Sigma = \Sigma_1 + R_2, \tag{1.5}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{m=1}^{5} \chi(m) \sum_{\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-\frac{m}{5}<n\le\frac{t}{\pi}-\frac{m}{5}} (5n+m)^{-0,5-it},$$

$$R_2 = \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{m=1}^{5} \chi(m) \sum_{\frac{t}{\pi}-\frac{m}{5}<n\le tX\frac{\nu_2}{\nu_1}-\frac{m}{5}} (5n+m)^{-0,5-it}. \quad (1.6)$$

Пользуясь определением функции $b(\lambda)$ для суммы R_1, имеем

$$R_1 = \sum_{5tX<\lambda\le5tX^3} \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} = \sum_{\substack{5tX<\frac{n\nu_1}{\nu_2}\le5tX^3\\ n\le5tX^2,\,\nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\sqrt{n\nu_1\nu_2}} \left(\frac{n\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{\substack{5tX\frac{\nu_2}{\nu_1}<n\le5tX^3\frac{\nu_2}{\nu_1}\\ n\le5tX^2}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}n^{-it}\cdot \sum_{\substack{m=1\\ m\equiv n(mod\,5)}}^{5} 1 =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{m=1}^{5} \chi(m) \sum_{\substack{tX\frac{\nu_2}{\nu_1}-\frac{m}{5}<n\le tX^3\frac{\nu_2}{\nu_1}-\frac{m}{5}\\ n\le tX^2-\frac{m}{5}}} (5n+m)^{-0,5-it} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{m=1}^{5} \chi(m) \sum_{tX\frac{\nu_2}{\nu_1}-\frac{m}{5}<n\le tX^2-\frac{m}{5}} (5n+m)^{-0,5-it}. \quad (1.7)$$

Сравнивая правые части формул (1.7) и (1.6), которые соответственно определяют суммы R_1 и R_2, найдем

$$R = R_1 + R_2 = \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} \sum_{m=1}^{5} \chi(m) \sum_{\frac{t}{\pi}-\frac{m}{5}<n\le tX^2-\frac{m}{5}} (5n+m)^{-0,5-it}. \quad (1.8)$$

Далее из (1.3), (1.5) и (1.8), найдем

$$G(t,\chi) = \sum_{\lambda\le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} + \Sigma_1 + R + O\left(t^{-0,5}\right) \quad (1.9)$$

Заметим, что далее сумму R будем оценивать сверху, а сумму Σ_1 преобразуем.

Оценка суммы R. Переходя к оценкам, найдем

$$|R| \leq \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \sum_{m=1}^{4} |R(\nu_1,\nu_2,m)|\,, \tag{1.10}$$

$$R(\nu_1,\nu_2,m) = \sum_{a<n\leq b} \frac{(5n+m)^{-it}}{\sqrt{(5n+m)}}, \qquad a = \frac{t}{\pi} - \frac{m}{5}, \qquad b = tX^2 - \frac{m}{5}.$$

В $R_1(\nu_1,\nu_2,m)$,разбивая промежуток суммирования $(a,b]$ на новые промежутки вида

$$(2^{\mu-1}a,\, 2^{\mu}a], \qquad \mu = 1,2,\ldots,\mu_0, \qquad (2^{\mu_0}a,\, b],$$

где μ_0 — наибольшее целое число, такое что $2^{\mu_0}a < b$, получим

$$R(\nu_1,\nu_2,m) = \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{2^{\mu-1}a<n\leq 2^{\mu}a} \frac{(5n+m)^{-it}}{\sqrt{(5n+m)}} + \sum_{2^{\mu_0}a<n\leq b} \frac{(5n+m)^{-it}}{\sqrt{(5n+m)}}.$$

К суммам по n применим лемму 1.2, полагая

$$f(u) = -\frac{t\ln(5u+m)}{2\pi}, \quad \varphi(u) = (5u+m)^{-0,5}, \quad H = (2^{\mu-1}a)^{-0,5}, \quad U = 2^{\mu-1}.$$

Условия леммы выполняются, так как

$$|f'(u)| = \left|\frac{5t}{2\pi(5u+m)}\right| \leq \frac{5t}{2\pi\left(5\left(\frac{t}{\pi}-\frac{m}{5}\right)+m\right)} = \frac{1}{2};$$

$$f''(u) = \frac{25t}{2\pi(5u+m)^2} \leq \frac{25t}{2\pi\left(5\left(\frac{t}{\pi}-\frac{m}{5}\right)+m\right)^2} = \frac{\pi}{2t};$$

$$\varphi(u) = (5u+m)^{-0,5} \leq (5\cdot 2^{\mu-1}a+m)^{-0,5} \ll (2^{\mu-1}a)^{-0,5} = H;$$

$$\varphi'(u) = -0,25(5u+m)^{-1,5} \ll (2^{\mu-1}a)^{-1,5} = \frac{(2^{\mu-1}a)^{-0,5}}{2^{\mu-1}a} = \frac{H}{U}.$$

Поэтому применяя к каждой сумме по n в $R_1(\nu_1,\nu_2,m)$ лемму 1.2, затем суммируя по μ, найдем

$$R(\nu_1,\nu_2,m)=\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{2^{\mu-1}a<n\le 2^{\mu}a}\frac{(5n+m)^{-it}}{\sqrt{(5n+m)}}+\sum_{2^{\mu_0}a<n\le b}\frac{(5n+m)^{-it}}{\sqrt{(5n+m)}}=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\left(\int\limits_{2^{\mu-1}a}^{2^{\mu}a}\frac{(5u+m)^{-it}du}{\sqrt{(5u+m)}}+O\left((2^{\mu-1}a)^{-0,5}\right)\right)+$$

$$+\int\limits_{2^{\mu_0}a}^{b}\frac{(5u+m)^{-it}du}{\sqrt{(5u+m)}}+O\left((2^{\mu_0-1}a)^{-0,5}\right)=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\frac{(5u+m)^{-it}du}{\sqrt{(5u+m)}}+O\left(a^{-0,5}\right)=\int\limits_{a}^{b}\frac{e\left(-\frac{t\ln(5u+m)}{2\pi}\right)du}{\sqrt{5u+m}}+O\left(a^{-0,5}\right).$$

В последнем интеграле, полагая $\frac{t\ln(5u+m)}{2\pi}=\eta(u)=u_1$, делая замену переменных и имея в виду

$$\ln(5u+m)=\frac{2\pi u_1}{t},\qquad 5u+m=\exp\left(\frac{2\pi u_1}{t}\right),\qquad du=\frac{2\pi}{5t}\exp\left(\frac{2\pi u_1}{t}\right)du_1,$$

$$a=\frac{t}{\pi}-\frac{m}{5}\ \Rightarrow\ \frac{t\ln(5a+m)}{2\pi}=\frac{t\ln\left(\frac{5t}{\pi}\right)}{2\pi}=\eta(a),$$

$$b=tX^2-\frac{m}{5}\ \Rightarrow\ \frac{t\ln(5b+m)}{2\pi}=\frac{t\ln\left(5tX^2\right)}{2\pi}=\eta(b),$$

найдем

$$R(\nu_1,\nu_2,m)=\frac{2\pi}{5t}\int\limits_{\eta(a)}^{\eta(b)}\exp\left(\frac{\pi u}{t}\right)e(-u)du+O\left(\left(tX\frac{\nu_2}{\nu_1}-\frac{m}{5}\right)^{-0,5}\ln T\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{5t}\int\limits_{\eta(a)}^{\eta(b)}\exp\left(\frac{\pi u}{t}\right)e(-u)du+O\left(\left(tX\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}\ln T\right).$$

В интервале интегрирования $\eta(a)\le u\le\eta(b)$ подинтегральная функция $\exp\left(\frac{\pi u}{t}\right)$ монотонно возрастает, поэтому применяя известный приём, оба интеграла, как представляющий вещественную часть, так и служащий коэффициентом при i его мнимой части, выразим знакопеременными рядами. Убедимся, что каждый из этих интегралов

$$\ll \exp\left(\frac{\pi\eta(b)}{t}\right) = \exp\left(\frac{\pi}{t}\cdot\frac{t\ln\left(5tX^2\right)}{2\pi}\right) = \left(5tX^2\right)^{0,5}.$$

Поэтому

$$R(\nu_1,\nu_2,m) \ll \frac{1}{t}\cdot\left(tX^2\right)^{0,5} + \left(tX\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}\ln T \ll t^{-0,5}X.$$

Подставляя найденную оценку в формулу (1.10), получим

$$|R| \le \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{m=1}^{4}|R(\nu_1,\nu_2,m)| \ll \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\,t^{-0,5}X \ll t^{-0,5}X^2. \quad (1.11)$$

Преобразование суммы Σ_1. В сумме Σ_1, внутреннюю сумму по n обозначая через $\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,n)$, имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it}\sum_{m=1}^{5}\chi(m)\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m),, \quad (1.12)$$

$$\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m) = \sum_{\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-\frac{m}{5}<n\le\frac{t}{\pi}-\frac{m}{5}}(5n+m)^{-0,5}e\left(-\frac{t\ln(5n+m)}{2\pi}\right).$$

Для преобразования $\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m)$ будем применять лемму 1.3. Чтобы все условия этой леммы выполнялись, разобьём промежуток суммирования на промежутков вида

$$\alpha_\mu - \frac{m}{5} < n \le 2\alpha_\mu - \frac{m}{5}, \qquad \alpha_\mu = 2^{-\mu}\frac{t}{\pi},$$
$$\mu = 1,2,\ldots,\mu_0, \qquad \frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5} < n \le \alpha_{\mu_0} - \frac{m}{5},$$

μ_0 — наибольшее целое число, такое что

$$\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} < 2^{-\mu_0}\frac{t}{\pi} = \alpha_{\mu_0},$$

и получим для суммы $\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,n)$ формулу

$$\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m)=\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m,\mu)+\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m,\mu_0+1), \tag{1.13}$$

$$\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m,\mu)=\sum_{\alpha_\mu-\frac{m}{5}<n\le 2\alpha_\mu-\frac{m}{5}}(5n+m)^{-0,5}e\left(-\frac{t\ln(5n+m)}{2\pi}\right),$$

$$\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m,\mu_0+1)=\sum_{\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-\frac{m}{5}<n\le\alpha_{\mu_0}-\frac{m}{5}}(5n+m)^{-0,5}e\left(-\frac{t\ln(5n+m)}{2\pi}\right).$$

К суммам $\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m,\mu)$ применим лемму 1.3, полагая в ней

$$\begin{aligned}
&f(u)=-\frac{t\ln(5u+m)}{2\pi}, \qquad \varphi(u)=(5u+m)^{-0,5},\\
&a=\alpha_\mu-\frac{m}{5},\quad b=2\alpha_\mu-\frac{m}{5},\quad H=\alpha_\mu^{-0,5},\\
&U=\alpha_\mu,\quad A=\frac{\alpha_\mu^2}{t}\qquad \text{при}\qquad \mu=1,2,\ldots,\mu_0;\\
&a=\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-\frac{m}{5},\quad b=\alpha_{\mu_0}-\frac{m}{5},\quad H=\alpha_{\mu_0}^{-0,5},\\
&U=\alpha_{\mu_0},\quad A=\frac{\alpha_{\mu_0}^2}{t}\qquad \text{при}\qquad \mu=\mu_0+1.
\end{aligned}$$

Имеем

$$f'(u)=-\frac{5t}{2\pi(5u+m)},\quad f''(u)=\frac{25t}{2\pi(5u+m)^2},\quad f^{(3)}(u)=-\frac{125t}{\pi(5u+m)^3},$$
$$f^{(4)}(u)=\frac{1875t}{\pi(5u+m)^4},\quad \varphi'(u)=-2,5(5u+m)^{-1,5},\quad \varphi''(u)=3,75(5u+m)^{-2,5}.$$

Все условия леммы 1.3 выполняются, то есть

1. функции $f^{(4)}(u)$ и $\varphi''(u)$ на отрезках $\left[\alpha_\mu-\frac{m}{5},\ 2\alpha_\mu-\frac{m}{5}\right]$ и $\left[\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-\frac{m}{5},\ \alpha_{\mu_0}-\frac{m}{5}\right]$ непрерывны;

2. $f''(u)\asymp\frac{t}{\alpha_\mu^2}=\frac{1}{A}, \qquad f^{(3)}(u)\ll\frac{t}{\alpha_\mu^3}=\frac{1}{AU}, \qquad f^{(4)}(u)\ll\frac{t}{\alpha_\mu^4}=\frac{1}{AU^2}.$

При $\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0$ находим значения функции $f'(u)$ в концах промежутков суммирования:

$$f'\left(\alpha_\mu - \frac{m}{5}\right) = -\frac{5t}{2\pi\left(5\left(\alpha_\mu - \frac{m}{5}\right) + m\right)} = -\frac{t}{2\pi\alpha_\mu} =$$
$$= -\frac{t}{2\pi \cdot 2^{-\mu}\frac{t}{\pi}} = -2^{\mu-1}, \qquad f'\left(2\alpha_\mu - \frac{m}{5}\right) = -\frac{5t}{2\pi\left(5\left(2\alpha_\mu - \frac{m}{5}\right) + m\right)} =$$
$$= -\frac{t}{4\pi\alpha_\mu} = -\frac{t}{4\pi \cdot 2^{-\mu}\frac{t}{\pi}} = -2^{\mu-2}, \tag{1.14}$$
$$f'\left(\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5}\right) = -\frac{5t}{2\pi}\left(5\left(\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5}\right) + m\right)^{-1} = -\frac{5t}{2\pi}\cdot\frac{1}{P_1}\cdot\frac{\nu_1}{\nu_2} = -\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}.$$

Отсюда следует $f'\left(\alpha_\mu - \frac{m}{5}\right) \in Z$ при $\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0$, $f'\left(2\alpha_\mu - \frac{m}{5}\right) \in Z$ при $\mu = 2, \ldots, \mu_0$, а также $f'\left(2\alpha_1 - \frac{m}{5}\right) = 2^{-1}$. Поэтому из определения T_β в лемме 1.3, получим

$$T_{\alpha_\mu - \frac{m}{5}} = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \mu_0; \quad T_{2\alpha_\mu - \frac{m}{5}} = 0, \quad \mu = 2, \ldots, \mu_0,$$
$$T_{2\alpha_1 - \frac{m}{5}} = \min\left(\left\|f'\left(2\alpha_1 - \frac{m}{5}\right)\right\|^{-1},\ \frac{\alpha_1}{t^{0,5}}\right) = \tag{1.15}$$
$$= \min\left(\left\|-2^{-1}\right\|^{-1},\ \frac{2^{-1}t/\pi}{t^{0,5}}\right) = 2.$$

Если $f'\left(\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5}\right) = -\frac{P_1\nu_1}{\nu_2} \in Z$, то $T_{\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5}} = 0$, в противном случае, имея в виду, что $\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} < 2^{-\mu_0}\frac{t}{\pi} = \alpha_{\mu_0} \leq \frac{2P_1\nu_2}{5\nu_1}$, находим

$$T_{\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5}} = \min\left(\left\|f'\left(\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} - \frac{m}{5}\right)\right\|^{-1}, \frac{\alpha_{\mu_0}}{t^{0,5}}\right) \leq$$
$$\leq \min\left(\left\|-\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}\right\|^{-1},\ \frac{2P_1\nu_2}{5t^{0,5}\nu_1}\right) \leq \frac{\sqrt{2}\,\nu_2}{\sqrt{5\pi}\,\nu_1}. \tag{1.16}$$

Теперь воспользовавшись соотношениями (1.14), (1.15) и (1.16), с учетом неравенств

$$\frac{t^{0,5}}{\sqrt{10\pi}}\cdot\frac{\nu_2}{\nu_1} \leq \frac{P_1\nu_2}{5\nu_1} < \alpha_{\mu_0} \leq \alpha_\mu = \frac{t}{2^\mu\pi} \leq \frac{t}{2\pi},$$
$$2 \leq 2^\mu \leq \sqrt{\frac{10t}{\pi}}\cdot\frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \alpha_{\mu_0} \leq \frac{2t^{0,5}}{\sqrt{10\pi}}\cdot\frac{\nu_2}{\nu_1},$$

находим остаточные члены R_μ, которые появляются при применении леммы 1.3 к суммам $\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m,\mu)$ при $\mu=1,\ldots,\mu_0$, а также отдельно при $\mu=\mu_0+1$. Имеем

$$\begin{aligned}
R_\mu \ll&\alpha_\mu^{-0,5}\left(\frac{\alpha_\mu^2}{t}\left(\left(2\alpha_\mu-\frac{m}{5}\right)-\left(\alpha_\mu-\frac{m}{5}\right)\right)^{-1}+T_{\alpha_\mu-\frac{m}{5}}+T_{2\alpha_\mu-\frac{m}{5}}+\right.\\
&\left.+\ln\left(-2^{\mu-2}-(-2^{\mu-1})+2\right)\right)\le \alpha_\mu^{-0,5}\left(\frac{\alpha_\mu}{t}+2+\ln\left(2^{\mu-2}+2\right)\right)\ll\\
&\ll\left(\frac{t^{0,5}\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}(1+\ln t)\ll t^{-\frac14}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}\ln t; \qquad (1.17)\\
R_{\mu_0+1}\ll&\ \alpha_{\mu_0}^{-0,5}\left(\frac{\alpha_{\mu_0}^2}{t}\left(\left(\alpha_{\mu_0}-\frac{m}{5}\right)-\left(\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-\frac{m}{5}\right)\right)^{-1}+T_{\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-\frac{m}{5}}+T_{\alpha_{\mu_0}-\frac{m}{5}}+\right.\\
&\left.+\ln\left(-\frac{P_1\nu_2}{5\nu_1}-(-2^{\mu_0})+2\right)\right)\le\alpha_{\mu_0}^{-0,5}\left(\frac{\alpha_{\mu_0}^2}{t}+\frac{\sqrt2\,\nu_2}{\sqrt{5\pi}\,\nu_1}+\ln\left(2^{\mu_0}+2\right)\right)\ll\\
&\ll t^{-\frac14}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}\left(\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2+\frac{\nu_2}{\nu_1}+\ln t\right)\ll t^{-\frac14}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1,5}+t^{-\frac14}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}\ln t. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Далее, находя значение u_n из $f'(u_n)=n$, вычислим $Z(n)$:

$$f'(u_n)=-\frac{5t}{2\pi(5u_n+m)}=n,\qquad 5u_n+m=\frac{5t}{2\pi(-n)},\qquad u_n=\frac{t}{2\pi(-n)}-\frac{m}{5};$$

$$\frac{\varphi(u_n)}{\sqrt{f''(u_n)}}=\frac{(5u_n+m)^{-0,5}}{\sqrt{\dfrac{25t}{2\pi(5u_n+m)^2}}}=\sqrt{\frac{2\pi}{25t}(5u_n+m)}=\sqrt{\frac{2\pi}{25t}\left(\frac{5t}{2\pi(-n)}\right)}=\frac{(-n)^{-0,5}}{\sqrt5};$$

$$e\left(f(u_n)-nu_n\right)=e\left(-\frac{t\ln(5u_n+m)}{2\pi}-nu_n\right)=e\left(-\frac{t\ln\left(\frac{5t}{2\pi(-n)}\right)}{2\pi}+\frac{t}{2\pi}+\frac{nm}{5}\right)=$$

$$=e\left(\frac{nm}{5}\right)e\left(\frac{t-2t\ln\sqrt{\frac{5t}{2\pi}}}{2\pi}\right)e\left(\frac{t\ln(-n)}{2\pi}\right)=(-n)^{it}e\left(\frac{t-2t\ln P_1}{2\pi}\right)e\left(\frac{nm}{5}\right);$$

$$
\begin{aligned}
Z(n) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\varphi(u_n)}{\sqrt{f''(u_n)}} e\left(f(u_n) - nu_n\right) = \\
&= e\left(\frac{1}{8}\right)\frac{(-n)^{-0{,}5}}{\sqrt{5}}(-n)^{it} e\left(\frac{t - 2t\ln P_1}{2\pi}\right) e\left(\frac{nm}{5}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\, e^{i\theta_1(t)} e\left(\frac{nm}{5}\right)(-n)^{-0{,}5+it}, \qquad \theta_1(t) = \frac{\pi}{4} + t - 2t\ln P_1. \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

Таким образом, воспользовавшись соотношениями (1.17, (1.18) и (1.19), согласно лемме 1.3 для сумм $\Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m, \mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0$ и $\Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m, \mu_0 + 1)$, имеем

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m, \mu) &= \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}} \sum_{-2^{\mu-1} \le n \le -2^{\mu-2}} c(n) e\left(\frac{nm}{5}\right)(-n)^{-0{,}5+it} + R_\mu = \\
&= \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}} \sum_{2^{\mu-2} \le n \le 2^{\mu-1}} c(-n) e\left(-\frac{nm}{5}\right) n^{-0{,}5+it} + R_\mu,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m, \mu_0 + 1) &= \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}} \sum_{-\frac{P_1\nu_1}{\nu_2} \le n \le -2^{\mu_0-1}} c(n) e\left(\frac{nm}{5}\right)(-n)^{-0{,}5+it} + R_{\mu_0+1} = \\
&= \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}} \sum_{2^{\mu_0-1} \le n \le \frac{P_1\nu_1}{\nu_2}} c(-n) e\left(-\frac{nm}{5}\right) n^{-0{,}5+it} + R_{\mu_0+1}.
\end{aligned}
$$

Складывая все $\Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m, \mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0 + 1$ и с учетом (1.13), найдем

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m) &= \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m, \mu) + \Sigma_1(\nu_1, \nu_2, m, \mu_0 + 1) = \\
&= \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \left(\frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}} \sum_{2^{\mu-2} \le n \le 2^{\mu-1}} c(-n) e\left(-\frac{nm}{5}\right) n^{-0{,}5+it} + R_\mu\right) + \\
&+ \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}} \sum_{2^{\mu_0-1} \le n \le \frac{P_1\nu_1}{\nu_2}} c(-n) e\left(-\frac{nm}{5}\right) n^{-0{,}5+it} + R_{\mu_0+1} = \\
&= \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}} \sum_{2^{-1} \le n \le \frac{P_1\nu_1}{\nu_2}} e\left(-\frac{nm}{5}\right) n^{-0{,}5+it} + R_1(\nu_1, \nu_2),
\end{aligned}
$$

где

$$R_1(\nu_1,\nu_2) \ll \sum_{\mu=1}^{\mu_0+1} R_\mu + \left(\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}\right)^{0,5} \ll t^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1,5} + t^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}\ln^2 t.$$

Заметим, что во втором члене остаток после сумм по μ появился из-за того, что при целом $\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}$ коэффициент $c\left(-\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}\right)$ равен $0,5$, а в выписанной формуле он равен 1. Если $\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}$ - не целое число, то $c\left(-\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}\right) = 1$, и это отсутствует.

