КУЛЯБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АБУАБДУЛЛОХ РУДАКИ

На правах рукописи

УДК: 512.548

ДАВЛАТБЕКОВ АКИМБЕК АВАЛБЕКОВИЧ

АВТОМОРФИЗМЫ, ЭНДОМОРФИЗМЫ И КОНГРУЭНЦИИ ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИГРУПП

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико—математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор
Табаров Абдулло Хабибуллоевич

Куляб — 2019

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория линейных квазигрупп занимает одно из центральных мест в общей теории квазигрупп. Первые исследования в этом направлении принадлежат работам Р.Брака и Тойода по исследовании так называемых медиальных квазигрупп [1,2]. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется медиальной, если в ней выполняется тождество $xy \cdot uv = xu \cdot yv$. Брак и Тойода доказали, что всякая медиальная квазигруппа $(Q,\cdot)$ имеет следующую конструкцию

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y, \tag{1}$$

где $(Q,+)$ - абелева группа, φ и ψ - автоморфизмы группы $(Q,+)$, с - фиксированный элемент из Q, причем $\varphi\psi = \psi\varphi$. Другими словами, любая медиальная квазигруппа "строится"из абелевой группы представлением (1).

Конструкция (1) оказалось удачной при исследовании большого класса квазигрупп, а именно, $T-$квазигрупп, $CH-$квазигрупп, дистрибутивных квазигрупп, $F-$квазигрупп и даже $n-$арных квазигрупп. Термин линейная квазигруппа впервые введено В.Д.Белоусовым в его работе [3], при исследовании уравновешенных тождеств в квазигруппах.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *линейной* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид (1). В случае, если $(Q,+)$ - абелева группа, то квазигруппа $(Q,\cdot)$ вида (1) называется $T-$*квазигруппой.* Следует отметить, что

$T-$квазигруппы введены и подробно исследованы чешскими алгебраистами Т.Кепка и П.Немец в работах [4,5]. В дальнейшем линейные квазигруппы и некоторые их обобщения изучались многими другими алгебраистами.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *левой линейной* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x\cdot y=\varphi x+c+\beta y, \tag{2}$$

где $\varphi\in Aut(Q,+)$, β - подстановка множества Q, c - фиксированный элемент из Q.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *правой линейной* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x\cdot y=\alpha x+c+\psi y, \tag{3}$$

где $\psi\in Aut(Q,+)$, α - подстановка множества Q, c - фиксированный элемент из Q.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *квазигруппой смешанного типа линейности I рода* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x\cdot y=\varphi x+c+\bar{\psi} y, \tag{4}$$

где $\varphi\in Aut(Q,+)$, $\bar{\psi}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, c - фиксированный элемент из Q.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *квазигруппой смешанного типа линейности II рода* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x\cdot y=\bar{\varphi} x+\ +\psi y, \tag{5}$$

где $\bar{\varphi}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, $\psi\in Aut(Q,+)$, c - фиксированный элемент из Q.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *алинейной* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x\cdot y=\bar{\varphi}x+c+\bar{\psi}y, \tag{6}$$

где $\bar{\varphi},\bar{\psi}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+), c$ - фиксированный элемент из множества Q.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *алинейной слева* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x\cdot y=\bar{\varphi}x+c+\beta y, \tag{7}$$

где β - подстановка множества Q, $\bar{\varphi}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, c - фиксированный элемент из множества Q.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *алинейной справа* над группой $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x\cdot y=\alpha x+c+\bar{\psi}y, \tag{8}$$

где α - подстановка множества Q, $\bar{\psi}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$ c - фиксированный элемент из множества Q.

Классы линейных и алинейных квазигрупп образуют многообразие, то есть эти классы можно охарактеризовать тождествами или системой тождеств. Впервые этот факт был доказан Г.Б.Белявской и А.Х.Табаровым в работе [6]. В дальнейшим этим авторам удалось доказать, что другие обобщения линейных квазигрупп, а именно, левые (правые) линейные квазигруппы смешанные типы линейности и т.д. также образуют многообразие.

Ввиду удачной конструкции линейных квазигрупп, большинство алгебраистов изучали квазигруппы, линейные над некоторой "хорошей" (то есть изученной) лупой, например коммутативные лупы Муфанг (кратко КЛМ). Лупа $(Q,+)$ называется лупой Муфанг, если в ней выполняется тождество $x+(y+(x+z))=((x+y)+x)+z$. Многие известные классы квазигрупп входят в класс линейных квазигрупп. Например, медиалные квазигрупппы (*теорема Брака-Тойоды* [7]), $T-$квазигруппы [4,5], $CH-$квазигруппы (*теорема Манина* [8]), дистрибутивные квазигруппы (*теорема В.Д.Белоусова* [9]), дистрибутивные квазигруппы Штейнера, леводистрибутивные квазигруппы (*теорема Белоусова-Оноя*, [10]) F-квазигруппы (*теорема Кепки-Киньона-Филлипса,* [11]) n-арные медиальные квазигруппы (*теорема Ивэнса* [12]) являются квазигруппами такого вида.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *дистрибутивной*, если ней выполняются тождества $x\cdot yz=xy\cdot xz$ и $xy\cdot z=xz\cdot yz$.

