

**Отзыв научного руководителя**  
**на диссертацию Аминова Асламбека Собировича**  
**«Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащие в коротких**  
**промежутках критической прямой», представленную на соискание**  
**учёной степени кандидата физико-математических наук по**  
**специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и**  
**теория чисел**

Диссертационная работа посвящена задачам аналитической теории чисел, и основным предметом исследования является изучение количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна

$$f(s) = \frac{1 - i\alpha}{2}L(s, \chi) + \frac{1 + i\alpha}{2}L(s, \bar{\chi}), \quad \alpha = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

$\chi(n)$  - комплексный характер по модулю 5 такой, что  $\chi(2) = i$ . Функцию  $f(s)$  ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн и показали, что  $f(s)$  удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа, однако для  $f(s)$  гипотеза Римана не выполняется, и более того, число нулей  $f(s)$  в области  $Re s > 1, 0 < Im s \leq T$  превосходит  $cT$ ,  $c > 0$  — абсолютная постоянная. С.М. Воронин доказал, что тем не менее, критическая прямая  $Re s = \frac{1}{2}$  является исключительным множеством для нулей  $f(s)$ , то есть для  $N_0(T)$  — числа нулей  $f(s)$  на отрезке  $Re s = 1/2, 0 < Im s \leq T$  имеет место оценка  $N_0(T) > cT \exp\left(0,05\sqrt{\ln \ln \ln \ln T}\right)$ , где  $c > 0$  — абсолютная постоянная,  $T \geq T_0 > 0$ . А.А.Карацуба исследуя количество нулей функции  $f(s)$  в коротких промежутках критической прямой доказал: если  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  — произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001;  $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$  и  $H = T^{\frac{27}{82} + \varepsilon_1}$ , то выполняется соотношение

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2} - \varepsilon}. \quad (1)$$

Оценками количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, в разное время занимались В.А. Гриценко, И.С. Резвякова и другие.

Диссертация А.С. Аминова состоит из введения, списка обозначений, трёх глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Основным содержанием первой главы является теорема 1.2 о приближенном функциональном уравнении для основной функции

$$F(t) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{it}{2}\right)}{|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{it}{2}\right)|} f\left(\frac{1}{2} + it\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2,$$

здесь функция  $|\varphi(0, 5+it)|^2$  называется успокаивающим множителем. Из определения  $F(t)$  и функционального уравнения римановского типа для функции  $f(t)$  следует, что  $F(t)$  при вещественных  $t$  принимает вещественные значения, а вещественные нули  $F(t)$  нечётного порядка являются нулями нечётного порядка  $f(s)$ , лежащими на критической прямой.

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена выводу асимптотической формулы для суммы А. Сельберга вида  $S(Y)$  (лемма 2.1), оценке сверху для суммы А. Сельберга вида  $W(\theta)$  (лемма 2.1), доказательство которых проводится методом А. Сельберга с применением формулы обращения Мёбиуса, природы чисел  $\nu$ , свойств рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, формулы Перрона, метода производящих функций и метода комплексного интегрирования.

В второй главе также найдены оценки сверху для основных тригонометрических сумм вида  $W_j(T)$ ,  $j = 0, 1, 2$  (теорема 2.1). Ранее А.А. Карацуба получил нетривиальные оценки тригонометрических сумм  $W_j(T)$ , если для параметра  $H$  выполняется условие  $H \geq T^{\theta+\varepsilon_1}$ ,  $\theta = \frac{27}{82}$ . В работе нетривиальные оценки получены при  $\theta = \frac{131}{416} = \frac{27}{82} - \frac{155}{11232}$ .

В третьей главе, прилагая результаты предыдущих глав, доказан основной результат диссертационной работы, а именно показано, что для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна  $f(s)$  в коротких промежутках вида  $[T, T+H]$  критической прямой соотношение (1) справедливо при  $H \geq T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ , что является уточнением теоремы А.А.Карацубы.

Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты для тригонометрических сумм, которые могут быть использованы при решении некоторых задач аналитической теории чисел. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, 3 из которых опубликованы в изданиях из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан

Диссертационная работа Аминова Асламбека Собировича «Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой», на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для коротких тригонометрических сумм, и полностью удовлетворяет всем требованиям Порядка о присуждения ученых степеней ВАК Республики Таджикистан, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел, профессор, академик АН Республики Таджикистан, директор Института математики им.А.Джураева

АН Республики Таджикистан,

Рахмонов Зарулло Хусенович

28 мая 2019 года

Адрес: 734063, г. Душанбе, ул.Айни, дом 299/4,

e-mail: zarullo-r@rambler.ru