Подставляя полученную формулу для $\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m)$ в правую часть (1.12) и пользуясь формулой, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса (лемма 1.4), имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it}\sum_{m=1}^{5}\chi(m)\Sigma_1(\nu_1,\nu_2,m) =$$
$$= \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it}\sum_{m=1}^{5}\chi(m)\sum_{2^{-1}\le n\le\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}} e\left(-\frac{nm}{5}\right)n^{-0,5+it} +$$
$$+ O\left(\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{|h(\nu_1)h(\nu_2)|}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}|R_1(\nu_1,\nu_2)|\right) =$$
$$= \frac{e^{i\theta_1(t)}}{\sqrt{5}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it}\sum_{n\le\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}} n^{-0,5+it}\sum_{m=1}^{5}\chi(m)e\left(-\frac{nm}{5}\right) +$$
$$+ O\left(t^{-\frac{1}{4}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1,5} + \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-0,5}\ln^2 t\right)\right) =$$
$$= \frac{\bar{\chi}(-1)\tau(\chi)}{\sqrt{5}}e^{i\theta_1(t)}\sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it}\sum_{n\le\frac{P_1\nu_1}{\nu_2}}\bar{\chi}(n)n^{-0,5+it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right).$$

Далее воспользовавшись равенством $\chi(-1) = -1$, (χ – нечётный характер), и определением функции $a(\lambda)$ для Σ_0 и Σ, то есть соотношением (1.4), получим

$$\Sigma_1 = -\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}}\, e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\substack{\frac{n\nu_2}{\nu_1}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\bar{\chi}(n)}{\nu_1} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right)$$
$$= -\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}}\, e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right).$$

Подставляя полученную формулу для Σ_1 и оценку суммы R из (1.11) в соотношение (1.9), имеем

$$G(t,\chi) = \sum_{\lambda\le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} + \Sigma_1 + R + O\left(t^{-0,5}\right) =$$
$$= \sum_{\lambda\le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} - \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}}\, e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right).$$

Теорема 1.1 доказана.

1.3. Приближённое функциональное уравнение функции $F(t)$

Лемма 1.14. *Пусть $\chi(n)$ -комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$, $\tau(\chi)$ — сумма Гаусса,*

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad r(n) = \frac{1-iæ}{2}\chi(n) + \frac{1+iæ}{2}\bar{\chi}(n)$$
$$\rho(n) = \frac{1-iæ}{2}\cdot\frac{\tau(\chi)\bar{\chi}(n)}{\sqrt{5}} + \frac{1+iæ}{2}\cdot\frac{\tau(\bar{\chi})\chi(n)}{\sqrt{5}}.$$

Тогда имеет место $\rho(n) = ir(n)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой ([2] с. 283)

$$\sin\frac{4\pi}{5} + æ\sin\frac{8\pi}{5} = æ\left(\sin\frac{2\pi}{5} + æ\sin\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}æ, \tag{1.20}$$

а также точными значениями сумм Гаусса $\tau(\chi)$ и $\tau(\bar{\chi})$, которые вычислим при помощи значений $\chi(1)=1,\ \chi(2)=i,\ \chi(3)=-i,\ \chi(4)=-1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\tau(\chi) &= \sum_{m=1}^{5}\chi(m)e\left(\frac{m}{5}\right) = e\left(\frac{1}{5}\right)+i\,e\left(\frac{2}{5}\right)-i\,e\left(\frac{3}{5}\right)-e\left(\frac{4}{5}\right)= \\
&= \left(e\left(\frac{1}{5}\right)-e\left(-\frac{1}{5}\right)\right)+i\left(e\left(\frac{2}{5}\right)-e\left(-\frac{2}{5}\right)\right)= \\
&= 2i\left(\sin\frac{2\pi}{5}+i\,\sin\frac{4\pi}{5}\right) = -2\sin\frac{4\pi}{5}+2i\,\sin\frac{2\pi}{5}, \qquad (1.21)\\
\tau(\bar{\chi}) &= \sum_{m=1}^{5}\bar{\chi(m)}e\left(\frac{m}{5}\right) = e\left(\frac{1}{5}\right)-i\,e\left(\frac{2}{5}\right)+i\,e\left(\frac{3}{5}\right)-e\left(\frac{4}{5}\right)= \\
&= \left(e\left(\frac{1}{5}\right)-e\left(-\frac{1}{5}\right)\right)-i\left(e\left(\frac{2}{5}\right)-e\left(-\frac{2}{5}\right)\right)= \\
&= 2i\left(\sin\frac{2\pi}{5}-i\,\sin\frac{4\pi}{5}\right) = 2\sin\frac{4\pi}{5}+2i\,\sin\frac{2\pi}{5}. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Представляя $\rho(n)$ в следующем удобном для вычисления виде

$$\begin{aligned}
\rho(n) &= \frac{1-i\text{æ}}{2}\cdot\frac{\tau(\chi)\bar{\chi}(n)}{\sqrt{5}}+\frac{1+i\text{æ}}{2}\cdot\frac{\tau(\bar{\chi})\chi(n)}{\sqrt{5}}= \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((\tau(\bar{\chi})\chi(n)+\tau(\chi)\bar{\chi}(n))+i\text{æ}(\tau(\bar{\chi})\chi(n)-\tau(\chi)\bar{\chi}(n))\right),
\end{aligned}$$

воспользовавшись формулами (1.21), (1.22), и (1.20), имеем

$$\begin{aligned}
\rho(1) =& \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((\tau(\bar{\chi})+\tau(\chi))+i\text{æ}(\tau(\bar{\chi})-\tau(\chi)\right)= \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(4i\sin\frac{2\pi}{5}+i\text{æ}\cdot 4\sin\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{2i}{\sqrt{5}}\left(\sin\frac{2\pi}{5}+\text{æ}\sin\frac{4\pi}{5}\right)= \\
&= \frac{2i}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = i = ir(1); \\
\rho(4) =& -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left((\tau(\bar{\chi})+\tau(\chi))+i\text{æ}(\tau(\bar{\chi})-\tau(\chi)\right)= \\
&= -\frac{2i}{\sqrt{5}}\left(\sin\frac{2\pi}{5}+\text{æ}\sin\frac{4\pi}{5}\right) = -i = ir(4);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rho(2) =& \frac{i}{2\sqrt{5}}\left((\tau(\bar{\chi})-\tau(\chi))+i\text{æ}(\tau(\bar{\chi})+\tau(\chi))\right)= \\
&= \frac{i}{2\sqrt{5}}\left(4\sin\frac{4\pi}{5}+i\text{æ}\cdot 4i\sin\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{2i}{\sqrt{5}}\left(\sin\frac{4\pi}{5}-\text{æ}\sin\frac{2\pi}{5}\right)= \\
&= \frac{2i}{\sqrt{5}}\left(\sin\frac{4\pi}{5}-\text{æ}\sin\frac{2\pi-10\pi}{5}\right)=\frac{2i}{\sqrt{5}}\left(\sin\frac{4\pi}{5}+\text{æ}\sin\frac{8\pi}{5}\right)= \\
&= \frac{2i}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\text{æ}=i\text{æ}=ir(2); \\
\rho(3) =& -\frac{i}{2\sqrt{5}}\left((\tau(\bar{\chi})-\tau(\chi))+i\text{æ}(\tau(\bar{\chi})+\tau(\chi))\right)=-i\text{æ}=ir(3).
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Определение 1.2. *Функции $F(t)$ и $\theta(t)$ задаются равенствами*

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2= \\
&= e^{i\theta(t)}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2
\end{aligned}
$$

Из определения $F(t)$ и (3.2) следует, что $F(t)$ при вещественных t принимает вещественные значения, а вещественные нули $F(t)$ нечётного порядка являются нулями нечётного порядка $f(s)$, лежащими на критической прямой.

Лемма 1.15. *При $t>t_0>0$, справедливо тождество*

$$
\theta(t)=t\ln P_1-\frac{t}{2}+\frac{\pi}{8}+\Delta(t),\qquad P_1=\sqrt{\frac{5t}{2\pi}},
$$

где

$$
\Delta(t)=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2t}+\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)-\frac{t}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\rho(u)du}{(u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}},\quad \rho(u)=\frac{1}{2}-\{u\}.
$$

Доказательство. По определению функции $\theta(t)$ имеем

$$
e^{i\theta(t)}=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}}\frac{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{it}{2})}{\left|\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{it}{2})\right|}.
$$

Возводя обе части равенства в квадрат, находим

$$e^{i2\theta(t)} = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-it} \frac{\Gamma^2(\frac{3}{4}+\frac{it}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{it}{2})\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{it}{2})} = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-it} \frac{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{it}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{it}{2})},$$

то есть

$$i2\theta(t) = -it\ln\frac{\pi}{5} + \ln\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right) - \ln\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{it}{2}\right).$$

Пользуясь формулой Стирлинга (лемма 1.5)

$$\ln\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - s + \ln\sqrt{2\pi} + \int\limits_0^\infty \frac{\rho(u)du}{u+s},$$

находим

$$2i\theta(t) = -it\ln\frac{\pi}{5} + \left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right) - \frac{3}{4} - \frac{it}{2} + \ln\sqrt{2\pi} + \int\limits_0^\infty \frac{\rho(u)du}{u+\frac{3}{4}+\frac{it}{2}} -$$

$$- \left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)\ln\left(\frac{3}{4}-\frac{it}{2}\right) + \frac{3}{4} - \frac{it}{2} - \ln\sqrt{2\pi} - \int\limits_0^\infty \frac{\rho(u)du}{u+\frac{3}{4}-\frac{it}{2}} = 2it\ln\sqrt{\frac{5}{\pi}} - it -$$

$$- it\int\limits_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}} + \left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)\ln\left(\frac{3}{4}-\frac{it}{2}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись при $x > 0$ формулой

$$\ln(x \pm iy) = |(x \pm iy| + i\arg((x \pm iy) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \pm i\,arctg\frac{y}{x},$$

найдем

$$2i\theta(t) = 2it\ln\sqrt{\frac{5}{\pi}} - it - it\int\limits_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}} + \left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right) \times$$

$$\times \left(\ln\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{t^2}{4}} + i\,arctg\frac{2t}{3}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)\left(\ln\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{t^2}{4}} - i\ \mathrm{arctg}\ \frac{2t}{3}\right) =$$

$$= 2i\left(t\ln\sqrt{\frac{5}{\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{t}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}} + \frac{t}{4}\ln\left(\frac{9}{16}+\frac{t^2}{4}\right) + \frac{1}{4}\,arctg\frac{2t}{3}\right).$$

Тогда с учётом соотношений

$$\frac{t}{4}\ln\left(\frac{9}{16}+\frac{t^2}{4}\right)=t\ln\sqrt{\frac{t}{2}}+\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{9}{4t^2}\right),\qquad arctg\frac{2t}{3}+arctg\frac{3}{2t}=\frac{\pi}{2},$$

найдем

$$\theta(t)=t\ln\sqrt{\frac{t}{2}}+\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\,arctg\frac{3}{2t}+$$
$$+t\ln\sqrt{\frac{5}{\pi}}-\frac{t}{2}-\frac{t}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}}=t\ln\sqrt{\frac{5t}{2\pi}}-\frac{t}{2}+\frac{\pi}{8}+\Delta(t),$$
$$\Delta(t)=-\frac{1}{4}\,arctg\frac{3}{2t}+\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)-\frac{t}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1.15.1. *При $t>t_0>0$, для функции*

$$\Delta(t)=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2t}+\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)-\frac{t}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\rho(u)du}{(u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}},$$

справедливо тождество

$$|\Delta(t)|\ll t^{-1}.$$

Доказательство. Функция $\Delta(t)$ состоит из трёх слагаемых, и каждое из них оценим отдельно. Воспользовавшись теоремой Лагранжа о конечных разностях для функции $\operatorname{arctg}x$, а именно соотношением

$$\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a=\frac{b-a}{1+\xi^2},\qquad a\le\xi\le b,$$

имеем

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{2t}\ll t^{-1}.$$

Далее из формулы Тейлора $\ln(1+x)=x+O(x^2)$, получим

$$\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)=\frac{t}{4}\left(\frac{9}{4t^2}+O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)=\frac{9}{16t}+O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Обозначая интеграл в $\Delta(t)$ через J, представим его как сходящийся знакопеременный ряд с положительной суммой и с положительным первым членом:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{n}^{n+0,5} \frac{\rho(u)du}{(u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}} + \int\limits_{n+0,5}^{n+1} \frac{\rho(u)du}{(u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\rho(u)du}{(n+u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}} + \int\limits_{0,5}^{1} \frac{\rho(u)du}{(n+u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\rho(u)du}{(n+u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}} + \int\limits_{0}^{0,5} \frac{\rho(1-u)du}{(n+1-u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{0,5} \frac{(0,5-u)du}{(n+\frac{3}{4}+u)^2+\frac{t^2}{4}} - \int\limits_{0}^{0,5} \frac{(0,5-u)du}{(n+1+\frac{3}{4}-u)^2+\frac{t^2}{4}} \right) =$$

$$= a_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n(t) - a_n(t)\right), \qquad a_n(t) = \int\limits_{0}^{0,5} \frac{(0,5-u)du}{(n+\frac{3}{4}+u)^2+\frac{t^2}{4}} > 0,$$

$$b_n(t) = \int\limits_{0}^{0,5} \frac{(0,5-u)du}{(n+\frac{3}{4}-u)^2+\frac{t^2}{4}} > 0, \qquad a_n(t) < b_n(t).$$

Поэтому

$$a_0(t) - b_1(t) < J < a_0(t) = \frac{4}{t^2} \int\limits_{0}^{0,5} \frac{(0,5-u)du}{(\frac{3}{2t}+\frac{2u}{t})^2+1} \le \frac{1}{t^2}.$$

Следствие доказано.

Теорема 1.2. *Пусть число T такое, что $T-\dfrac{\pi}{4} = 4\pi k$, k — целое число. Тогда при $T \le t \le T + T^{\frac{1}{3}}$ справедлива следующая формула:*

$$F(t) = 2\sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0,01}),$$

где λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X,

$$P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}, \qquad A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}.$$

Доказательство. Воспользовавшись определением функции Дэвенпорта – Хейльброна:

$$f(s) = \frac{1 - i\text{æ}}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + i\text{æ}}{2} L(s, \bar{\chi}),$$

представим функцию

$$F(t) = e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2} + it\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2,$$

в виде

$$F(t) = e^{i\theta(t)} \left(\frac{1 - i\text{æ}}{2} G(t;\chi) + \frac{1 + i\text{æ}}{2} G(t;\bar{\chi})\right), \tag{1.23}$$

где

$$G(t;\chi) = L\left(\frac{1}{2} + it;\chi\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2, \qquad \varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{\nu < X} \frac{h(\nu)}{\sqrt{\nu}} \nu^{-it}.$$

В теореме 1.1 для функции $G(t;\chi)$ нами было получено приближённое функциональное уравнение вида

$$G(t,\chi) = \sum_{\lambda \le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} - \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}} e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda \le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}} X^2\right),$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{5t}{2\pi}}, \qquad a(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2}, \qquad \theta_1(t) = \frac{\pi}{4} + t - 2t \ln P_1,$$

подставляя которое в правую часть формулы (1.23), имеем

$$\begin{aligned} F(t) = e^{i\theta(t)} \frac{1 - i\text{æ}}{2} &\left(\sum_{\lambda \le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} - \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}} e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda \le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}} X^2\right)\right) + \\ + e^{i\theta(t)} \frac{1 + i\text{æ}}{2} &\left(\sum_{\lambda \le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} - \frac{\tau(\bar{\chi})}{\sqrt{5}} e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda \le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}} X^2\right)\right) = \\ = e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda \le P_1} \frac{\lambda^{-it}}{\sqrt{\lambda}} &\left(\frac{1 - i\text{æ}}{2} a(\lambda) + \frac{1 + i\text{æ}}{2} \overline{a(\lambda)}\right) - \\ - e^{i(\theta(t) + \theta_1(t))} \sum_{\lambda \le P_1} \frac{\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}} &\left(\frac{1 - i\text{æ}}{2} \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}} \overline{a(\lambda)} + \frac{1 + i\text{æ}}{2} \frac{\tau(\bar{\chi})}{\sqrt{5}} a(\lambda)\right) + O\left(t^{-\frac{1}{4}} X^2\right). \end{aligned}$$

Заменяя функции $a(\lambda)$ и $\overline{a(\lambda)}$ их значениями найдём

$$F(t) = e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{-it}}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1-iæ}{2} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2} + \frac{1+iæ}{2} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\overline{\chi}(n)}{\nu_2} \right)$$

$$- e^{i(\theta(t)+\theta_1(t))} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1-iæ}{2} \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{5}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\overline{\chi}(n)}{\nu_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+iæ}{2} \frac{\tau(\bar{\chi})}{\sqrt{5}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2} \right) + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right) =$$

$$= e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{-it}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\nu_2} \left(\frac{1-iæ}{2}\chi(n) + \frac{1+iæ}{2}\bar{\chi}(n) \right) -$$

$$- e^{i(\theta(t)+\theta_1(t))} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)}{\nu_2} \left(\frac{1-iæ}{2} \cdot \frac{\tau(\chi)\bar{\chi}(n)}{\sqrt{5}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+iæ}{2} \cdot \frac{\tau(\bar{\chi})\chi(n)}{\sqrt{5}} \right) + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right).$$

Далее воспользовавшись определениями функций $r(n)$ и $\rho(n)$, а затем леммой 1.14 и определением функции $A(\lambda)$, получим

$$F(t) = e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{-it}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2} -$$

$$- e^{i(\theta(t)+\theta_1(t))} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\rho(n)}{\nu_2} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right) =$$

$$= e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{-it}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2} -$$

$$- ie^{i(\theta(t)+\theta_1(t))} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right) =$$

$$= e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} - ie^{i(\theta(t)+\theta_1(t))} \sum_{\lambda\le P_1} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right).$$

Пользуясь леммой 1.15 о представлении функции $\theta(t)$ в виде

$$\theta(t) = t\ln P_1 - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$
$$\Delta(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2t} + \frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{9}{4t^2}\right) - \frac{t}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+\frac{3}{4})^2+\frac{t^2}{4}},$$

и определением функции $\theta_1(t) = \frac{\pi}{4} + t - 2t\ln P_1$, имеем

$$\theta(t)+\theta_1(t) = \left(t\ln P_1 - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta(t)\right) + \left(\frac{\pi}{4} + t - 2t\ln P_1\right) =$$
$$= -\left(t\ln P_1 - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta(t)\right) + \frac{\pi}{2} + 2\Delta(t) = -\theta(t) + \frac{\pi}{2} + 2\Delta(t).$$

Следовательно,

$$F(t) = e^{i\theta(t)}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} - ie^{i(-\theta(t)+\frac{\pi}{2}+2\Delta(t))}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right)$$
$$= e^{i\theta(t)}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} + e^{i(-\theta(t)+2\Delta(t))}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right).$$

Заменим функцию $\theta(t)$ на $t\ln P - \frac{T}{2} + \frac{\pi}{8}$. Обозначая их разность через $\Delta_1(t)$ и воспользовавшись специальным видом числа T, то есть соотношением $T - \dfrac{\pi}{4} = 4\pi k$, и имея в виду что

$$\theta(t) = t\ln P - \frac{T}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta_1(t) = t\ln P - 2\pi k + \Delta_1(t),$$
$$e^{i(\theta(t))} = e^{i(t\ln P - 2\pi k + \Delta_1(t))} = P^{it}e^{i\Delta_1(t)},$$
$$e^{i(-\theta(t)+2\Delta(t))} = e^{i(-t\ln P + 2\pi k - \Delta_1(t) + 2\Delta(t))} = P^{-it}e^{i(-\Delta_1(t)+2\Delta(t))}.$$

найдем

$$F(t) = e^{i\Delta_1(t)}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} + e^{i(-\Delta_1(t)+2\Delta(t))}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2\right).$$

Оценим $\Delta_1(t)$, для этого пользуясь явным видом параметров P, P_1, формулой Тейлора $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ и соотношением $t - T \le T^{\frac{1}{3}}$, последовательно

получим

$$\begin{aligned}\Delta_1(t) &= \left(t\ln P_1 - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta(t)\right) - \left(t\ln P - \frac{T}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \\ &= \frac{t}{2}\ln\frac{t}{T} - \frac{t-T}{2} + \Delta(t) = t\ln\left(1 + \frac{t-T}{T}\right) - \frac{t-T}{2} + \Delta(t) = \\ &= \frac{t}{2}\left(\frac{t-T}{T} + O\left(\frac{(t-T)^2}{T^2}\right)\right) - \frac{t-T}{2} + \Delta(t) = \\ &= \Delta(t) + \frac{(t-T)^2}{2T} + O\left(\frac{t(t-T)^2}{T^2}\right) = \Delta(t) + O\left(T^{-\frac{1}{3}}\right).\end{aligned}$$

Отсюда и из оценки $\Delta(t) \ll t^{-1}$, (следствие 1.15.1) с учётом соотношения $e^{i\delta} = 1 + O(|\delta|)$, δ — вещественное число), найдём

$$\begin{aligned}&e^{i\Delta_1(t)} = 1 + O\left(|\Delta_1(t)|\right) = 1 + O\left(t^{-1} + T^{-\frac{1}{3}}\right) = 1 + O\left(T^{-\frac{1}{3}}\right), \\ &e^{i(-\Delta_1(t) + 2\Delta(t))} = 1 + O\left(t^{-1} + (t-T)^2T^{-1}\right) = 1 + O\left(T^{-\frac{1}{3}}\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}F(t) &= \sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} + \sum_{\lambda\le P_1}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}X^2 + T^{-\frac{1}{3}}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right) = \\ &= 2\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda} + R(T), \\ &R(T) \ll T^{-\frac{1}{4}}X^2 + T^{-\frac{1}{3}}\sum_{\lambda\le P_1}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{P<\lambda\le P_1}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}.\end{aligned}$$

В остаточном члене $R(T)$ оценим два последних слагаемых, воспользовавшись определением $A(\lambda)$, и соотношениями $|h(\nu)| \le 1$, $r(n) \ll 1$. Имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\le P_1}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda\le P_1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left|\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}\right| \ll \sum_{\lambda\le P_1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{1}{\nu_2} \le \\ &\le \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{n\le\frac{P_1\nu_2}{\nu_1}}\frac{1}{\sqrt{n}} \ll \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{P_1\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \ll t^{\frac{1}{4}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\nu_1} \ll T^{\frac{1}{4}}X\ln T,\end{aligned}$$

$$\sum_{P<\lambda\le P_1}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\ll\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{\frac{P\nu_2}{\nu_1}<n\le\frac{P_1\nu_2}{\nu_1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\le$$
$$\le\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{P\nu_2}{\nu_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{P_1\nu_2}{\nu_1}-\frac{P\nu_2}{\nu_1}+1\right)\ll$$
$$\ll T^{-\frac{1}{4}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\nu_2}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\left(\sqrt{t}-\sqrt{T}\right)+1\right)=$$
$$=T^{-\frac{1}{4}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\nu_2}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{t-T}{\sqrt{t}+\sqrt{T}}+1\right)\ll$$
$$=T^{-\frac{1}{4}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\nu_2}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{T^{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{T}}+1\right)\ll$$
$$\ll T^{-\frac{1}{4}}\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\nu_2}\ll T^{-\frac{1}{4}}X\ln T.$$

Отсюда и из $X=T^{0,01\varepsilon}$ получим.

$$R(T)\ll T^{-\frac{1}{4}}X^2+T^{-\frac{1}{3}}\cdot T^{\frac{1}{4}}X\ln T+T^{-\frac{1}{4}}X\ln T\ll T^{-\frac{1}{12}+0,01\varepsilon}\ll T^{-0,01}.$$

Теорема 1.2 доказана.

