

«Утверждаю»  
Ректор Таджикского государственного  
педагогического университета им. С.Айни  
доктор исторических наук, профессор  
Гаффори Н.У.  
17 сентября 2019 г.



**Отзыв ведущей организации  
на диссертацию Аминова Асламбека Собировича  
«Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в  
коротких промежутках критической прямой»,  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел**

Функцией Дэвенпорта – Хейльбронна называется функция

$$f(s) = \frac{1 - i\alpha}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + i\alpha}{2} L(s, \bar{\chi}), \quad \alpha = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

где  $\chi(n)$  – характер Дирихле по модулю 5 такой, что  $\chi(2) = i$ ,  $L(s, \chi)$  – функция Дирихле. Функцию  $f(s)$  ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн. Они показали, что  $f(s)$  удовлетворяет уравнению риманова типа:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s),$$

однако для  $f(s)$  гипотеза Римана не выполняется и, более того, число нулей  $f(s)$  в области  $Re s > 1$ ,  $0 < Im s \leq T$  превосходит  $cT$ ,  $c > 0$  – абсолютная постоянная.

В 1980 г. С.М.Воронин доказал, что на критической прямой лежит “аномально много” нулей  $f(s)$ , то есть для функции  $N_0(T)$  – число нулей нечетного порядка  $f(s)$  на промежутке  $Re s = 0.5$ ,  $0 < Im s \leq T$ , имеет место

$$N_0(T) > cT \exp\left(0,05\sqrt{\ln \ln \ln T}\right).$$

А.А.Карацуба исследуя впервые количество нулей функции  $f(s)$  в коротких промежутках критической прямой доказал, если  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, и

$T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$  и  $H = T^{\frac{27}{82} + \varepsilon_1}$ , то выполняется соотношение

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2} - \varepsilon}, \quad (1)$$

которое называется неравенством А.А. Карацубы.

Основным результатом диссертационной работы является вывод неравенства А.А. Карацубы для промежутков, имеющих более короткую длину.

Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, а также, полученные автором формулы и оценки полностью обоснованы. Полученные в диссертации результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. получены новые оценки сумм Сельберга вида  $S(Y)$  и  $W(\theta)$ ;
2. в терминах экспоненциальных пар получены новые равномерные по параметрам оценки специальных тригонометрических сумм  $W_j(T)$ ,  $j = 0; 1; 2$ , и задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра  $H$  сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар;
3. доказано неравенство А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна  $f(s)$  в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину, а именно, если  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001,  $H = T^{\frac{131}{416} + \varepsilon_1}$ ,  $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ , тогда для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна  $f(s)$  в коротких промежутках вида  $[T, T + H]$  в критической прямой выполняется неравенство (1).

Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся тригонометрическими суммами и суммами характеров, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. А.Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В.Ломоносова, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни и в других учебных заведениях.

Диссертация А.С.Аминова состоит из введения, списка обозначений, трёх глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер. Во втором параграфе этой главы доказана теорема 1.1 о приближённом функциональном уравнении для

функции  $G(t, \chi)$ , которая получается из функции Дирихле  $L(0, 5 + it, \chi)$  умножением на функцию  $|\varphi(0, 5 + it)|^2$ , которая называется успокаивающим множителем. Теорема 1.1. используется в третьем параграфе при доказательстве теоремы 1.2. о приближённом функциональном уравнении для функции  $F(t)$ . Теорема 1.2 доказывается методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута и в свою очередь используется в третьей главе при доказательстве основной теоремы 3.1.

Во второй главе доказаны леммы 2.1 и 2.2 и теорема 2.1 которые посвящены исследованию поведения сумм А. Сельберга вида  $S(Y)$  и вида  $W(\theta)$ , а также тригонометрических сумм специального вида  $W_j(T)$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Доказательство лемм 2.1 и 2.2 проводится методом А. Сельберга с использованием свойств функции  $r(n)$ , природы чисел  $\nu$ , формулы суммирования Эйлера, формулы обращения Мёбиуса, свойств рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, формулы Перрона, метода производящих функций и метода комплексного интегрирования. В теореме 2.1 в терминах экспоненциальных пар получены оценки тригонометрических сумм  $W_j(T)$ , в следствие 2.1.1 которого найдены нетривиальные оценки сумм  $W_j(T)$  при параметра  $H = T^{\frac{131}{416} + \epsilon_1}$ , что является уточнением соответствующей оценки А.А.Карацубы, который получил подобные оценки при  $H = T^{\frac{27}{82} + \epsilon_1}$ .

В третьей главе результаты, полученные в первой и во второй главах приложены к доказательству основного результата диссертации — теоремы 3.1. В этой теореме доказано, что неравенство А.А.Карацубы, то есть соотношение (1) имеет место для промежутков критической прямой, имеющих более короткую длину, а именно  $H \geq T^{\frac{131}{416} + \epsilon_1}$ .

Диссертация оформлена аккуратно, за исключением отдельных опечаток редакционного характера, например:

1. с небольшими отличиями истории исследования сумм  $W_j(T)$  и функции  $N_0(N + T) - N_0(T)$  приводится автором дважды – во введении (стр. 11-12, стр. 2-4), затем соответственно в главах 2 и 3 (стр. 65-68, стр. 83-84). Вполне достаточно было приведение истории во введении;
2. в автореферате (стр. 7) и диссертации (стр. 8 и 19) в формулировке теоремы 1.1 в показателе параметра  $t$  пропущен  $\epsilon$  то есть вместо условия  $X \geq t^{0,01}$  должно быть  $X \geq t^{0,01\epsilon}$ .

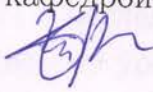
Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в теории характеров Дирихле и тригонометрических суммах. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении некоторых задач в аналитической теории


чисел. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.


Основные научные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, три из которых входят в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Диссертационная работа Аминова Асламбека Собировича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для коротких тригонометрических сумм, и полностью соответствует требованиям «Порядка присвоения учёных степеней и присуждения учёных званий» утвержденного Постановлением Правительства Республики Таджикистан от 26.11.2016 г., № 505, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Отзыв составил кандидат физико-математических наук, доцент У. Чариев. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, математического факультета Таджикского педагогического университета им. С.Айни, протокол №4, пункт 1 от 12 сентября 2019 года.

Председатель заседания, заведующий кафедрой алгебры и теории чисел,  
кандидат физ.-мат. наук  Камарадинова З.Н.

Секретарь заседания, кандидат физ.-мат. наук  Олимов М.И.

Эксперт, кандидат физ.-мат. наук, доцент  Чариев У.

Адрес: 734003, г.Душанбе, проспект Рудаки, 121, тел.: +992(37)224-13-83,  
сайт: <http://www.tgpu.tj>, E-mail: [inf0@tgpu.tj](mailto:inf0@tgpu.tj)

Подписи Камарадиновой З.Н., Олимова М.И. и Чариева У. заверяю

Начальник управления кадров и  
особых дел ТГПУ им. С.Айни



Назаров Д.К.

13.09.2019г