Глава 2

Оценки сумм Сельберга и тригонометрических сумм

Определение 2.1. *Суммами А. Сельберга вида $W(\theta)$ и вида $S(Y)$ назовём соответственно суммы вида*

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$
$$S(Y)=\sum_{\lambda\le Y}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

где $\beta(\nu)$ — функция натурального аргумента ν, определённая в параграфе 2 главы 1, а $A(\lambda)$ — функция, определённая в теореме 1.2 главы 1, где λ — положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит X.

В этой главе доказываются асимптотическая формула для суммы $S(Y)$, оценка сверху для суммы $W(\theta)$ и оценки сверху для тригонометрических сумм специального вида $W_j(T)$.

2.1. Оценка суммы Сельберга $S(Y)$

Лемма 2.1. *Пусть $T^{0,1}\le Y\le T$, $\frac{1}{4}\le\theta\le\frac{1}{2}$, тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y)=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}W(0)+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2 X\right).$$

Доказательство. Пользуясь определением $A(\lambda)$, то есть соотношением

$$A(\lambda)=\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}=\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

находим

$$
\begin{aligned}
S(Y) &= \sum_{\lambda \le Y} \frac{1}{\lambda^{2\theta}} \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n_1)}{\nu_2} \sum_{\substack{\frac{n\nu_3}{\nu_4}=\lambda \\ \nu_3,\nu_4<X}} \frac{h(\nu_3)h(\nu_4)r(n_2)}{\nu_4} = \\
&= \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X \\ \frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\le Y}} \frac{1}{\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\cdot\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)^{\theta}} \cdot \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n_1)}{\nu_2} \cdot \frac{h(\nu_3)h(\nu_4)r(n_2)}{\nu_4} = \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}} \sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\le Y} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^{\theta}} = \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}} \sum_{n_1\nu_1\nu_4=n_2\nu_2\nu_3\le Y\nu_2\nu_4} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^{\theta}} = \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}} \sum_{\frac{n_1\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}=\frac{n_2\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\le\frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^{\theta}}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Вычислим сумму по n_1, n_2, которую обозначим символом $S_1(Y)$. Из условия

$$
\frac{n_1\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} = \frac{n_2\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} \le \frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \quad \left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) = 1, \tag{2.2}
$$

следует, что

$$
n_1 = n_1'\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \qquad n_2 = n_2'\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}.
$$

Подставляя найденные значения переменных суммирования n_1 и n_2 в формулу (2.2), найдем

$$
\frac{n_1'\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2} = \frac{n_2'\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2} \le \frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}.
$$

После сокращения на общий множитель и ввода обозначения $n_1' = n_2' = m$, граница изменения суммы $S_1(Y)$ принимает вид:

$$
m \le \frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3} = Y_1,
$$

В сумме $S_1(Y)$, переходя от переменных суммирования n_1 и n_2 соответственно к n_1' и n_2' и имея в виду, что $n_1' = n_2' = m$, находим

$$S_1(Y) = \sum_{\frac{n_1\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} = \frac{n_2\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} \le \frac{Y\nu_2\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^\theta} =$$
$$= \sum_{m\le Y_1} \frac{r\left(\frac{m\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) r\left(\frac{m\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right)}{\left(\frac{m^2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2}\right)^\theta} =$$
$$= \frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^\theta} \sum_{m\le Y_1} \frac{r\left(\frac{m\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) r\left(\frac{m\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right)}{m^{2\theta}}.$$

Числа $\nu_1\nu_4$ и $\nu_2\nu_3$ являются произведениями степеней простых чисел вида $5k\pm 1$, следовательно, все их делители, в том числе $\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}$ и $\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}$ имеют вид $5k\pm 1$ (см. определение 1.1). Поэтому для значений нечётного характера χ по модулю 5 ($\chi(\pm 1) = \pm 1$, см. формулу (3.4)) для этих двух чисел справедливо соотношение

$$\chi\left(\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) = \overline{\chi}\left(\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right), \quad \chi\left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) = \overline{\chi}\left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись определением функции

$$r(n) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n),$$

и считая, что $\tilde{\nu}$ одно из чисел $\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}$ и $\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}$, найдем

$$r(m\tilde{\nu}) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(m\tilde{\nu}) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(m\tilde{\nu}) =$$
$$= \chi(m)\left(\frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(\tilde{\nu}) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(\tilde{\nu})\right) = \chi(\tilde{\nu})r(m).$$

Следовательно, имея в виду, что $\chi((\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2) = \chi^2((\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)) = 1$, найдем

$$r\left(\frac{m\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) r\left(\frac{m\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) = \chi\left(\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right)\chi\left(\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\right) r^2(m) =$$
$$= \chi\left(\frac{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2}\right) r^2(m) = \chi\left(\frac{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2}\right)\chi((\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^2) r^2(m) =$$
$$= \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4) r^2(m).$$

Поэтому

$$S_1(Y) = \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\ S_2(Y), \qquad S_2(Y) = \sum_{m\le Y_1}\frac{r^2(m)}{m^{2\theta}}. \tag{2.3}$$

Пользуясь периодичностью функции $r(m)$ и имея в виду, что $r(5k)=0$, имеем

$$S_2(Y) = \sum_{m\le Y_1}\frac{r^2(m)}{m^{2\theta}} = \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\sum_{1\le 5k+l\le Y_1}(5k+l)^{-2\theta} =$$
$$= \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(\sum_{\frac{1-l}{5}\le k<0{,}5}(5k+l)^{-2\theta} + \sum_{0{,}5\le k\le\frac{Y_1-l}{5}}(5k+l)^{-2\theta}\right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(l^{-2\theta} + \sum_{0{,}5\le k\le\frac{Y_1-l}{5}}(5k+l)^{-2\theta}\right).$$

Пользуясь формулой суммирования Эйлера (лемма 1.6), найдём

$$S_2(Y) = \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(\int\limits_{0{,}5}^{(Y_1-l)/5}\frac{du}{(5u+l)^{2\theta}} + \rho\left(\frac{Y_1-l}{5}\right)\frac{1}{Y_1^{2\theta}} +\right.$$
$$\left. +10\theta\int\limits_{0{,}5}^{(Y_1-l)/5}\frac{\rho(u)du}{(5u+l)^{2\theta+1}} + l^{-2\theta}\right) = \sum_{l=1}^{4} r^2(l)\left(\frac{Y_1^{1-2\theta}-(l+2,5)^{1-2\theta}}{5(1-2\theta)} +\right.$$
$$\left. +10\theta\int\limits_{0{,}5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+l)^{2\theta+1}} + l^{-2\theta} + O\left(Y_1^{-2\theta}\right)\right).$$

Отсюда и из соотношений $r(5k\pm1)=\pm1$, $r(5k\pm2)=\pm æ$, $r(5k)=0$, получаем

$$S_2(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}\,Y_1^{1-2\theta} + \left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right) + O\left(Y_1^{-2\theta}\right),$$
$$c_1 = -\frac{7^{1-2\theta}+13^{1-2\theta}+æ^2(9^{1-2\theta}+11^{1-2\theta})}{5\cdot 2^{1-2\theta}},$$

$$c_2 = 10\theta\left(\int\limits_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+1)^{2\theta+1}}+\int\limits_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+4)^{2\theta+1}}+\text{æ}^2\int\limits_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+2)^{2\theta+1}}+\right.$$
$$\left.+\text{æ}^2\int\limits_{0,5}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(5u+3)^{2\theta+1}}\right)+1+\frac{1}{4^{2\theta}}+\frac{\text{æ}^2}{2^{2\theta}}+\frac{\text{æ}^2}{3^{2\theta}}.$$

Подставляя найденное значение для $S_2(Y)$ в формулу (2.3), затем пользуясь явным значением $Y_1 = \frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}$, найдем

$$S_1(Y) = \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\left(\frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}\,Y_1^{1-2\theta}+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)+O\left(Y_1^{-2\theta}\right)\right)$$
$$= \frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}\,\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\left(\frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-2\theta}+$$
$$+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}+$$
$$+O\left(\left(\frac{Y(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{-2\theta}\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\right)=$$
$$= \frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}\ \frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2^{\theta}\nu_3^{1-\theta}\nu_4^{\theta}}\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+$$
$$+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+O\left(\frac{\nu_1^{\theta}\nu_3^{\theta}}{\nu_2^{\theta}\nu_4^{\theta}}\ Y^{-2\theta}\right).$$

Подставляя найденную формулу для $S_1(Y)$ в правую часть (2.1) и имея в виду, что $h(\nu)=\beta(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)\overline{\chi}(\nu)$, то есть $h(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)$, а также $|h(\nu)|\le 1$, найдем:

$$S(Y) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}S_1(Y)=$$
$$= \frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}\ \frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2^{\theta}\nu_3^{1-\theta}\nu_4^{\theta}}\ \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+$$
$$+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}\ \frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{2\theta}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\theta}}\ \chi(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)+$$
$$+O\left(Y^{-2\theta}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}\ \frac{\nu_1^{\theta}\nu_3^{\theta}}{\nu_2^{\theta}\nu_4^{\theta}}\right)=$$

$$= \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\ \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} +$$
$$+ \left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right) \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{2\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} +$$
$$+ O\left(Y^{-2\theta} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{1}{\nu_2\nu_4}\right).$$

Тогда, воспользовавшись соотношениями

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\ \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} = W(0),$$
$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{2\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} = W(1-2\theta),$$
$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{1}{\nu_2\nu_4} \ll X^2 \ln^2 X,$$

получим

$$S(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(0) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right) W(1-2\theta) + O\left(Y^{-2\theta} X^2 \ln^2 X\right).$$

Лемма доказана.

2.2. Оценка суммы Сельберга $W(\theta)$

Лемма 2.2. *При $0 \le \theta \le \frac{1}{2}$ для $W(\theta)$ справедлива оценка*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} = O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Доказательство. Определяя функцию $\gamma(d)$ равенством

$$\sum_{d\backslash(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} \gamma(d) = (\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1-\theta}, \tag{2.4}$$

и воспользовавшись первой формулой обращения Мёбиуса (лемма 1.7), найдем

$$\gamma(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^{1-\theta} = n^{1-\theta} \prod_{d|n} \left(1 - \frac{1}{p^{1-\theta}}\right),$$

следовательно,

$$0 < \gamma(n) < n^{1-\theta}.$$

Из определения функции $W(\theta)$ и формулы (2.4), получим

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} s\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4}(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1-\theta} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4} \sum_{d|(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)} \gamma(d) =$$

$$= \sum_{d\le X^2}{}' \gamma(d) \sum_{\substack{\nu_1,\nu_4<X\\ \nu_1\nu_4\equiv 0 \pmod d}} \sum_{\substack{\nu_2,\nu_3<X\\ \nu_2\nu_3\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4} =$$

$$= \sum_{d\le X^2}{}' \gamma(d) \left(\sum_{\substack{\nu_1,\nu_4<X\\ \nu_1\nu_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4} \right)^2, \tag{2.5}$$

где штрих в сумме означает, что суммирование ведётся по натуральным числам d, простые делители p которых имеют вид $p \equiv \pm 1 \pmod 5$ (числа d, являясь делителями $(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$, состоят из простых сомножителей p вида $p \equiv \pm 1 \pmod 5$). Рассмотрим внутреннюю сумму последней формулы, которую обозначим буквой $V(d)$. Пусть δ_1 и δ_4 — натуральные числа, простые делители которых совпадают с простыми делителями d и пусть далее $\nu_1 = \delta_1\nu_1'$, $\nu_4 = \delta_4\nu_4'$, где $(\nu_1', d) = (\nu_4', d) = 1$. Тогда

$$V(d) = \sum_{\substack{\nu_1,\nu_4<X\\ \nu_1\nu_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4} = \sum_{\substack{\delta_1\nu_1',\delta_4\nu_4'<X,\ (\nu_1'\nu_4',d)=1\\ \delta_1\nu_1'\delta_4\nu_4'\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\delta_1\nu_1')\beta(\delta_4\nu_4')}{(\delta_1\nu_1')^{1-\theta}\delta_4\nu_4'} =$$

$$= \sum_{\substack{\delta_1\nu_1',\delta_4\nu_4'<X,\ (\nu_1'\nu_4',d)=1\\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\delta_1\nu_1')\beta(\delta_4\nu_4')}{(\delta_1\nu_1')^{1-\theta}\delta_4\nu_4'} =$$

$$= \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}}{}'' \frac{1}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4} \sum_{\substack{\delta_1\nu_1'<X\\ (\nu_1',d)=1}} \frac{\beta(\delta_1\nu_1')}{\nu_1'^{1-\theta}} \sum_{\substack{\delta_4\nu_4'<X\\ (\nu_4',d)=1}} \frac{\beta(\delta_4\nu_4')}{\nu_4'}.$$

Вспоминая определение $\beta(\delta_1\nu_1')$, находим

$$\beta(\delta_1\nu_1') = \alpha(\delta_1\nu_1')\left(1 - \frac{\ln\delta_1\nu_1'}{\ln X}\right) = \frac{\alpha(\delta_1\nu_1')}{\ln X}\ \ln\frac{X}{\delta_1\nu_1'}.$$

Так как простые делители δ_1 являются делителями d, а $(d,\nu_1')=1$, то $(\delta_1,\nu_1')=1$, и следовательно, из мультипликативности $\alpha(\nu)$ получим

$$\alpha(\delta_1\nu_1')=\alpha(\delta_1)\alpha(\nu_1'),$$

то есть

$$\beta(\delta_1\nu_1')=\frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\nu_1')}{\ln X}\,\ln\frac{X}{\delta_1\nu_1'}.$$

Аналогично находим

$$\beta(\delta_4\nu_4')=\frac{\alpha(\delta_4)\alpha(\nu_4')}{\ln X}\,\ln\frac{X}{\delta_4\nu_4'}.$$

Таким образом, для $V(d)$ получили формулу

$$\begin{aligned}V(d)=&\frac{1}{\ln^2 X}\sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)}}\frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}\sum_{\substack{\nu_1'<X\delta_1^{-1}\\ (\nu_1',d)=1}}\frac{\alpha(\nu_1')}{\nu_1'^{1-\theta}}\ln\frac{X}{\delta_1\nu_1'}\sum_{\substack{\nu_4'<X\delta_4^{-1}\\ (\nu_4',d)=1}}\frac{\alpha(\nu_4')}{\nu_4'}\ln\frac{X}{\delta_4\nu_4'}\\ &=\frac{1}{\ln^2 X}\sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)}}\frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}K(\delta_1,d,\theta)K(\delta_4,d,0),\qquad (2.6)\\ &K(\delta,d,\theta)=\sum_{\substack{\nu<X\delta^{-1}\\ (\nu,d)=1}}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}}\ln\frac{X}{\delta\nu}.\end{aligned}$$

Пусть при $Re\,s>1$ и $\chi_1=\chi_1(n)=\left(\frac{n}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5

$$f_1(s)=\prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2},\qquad f_2(s)=\prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right),$$

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\qquad L(s,\chi_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_1(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1}=$$

$$=\prod_{p\equiv\pm1(mod5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p\equiv\pm2(mod5)}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\qquad (2.7)$$

тогда справедливо тождество

$$f_1(s) = \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv \pm 1 (mod 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv \pm 2 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \zeta(s) \prod_{p \equiv \pm 1 (mod 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv \pm 2 (mod 5)} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \prod_{p \equiv \pm 2 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \zeta(s) \prod_{p \equiv \pm 1 (mod 5)} \left(1 - \frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \prod_{p \equiv \pm 2 (mod 5)} \left(1 - \frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv \pm 2 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \zeta(s) \cdot$$

$$\cdot \prod_p \left(1 - \frac{\left(\frac{p}{5}\right)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv \pm 2 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \zeta(s) L(s, \chi_1) f_2(s). \tag{2.8}$$

В $K(\delta, d, \theta)$ для простоты обозначаем $X\delta^{-1}$ через Y, то есть

$$K(\delta, d, \theta) = \sum_{\substack{\nu < X\delta^{-1} \\ (\nu, d) = 1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \ln \frac{X}{\delta \nu} = \sum_{\substack{\nu < Y \\ (\nu, d) = 1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \ln \frac{Y}{\nu}.$$

Воспользовавшись формулой Перрона

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^s \, \frac{ds}{s^2} = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1; \\ 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

представим $K(\delta, d, \theta)$ в виде

$$K(\delta, d, \theta) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,d)=1}}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^{1-\theta}} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \left(\frac{Y}{n}\right)^s \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{Y^s}{s^2} g_d(s + 1 - \theta) ds,$$

$$g_d(s + 1 - \theta) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,d)=1}}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^{s+1-\theta}}.$$

Пользуясь мультипликативностью функции $\alpha(n)$, представим «производящую» функцию $g_d(s+1-\theta)$ в виде бесконечного произведения, а затем из определения функции $f_1(s)$ и соотношения (2.8) находим

$$g_d(s+1-\theta)=\prod_{\substack{p\equiv\pm1(mod\,5)\\(p,d)=1}}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac12}=f_1^{-\frac14}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac12},$$

$$f_1^{-\frac14}(s+1-\theta)=\left(\left(1-\frac{1}{5^{s+1-\theta}}\right)\zeta(s+1-\theta)L(s+1-\theta,\chi_1)f_2(s+1-\theta)\right)^{-\frac14}. \tag{2.9}$$

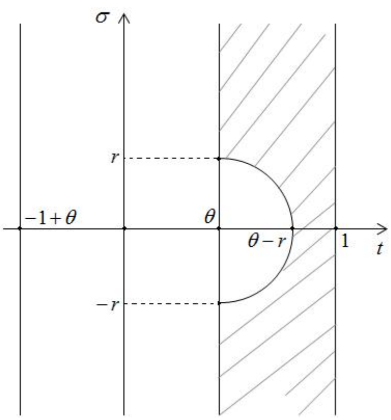
Пользуясь этим соотношением и считая $Y>2$, имеем

$$K(\delta,d,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}f_1^{-\frac14}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac12}\frac{Y^s}{s^2}ds. \tag{2.10}$$

Рассмотрим два случая: $\theta\geq(\ln Y)^{-1}$ и $0\leq\theta<(\ln Y)^{-1}$.

1. Случай $\theta\geq(\ln Y)^{-1}$. Рассмотрим интеграл

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}f_1^{-\frac14}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac12}\frac{Y^s}{s^2}ds.$$



где D — область, ограниченная прямыми $[1-i\infty,1+i\infty]$, полуокружностью вида $s=\theta+re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, и двумя полупрямыми вида $Res=0$, $|Ims|\geq r$, $0<r<1$. Подинтегральная функция является произведением трёх функций $f_1^{-\frac14}(s+1-\theta)$, $\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac12}$ и $\frac{Y^s}{s^2}$, две последние из которых в области D являются голоморфными функциями. Рассмотрим в области D отдельно поведение каждой из четырёх функций, произведениями которых согласно тождества (2.8) является функция $f_1(s+1-\theta)$:

- функция $1-\frac{1}{5^{s+1-\theta}}\neq 0$ и голоморфна в D, и её единственный нуль $s=-1+\theta$ находится вне области D;
- функция $\zeta(s+1-\theta)\neq 0$ и голоморфна в D, и её единственный полюс $s=\theta$ находится вне области D;
- функция $L(s+1-\theta,\chi_1)\neq 0$ и голоморфна в области $Re\, s>\theta$, в том числе, в области D, входящей в $Re\, s>\theta$;
- функция $(f_2(s+1-\theta))^{-\frac{1}{4}}$ также голоморфна и в области D не имеет нулей, так как

$$|f_2(s+1-\theta)| = \prod_{p\equiv\pm 2(mod\, 5)}\left|1-\frac{1}{p^{2s+2-2\theta}}\right| \geq \prod_{p\equiv\pm 2(mod\, 5)}\left(1-\frac{1}{|p^{2s+2-2\theta}|}\right) =$$
$$= \prod_{p\equiv\pm 2(mod\, 5)}\left(1-\frac{1}{p^{2\sigma+2-2\theta}}\right) > \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{2\sigma+2-2\theta}}\right) =$$
$$= \zeta^{-1}(2\sigma+2-2\theta) > 0.$$

Поэтому функция, являющаяся корнем четвёртой степени от обратной функции $f_1(s+1-\theta)$, то есть функции $f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)$, в области D будет голоморфной. Следовательно, в области D подинтегральная функция

$$g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2} = f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}$$

будет голоморфной, и согласно теореме Коши, имеем

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds = 0.$$

Отсюда и из соотношения (2.10), получим

$$K(\delta,d,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta-ir} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds + \frac{r}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g_d(1+re^{i\varphi})\frac{Y^{\theta+re^{i\varphi}}e^{i\varphi}}{(\theta+re^{i\varphi})^2}d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta+ir}^{\theta+i\infty} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds. \tag{2.11}$$

Эти интегралы обозначим соответственно через $K_1(\delta, d, \theta)$, $K_2(\delta, d, \theta)$ и $K_3(\delta, d, \theta)$. Интегралы $K_1(\delta, d, \theta)$ и $K_3(\delta, d, \theta)$ совпадают по абсолютной величине.

Оценим $K_2(\delta, d, \theta)$ — интеграл по полуокружности. Имеем неравенство

$$|K_2(\delta, d, \theta)| \leq \frac{r}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g_d(1+re^{i\varphi})| \frac{Y^{\theta + r\cos\varphi}}{\theta^2 + r^2 + 2r\theta\cos\varphi} d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{rY^{\theta+r}}{2\pi(\theta^2+r^2)} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g_d(1+re^{i\varphi})| d\varphi. \qquad (2.12)$$

Воспользовавшись представлением (2.9) и соотношением $Re(1+re^{i\varphi}) = 1 + r\cos\varphi \geq 1$, оценку подынтегральной функции сводим к оценкам функций $|\zeta(s)|^{-1}$, $|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $1+re^{i\varphi}$. Имеем

$$|g_d(1+re^{i\varphi})| = \left| f_1^{-\frac{1}{4}}(1+re^{i\varphi}) \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{1+re^{i\varphi}}}\right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq |f_1(1+re^{i\varphi})|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left| \left(1 - \frac{1}{5^{1+re^{i\varphi}}}\right) \zeta(1+re^{i\varphi}) L(1+re^{i\varphi}, \chi_1) f_2(1+re^{i\varphi}) \right|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left| \frac{5}{4} \zeta(1+re^{i\varphi}) L(1+re^{i\varphi}, \chi_1) f_2(1+re^{i\varphi}) \right|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.13)$$

Оценим $|\zeta(1+re^{i\varphi})|^{-1}$, для этого из леммы 1.8, полагая $N = 1$, найдем

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int\limits_1^{\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du.$$

Отсюда следует, что $\zeta(s)$ в точке $s = 1$ имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1. Поэтому при $s \to 1$ имеет место соотношение $|\zeta(s)|^{-1} \ll |s-1|$, то есть

$$|\zeta(1+re^{i\varphi})|^{-1} \ll r.$$

Применяя лемму 1.9 для функции Дирихле $L(s,\chi_1)$, $\chi_1=\chi_1(n)=\left(\frac{n}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5, найдём

$$L(s,\chi_1)=s\int\limits_1^\infty \frac{S(x)}{x^{s+1}}dx, \qquad S(x)=\sum_{n\le x}\left(\frac{n}{5}\right).$$

Функция $S(x)$ для всех $x\ge 1$ принимает одно из трёх значений 1, 0 и -1, то есть $|S(x)|\le 1$, поэтому

$$|L(s,\chi_1)|=|s|\left|\int\limits_1^\infty \frac{S(x)}{x^{s+1}}dx\right|\le |s|\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{1+Re\,s}}=\frac{|s|}{Re\,s},$$

то есть интеграл сходится в полуплоскости $Re\,s>0$ и определяет там голоморфную функцию. Функция $L(s,\chi_1)$ согласно теореме Ш.Валле-Пуссена о нулях (лемма 1.10) и теореме Пейджа (лемма 1.11), не имеет нулей в области

$$Re\,s=\sigma\ge 1-\min\left(\frac{c}{\ln q(|t|+2)},\ \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}\right).$$

Следовательно, при $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, имеем

$$|L(1+re^{i\varphi},\chi_1)|^{-1}\ll 1.$$

Воспользовавшись определением функции $f_2(s)$, (см. формулу (2.7)), найдем

$$|f_2(1+re^{i\varphi})|=\prod_{p\equiv\pm 2(mod\,5)}\left|1-\frac{1}{p^{2+2re^{i\varphi}}}\right|\ge\prod_{p\equiv\pm 2(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)>$$
$$>\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\zeta^{-1}(2)=\frac{6}{\pi^2}.$$

Подставляя полученные оценки для функций $|\zeta(s)|^{-1}$, $|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $1+re^{i\varphi}$ в (2.13), получим

$$|g_d(1+re^{i\varphi})|\le\left|\frac{5}{4}\zeta(1+re^{i\varphi})L(1+re^{i\varphi},\chi_1)f_2(1+re^{i\varphi})\right|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\ll$$
$$\ll r^{\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и (2.12), имеем

$$|K_2(\delta,d,\theta)| \le \frac{rY^{\theta+r}}{2\pi(\theta^2+r^2)}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|g_d(1+re^{i\varphi})|d\varphi \ll \frac{r^{\frac{5}{4}}Y^{\theta+r}}{\theta^2+r^2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

Оценим $K_3(\delta,d,\theta)$ — интеграл верхней полупрямой. Имеем

$$|K_3(\delta,d,\theta)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\theta+ir}^{\theta+i\infty} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r}^{\infty} g_d(1+it)\frac{Y^{\theta+it}}{(\theta+it)^2}dt\right| \ll Y^\theta\int\limits_{r}^{\infty}|g_d(1+it)|\frac{dt}{\theta^2+t^2}. \quad (2.15)$$

Воспользовавшись представлением (2.9), оценку подынтегральной функции сводим к оценкам функций $|\zeta(s)|^{-1}$, $|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $1+it$. Имеем

$$|g_d(1+it)| = \left|f_1^{-\frac{1}{4}}(1+it)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{1+it}}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \le |f_1(1+it)|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left|\left(1-\frac{1}{5^{1+it}}\right)\zeta(1+it)L(1+it,\chi_1)f_2(1+it)\right|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left|\frac{5}{4}\zeta(1+it)L(1+it,\chi_1)f_2(1+it)\right|^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Оценим $|\zeta(1+it)|^{-1}$, для этого в лемме 1.8 полагая $N=1$, найдём

$$\zeta(1+it) = \frac{1}{it}+\frac{1}{2}+(1+it)\int\limits_1^\infty\frac{\rho(u)}{u^{2+it}}du.$$

Отсюда следует, что при $s\to\infty$ имеет место соотношение

$$|\zeta(1+it)|^{-1} \ll |t|.$$

Функция Дирихле $L(s,\chi_1)$, $\chi_1=\chi_1(n)=\left(\frac{n}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5, в полуплоскости $Re\, s>0$ является голоморфной функцией и согласно теореме

Ш.Валле-Пуссена о нулях, (лемма 1.10), и теореме Пейджа, (лемма 1.11), не имеет нулей в области

$$Re\, s = \sigma \geq 1 - \min\left(\frac{c}{\ln q(|t|+2)},\ \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}\right).$$

Следовательно

$$|L(1+it,\chi_1)|^{-1} \ll 1.$$

Воспользовавшись определением функции $f_2(s)$, (см. формулу (2.7)), найдём

$$|f_2(1+it)| = \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left|1-\frac{1}{p^{2+2it}}\right| \geq \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) >$$

$$> \prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \zeta^{-1}(2) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Подставляя полученные оценки для функций $|\zeta(1+it)|^{-1}$, $|L(1+it,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(1+it)|^{-1}$ в (2.16), получим

$$|g_d(1+it)| \leq \left|\frac{5}{4}\zeta(1+it)L(1+it,\chi_1)f_2(1+it)\right|^{-\frac{1}{4}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \ll |t|^{\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

Отсюда и из (2.15) имеем

$$|K_3(\delta,d,\theta)| \ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\int_r^\infty\frac{t^{\frac{1}{4}}dt}{\theta^2+t^2} =$$

$$= Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_r^\theta\frac{t^{\frac{1}{4}}dt}{\theta^2+t^2}+\int_\theta^\infty\frac{t^{\frac{1}{4}}dt}{\theta^2+t^2}\right) \leq$$

$$\leq Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\theta^{-2}\int_r^\theta t^{\frac{1}{4}}dt+\int_\theta^\infty t^{-\frac{7}{4}}dt\right) \ll$$

$$\ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\theta^{-\frac{3}{4}} \ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

Переходя в (2.11) к неравенству, затем подставляя найденные оценки для $K_2(\delta, d, \theta)$ и $K_3(\delta, d, \theta)$ с учётом соотношения $|K_3(\delta, d, \theta)| = |K_1(\delta, d, \theta)|$, получим

$$|K(\delta, d, \theta)| \ll Y^\theta \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}} + \frac{r^{\frac{5}{4}}Y^{\theta+r}}{\theta^2+r^2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

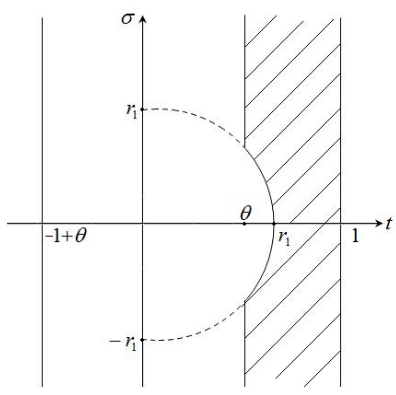
Переходя при $r \to 0$ к пределу, найдем

$$|K(\delta, d, \theta)| \ll Y^\theta \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

2. Случай $0 \le \theta < (\ln Y)^{-1}$. Возьмем $r_1 = 2(\ln Y)^{-1}$ и рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds.$$

где D — область, ограниченная прямыми $[1-i\infty, 1+i\infty]$, дугой окружности вида $|s| = r_1$, $Res \ge \theta$ и двумя полупрямыми вида $Re\, s = \theta$, $|Im\, s| \ge \sqrt{r_1^2-\theta^2}$. Подинтегральная функция является произведением трёх функций $f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)$, $\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{Y^s}{s^2}$, две последние из которых в области D являются голоморфными функциями. Рассмотрим в области D отдельно поведение каждой



из четырёх функций, произведением которых согласно тождеству (2.8) является функция $f_1(s+1-\theta)$:

- функция $1-\frac{1}{5^{s+1-\theta}} \neq 0$ и голоморфна в D, и её единственный нуль $s = -1+\theta$ находится вне области D;
- функция $\zeta(s+1-\theta) \neq 0$ и голоморфна в D, и её единственный полюс $s = \theta$ находится вне области D;
- функция $L(s+1-\theta, \chi_1) \neq 0$ и голоморфна в области $Re\, s > \theta$, в том числе, в области D, входящей в $Re\, s > \theta$;

- функция $(f_2(s+1-\theta))^{-\frac{1}{4}}$ также голоморфна и в области D не имеет нулей, так как

$$|f_2(s+1-\theta)| = \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left|1-\frac{1}{p^{2s+2-2\theta}}\right| \geq$$
$$\geq \prod_{p\equiv\pm2(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^{2\sigma+2-2\theta}}\right) > \zeta^{-1}(2\sigma+2-2\theta) > 0.$$

Поэтому функция, являющаяся корнем четвёртой степени от обратной функции $f_1(s+1-\theta)$, то есть функция $f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)$ в области D, будет голоморфной. Следовательно, в области D функция

$$g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2} = f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}$$

будет голоморфной, и согласно теореме Коши имеем

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f_1^{-\frac{1}{4}}(s+1-\theta)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Y^s}{s^2}ds = 0.$$

Отсюда, из соотношения (2.10), определения угла α из соотношений $r_1\sin\alpha = \sqrt{r_1^2-\theta^2}$ и $r_1\cos\alpha = \theta$, получим

$$K(\delta,d,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\theta-i\infty}^{\theta-i\sqrt{r_1^2-\theta^2}} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds+$$
$$+\frac{r_1}{2\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} g_d(r_1e^{i\varphi}+1-\theta)\frac{Y^{r_1e^{i\varphi}}e^{i\varphi}}{(r_1e^{i\varphi})^2}d\varphi+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\theta+i\sqrt{r_1^2-\theta^2}}^{\theta+i\infty} g_d(s+1-\theta)\frac{Y^s}{s^2}ds. \tag{2.18}$$

Эти интегралы обозначим соответственно через $K_4(\delta,d,\theta)$, $K_4(\delta,d,\theta)$ и $K_6(\delta,d,\theta)$. Интегралы $K_4(\delta,d,\theta)$ и $K_6(\delta,d,\theta)$ совпадают по абсолютной величине.

Оценим $K_5(\delta, d, \theta)$ — интеграл по дуге окружности $s = r_1 e^{i\varphi}$, $-\alpha \le \varphi \le \alpha$, $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Имеем неравенство

$$|K_5(\delta, d, \theta)| \le \frac{1}{2\pi r_1} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |g_d(1-\theta + r_1 e^{i\varphi})| Y^{r_1 \cos\varphi} d\varphi \le \frac{Y^{r_1}}{2\pi r_1} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |g_d(1-\theta + r_1 e^{i\varphi})| d\varphi \le$$

$$\le \frac{e^2}{\pi r_1} \int\limits_{0}^{\alpha} |g_d(1-\theta + r_1 e^{i\varphi})| d\varphi. \tag{2.19}$$

Воспользовавшись представлением (2.9) и соотношениями

$$Re(1-\theta + r_1 e^{i\varphi}) = 1-\theta + r_1\cos\varphi \ge 1-\theta + r_1\cos\alpha = 1,$$
$$\left|1 - \frac{1}{5^{1-\theta+r_1 e^{i\varphi}}}\right| \ge 1 - \frac{1}{5^{1-\theta+r_1\cos\varphi}} \ge \frac{4}{5},$$

оценку $|g_d(r_1 e^{i\varphi})|$ сведем к оценкам функций $|\zeta(s)|^{-1}$, $|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $s = 1-\theta + r_1 e^{i\varphi}$. Имеем

$$|g_d(1-\theta + r_1 e^{i\varphi})| = \left| f_1^{-\frac{1}{4}}(1-\theta + r_1 e^{i\varphi}) \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{1-\theta+r_1 e^{i\varphi}}}\right)^{\frac{1}{2}} \right| \le$$

$$\le |f_1(1-\theta + r_1 e^{i\varphi})|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Bigg| \left(1 - \frac{1}{5^{1-\theta+r_1 e^{i\varphi}}}\right) \zeta(1-\theta + r_1 e^{i\varphi}) L(1 + re^{i\varphi}, \chi_1) \cdot$$

$$\cdot f_2(1-\theta + r_1 e^{i\varphi}) \Bigg|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \Bigg| \frac{5}{4} \zeta(1-\theta + r_1 e^{i\varphi}) L(1-\theta + r_1 e^{i\varphi}, \chi_1) \cdot$$

$$\cdot f_2(1-\theta + r_1 e^{i\varphi}) \Bigg|^{-\frac{1}{4}} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.20}$$

Оценим $|\zeta(1-\theta + r_1 e^{i\varphi})|^{-1}$. Функция $\zeta(s)$ в точке $s = 1$ имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1. Поэтому при $s \to 1$ имеет место соотношение $|\zeta(s)|^{-1} \ll |s - 1|$, следовательно,

$$|\zeta(1-\theta + r_1 e^{i\varphi})|^{-1} \ll |\theta - r_1 e^{i\varphi}| = \sqrt{\theta^2 + r_1^2 - 2\theta r_1\cos\varphi} = \sqrt{r_1^2 - \theta^2} \le r_1.$$

Голоморфная функцию $L(s,\chi_1)$ согласно теореме Ш.Валле-Пуссена о нулях, (лемма 1.8) и теореме Пейджа, (лемма 1.11), не имеет нулей в области

$$Re\, s=\sigma\geq 1-\min\left(\frac{c}{\ln q(|t|+2)},\ \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}\right).$$

Поэтому ввиду условия $1-\theta+r_1\cos\varphi\geq 1-\theta+r_1\cos\alpha=1$, где $-\alpha\leq\varphi\leq\alpha$, $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$, функция $L(1-\theta+r_1e^{i\varphi},\chi_1)$ не обращается в нуль. Следовательно,

$$|L(1-\theta+r_1e^{i\varphi},\chi_1)|^{-1}\ll 1.$$

Воспользовавшись определением функции $f_2(s)$, (см. формулу (2.7)), и соотношением $1-\theta+r_1\cos\varphi\geq 1$, найдём

$$|f_2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})|=\prod_{p\equiv\pm 2(mod\, 5)}\left|1-\frac{1}{p^{2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})}}\right|\geq$$
$$\geq\prod_{p\equiv\pm 2(mod\, 5)}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)>\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\zeta^{-1}(2)=\frac{6}{\pi^2}.$$

Подставляя полученные оценки для функций $|\zeta(s)|^{-1}$, $|L(s,\chi_1)|^{-1}$, $|f_2(s)|^{-1}$ при $s=1-\theta+r_1e^{i\varphi}$ в (2.20), получим

$$|g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})|\leq\left|\frac{5}{4}\zeta(1-\theta+r_1e^{i\varphi})L(1-\theta+r_1e^{i\varphi},\chi_1)f_2(1-\theta+r_1e^{i\varphi})\right|^{-\frac{1}{4}}\cdot$$
$$\cdot\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\ll r_1^{\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и (2.19), имеем

$$|K_5(\delta,d,\theta)|\leq\frac{e^2}{\pi r_1}\int\limits_0^{\alpha}|g_d(1-\theta+r_1e^{i\varphi})|d\varphi\ll$$
$$\ll r_1^{-\frac{3}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\ll\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}. \qquad (2.21)$$

Оценим $K_6(\delta,d,\theta)$ — интеграл верхней полупрямой. Имеем

$$|K_6(\delta,d,\theta)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sqrt{r_1^2-\theta^2}}^{\infty} g_d(1+it)\frac{Y^{\theta+it}}{(\theta+it)^2}dt\right| \le$$

$$\le Y^{\theta}\int\limits_{\sqrt{r_1^2-\theta^2}}^{\infty}|g_d(1+it)|\frac{dt}{\theta^2+t^2} < e\int\limits_{\sqrt{3}(\ln Y)^{-1}}^{\infty}|g_d(1+it)|\frac{dt}{t^2}. \tag{2.22}$$

При оценке модуля интеграла $K_3(\delta,d,\theta)$ для $|g_d(1+it)|$ была получена оценка (2.17). Воспользовавшись этой оценкой получим

$$|K_6(\delta,d,\theta)| \ll \int\limits_{\sqrt{3}(\ln Y)^{-1}}^{\infty} t^{-\frac{1}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2} \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

Переходя в (2.18) к неравенству, затем подставляя найденные оценки для $K_5(\delta,d,\theta)$ и $K_6(\delta,d,\theta)$ с учётом соотношения $K_6(\delta,d,\theta) = K_4(\delta,d,\theta)$, получим

$$|K(\delta,d,\theta)| \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}}.$$

Таким образом, для $K(\delta,d,\theta)$ всегда справедлива оценка

$$K(\delta,d,\theta) \ll Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln Y)^{\frac{3}{4}} \ll \left(\frac{X}{\delta}\right)^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln X)^{\frac{3}{4}}.$$

Подставляя правую часть этой оценки в (2.6), находим

$$|V(d)| \ll \frac{1}{\ln^2 X}\sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)}}\frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}|K(\delta_1,d,\theta)||K(\delta_4,d,0)|$$

$$\ll \frac{1}{\ln^2 X}\sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)}}\frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}\left(\frac{X}{\delta_1}\right)^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln X)^{\frac{3}{4}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\ln X)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{X^{\theta}}{\sqrt{\ln X}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X\\ \delta_1\delta_4\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)}}\frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4}. \tag{2.23}$$

Оценим последнюю сумму, обозначая ее через $v(d)$:

$$v(d) = \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4} = \sum_{\substack{\delta<X^2 \\ \delta\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}} \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{\delta_1\delta_4=\delta \\ \delta_1,\delta_4<X}} |\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|.$$

Для оценки суммы $v(d)$ напомним следующее:

- вещественные числа $\alpha(\nu)$ при $Re\, s > 1$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm 1(mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \prod_{p\equiv\pm 1(mod\, 5)} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)} \cdot \frac{1}{p^{ks}}\right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \equiv \pm 1(mod\, 5). \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \not\equiv \pm 1(mod\, 5); \end{cases}$$

- функция $\alpha(\nu)$ — мультипликативная, $|\alpha(\nu)| < 1$ при любом $\nu > 1$, и числа ν являются произведениями степеней простых чисел p вида $p \equiv \pm 1$ $(\mathrm{mod}\ 5)$;

- натуральные числа $d < X^2$ имеют только простые делители p, вида $p \equiv \pm 1 \pmod 5$;

- δ_1 и δ_4 — натуральные числа, простые делители которых совпадают с простыми делителями d.

Определим числа $\alpha'(\nu)$ равенством

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha'(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm 1(mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \prod_{p\equiv\pm 1(mod\, 5)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)} \cdot \frac{1}{p^{ks}}\right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha'(p^k)}{p^{ks}},$$

$$
\alpha'(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ \dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \equiv \pm 1 (mod\, 5). \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \not\equiv \pm 1 (mod\, 5). \end{cases}
$$

Функция $\alpha'(\nu)$, как и функция $\alpha(\nu)$, является мультипликативной, $0 \leq \alpha'(\nu)| < 1$, и $\alpha'(\nu) = |\alpha(\nu)|$. Но при $\Re s > 1$ имеем цепочку равенств (ниже штрих в сумме означает, что суммирование ведётся по натуральным числам n, все простые делители p которых имеют вид $p \equiv \pm 1 \pmod 5$):

$$
\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod\, 5)} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right) = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} =
$$
$$
= \left(\prod_{p \equiv \pm 1 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha'(\nu)}{\nu^s}\right)^2 =
$$
$$
= \sum_{\nu_1, \nu_2 = 1}^{\infty} \frac{\alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2)}{(\nu_1 \nu_2)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{\nu_1 \nu_2 = n} \alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2),
$$

следовательно, для натуральных чисел n, все простые делители которых имеют вид $p \equiv \pm 1 \pmod 5$, выполняется соотношение

$$
\sum_{\nu_1 \nu_2 = n} \alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2) = 1,
$$

в противном случае

$$
\sum_{\nu_1 \nu_2 = n} \alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2) = 0.
$$

Следовательно,

$$
\sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 = \delta \\ \delta_1, \delta_4 < X}} \alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4) \leq 1.
$$

Заменяя в $v(d)$ функцию $|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|$ на $\alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4)$, затем воспользовавшись последним неравенством, получим

$$v(d) = \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4} = \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{\alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4)}{\delta_1\delta_4} =$$

$$= \sum_{\substack{\delta<X^2 \\ \delta\equiv 0 \pmod d}} \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{\delta_1\delta_4=\delta \\ \delta_1,\delta_4<X}} \alpha'(\delta_1)\alpha'(\delta_4) \le \sum_{\substack{\delta<X^2 \\ \delta\equiv 0 \pmod d}} \frac{1}{\delta} \le$$

$$\le \frac{1}{d}\sum_{\delta<X^2}\frac{1}{\delta} \le \frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots\right) = \frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} t\frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) < \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{\zeta(2)}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi^2}{6d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Подставляя найденную оценку для $v(d)$ в формулу (2.23), найдем

$$|V(d)| \ll \frac{X^\theta}{\sqrt{\ln X}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{\delta_1,\delta_4<X \\ \delta_1\delta_4\equiv 0 \pmod d}} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4} \ll \frac{X^\theta}{\sqrt{\ln X}}\frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^2.$$

Переходя в формуле (2.5) к оценкам, воспользовавшись оценкой $V(d)$, а затем соотношением $0<\gamma(d)<d^{1-\theta}$, имеем

$$|W(\theta)| \le {\sum_{d\le X^2}}' \gamma(d)|V(d)|^2 \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}{\sum_{d\le X^2}}' \frac{\gamma(d)}{d^2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \ll$$
$$\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}{\sum_{d\le X^2}}' \frac{1}{d^{1+\theta}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4, \tag{2.24}$$

причём штрих означает, что суммирование ведётся по таким d, простые делители p которых имеют вид $p \equiv \pm 1 \pmod 5$. Воспользовавшись очевидным неравенством

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \le 1+\frac{1}{\sqrt{p}}, \qquad p\ge 25,$$

последнее неравенство представим в виде

$$|W(\theta)| \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{d\le X^2}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{d\le X^2}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}}\sum_{n|d}{}' \frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{d\le X^2\\ d\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)}}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}} = \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\theta}}\sum_{k\le\frac{X^2}{n}}{}' \frac{1}{k^{1+\theta}},$$

где штрих в суммах по n и k также означает суммирование по натуральным числам n и k, простые делители p которых имеют вид $p\equiv\pm1 \pmod 5$. Далее применяя к внутренней сумме по k преобразование Абеля, имеем

$$|W(\theta)| \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\theta}}\left(1+(1+\theta)\int\limits_2^{\frac{X^2}{n}}\frac{C(u)}{u^{2+\theta}}du+\left(\frac{X^2}{n}\right)^{-1-\theta}C\left(\frac{X^2}{n}\right)\right),$$

где сумма $C(u)=\sum_{k\le u}' 1$ — означает количество натуральных чисел k, все простые делители p которых имеют вид $p\equiv\pm1 \pmod 5$. Применяя для оценки $C(u)$ лемму 1.13, получим

$$|W(\theta)| \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}\sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\theta}}\left(1+(\ln x)^{\frac{1}{2}}\int\limits_2^{\frac{X^2}{n}}\frac{du}{u^{1+\theta}}+\left(\frac{X^2}{n}\right)^{-\theta}(\ln x)^{\frac{1}{2}}\right) \ll \frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}.$$

Лемма доказана

2.3. Оценка тригонометрических сумм $W_j(T)$

При $j=0,1,2$ определим три вида сумм $W_j(T)$. Для этого введём параметры, от которых могут зависеть эти суммы: $P=\sqrt{5T/(2\pi)}$, $X=T^{0,01\varepsilon_1}$, $0<\varepsilon_1<0,001$, ε_1 — постоянное число; $\mathscr{L}=\ln P$; $k=[\ln\mathscr{L}]$; $\eta=c_1k\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; $0<H<T^{\frac{1}{3}}$; $0<\varepsilon_2<0,001$, ε_2 и c_1 - постоянные числа.

Пользуясь определением чисел $A(\lambda)$, обозначениями функций $B(\varphi)$ и $\overline{B(\psi)}$, то есть соотношениями

$$B(\varphi)=\left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k,\qquad \overline{B(\psi)}=\left(\frac{\psi^{-i\eta}-1}{\ln\psi}\right)^k,$$

$$A(\lambda)=\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

$$r(n)=\frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n)+\frac{1+i\text{æ}}{2}\bar\chi(n),\quad h(\nu)\equiv\beta(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)\overline{\chi}(\nu),$$

суммы $W_j=W_j(T)$ определим равенствами

$$W_0=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

А.А. Карацуба [5] при $H\ge T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ для этих сумм получил оценки вида

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,2;\quad W_1(T)\ll\left(\varepsilon_2^{-2k}(\ln T)^{-2k}+\varepsilon_2^{-k}\eta^k(\ln T)-k\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

В теореме 2.1 в сочетании методов работ [5, 11, 12, 13] и метода экспоненциальных пар для тригонометрических сумм $W_j(T)$ подобные оценки получены для параметра H с меньшим порядком роста.

Перед формулировкой теоремы приведём необходимые сведения о методе экспоненциальных пар.

Определение 2.2. *Если* $B\ge1$, $0<b\le B$, $f(y)\in C^\infty(B,2B)$, $A\ge1$,

$$AB^{1-r}\ll|f^{(r)}(y)|\ll AB^{1-r},\qquad r=1,2,3,\dots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ *зависят только от* r, *и имеет место оценка*

$$\sum_{B\le m\le B+b}e(f(m))\ll A^\kappa B^\lambda,\qquad 0\le\kappa\le0,5\qquad 0,5\le\lambda\le1,$$

то пара (κ,λ) *называется экспоненциальной парой.*

Тривиальная оценка показывает, что (0,1) является экспоненциальной парой. E. Phillips [19] показал следующее: если (κ,λ) экспоненциальная пара, то

$$\mathcal{A}(\kappa,\lambda)=\left(\frac{\kappa}{2\kappa+2},\ \frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\kappa+2}\right)\qquad(\mathcal{A}-\text{процесс}),$$
$$\mathcal{B}(\kappa,\lambda)=\left(\lambda-\frac{1}{2},\ \kappa+\frac{1}{2}\right)\qquad(\mathcal{B}-\ \text{процесс})$$

также являются экспоненциальными парами. Множество всех экспоненциальных пар, получившихся из $(0,1)$ при помощи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — процессов обозначается символом $\mathcal{P}$.

Теорема 2.1. *Пусть* ε_1 *и* ε_2 *- произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, k *— натуральное число,* $0<\eta<1$, (κ,λ) *— произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},\qquad æ(\kappa,\lambda)=\frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50},\qquad \sigma(\kappa)=\frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Тогда при $H=T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ *справедливы оценки*

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\qquad j=0,\quad j=2;$$
$$W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}.$$

Показатель $\theta(\kappa;\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$ также появляется в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2+y^2\le R$ в форме

$$K(R)=\#\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le R,\ x,y\in Z\right\}=\pi R+O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right),$$

и в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy\le N$, $x>0$, $y>0$. В следующей таблице приведён прогресс оценки сверху показателя $\theta(\kappa;\lambda)$.

$\theta(\kappa;\lambda)$	приближенное значение	Автор, год
1/2	0.50000	Дирихле, Петер Густав Лежён
1/3	0.33333	Вороной Г.Ф.(1903), Серпинский В.(1906), Корпут Ван дер(1923)
37/112	0.33036	Литлвуд Д.И. и Вальфиш А. (1925)
33/100	0.33000	Корпут Й. ван дер (1922)
27/82	0.32927	Корпут Й. ван дер (1928)
12/37	0.32432	Чен Дж.Р(1963), Колесник Г.А. (1969)
35/108	0.32407	Колесник Г.А. (1982)
139/429	0.32401	Колесник Г.А.
17/53	0.32075	Виноградов И.М. (1935)
7/22	0.31818	Иванец Х. и Моззочи С.Дж (1988)
23/73	0.31507	Хаксли М.Н. (1993)
131/416	0.31490	Хаксли М.Н. (2003)

Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ принадлежит М. Хаксли [14]. Он доказал, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \le \frac{131}{416} = \frac{1}{3} - \frac{23}{3\cdot 416} \approx 0.31490,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Отсюда из теоремы 2.1 получаем следующее.

Следствие 2.1.1. *Пусть* ε_1 *и* ε_2 *- произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, k *— натуральное число,* $0 < \eta < 1$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ *справедливы оценки:*

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \qquad j=0, \quad j=2;$$
$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

Доказательство теоремы 2.1 для удобства разобьём на этапы.

1. Оценка части суммы $W_j(T)$, $j=0,1,2$ с условием $\lambda_2 > \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$. Если в суммах $W_j(T)$, $j=0,1,2$ выполняется условие $\lambda_2 > \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$, то воспользовавшись известным неравенством $\ln(1+x) > 0,5x$, $0 <$

$x \le 0,5$, имеем

$$\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) <$$
$$< \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\cdot\frac{\mathscr{L}}{2H}\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right).$$

Обозначая соответствующие части сумм $W_j(T)$, $j=0,1,2$, для которых выполняется условие $\lambda_2-\lambda_1 > \mathscr{L}H^{-1}$, через $W_j'(T)$, $j=0,1,2$, и воспользовавшись при $j=1$ соотношением

$$\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right| = \frac{\left|\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i\eta}-1\right|^k}{\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k} = \frac{\left|2-2\cos\left(\eta\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right|^{\frac{k}{2}}}{(\ln P-\ln\lambda)^k} = \frac{\left|2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right|^k}{(\ln P-\ln\lambda)^k} \le$$
$$\le \frac{2^k}{\left(\ln P-\ln P^{1-\varepsilon_2}\right)^k} = \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^k, \tag{2.25}$$

имеем

$$|W_j'(T)| = \left|\sum_{\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)\right| <$$
$$< \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\sum_{\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})<\lambda_2<P}\frac{|A(\lambda_1)||A(\lambda_2)|}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} <$$
$$< \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2; \qquad j=0,2;$$

$$|W_1'(T)| = \left|\sum_{\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)\right| <$$
$$< \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\sum_{\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{|A(\lambda_1)||A(\lambda_2)|}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} <$$
$$< \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Далее из определения суммы $A(\lambda)$ и соотношений $|r(m)| \le 1$ и $|h(\nu)| \le 1$ имеем

$$\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda<P}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left|\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}\right| \le \sum_{\lambda<P}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{|h(\nu_1)||h(\nu_2)||r(n)|}{\nu_2}$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{|h(\nu_1)||h(\nu_2)|}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{n<\frac{P\nu_2}{\nu_1}}\frac{|r(n)|}{\sqrt{n}} \le \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{n<\frac{P\nu_2}{\nu_1}}\frac{1}{\sqrt{n}} \ll$$

$$\ll \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{P\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \ll P^{\frac{1}{2}}X\ln X.$$

Следовательно,

$$W'_j(T) \ll \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;$$

$$W'_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X.$$

Осталось рассмотреть слагаемые с условием $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$. Промежутки $0<\lambda_1<P$ в $W_0(T)$, $0<\lambda_1<P^{1-\varepsilon_2}$ в $W_1(T)$, и $P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<P$ в $W_2(T)$, разобьём целыми числами $\Lambda=\Lambda(j)$ на $\ll \mathscr{L}$ промежутков вида $\Lambda<\lambda_1\le\Lambda_1\le 2\Lambda$. Следовательно для чисел Λ выполняется соотношение

$$2\Lambda = 2\Lambda(j) < E_jP, \quad \text{где} \quad E_j = \begin{cases} P^{-\varepsilon_2}, & \text{если } j=1;\\ 1, & \text{если } j=0 \text{ или } j=2.\end{cases} \tag{2.26}$$

Обозначая через $W_j(\Lambda)$, $j=0,1,2$ максимальную из получившихся таким образом сумм, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} W_j(T) &\ll \mathscr{L}|W_j(\Lambda)| + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;\\ W_1(T) &\ll \mathscr{L}|W_1(\Lambda)| + \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X.\end{aligned} \tag{2.27}$$

2. Оценка $W_j(\Lambda)$ с условием $\Lambda \le HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$. Если $\Lambda \le HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, то в силу того, что рациональные числа λ_1 и λ_2 имеют вид

$$\lambda_1<\lambda_2, \qquad \lambda_1=\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \qquad \lambda_2=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}, \qquad \nu_i<X, \qquad i=1,2,3,4.$$

находим

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \geq 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Lambda} >$$
$$> 1 + \frac{1}{2\Lambda} \cdot \frac{n_2\nu_3\nu_2 - n_1\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_4} > 1 + \frac{1}{2\nu_2\nu_4\Lambda} \geq 1 + \frac{\mathscr{L}}{2H},$$

поэтому

$$\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{2H}\right)\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right).$$

Оценивая суммы $W_j(\Lambda)$, $j = 0, 1, 2$ при $\Lambda \leq HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, аналогично суммам W_j', $j = 0, 1, 2$, находим, что

$$\begin{aligned} W_j(\Lambda) &\ll \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right) PX^2 \ln^2 X, \qquad j = 0, 2; \\ W_1(\Lambda) &\ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right) P^{1-\varepsilon_2} X^2 \ln^2 X. \end{aligned} \tag{2.28}$$

3. Выражение $W_j(\Lambda)$ с условием $\Lambda > HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$ через $W_j(\Lambda, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$. Далее не ограничивая общности можно считать, что $\Lambda > HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, пусть $B_0\left(\frac{P}{\lambda}\right) = B_2\left(\frac{P}{\lambda}\right) = 1$, если $W(\Lambda)$ $B_1\left(\frac{P}{\lambda}\right) = B\left(\frac{P}{\lambda}\right)$. Тогда

$$W_j(\Lambda) = \sum_{\Lambda < \lambda_1 \leq \Lambda_1} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \cdot$$
$$\cdot B_j\left(\frac{P}{\lambda_1}\right) \overline{B_j\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где $\delta = 0$ и $HX^{-2}\mathscr{L}^{-1} < \Lambda < \Lambda_1 \leq 2\Lambda < P^{1-\varepsilon_2}$ при $j = 1$, а $\delta = 1$ и $HX^{-2}\mathscr{L}^{-1} < \Lambda < \Lambda_1 \leq 2\Lambda < P$ при $j = 0, 2$. Воспользовавшись определением $A(\lambda)$, то есть соотношением

$$A(\lambda) = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda \\ \nu_1, \nu_2 < X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

и обозначением $\dfrac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3} = \dfrac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, представим сумму $W(\Lambda)$ в виде

$$W_j(\Lambda) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} W_j(\Lambda, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \quad j = 0, 1.2; \tag{2.29}$$

где

$$W_j(\Lambda,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \sum_{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}<n_1\le\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}}\ \sum_{\frac{n_1a}{b}<n_2\le\frac{n_1a}{b}(1+\mathscr{L}H^{-1})} r(n_1)r(n_2)\Phi_j(n_1,n_2,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\left(\frac{n_1a}{n_2b}\right)^{iT},$$

$$\Phi_j(n_1,n_2,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{n_1a}{n_2b}\right)^2\right)}{\sqrt{n_1n_2}} B_j\left(\frac{P\nu_2}{n_1\nu_1}\right)\overline{B_j\left(\frac{P\nu_4}{n_2\nu_3}\right)}.$$

4. Выражение $W_j(\Lambda)$ через $C(u,h)$ и $F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$. Записав n_1 и n_2 в виде членов арифметических прогрессий соответственно с разностями $5a$, и $5b$, то есть

$$\begin{aligned}
&n_1 = 5bm + b_1, \qquad 0\le b_1 < 5b,\\
&\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b} < m \le \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b}, \quad n_2 = 5am_1 + a_1, \quad 0\le a_1<5a,\\
&m+\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a} < m_1 \le m+\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}+\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},
\end{aligned}$$

вводя обозначение

$$N = \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b}, \quad N_1 = \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b}, \quad \alpha = \frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}, \quad \omega(m) = \left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

делая суммирование по b_1, a_1 внешним, и имея в виду, что $r(5bm+b_1)=r(b_1)$ и $r(5am_1+a_1)=r(a_1)$, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}
W_j(\Lambda,&\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \sum_{0\le b_1<5b} r(b_1) \sum_{0\le a_1<5a} r(a_1)\\
&\sum_{N<m\le N_1}\ \sum_{m+\alpha<m_1\le m+\alpha+\omega(m)} \Phi_j(5bm+b_1,5am_1+a_1,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m_1+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.
\end{aligned}$$

Переменная суммирования m_1 принимает все значения целых чисел из полуинтервала $m+\alpha < m_1 \le m+\alpha+\omega(m)$, поэтому заменяя m_1 на $m+h$, то есть полагая $m_1 = m+h$, где h принимает значения из полуинтервала

$\alpha < h \le \alpha + \omega(m)$, представим сумму W_4 в виде

$$W_j(\Lambda,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \sum_{0\le b_1<5b} r(b_1) \sum_{0\le a_1<5a} r(a_1) \sum_{N<m\le N_1}$$
$$\sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(m)} \Phi_j(5bm+b_1, 5a(m+h)+a_1,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{(m+h)+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Заметим, что $h \ge 0$, и это следует из соотношения

$$-1 < -1 + \frac{1}{5a} \le \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} \le 1 - \frac{1}{5b} < 1.$$

Меняя порядки суммирования по h и m, имея в виду, что условия $h \le \alpha + \omega(m)$ и $m \ge (h-\alpha)\frac{H}{\mathscr{L}} - \frac{b_1}{5b}$ равносильны, и вводя обозначения $N_2 = \max\left(N, \dfrac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \dfrac{b_1}{5b}\right)$, получим

$$W_j(\Lambda,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \sum_{0\le b_1<5b} r(b_1) \sum_{0\le a_1<5a} r(a_1) \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}$$
$$\sum_{N_2<m\le N_1} \Phi_j(5bm+b_1, 5a(m+h)+a_1,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$

К сумме по m применим преобразование Абеля, (лемма 1.12), полагая в ней

$$c_m = \left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}, \qquad C(u,h) = \sum_{N_2<m\le u}\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$
$$f_j(u,h) = \Phi_j(5bu+b_1, 5a(u+h)+a_1,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4),$$

получаем

$$W_j(\Lambda,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \sum_{0\le b_1<5b} r(b_1) \sum_{0\le a_1<5a} r(a_1)$$
$$\sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)} \left(-\int\limits_{N_2}^{N_1} C(u,h) f_j'(u,h)\,du + C(N_1,h) f_j(N_1,h)\right).$$

Подставляя правую часть полученной формулы в (2.29), а затем переходя к оценкам, найдём

$$W_j(\Lambda) \le \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \sum_{0\le b_1<5b} \sum_{0\le a_1<5a} \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)} F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) \max_{N_2<u\le N_1} |C(u,h)|, \tag{2.30}$$

$$F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \int\limits_{N_2}^{N_1} |f_j'(u,h)|du + |f_j(N_1,h)|.$$

Оценим теперь $F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$, $j=0,1,2$. Заметим, что $F_0(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$ и $F_2(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$ тождественно равны так как $f_2(u,h)=f_0(u,h)$, поэтому достаточно рассмотреть случай $j=0$ и $j=1$.

5. Оценка $F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$ при $j=0$ и $j=2$. Имея в виду, что $f_0(u,h)=\Phi_0(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu_1,\nu_2,\nu,\nu_3,\nu_4)$, находим

$$f_0'(u,h) = \left(\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\left(m+h+\frac{a_1}{5a}\right)}}\right)' = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}}\cdot$$

$$\cdot\frac{-(H+\delta)\ln\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\left(\frac{1}{m+\frac{b_1}{5b}}-\frac{1}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)\sqrt{\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\left(m+h+\frac{a_1}{5a}\right)}-\frac{m+h+\frac{a_1}{5a}+m+\frac{b_1}{5b}}{2\sqrt{\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\left(m+h+\frac{a_1}{5a}\right)}}}{\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\left(m+h+\frac{a_1}{5a}\right)}=$$

$$=\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}}\cdot\frac{2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{m+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-2m-h-\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}}{2\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)^{\frac32}\left(m+h+\frac{a_1}{5a}\right)^{\frac32}}.$$

Знак $f_0'(u,h)$ совпадает со знаком числителя последней дроби, для определения которой, пользуясь последовательно границами изменения переменных $N_2<m\le N_1$ и $\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)$, то есть соотношениями

$$N_2=\max\left(N,\frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\frac{b_1}{5b}\right)=\max\left(\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},\frac{H}{\mathscr{L}}\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-\frac{b_1}{5b}\right),$$

$$\alpha=\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a},\qquad \omega(N_1)=\left(N_1+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H}=\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}, \tag{2.31}$$

имеем

$$2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{m+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-2m-h-\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}<$$

$$<2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{\frac{\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}-h+$$

$$+\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}<2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}}{\frac{\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}}\right)\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}-\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}=$$

$$=\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}\left(\left(1+\frac{\delta}{H}\right)\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\mathscr{L}-1\right)<\left(\frac{2\mathscr{L}^2}{H}-1\right)\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}<0.$$

Следовательно, $f_0'(u,h)<0$, поэтому с учётом условия $f_0(u,h)>0$ найдём

$$F_0(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=\int\limits_{N_2}^{N_1}|f_0'(u,h)|du+|f_0(N_1,h)|=$$

$$=-\int\limits_{N_2}^{N_1}f_0'(u,h)du+f_0(N_1,h)\le f_0(N_2,h).$$

Для оценки сверху $f_0(u,h)$, возвращаясь к переменным n_1 и n_2, затем к λ_1 и λ_2, далее пользуясь соотношением $\Lambda<\lambda_1<\lambda_2$, имеем

$$f_0(u,h)=\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\left(m+h+\frac{a_1}{5a}\right)}}=\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{(5bm+b_1)a}{(5a(m+h)+a_1)b}\right)^2\right)}{\sqrt{(5bm+b_1)(5(m+h)a+l)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{n_1\nu_1\nu_4}{n_2\nu_2\nu_3}\right)^2\right)}{\sqrt{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\cdot\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}}}=\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\le\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{1}{\Lambda}. \tag{2.32}$$

Следовательно,

$$F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\le\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}},\qquad j=0,2. \tag{2.33}$$

6. Оценка $F_1(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$. Воспользовавшись введёнными при определения суммы $W_1(T)$ функциями $B(\varphi)$ и $\overline{B(\psi)}$, то есть соотношениями

$$B(\varphi)=\left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^k, \qquad \overline{B(\psi)}=\left(\frac{\psi^{-i\eta}-1}{\ln\psi}\right)^k,$$

вводя обозначения

$$\varphi=\varphi(u)=\frac{P\nu_2}{(5bu+b_1)\nu_1}, \qquad \psi=\psi(u)=\frac{P\nu_4}{(5a(u+h)+a_1)\nu_3},$$

и представляя функцию $f_1(u,h)=\Phi_1(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$ в виде

$$f_1(u,h)=\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)}}B\left(\frac{P\nu_2}{(5bu+b_1)\nu_1}\right)\overline{B\left(\frac{P\nu_4}{(5a(u+h)+a_1)\nu_3}\right)}$$
$$=f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right).$$

находим её производную по переменной u:

$$f_1'(u,h)=f_0'(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)+f_0(u,h)\frac{\partial\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)}{\partial u}.$$

Воспользовавшись последними двумя формулами, представим $F_1(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$ в виде

$$F_1(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=\int\limits_{N_2}^{N_1}|f_1'(u,h)|du+|f_1(N_1,h)|=\int\limits_{N_2}^{N_1}\left|f_0'(u,h)\right|\left|B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right|\,du$$
$$+\int\limits_{N_2}^{N_1}\left|f_0(u,h)\frac{\partial\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)}{\partial u}\right|du+\left|f_0(N_1,h)B(\varphi(N_1))\overline{B(\psi(N_1))}\right|. \qquad (2.34)$$

Вычислим производные сложных функций $B(\varphi(u))$, $\overline{B(\psi(u))}$, а затем их произведения:

$$\frac{\partial B\left(\varphi(u)\right)}{\partial u}=\frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}=k\left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln\varphi}\right)^{k-1}\left(\frac{i\eta\varphi^{i\eta-1}}{\ln\varphi}-\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\varphi\ln^2\varphi}\right)\left(-\frac{5bP\nu_2}{(5bu+b_1)^2\nu_1}\right)=$$
$$=-\frac{5bk\varphi}{5bu+b_1}\cdot\frac{1}{\varphi\ln\varphi}\left(i\eta\varphi^{i\eta}(B(\varphi))^{\frac{k-1}{k}}-B(\varphi)\right)=\frac{k\left(B(\varphi)-i\eta\varphi^{i\eta}(B(\varphi))^{\frac{k-1}{k}}\right)}{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\ln\varphi},$$

$$\frac{\partial\overline{B\left(\psi(u)\right)}}{\partial u}=\frac{\partial\overline{B(\psi)}}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi(u)}{\partial u}=k\left(\frac{\psi^{-i\eta}-1}{\ln\psi}\right)^{k-1}\left(\frac{i\eta\psi^{-i\eta-1}}{\ln\psi}+\frac{\psi^{-i\eta}-1}{\psi\ln^2\psi}\right)\frac{5aP\nu_4}{((5a(u+h)+a_1)^2\nu_3}$$
$$=\frac{5ak\psi}{5a(u+h)+a_1}\frac{1}{\psi\ln\psi}\left(i\eta\psi^{-i\eta}(\overline{B(\psi)})^{\frac{k-1}{k}}+\overline{B(\psi)}\right)=\frac{k\left(\overline{B(\psi)}+i\eta\psi^{-i\eta}(\overline{B(\psi)})^{\frac{k-1}{k}}\right)}{\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)\ln\psi},$$

$$\frac{\partial\left(B\left(\varphi(u)\right)\overline{B\left(\psi(u)\right)}\right)}{\partial u}=\frac{k\left(B(\varphi)-i\eta\varphi^{i\eta}(B(\varphi))^{\frac{k-1}{k}}\right)\overline{B\left(\psi(u)\right)}}{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\ln\varphi}+$$
$$+\frac{kB\left(\varphi(u)\right)\left(\overline{B(\psi)}+i\eta\psi^{-i\eta}(\overline{B(\psi)})^{\frac{k-1}{k}}\right)}{\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)\ln\psi}.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (2.25), найдём

$$\left|\frac{\partial\left(B\left(\varphi(u)\right)\overline{B\left(\psi(u)\right)}\right)}{\partial u}\right|\le\frac{k\left(|B(\varphi)|+\eta|B(\varphi)|^{\frac{k-1}{k}}\right)|B\left(\psi\right)|}{u\ln\varphi}+$$
$$+\frac{k|B(\varphi)|\left(|B(\psi)|+\eta|B(\psi)|^{\frac{k-1}{k}}\right)}{u\ln\psi}\le\frac{2k\left(\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|+\eta\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^{\frac{k-1}{k}}\right)\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|}{u\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)}\le$$
$$\le\frac{2k\left(\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2+\eta\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^{\frac{2k-1}{k}}\right)}{u\,\varepsilon_2\mathscr{L}}\le\frac{2k}{u\,\varepsilon_2\mathscr{L}}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}+\eta\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k-1}\right)=$$
$$=\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{2k}{u\,\varepsilon_2\mathscr{L}}+\frac{k\eta}{u}\right).$$

Переходя в формуле (2.34) к оценкам, воспользовавшись последней оценкой и оценкой (2.25), а также соотношениями $f_0'(u,h)<0$ и $f_0(u,h)>0$, последовательно находим

$$F_1(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) \ll \int\limits_{N_2}^{N_1} |f_0(u,h)| \left| \frac{\partial \left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))} \right)}{\partial u} \right| du +$$

$$+ \int\limits_{N_2}^{N_1} \left| f_0'(u,h) \right| \left| B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))} \right| \left| du + |f_0(N_1,h)| \left| B(\varphi(N_1))\overline{B(\psi(N_1))} \right| \ll \right.$$

$$\ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^k \left(\frac{2k}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} + k\eta \right) \int\limits_{N_2}^{N_1} \frac{|f_0(u,h)|}{u} du +$$

$$+ \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\int\limits_{N_2}^{N_1} |f_0'(u,h)| du + |f_0(N_1,h)| \right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\left(\frac{k}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} + k\eta \right) \int\limits_{N_2}^{N_1} \frac{f_0(u,h)}{u} du - \int\limits_{N_2}^{N_1} f_0'(u,h) du + f_0(N_1,h) \right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\frac{k \ln N_1}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} + k\eta \ln N_1 + 1 \right) f_0(N_2,h).$$

Отсюда из неравенства

$$N_1 = \frac{\frac{\Lambda_1 \nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b} \leq \frac{\Lambda_1 \nu_2}{5b\nu_1} = \frac{\Lambda_1 \nu_2^2 \nu_2}{5\nu_1^2 \nu_4} < PX^3,$$

и оценки (2.32), получим

$$F_1(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + k\eta \mathscr{L} + 1 \right) f_0(N_2,h) \ll$$

$$\ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L} \right) \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{\nu_1 \nu_3}{\nu_2 \nu_4}}.$$

Объединяя эту оценку с оценкой (2.33), имеем

$$F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) \ll \frac{D_j}{\Lambda} \sqrt{\frac{\nu_1 \nu_3}{\nu_2 \nu_4}},$$

$$D_j = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\dfrac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L} \right), & \text{если } j = 1; \\ 1, & \text{если } j = 0 \text{ или } j = 2. \end{cases}$$

7. Сведение оценки $W_j(\Lambda)$ к оценке $C(u,h)$. Подставляя эту оценку в формулу (2.35), получим

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_j}{\Lambda} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{1}{\nu_2\nu_4} \sum_{0\le b_1<5b} \sum_{0\le a_1<5a} \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)} \max_{N_2<u\le N_1} |C(u,h)|, \quad (2.35)$$

Для оценки внутренней суммы

$$C(u,h) = \sum_{N_2<m\le u} e\left(\frac{T}{2\pi} \ln \frac{m+h+\frac{a_1}{5a}}{m+\frac{b_1}{5b}}\right),$$

где

$$N_2 = \max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right), \qquad u \le \frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b},$$

воспользуемся методом экспоненциальных пар. Положим,

$$f(y) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{y+h+\frac{a_1}{5a}}{y+\frac{b_1}{5b}}, \qquad A = \frac{T|h-\alpha|}{N_2^2} \ll \frac{T|h-\alpha|b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2},$$

$$B = u - N_2 \le N_1 - N_2 = \frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b} - \max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right) \ll \frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}.$$

Для нахождения производной порядка s, $s = 1, 2, \ldots$ функции $f(u)$, представляя её производную первого порядка в виде

$$f'(y) = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi} \cdot f_1(y) f_2(y), \quad f_1(y) = \frac{1}{y+h+\frac{a_1}{5a}},$$

$$f_2(y) = \frac{1}{y+\frac{b_1}{5b}}, \quad \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a},$$

и имея в виду, что

$$f_1^{(s-1-j)}(y) = \frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}}, \qquad f_2^{(j)}(y) = \frac{(-1)^j j!}{(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}},$$

воспользуемся формулой Лейбница для $s-1$ — ой производной произведения двух функций:

$$\begin{aligned} f^{(l)}(y) &= (f'(y))^{(s-1)} = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\,(f_1(y)f_2(y))^{(s-1)} = \\ &= -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1} C_{s-1}^{j} f_1^{(s-1-j)}(y) f_2^{(j)}(y) = \\ &= -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1} C_{s-1}^{j} \frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}}\cdot\frac{(-1)^{j} j!}{(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}} = \\ &= \frac{(-1)^{s}\, s!\, T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$AB^{1-s} \ll f^{(s)}(u) \ll AB^{1-s}, \qquad s = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, для экспоненциальной пары (κ, λ) имеем

$$|C(u,h| \ll \left(\frac{T(h-\alpha)b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2}\right)^{\kappa}\left(\frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}\right)^{\lambda} = \frac{T^{\kappa}b^{2\kappa-\lambda}\nu_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda}\nu_2^{2\kappa-\lambda}}(h-\alpha)^{\kappa}.$$

$$\begin{aligned} W_j(\Lambda) &\ll \frac{D_j}{\Lambda}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_2\nu_4}\sum_{0\le b_1<5b}\ \sum_{0\le a_1<5a}\ \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}\frac{T^{\kappa}b^{2\kappa-\lambda}\nu_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda}\nu_2^{2\kappa-\lambda}}(h-\alpha)^{\kappa} = \\ &= \frac{D_jT^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}b^{2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}\sum_{0\le b_1<5b}\ \sum_{0\le a_1<5a}\ \sum_{\alpha<h\le\alpha+\omega(N_1)}(h-\alpha)^{\kappa} \ll \\ &\ll \frac{D_jT^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}ab^{1+2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}(\omega(N_1))^{\kappa+1}. \end{aligned}$$

Отсюда имея в виду, что

$$\omega(N_1) = \left(N_1 + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H} = \frac{\Lambda_1\nu_2\mathscr{L}}{5Hb\nu_1} \asymp \frac{\Lambda\nu_2\mathscr{L}}{Hb\nu_1}, \quad a = \frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \quad b = \frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},$$

получим

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_j T^\kappa}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda} a b^{1+2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4} \left(\frac{\Lambda\nu_2\mathscr{L}}{Hb\nu_1}\right)^{\kappa+1} =$$

$$= \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{\kappa-\lambda-1} a b^{\kappa-\lambda}}{\nu_2^{\kappa-\lambda}\nu_4} =$$

$$= \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{\nu_1^{\kappa-\lambda-1}}{\nu_2^{\kappa-\lambda}\nu_4} \cdot \frac{\nu_1\nu_4 \left(\nu_2\nu_3\right)^{\kappa-\lambda}}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^{1+\kappa-\lambda}} =$$

$$= \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{(\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda}}{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)^{1+\kappa-\lambda}} \le$$

$$\le \frac{D_j T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} (\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda} \ll D_j \,\frac{T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa} X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}}.$$

Тогда из условия $\lambda - \kappa \ge 0$, воспользовавшись соотношением $2\Lambda = 2\Lambda(j) < E_j P$, где E_j определяется формулой (2.26), а затем подставляя значение параметра $X = T^{0,01\varepsilon_1}$, найдём

$$W_j(\Lambda) \ll D_j E_j^{\lambda-\kappa} \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}} = D_j E_j^{\lambda-\kappa} \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+0,01\varepsilon_1\cdot\frac{4+2\kappa-2\lambda}{\kappa+1}}}{H}\right)^{\kappa+1} =$$

$$= D_j E_j^{\lambda-\kappa} \cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1} \left(\frac{T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}}{H}\right)^{\kappa+1},$$

где

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \quad æ(\kappa,\lambda) = \frac{1}{\kappa+1} + 0,01\cdot\frac{4+2\kappa-2\lambda}{\kappa+1} =$$
$$= \frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Следовательно, при $H \ge T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ получим оценку

$$W_j(\Lambda) \ll D_j E_j^{\lambda-\kappa} \cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1},$$

которую, воспользовавшись определениями параметров D_j и E_j, можно написать в виде

$$W_j(\Lambda) \ll T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}, \qquad j=0, \quad j=2;$$
$$W_1(\Lambda) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k\mathscr{L}\right) T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2} \cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (2.28) в (2.27), получим

$$
\begin{aligned}
W_j(T) \ll & \mathscr{L}\left(T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1} + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right)PX^2\ln^2 X\right) + \\
& + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)PX^2\ln^2 X \ll T^{-\varepsilon_1}, \qquad j=0, \quad j=2; \\
W_1(T) \ll & \mathscr{L}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k\mathscr{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1} + \right. \\
& \left. + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right)\frac{2^{2k}}{(\varepsilon_2\mathscr{L})^{2k}}P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X\right) + \\
& + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\frac{2^{2k}}{(\varepsilon_2\mathscr{L})^{2k}}P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X \ll \\
& \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k\mathscr{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Глава 3

Нули функции Дэвенпорта–Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой

3.1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией *Дэвенпорта-Хейльбронна* называется функция, которая определяется соотношением

$$f(s) = \frac{1 - iæ}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + iæ}{2} L(s, \bar{\chi}), \tag{3.1}$$

где $L(s, \chi)$ — функция Дирихле, соответствующая характеру χ, то есть

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1] , (см. также [2] с. 283 – 287). Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s), \tag{3.2}$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \le T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1984 г. С.М. Воронин [3] доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) > c_2 T,$$

где $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

В 1980 г. С.М. Воронин [4] доказал, что, тем не менее, *критическая прямая* то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \le T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \ge T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А.Карацуба. Он в 1989 году доказал [5, 6], что если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, и $T \ge T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, то выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \ge H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{3.3}$$

которое назовём *оценкой А.А. Карацубы* для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой.

В этой главе, используя результаты предыдущих глав, а именно,

- теорему 1.2 о приближённом функциональном уравнении функции $F(t)$;
- лемму 2.1 об асимптотической формуле суммы А. Сельберга вида $S(Y)$;
- лемму 2.2 об оценке сверху для А. Сельберга вида $W(\theta)$;
- теорему 2.1 о новой оценке тригонометрических сумм $W_j(T)$

доказываем теорему 3.1 об оценке А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках $[T,\ T+H]$ критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теорема 3.1. *Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0,001$, c_4, c_5, c_g - абсолютные положительные постоянные, превосходящие 1,*

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\,c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\,c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \ge T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \ge c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$ - такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geq 1.$$

Поэтому из теоремы 3.1 следует

Следствие 3.1.1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$*. Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Этот результат является уточнением теоремы А.А.Карацубы.

3.2. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 3.1 довольно длинное, поэтому мы разобьём его на несколько шагов.

1. Сведение к оценкам интегралов $I_2(T, T+H)$, $I_1(T, T+H)$ **и** $J(T, H)$.

Возьмём $X = T^{0.01\varepsilon_1}$ и рассмотрим при $T \leq t \leq T+H$ функции $F(t)$

$$F(t) = e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2}+it\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2,$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|}, \qquad \varphi(s) = \sum_{\nu<X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1 \leq \nu < X, \\ 0, & \nu \geq X, \end{cases}$$

а вещественные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Re\, s > 1.$$

Простыми числами p, удовлетворяющими сравнению $p \equiv 1(mod\,5)$, являются все простые числа, которые заканчиваются цифрой 1: $11, 31, 41, 71, 101, 131, 151$ и т.д., а простыми числами p, удовлетворяющими сравнению $p \equiv -1(mod\,5)$ или $p \equiv 4(mod\,5)$, являются все простые числа, которые заканчиваются цифрой 9: $19, 29, 59, 79, 89, 109, 139, 149$ и т.д. Следует заметить, что значение характера $\chi(p)$ для простых чисел вида $p \equiv \pm1(mod\,5)$ является вещественным числом и

$$\chi(p^k) = (\chi(p))^k = (\chi(\pm1))^k = \left(e\left(\frac{ind\,(\pm1)}{4}\right)\right)^k = (\pm1)^k. \tag{3.4}$$

Из формулы

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)} \cdot \frac{1}{p^{ks}} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2p^s} - \frac{1}{8p^{2s}} - \frac{1}{.162p^{3s}} - \frac{5}{128p^{4s}} - \dots,$$

где $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)$ и определения чисел $\alpha(\nu)$, именно, из того, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)} \cdot \frac{1}{p^{ks}}\right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0; \\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \equiv \pm1(mod\,5). \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \not\equiv \pm1(mod\,5). \end{cases}$$

следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)| < 1$ при любом $\nu > 1$. Отсюда и (3.4) также следует равенство

$$\alpha(p^k)\chi(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0; \\ -\dfrac{(\pm1)^k\,(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \equiv \pm1(mod\,5). \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \not\equiv \pm1(mod\,5), \end{cases}$$

то есть $\alpha(p^k)\chi(p^k)$ принимает только вещественные значения, поэтому

$$\alpha(p^k)\chi(p^k) = \alpha(p^k)\overline{\chi}(p^k).$$

Отсюда и из мультипликативности функции $\alpha(\nu)\chi(\nu)$ находим

$$\alpha(\nu)\chi(\nu) = \alpha(\nu)\overline{\chi}(\nu), \qquad |\alpha(\nu)\chi(\nu)| \le 1.$$

Отсюда и из определения $\beta(\nu)$, найдём

$$\beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu) \equiv h(\nu), \qquad |h(\nu)| \le 1, \tag{3.5}$$

то есть далее всюду, не ограничивая общности, имеем $\overline{h}(\nu) = h(\nu)$.

Из определения $F(t)$ и функционального уравнения римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s),$$

следует, что

$$\begin{aligned}
\overline{F(t)} &= \overline{e^{i\theta(t)} f\left(0,5+it\right) \left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2} = \\
&= \overline{\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(0,5+it\right) \left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2} = \\
&= \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(0,5-it\right) \left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2 = \\
&= \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{it}{2}\right) f\left(0,5-it\right) \left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1} \left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2 = \\
&= \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{0,5-it}{2}} \Gamma\left(\frac{0,5-it+1}{2}\right) f\left(0,5-it\right) \cdot \\
&\cdot \left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1} \left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2 = \\
&= \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-(0,5-it)}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-(0,5-it))+1}{2}\right) f\left(1-(0,5-it)\right) \cdot \\
&\cdot \left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1} \left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2 = \\
&= \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(0,5+it\right) \left|\varphi\left(0,5+it\right)\right|^2 = F(t),
\end{aligned}$$

то есть $F(t)$ принимает действительные значения при действительных t, а действительные нули $F(t)$ нечётного порядка являются действительными нулями нечётного порядка функции $f\left(\frac{1}{2}+it\right)$.

Пусть a — произвольное фиксированное число с условием $0 < a < 1$; $T \le t \le T+H$, $T \ge T_0 > 0$ такое, что $T - \dfrac{\pi}{4} = 4\pi r$; $P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}$; r — целое число; $\eta = c_1 \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; $k = [c \ln \mathscr{L}]$; c и $c_1 > 1$ — постоянные, значения которых определим позднее.

Обозначим буквой E подмножество интервала $(T, T+H)$, состоящее из чисел t таких, что

$$\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k >$$
$$> \left| \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t+u_1+\ldots+u_k) du_1 \ldots du_k \right|. \tag{3.6}$$

Возводя обе части неравенства в степень a и пользуясь определением E, получаем

$$\int_E dt \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a \ge$$
$$\ge \int_E dt \left(\left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a - \right.$$
$$\left. - \left| \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t+u_1+\ldots+u_k) du_1 \ldots du_k \right|^a \right).$$

При замене области интегрирования E на интервал $(T, T+H)$ значение интеграла в правой части последнего неравенства не меняется, так как при

$t \in (T, T+H) \setminus E$ неравенство (3.6) превращается в равенство. Поэтому

$$\int\limits_E dt \left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a \geq$$
$$\geq \int\limits_T^{T+H} dt \left(\left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a - \right.$$
$$\left. - \left| \int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta F(t+u_1+\ldots+u_k) du_1 \ldots du_k \right|^a . \right) .$$

Воспользовавшись следующими обозначениями

$$I(E) = \int\limits_E \left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a dt,$$
$$I_1(T, T+H) = \int\limits_T^{T+H} \left| \int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta F(t+u_1+\ldots+u_k) du_1 \ldots du_k \right|^a dt;$$
$$I_2(T, T+H) = \int\limits_T^{T+H} \left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a dt,$$

представим последнее неравенство в виде

$$I(E) \geq I_2(T, T+H) - I_1(T, T+H). \tag{3.7}$$

Пользуясь неравенством Гёльдера вида

$$\left(\int\limits_E g(t) dt \right)^{\frac{2}{a}} \leq (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int\limits_E g^{\frac{2}{a}}(t) dt,$$

получаем

$$(I(E))^{\frac{2}{a}} = \left(\int\limits_{E}\left(\int\limits_{0}^{\eta}\dots\int\limits_{0}^{\eta}|F(t+u_1+\ldots+u_k)|\,du_1\ldots du_k\right)^{a}dt\right)^{\frac{2}{a}} \le$$

$$\le (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1}\int\limits_{E}\left(\int\limits_{0}^{\eta}\dots\int\limits_{0}^{\eta}|F(t+u_1+\ldots+u_k)|\,du_1\ldots du_k\right)^{2}dt \le$$

$$\le (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1}\int\limits_{T}^{T+H}\left(\int\limits_{0}^{\eta}\dots\int\limits_{0}^{\eta}|F(t+u_1+\ldots+u_k)|\,du_1\ldots du_k\right)^{2}dt.$$

Функция $F(t+u_1+\ldots+u_k)$ непрерывна на отрезке $[0,\eta]$ по каждому из аргументов $u_1,\ldots,u_k$, поэтому согласно первой теореме о среднем значение интеграла, найдутся точки $u_1^*,\ldots,u_k^*$, для которых выполняется равенство

$$\int\limits_{0}^{\eta}\dots\int\limits_{0}^{\eta}|F(t+u_1+\ldots+u_k)|\,du_1\ldots du_k = \eta^k\,|F(t+u_1^*+\ldots+u_k^*)|\,.$$

Отсюда с учётом следующего соотношения

$$0 \le u_1^*+\ldots+u_k^* \le \eta k = \frac{c_1[c\ln\mathscr{L}]}{\sqrt{\mathscr{L}}} \le 1,$$

имеем

$$I(E) \le \left((\mu(E))^{\frac{2}{a}-1}\,\eta^{2k}\int\limits_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*}|F(t)|^2dt\right)^{\frac{a}{2}} \le (\mu(E))^{\frac{2-a}{2}}\left(\eta^{2k}J(T,H)\right)^{\frac{a}{2}},$$

$$J(T,H) = \int\limits_{T}^{T+H+1}|F(t)|^2\,dt.$$

Отсюда и из (3.7), найдём

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \ge \frac{I_2(T,T+H)-I_1(T,T+H)}{(\eta^{2k}J(T,H))^{\frac{a}{2}}}. \qquad (3.8)$$

Таким образом, для оценки снизу функции $\mu(E)$ достаточно оценить интеграл $I_2(T,T+H)$ снизу, а интегралы $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$ сверху.

2. Оценка снизу интеграла $I_2(T, T+H)$. Имеем

$$I_2(T,T+H) = \int\limits_T^{T+H} \left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a dt.$$

Применяя k — раз неравенство Гёльдера вида

$$\left(\int\limits_0^\eta f(u) du \right)^{\frac{1}{a}} \leq \eta^{\frac{1}{a}-1} \int\limits_0^\eta f^{\frac{1}{a}}(u) du,$$

находим

$$\left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|^a\, du_1 \ldots du_k \right)^{\frac{1}{a}} \leq$$

$$\leq \eta^{\frac{1}{a}-1} \int\limits_0^\eta \left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|^a\, du_1 \ldots du_{k-1} \right)^{\frac{1}{a}} du_k \leq$$

$$\leq \eta^{(k-1)\left(\frac{1}{a}-1\right)} \int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta \left(\int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|^a\, du_1 \right)^{\frac{1}{a}} du_2 \ldots du_k \leq$$

$$\leq \eta^{k\left(\frac{1}{a}-1\right)} \int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k.$$

Возводя обе части этого неравенства в степени a, найдём

$$\left(\int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a \geq$$

$$\geq \eta^{k(a-1)} \int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta |F(t+u_1+\ldots+u_k)|^a\, du_1 \ldots du_k$$

Отсюда и из определения интеграла $I_2(T, T+H)$, получим

$$
\begin{aligned}
I_2(T,T+H) \geq \int\limits_T^{T+H} \eta^{k(a-1)} \int\limits_0^{\eta} \ldots \int\limits_0^{\eta} |F(t+u_1+\ldots+u_k)|^a \, du_1 \ldots du_k dt = \\
= \eta^{k(a-1)} \int\limits_0^{\eta} \ldots \int\limits_0^{\eta} \int\limits_T^{T+H} |F(t+u_1+\ldots+u_k)|^a \, dt du_1 \ldots du_k = \\
= \eta^{k(a-1)} \int\limits_0^{\eta} \ldots \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{T+u_1+\ldots+u_k}^{T+H+u_1+\ldots+u_k} |F(t)|^a \, dt du_1 \ldots du_k \geq \\
\geq \eta^{k(a-1)} \int\limits_0^{\eta} \ldots \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a \, dt du_1 \ldots du_k = \eta^{ka} \int\limits_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a \, dt.
\end{aligned}
$$

Далее пользуясь определением $F(t)$, это неравенство представим в виде

$$
I_2(T,T+H) \geq \eta^{ka} \int\limits_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2 \left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \right|^a dt. \tag{3.9}
$$

Для оценки снизу интеграла в правой части (3.9) воспользуемся теоремой Гэбриэла о выпуклости среднего значения по двум переменным (лемма 3.1).

Лемма 3.1. *(Теорема Гэбриэла о выпуклости среднего значения по двум переменным). Если*

$$
J(\sigma, \lambda) = \left(\int\limits_0^{T_1} |g(\sigma+it)|^{\frac{1}{\lambda}} dt \right)^{\lambda}, \qquad \lambda > 0,
$$

то

$$
J(\sigma, p\lambda + q\mu) \leq c_g J^p(\alpha, \lambda) J^q(\beta, \mu), \qquad \alpha < \sigma < \beta,
$$

где $c_g > 1$ *— абсолютная постоянная и*

$$
p = \frac{\beta - \sigma}{\beta - \alpha}, \quad q = \frac{\sigma - \alpha}{\beta - \alpha}.
$$

Доказательство см. [2], стр. 238.

В лемме 3.1, полагая

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \lambda=\frac{1}{a},\quad \beta=2,\quad \mu=\frac{1}{2-a},$$
$$\sigma=2-\frac{3a}{4},\quad T_1=H-k\eta,\quad p=\frac{a}{2},\quad q=\frac{2-a}{2},$$
$$g(\sigma+it)=\left|f(\sigma+i(t+T+k\eta))\varphi^2(\sigma+i(t+T+k\eta))\right|,$$

и имея в виду, что

$$p\lambda+q\mu=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{2-a}{2}\cdot\frac{1}{2-a}=1,$$
$$J(\sigma,p\lambda+q\mu)=J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)=$$
$$=\int\limits_0^{H-k\eta}\left|f\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\right|dt,$$
$$J(\alpha,\lambda)=J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)=$$
$$=\left(\int\limits_0^{H-k\eta}\left|f\left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right)\right|^a dt\right)^{\frac{1}{a}},$$
$$J(\beta,\mu)=J\left(2,\frac{1}{2-a}\right)=$$
$$=\left(\int\limits_0^{H-k\eta}\left|f\left(2+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(2+i(t+T+k\eta)\right)\right|^{2-a} dt\right)^{\frac{1}{2-a}},$$

найдем

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)\le c_g J^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)J^{\frac{2-a}{2}}\left(2,\frac{1}{2-a}\right).$$

Из соотношения (3.9), определения $J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ и последнего неравенства, получим

$$I_2(T,T+H) \geq \eta^{ka} \int\limits_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+T+k\eta)\right)\right|^a dt =$$
$$= \eta^{ka} J^a\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right) \geq c_g^{-2}\eta^{ka}J^2\left(2-\frac{3a}{4},1\right)J^{-(2-a)}\left(2,\frac{1}{2-a}\right). \tag{3.10}$$

Таким образом, для оценки снизу интеграла $I_2(T,T+H)$ достаточно оценить интеграл $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$ снизу, а интеграл $J\left(2,\frac{1}{2-a}\right)$ сверху.

2.1. Оценка снизу интеграла $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$. Для этого вспомним определения функций $f(s)$ и $\varphi(s)$:

- $f(s)$ — функцией Дэвенпорта-Хейльбронна при $Re\, s > 1$ как ряд Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}, \quad r(n) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n), \quad \text{æ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1} < 1,$$

  то есть $r(n)$ - периодическая функция по модулю 5, причём $r(1)=1$, $r(2)=\text{æ}$, $r(3)=-\text{æ}$, $r(4)=-1$, $r(5)=0$;

- функция $\varphi(s)$ определяется соотношением

$$\varphi(s) = \sum_{\nu<X}\frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X}\frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

  и для её коэффициентов $h(\nu)$, согласно (3.5), справедливо $\overline{h}(\nu) = h(\nu)$ и $|h(\nu)| \leq 1$.

Поэтому при $s = 2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)$, имея в виду, что $2-\frac{3a}{4} > 1$, найдём

$$f(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}\sum_{\nu_1<X}\frac{h(\nu_1)}{\nu_1^s}\sum_{\nu_2<X}\frac{h(\nu_2)}{\nu_2^s} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^s},$$
$$r_1(m) = \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} r(n)h(\nu_1)h(\nu_2).$$

Воспользовавшись соотношениями $|r(m)| \leq 1$ и $|h(\nu)| \leq 1$, имеем

$$|r_1(m)| \leq \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} |r(m)||\alpha(\nu_1)||\alpha(\nu_2)| \leq \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} 1 \leq \tau_3(n).$$

Следовательно,

$$\left| f\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_3(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}} \ll 1.$$

Отсюда и из определения $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$, имеем

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right) = \int\limits_0^{H-k\eta}\left|f\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\varphi^2\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\right|dt = \int\limits_0^{H-k\eta}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}m^{-i(t+T+k\eta)}\right|dt \geq$$

$$\geq \left|\int\limits_0^{H-k\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}m^{-i(t+T+k\eta)}dt\right| = \left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}\int\limits_0^{H-k\eta}m^{-i(t+T+k\eta)}dt\right| =$$

$$= \left|r_1(1)(H-k\eta)+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}\int\limits_0^{H-k\eta}m^{-i(t+T+k\eta)}dt\right| =$$

$$= \left|(H-k\eta)+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)\left(m^{-ik\eta}-m^{-iH}\right)}{m^{2-\frac{3a}{4}+iT}\ln m}\right| \geq$$

$$\geq H-k\eta-\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)\left(m^{-ik\eta}-m^{-iH}\right)}{m^{2-\frac{3a}{4}+iT}\ln m}\right|.$$

Отсюда, имея в виду, что $k\eta < 1$ и

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)\left(m^{-ik\eta}-m^{-iH}\right)}{m^{2-\frac{3a}{4}+iT}\ln m}\right| \leq 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{|r_1(m)|}{m^{2-\frac{3a}{4}}\ln m} \leq 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tau_3(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}\ln m} \ll 1,$$

найдём

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right) \geq H+O(1). \tag{3.11}$$

2.2. Оценка сверху интеграла $J\left(2, \frac{1}{2-a}\right)$**.** Как при оценке $J\left(2 - \frac{3a}{4}, 1\right)$ при $Re\, s > 1$, воспользовавшись соотношением

$$f(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \sum_{\nu_1 < X} \frac{h(\nu_1)}{\nu_1^s} \sum_{\nu_2 < X} \frac{h(\nu_2)}{\nu_2^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m^s},$$
$$r_1(m) = \sum_{\substack{m = n\nu_1\nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 < X}} r(n) h(\nu_1) h(\nu_2),$$
$$|r_1(m)| \le \sum_{\substack{m = n\nu_1\nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 < X}} |r(m)||\alpha(\nu_1)||\alpha(\nu_2)| \le \sum_{\substack{m = n\nu_1\nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 < X}} 1 \le \tau_3(n),$$

находим

$$|f(2 + i(t + T + k\eta)\varphi^2(2 + i(t + T + k\eta)| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m^{2+i(t+T+k\eta)}} \right| \le$$
$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_3(n)}{m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{m_1 m_2 m_3 = m} 1 = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \sum_{m = m_1 m_2 m_3} \frac{1}{m^2} =$$
$$= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^2} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_2^2} \sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{m_3^2} \sum_{m = m_1 m_2 m_3} 1 = \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^2} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_2^2} \sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{m_3^2} =$$
$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right)^3 = \zeta^3(2) = \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^3 = \frac{\pi^6}{216}.$$

Следовательно,

$$J\left(2, \frac{1}{2-a}\right) = \left(\int_0^{H - k\eta} \left| f\left(2 + i(t + T + k\eta)\right) \varphi^2\left(2 + i(t + T + k\eta)\right) \right|^{2-a} dt \right)^{\frac{1}{2-a}} \le$$
$$\le \left(\int_0^{H} \left(\frac{\pi^6}{216} \right)^{2-a} dt \right)^{\frac{1}{2-a}} = \left(\left(\frac{\pi^6}{216} \right)^{2-a} H \right)^{\frac{1}{2-a}} = \frac{\pi^6}{216} H^{\frac{1}{2-a}}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (3.11) в (3.10), получим

$$
\begin{aligned}
&I_2(T, T+H) \geq \eta^{ka} J^a\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right) \geq c_g^{-2} \eta^{ka} J^2\left(2-\frac{3a}{4}, 1\right) J^{-(2-a)}\left(2, \frac{1}{2-a}\right) \\
&\geq c_g^{-2} \eta^{ka}(H+O(1))^2\left(\frac{\pi^6}{216} H^{\frac{1}{2-a}}\right)^{-(2-a)}=\left(\frac{216}{\pi^6}\right)^{2-a} c_g^{-2}\left(1+O(H^{-1})\right) H \eta^{ka} \\
&\geq\left(\frac{200}{10^3}\right)^{2-a} c_g^{-2} H \eta^{ka}=\frac{1}{5^{2-a} c_g^2} H \eta^{ka},
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

где c_g — абсолютная постоянная.

3. Оценка сверху интеграла $J(T,H)$**.** Так как $T-\dfrac{\pi}{4}=4\pi r$, r — целое число, то согласно приближённому функциональному уравнению для функции Дэвенпорта-Хейльбронна (теорема 1.2), имеем

$$
J(T,H)=\int\limits_T^{T+H+1}|F(t)|^2\,dt=\int\limits_T^{T+H+1}\left|2\sum_{\lambda\leq P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}+O(T^{-0{,}01})\right|^2 dt,
$$

где λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X,

$$
P=\sqrt{\frac{5T}{2\pi}},\qquad A(\lambda)=\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}.
$$

Дважды воспользовавшись неравенством $|a+b|^2\leq 2|a|^2+2|b|^2$ и имея в виду что $A(\lambda)$ — вещественнозначная функция, найдём

$$
\begin{aligned}
J(T,H) &\ll \int\limits_T^{T+H+1}\left|\sum_{\lambda\leq P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it}+\sum_{\lambda\leq P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it}\right|^2 dt+HT^{-0{,}02}\ll \\
&\ll \int\limits_0^{H+1}\left|\sum_{\lambda\leq P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{i(T+t)}\right|^2 dt+HT^{-0{,}02}.
\end{aligned}
$$

Для оценки последнего интеграла применим известный приём:

$$J(T,H) \ll \int\limits_0^{H+1} \exp\left(1-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2\right)\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{i(T+t)}\right|^2 dt + HT^{-0,02} \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(1-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2\right)\left|\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{i(T+t)}\right|^2 dt + HT^{-0,02} =$$

$$= e\sum_{\lambda_1,\lambda_2\le P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2 + it\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right)dt+$$

$$+ HT^{-0,02} = e(H+1)\sum_{\lambda_1,\lambda_2\le P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-t^2 + it(H+1)\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right)dt + HT^{-0,02}.$$

Воспользовавшись формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2+i\alpha t)dt = \sqrt{\pi}\exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right), \tag{3.13}$$

получим

$$J(T,H) \ll H\sum_{\lambda_1,\lambda_2\le P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) + HT^{-0,02}.$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1=\lambda_2$, приходим к оценке

$$J(T,H) \ll H\left(|\Sigma_0(T)| + |W_0(T)|\right) + HT^{-0,02}. \tag{3.14}$$

где

$$\Sigma_0(T) = \sum_{\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Оценим $\Sigma_0(T)$. Полагая $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathscr{L}}$ и ввиду $X^{-1} \le \lambda \le P$, имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_0(T) &= \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} = \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \lambda^{-\frac{1}{\mathscr{L}}} = \\ &= \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \exp\left(-\frac{\ln \lambda}{\mathscr{L}}\right) \le \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \exp\left(\frac{\ln X}{\mathscr{L}}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{0,01\varepsilon_1 \ln T}{0,5(\ln T + \ln 5 - \ln 2\pi)}\right) \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \le \\ &\le \exp\left(0,03\varepsilon_1\right) \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \le e \sum_{\lambda \le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}.\end{aligned}$$

Применяя к последней сумме лемму 2.1 при $Y = P$ и $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathscr{L}}$, получим

$$\begin{aligned}\Sigma_0(T) &\le \frac{2e(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} P^{1-2\theta} W(0) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) W(1-2\theta) + O\left(P^{-2\theta} X^2 \ln^2 X\right) = \\ &= \frac{2e(1+æ^2)\mathscr{L}}{5} W(0) + (c_1\mathscr{L} + c_2)\, W\left((\mathscr{L})^{-1}\right) + O\left(P^{-1} X^2 \ln^2 X\right),\end{aligned}$$

где

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4 < X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}.$$

Далее пользуясь леммой 2.2, оценивая суммы $W(0)$ и $W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)$, а также учитывая, что $P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}$ и $X = T^{0,01\varepsilon_1}$, последовательно имеем

$$W(0) \ll \frac{1}{\sqrt{\ln X}},\ \ W\left((\mathscr{L})^{-1}\right) \ll \frac{X^{2(\mathscr{L})^{-1}}}{\sqrt{\ln X}} = \frac{1}{\sqrt{\ln X}} \exp\left(\frac{2\ln T^{0,01\varepsilon_1}}{\ln\sqrt{5T/(2\pi)}}\right) \ll \frac{1}{\sqrt{\ln X}},$$

$$\begin{aligned}\Sigma_0(T) &\ll W(0)\mathscr{L} + W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)\mathscr{L} + P^{-1}X^2\ln^2 X \ll \\ &\ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + P^{-1}X^2\ln^2 X \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Оценим $W_0(T)$. Согласно следствие 2.1.1 теоремы 2.1 при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) = O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Подставляя эту оценку и оценку для $\Sigma_0(T)$ в (3.14), затем и воспользовавшись соотношением

$$\ln X = 0,01\varepsilon_1 \ln T = 0,01\varepsilon_1 \ln \frac{2\pi P^2}{5} = 0,01\varepsilon_1(2\mathscr{L} + \ln 2\pi - \ln 5) > 0,02\varepsilon_1\mathscr{L},$$

имеем

$$J(T,H) \ll H\left(\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + T^{-\varepsilon_1}\right) + HT^{-0,02} \leq$$
$$\leq H\left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}} + T^{-\varepsilon_1}\right) + HT^{-0,02} \ll \frac{H\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Постоянная под знаком $\ll$ в этой оценке является абсолютной. Обозначая эту постоянную символом c_4 и не ограничивая общности считая, что $c_4 > 1$ имеем

$$J(T,H) \leq \frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}} H\sqrt{\mathscr{L}}. \tag{3.16}$$

4. Оценка сверху интеграла $I_1(T,T+H)$ сверху. Имеем

$$I_1(T,T+H) = \int\limits_T^{T+H}\left|\int\limits_0^{\eta}\ldots\int\limits_0^{\eta} F(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^a dt$$

Применяя неравенство Гёльдера будем иметь

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \leq H^{\frac{2}{a}-1}\int\limits_T^{T+H}\left|\int\limits_0^{\eta}\ldots\int\limits_0^{\eta} F(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2 dt.$$

Пусть $0 < \varepsilon_2 < 0,01$, точное значение которого определим позднее. Применяя к подинтегральной функции $F(t)$ теорему 1.2 находим

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) + O\left(T^{-0,01}\right),$$

$$F_1(t) = 2\sum_{\lambda\leq P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}, \qquad F_2(t) = 2\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leq P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda},$$

где T таково, что $T - \dfrac{\pi}{4} = 4\pi r$, r — целое число, $T \leq t \leq T+H$, $P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}$, будем иметь

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \ll H^{\frac{2}{a}-1}(I_{11}(T,T+H) + I_{12}(T,T+H) + H\eta^{2k}T^{-0,02}), \tag{3.17}$$

где

$$I_{11}(T,T+H)=\int\limits_{T}^{T+H}\left|\int\limits_{0}^{\eta}\ldots\int\limits_{0}^{\eta}F_1(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2dt,$$

$$I_{12}(T,T+H)=\int\limits_{T}^{T+H}\left|\int\limits_{0}^{\eta}\ldots\int\limits_{0}^{\eta}F_2(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2dt.$$

Сначала оценим интеграл $I_{11}(T,T+H)$. Проинтегрировав $F_1(t+u_1+\ldots+u_k)$ по $u_1,u_2,\ldots,u_k$, найдем

$$I_{11}(T,T+H)=2\int\limits_{T}^{T+H}\left|\int\limits_{0}^{\eta}\ldots\int\limits_{0}^{\eta}\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos\left((t+u_1+\ldots+u_k)\ln\frac{P}{\lambda}\right)du_1\ldots du_k\right|^2dt$$

$$=\int\limits_{T}^{T+H}\left|\int\limits_{0}^{\eta}\ldots\int\limits_{0}^{\eta}\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(t+u_1+\ldots+u_k)}+\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-i(t+u_1+\ldots+u_k)}\right)du_1\ldots du_k\right|^2dt$$

$$\ll\int\limits_{T}^{T+H}\left|\int\limits_{0}^{\eta}\ldots\int\limits_{0}^{\eta}\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(t+u_1+\ldots+u_k)}du_1\ldots du_k\right|^2dt$$

$$=\int\limits_{T}^{T+H}\left|\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it}\frac{\left(\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i\eta}-1\right)^k}{\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k}\right|^2dt=\int\limits_{0}^{H}\left|\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)}B(\lambda)\right|^2dt.$$

Для оценки последнего интеграла применим известный приём:

$$I_{11}(T,T+H)\ll\int\limits_{0}^{H}\exp\left(1-\left(\frac{t}{H}\right)^2\right)\left|\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)}B(\lambda)\right|^2dt\le$$

$$\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(1-\left(\frac{t}{H}\right)^2\right)\left|\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)}B(\lambda)\right|^2dt=$$

$$=e\sum_{\lambda_1,\lambda_2\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{t}{H}\right)^2+it\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right)=$$

$$=eH\sum_{\lambda_1,\lambda_2\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-t^2+itH\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right).$$

Воспользовавшись формулой (3.13), получим

$$I_{11}(T,T+H) \ll H \sum_{\lambda_1,\lambda_2\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1=\lambda_2$, приходим к оценке

$$I_{11}(T,T+H) \ll H\left(|\Sigma_1(T)| + |W_1(T)|\right). \tag{3.18}$$

$$\Sigma_1(T) = \sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda}|B(\lambda)|^2,$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Воспользовавшись соотношением $\ln\frac{P}{\lambda} \ge \varepsilon_2\mathscr{L}$ сведем оценку $\Sigma_1(T)$ к оценке $\Sigma_0(T)$, которого уже рассматривали при оценке $J(N,H)$ и получили оценку вида (3.15):

$$\Sigma_1(T) = \sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)\left(2-2\cos\left(\eta\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k}{\lambda\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}} = \sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)\left(2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}}{\lambda\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} < \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} =$$

$$= \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \Sigma_0 \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}.$$

Оценим $W_1(T)$. Согласно следствия 2.1.1 теоремы 2.1 при $k=[c\ln\mathscr{L}]$ и $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

Подставляя найденные оценки для $\Sigma_1(T)$ и $W_1(T)$ в (3.18), затем воспользовавшись последовательно соотношением $\varepsilon_2=\varepsilon_3\mathscr{L}^{-1/2}$ ($\varepsilon_3>0$, более точно оно будет определено позднее), неравенствами

$$T=\frac{2\pi P^2}{5} > P^2, \quad \ln X = 0,01\varepsilon_1\ln T = 0,01\varepsilon_1\ln\frac{2\pi P^2}{5} =$$
$$= 0,01\varepsilon_1(2\mathscr{L}+\ln 2\pi - \ln 5) > 0,02\varepsilon_1\mathscr{L},$$

и значениями параметров $k = [c \ln \mathscr{L}]$ и $\eta = c_1 \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, имеем

$$\begin{aligned} I_{11}(T, T+H) &\ll H \left(\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + \frac{k}{\varepsilon_2} T^{-\varepsilon_1} + k\eta \mathscr{L} T^{-\varepsilon_1} \right) \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \leq \\ &\leq H\eta^{2k} \left(\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1 \mathscr{L}}} + \frac{c \ln \mathscr{L}}{\varepsilon_2} P^{-2\varepsilon_1} + cc_1 \sqrt{\mathscr{L}} \ln \mathscr{L} P^{-2\varepsilon_1} \right) \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \eta \mathscr{L}} \right)^{2k} = \\ &= H\eta^{2k} \left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}} + \frac{c(\varepsilon_3^{-1} + c_1)\sqrt{\mathscr{L}} \ln \mathscr{L}}{P^{2\varepsilon_1}} \right) \left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1} \right)^{2k} \leq \\ &\leq \frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1} \right)^{2k} H\eta^{2k}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Теперь оценим интеграл $I_{12}(T, T+H)$. Имеем

$$I_{12}(T, T+H) = \int\limits_{T}^{T+H} \left| \int\limits_0^{\eta} \ldots \int\limits_0^{\eta} F_2(t + u_1 + \ldots + u_k) du_1 \ldots du_k \right|^2 dt.$$

Функция $F_2(t + u_1 + \ldots + u_k)$ непрерывна на отрезке $[0, \eta]$ по каждому из аргументов $u_1, \ldots, u_k$, поэтому согласно первой теореме о среднем значении интеграла, найдутся точки $u_1^*, \ldots, u_k^*$, для которых выполняется равенство

$$\int\limits_0^{\eta} \ldots \int\limits_0^{\eta} |F_2(t + u_1 + \ldots + u_k)| \, du_1 \ldots du_k = \eta^k \, |F_2(t + u_1^* + \ldots + u_k^*)| \, .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{12}(T, T+H) = \eta^{2k} \int\limits_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*} |F_2(t)|^2 \, dt &\leq \int\limits_{T}^{T+H+1} |F_2(t)|^2 \, dt = \\ &= \eta^{2k} \int\limits_{T}^{T+H+1} \left| 2 \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \leq P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} \right|^2 dt = \\ &= \eta^{2k} \int\limits_{T}^{T+H+1} \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \leq P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{it} + \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda \leq P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{-it} \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством $|a+b|^2 \le 2|a|^2 + 2|b|^2$ и имея в виду что $A(\lambda)$ — вещественнозначная функция, найдём

$$I_{12}(T,T+H) \ll \eta^{2k} \int\limits_{T}^{T+H+1} \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} \right|^2 dt =$$

$$= \eta^{2k} \int\limits_{0}^{H+1} \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)} \right|^2 dt.$$

Для оценки последнего интеграла применим известный приём:

$$I_{12}(T,T+H) \ll \eta^{2k} \int\limits_{0}^{H+1} \exp\left(1-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2\right) \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{i(T+t)} \right|^2 dt \le$$

$$\le \eta^{2k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(1-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2\right) \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{i(T+t)} \right|^2 dt =$$

$$= e\eta^{2k} \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1,\lambda_2\le P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2 + it\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right) dt =$$

$$= e(H+1)\eta^{2k} \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1,\lambda_2\le P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2 + it(H+1)\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right) dt.$$

Воспользовавшись формулой (3.13), получим

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k} \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1,\lambda_2\le P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1 = \lambda_2$, приходим к оценке

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k}\left(|\Sigma_2(T)| + |W_2(T)|\right). \tag{3.20}$$

где

$$\Sigma_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Оценим $\Sigma_2(T)$. Полагая $\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathscr{L}}$, имеем

$$\Sigma_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\exp\left(-\frac{\ln\lambda}{\mathscr{L}}\right)\le e^{1-\varepsilon_2}\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\le$$

$$\le e\left(\sum_{\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}-\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\right).$$

Применяя к последней сумме лемму 2.1, а затем, имея в виду, что $1-e^{-\varepsilon_2}\ll\varepsilon_2$ и пользуясь леммой 2.2 для оценки суммы $W(0)$, последовательно получим

$$\Sigma_2(T)\le e\left(\frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}P^{1-2\theta}W(0)+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+\right.$$

$$+O\left(P^{-2\theta}X^2\ln^2X\right)-\frac{2(1+\text{æ}^2)}{5(1-2\theta)}P^{(1-\varepsilon_2)(1-2\theta)}W(0)-$$

$$\left.-\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+O\left(P^{-2\theta(1-\varepsilon_2)}X^2\ln^2X\right)\right)=$$

$$=\frac{2e^2(1+\text{æ}^2)(1-e^{-\varepsilon_2})\mathscr{L}}{5}W(0)+O\left(P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2X\right)\ll$$

$$\ll\varepsilon_2W(0)\mathscr{L}+P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2X\ll\varepsilon_2\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}+P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2X\ll\frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}.$$

Оценим $W_2(T)$. Согласно следствию 2.1.1 теоремы 2.1 при $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)=O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Подставляя найденные оценки для $\Sigma_2(T)$ и $W_2(T)$ в (3.20), а затем воспользовавшись соотношением $\varepsilon_2=\varepsilon_3\mathscr{L}^{-1/2}$, получим

$$I_{12}(T,T+H)\ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}+T^{-\varepsilon_1}\right)\ll$$

$$\ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1\mathscr{L}}}+T^{-\varepsilon_1}\right)\le\frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\eta^{2k}.$$

Далее подставляя эту оценку и оценку (3.19) в формулу (3.17), найдём

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \ll H^{\frac{2}{a}-1}(I_{11}(T,T+H)+I_{12}(T,T+H)+H\eta^{2k}T^{-0,02}) \ll$$
$$\ll H^{\frac{2}{a}-1}\left(\frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} H\eta^{2k}+\frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\eta^{2k}+H\eta^{2k}T^{-0,02}\right)=$$
$$=H^{\frac{2}{a}}\eta^{2k}\left(\frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k}+\frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}+T^{-0,02}\right).$$

При $c_1=2e\varepsilon_3^{-1}$ и $k=[c\ln\mathscr{L}]$, воспользовавшись последовательно соотношением $c\geq\frac{1}{4}+\frac{2+\ln\varepsilon_3^{-1}}{2\ln\mathscr{L}}$ (параметр c более точно будет определен позднее), найдем

$$\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k}=e^{-2[c\ln\mathscr{L}]-2}\leq e^{-2c\ln\mathscr{L}}=\mathscr{L}^{-2c}\leq\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{\ln\varepsilon_3^{-1}}{\ln\mathscr{L}}}=\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}$$

Следовательно,

$$I_1(T,T+H)\leq\left(\frac{30\varepsilon_3 c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}}H\eta^{ka}, \tag{3.21}$$

где постоянная c_5 в знаке $\ll$ является абсолютной.

Подставляя в (3.8) оценку снизу для интеграла $I_2(T,T+H)$ (формула (3.12)), и оценки сверху интегралов $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$ (формулы (3.21) и (3.16), найдём

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}}\geq\frac{I_2(T,T+H)-I_1(T,T+H)}{(\eta^{2k}J(T,H))^{\frac{a}{2}}}\geq\frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}H\eta^{ka}-\left(\frac{30\varepsilon_3 c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}}H\eta^{ka}}{\left(\eta^{2k}\frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\sqrt{\mathscr{L}}\right)^{\frac{a}{2}}}=$$
$$=\frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}}-(30\varepsilon_3 c_5)^{\frac{a}{2}}}{c_4^{\frac{a}{2}}}H^{\frac{2-a}{2}}\mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}.$$

В этой формуле, выбирая в качестве ε_3 наибольшее положительное число с условием

$$(30\varepsilon_3 c_5)^{\frac{a}{2}}\leq 0,5\cdot 5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}} \qquad \text{то есть} \qquad \varepsilon_3=\frac{5^{-\frac{2(2-a)}{a}}c_g^{-\frac{4}{a}}2^{-\frac{2}{a}}}{30c_5}\sqrt{\varepsilon_1}.$$

получим

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geq c_6 H^{\frac{2-a}{2}} \mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}, \qquad c_6 = \frac{5^{-(2-a)} c_g^{-2} \varepsilon_1^{\frac{a}{4}}}{2 c_4^{\frac{a}{2}}}.$$

Так как $k\eta = c_1[c \ln \mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, то для количества нулей функции $F(t)$ на промежутке $(T, T+H)$ справедлива

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq \frac{\mu(E)}{k\eta} \geq \frac{c_6^{\frac{2}{2-a}} H \mathscr{L}^{-\frac{a}{4-2a}}}{c_1[c \ln \mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}} \geq \frac{c_6^{\frac{2}{2-a}}}{c_1 c} H \mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{a}{4-2a}} \ln \mathscr{L}.$$

В последней формуле, полагая $a = \varepsilon$, параметр c выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} c \geq & \frac{1}{4} + \frac{2 + \ln \varepsilon_3^{-1}}{2 \ln \mathscr{L}} = \frac{1}{4} + \\ & + \frac{2 + \ln 3000 c_5 + \dfrac{4 \ln 3 - 10 \ln 10}{\varepsilon} + \dfrac{8 \ln 10 + 4 \ln c_g}{\varepsilon^2} + \ln \varepsilon_1^{-0,5}}{2 \ln \mathscr{L}} = \\ & = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2 \ln 3000 e^2 c_5 \varepsilon_1^{-0,5} + \varepsilon \ln(81 \cdot 10^{-10}) + \ln(10^8 c_g^4)}{2\varepsilon^2 \ln \mathscr{L}}. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности будем считать, что при $T \geq T_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon^2 \ln 3000 e^2 c_5 \varepsilon_1^{-0,5} + \varepsilon \ln(81 \cdot 10^{-10}) + \ln(10^8 c_g^4)}{\varepsilon^2} < \frac{1}{6} \ln \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \ln P.$$

Поэтому выбирая $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$, имеем

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq 3 c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}} c_1^{-1} H \mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}} \ln \mathscr{L}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}} &= \left(\frac{1}{2}\ln T - \frac{1}{2}\ln\frac{2\pi}{5}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}} > (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln\frac{2\pi}{5}}{2\ln T}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\ln\frac{2\pi}{5}}{\ln T}\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\ln\frac{2\pi}{5}}{\ln T}\right) > \\ &> \frac{(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{10} (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}, \end{aligned}$$

$$\ln \mathscr{L} = \ln\left(\frac{1}{2}\ln T - \frac{1}{2}\ln\frac{2\pi}{5}\right) = \ln\ln T - \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{\ln\frac{2\pi}{5}}{\ln T}\right) > \frac{20}{21}\ln\ln T,$$

имеем

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geq c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T, \qquad c_7=2c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}c_1^{-1}.$$

Для наглядности коэффициент c_7 представляя в виде

$$\begin{aligned} c_7 = & 2c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}c_1^{-1}=2c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}\cdot\frac{\varepsilon_3}{2e}=\left(\frac{5^{-(2-\varepsilon)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{\varepsilon}{4}}}{2c_4^{\frac{\varepsilon}{2}}}\right)^{\frac{2}{2-\varepsilon}}\frac{5^{-\frac{4}{\varepsilon}}c_g^{-\frac{4}{\varepsilon}}2^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{30ec_5}\sqrt{\varepsilon_1}= \\ & =\frac{5^{-\frac{4}{\varepsilon}-3}\,2^{-\frac{2}{\varepsilon}-2-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_4^{-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_g^{-\frac{4}{\varepsilon}-2-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}{3ec_5}\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}= \\ & =\frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}. \end{aligned}$$

оценим его снизу в зависимости от параметров ε, ε_1 и абсолютных постоянных c_g, c_4, c_5. Имеем

$$c_7\geq\frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}\geq\frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2}c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2}}.$$

Заключение

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получены новые оценки сумм Сельберга вида $S(Y)$ и $W(\theta)$;
- в терминах экспоненциальных пар получены новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0; 1; 2$ и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар;
- доказаны неравенства А.А. Карацуба для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину, а именно, если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, тогда для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках вида $[T, T+H]$ в критической прямой выполняется неравенство (2).

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Список литературы

1. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series [Текст] / H.Davenport, H.Heilbronn // J. Lond. Math. Soc. 1936. V 11, pp. 181 - 185 and 307 - 312.
2. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана [Текст] / Е. К. Титчмарш //–М.: Ил, 1953.
3. Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле [Текст] / С. М. Воронин // Труды МИАН. 1984. Т. 163, С. 74 - 77.
4. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой [Текст] / С.М. Воронин // Известия АН СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44, № 1, С. 63 - 91.
5. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст] / А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2, С.303 - 315.
6. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета - функция Римана [Текст] / А. А. Карацуба, С.М. Воронин//– М.: Физматлит. 1994. –376с. –ISBN 5–02–014120–8.
7. Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения [Текст] /А. А. Карацуба // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5, С. 3 - 14.
8. Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле [Текст] /А. А. Карацуба // Труды МИАН. 1994. Т. 207, С. 180 - 196.
9. Гриценко С.А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна [Текст] /С.А. Гриценко // Труды МИАН, 2017. Т. 296.С. 72 - 94.
10. Гриценко С.А. О дробных моментах успокоенных L-функций Дирихле [Текст] /С.А. Гриценко // Чебышевский сборник, 2017, Т. 18, № 4, С. 168 - 187.
11. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета-функции Римана [Текст] /З.Х. Рахмонов // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. В. 2. С. 161 - 162.

12. Рахмонов З.Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы [Текст] /З.Х. Рахмонов// Вестник Хорогского университета. 2002. Серия 1. №5. С. 1 - 25.
13. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 - 279.
14. Huxley M.N. Sums and Lattice Points III [Текст] /M.N. Huxley// Proc. London Math. Soc. 2003. 87. 591 - 609.
15. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел [Текст] /А. А. Карацуба// 2-ое изд, М.: Наука, 1983.
16. Карацуба А.А. Дзета–функция Римана и ее нули [Текст] /А. А. Карацуба// УМН, 1985, т. 40, в.5 (245), 19 - 70.
17. Чанндрасекхаран К. Введение в аналитическую теории чисел.[Текст] /К. Чанндрасекхаран — М.: Мир. 1974. 188 стр.
18. Прахар К. Распределение простых чисел.[Текст] /К. Прахар//— М.: Мир, 1967.
19. Graham S.W., Kolesnik G. Van Der Corput's Method of Exponential Sums.[Текст] /S.W. Graham, G. Kolesnik — Cambridge University Press: Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney. 1991. 119 p.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

20 - А. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст]/ А.С. Аминов // ДАН РТ. 2016. Т. 59.№ 11-12. С. 453 - 456.
21 - А. Аминов А.С. О приближенном функциональном уравнении функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст]/А.С. Аминов// ДАН РТ. 2018. Т. 61.№ 9-10. С. 714 - 720.
22 - А. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст]/З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов// ДАН РТ. 2018. Т. 61.№ 11-12. С. 821 - 826.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

23 - А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой [Текст]/А.С. Аминов// «Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам». Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложение», посвященной 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ISSN: 1810-4134. Саратов 12-15 сентября 2016 г. № 8, С. 3 - 5.

24 - А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой[Текст]/А.С. Аминов // «Современные проблемы математики и её приложений». Материалы международной научной конференции, посвящённой 25-летию Государственной независимостми Республики Таджикистан. Филиал МГУ им.М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 3-4 июня 2016 г. С. 98 - 100.

25 - А. Аминов А.С. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст]/А.С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел» посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г. С. 14 - 17.

26 - А. Аминов А.С. О приближённом функциональном уравнение функции Дэвенпорта-Хейльбронна [Текст]/А.С. Аминов// Материалы научной конференции «Современные проблемы алгебры и теории чисел» посвященной 90 летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе. 14-15 ноября 2018 г. С. 18 - 24.

27 - А. Аминов А.С. О числе нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст]/А. С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений» Филиал Московского Государственного уни-

верситета им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе. 21-22 июня 2018. С. 16 - 19.

28 - А. Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой [Текст]/А.С. Аминов// Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции» посвященной 90 летию со дня рождения академика Михайлова Л.Г. Душанбе. 27-28 февраля 2018 г. С. 26 - 29.

29 - А. Аминов А.С. О доказательстве приближённого функционального уравнения функции Дэвенпорта-Хейлбронна [Текст]/А.С. Аминов // II Международная научно-практическая конференция "Наука и инновационные разработки-Северу 14-15 марта 2019 г., посвященная 25 летию Политехнического института (филиала) «Северо-Восточный федерального университета имени М.К. Аммосова» в г. Мирном. Сборник материалов в 2х частях. Часть 2. С. 161 - 165.

30 - А. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст]/З. Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. Том 2. Издательство «МАКС Пресс». 2019. С. 498 - 501.

31 - А. Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст]/З. Х. Рахмонов, А.С. Аминов // Материалы Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры и теории чисел и их приложения», Душанбе, РТСУ, 17-мая 2019 г. С. 275 - 280.