В.Д.Белоусов в 1958 году доказал, что любую дистрибутивную квази группы можно получить таким образом: $x\cdot y=\varphi x+\psi y$, где $(Q,+)$ - КЛМ, $\varphi,\psi\in Aut(Q,+)$.

Ю.И.Манин в монографии [8] исследовал кубические гиперповерхности. При решении одной задачи алгебраической геометрии, Ю.И.Манин ввёл класс $CH-$квазигрупп, то есть квазигруппа с тождествами $xy=yx$, $x(xy)=y$, любые три элемента которой порождают медиальную квазигруппу. Ю.И.Манин доказал, что любую $CH-$квазигруппу можно получить следующим образом: $xy=(-x-y)+d$, где $d\in Z(Q,+)$, то есть d из центра КЛМ $(Q,+)$. Напомним, что подмножество Z коммутативной лупы Муфанг $(Q,+)$ со свойством $Z=\{a\in Q\mid a+(x+y)=(a+x)+y,$ $x,y\in Q\}$ называется центром КЛМ.

Согласно теоремы Ш.Стейна [7], любую леводистрибутивную квазигруппу $(Q,\cdot)$, изотопную группе $(Q,+)$, можно получить с помощью следующей конструкции: $x\cdot y=\varphi x+\psi y$, где $\varphi\in Aut(Q,+)$, ψ подстановка множества Q.

При исследовании линейных квазигрупп рассмотрены следующие аспекты: автоморфизмы, эндоморфизмы, автотопии, эндотопии, гомоморфизмы, изоморфизмы, конгруэнции, тождества и т.д.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней получены общий вид автотопий, эндотопий, автоморфизмы, эндоморфизмы обобщенных линейных квазигрупп. Кроме того, доказана проблема Белоусова о нормальности конгруэнций для некоторых классов обобщенных линейных квазигрупп.

Достаточно подробный исторический обзор развития теории квазигрупп содержатся в работах [7, 13, 14, 15, 16, 17].

Все рассуждения, приведенные выше, можно отнести к обоснованию и актуальности выбранной темы диссертации.

Автор данной диссертационной работы благодарит своего научного руководителя, профессора А.Х. Табарова, за постановку задач, постоянное внимание и всестороннюю поддержку.

Цель работы. Основная цель диссертации заключается в следующем:

- *исследовать гомоморфизмы, автоморфизмы, эндоморфизмы и конгруэнции обобщенных линейных квазигрупп;*
- *решение задачи В.Д.Белоусова для некоторых классов линейных квазигрупп;*

- *характеризация обобщенных линейных квазигрупп различными тождествами;*

Методы исследования. В работе применялись алгебраические и комбинаторные методы исследования, методы профессора В.А.Щербакова по исследованию автоморфизмов, изоморфизмов и гомоморфизмов квазигрупп, методы, разработанные на семинарах института математики под руководством академика АН РТ З.Х.Рахмонова, а также разработанные профессором А.Х.Табаровым методы исследования линейных квазигрупп.

Научная новизна. Все включенные в диссертационную работу результаты являются новыми. В диссертации получены следующие результаты:

- описано строение автотопий, антиавтотопий и эндотопий обобщенных линейных квазигрупп.
- найдено представление произвольного эндоморфизма (автоморфизма) всех типов обобщенных линейных квазигрупп.
- решена задача В.Д.Белоусова об условиях нормальности конгруэнции некоторых подклассов обобщенных линейных квазигрупп.

Все результаты, включенные в диссертацию, получены автором лично или в неразделимом сотрудничестве с соавторами.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных разделах общей теории групп, теории квазигрупп и неассоциативных алгебраических систем.

Апробация полученных результатов. Включенные в данную диссертационную работу результаты докладывались на следующих конференциях и научных семинарах.

- международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017г.
- материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «20-ой годовщине Дня национального единства» и « Году молодёжи» Душанбе, 2017.
- материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ, лаурета государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича, Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.
- международная алгебраическая конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения профессора В.Д.Белоусова, Молдова, 18-22 апреля 2018 г.
- международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 22-25 мая 2018 г.
- международная конференция "Мальцевские чтения" Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, 19-22 ноября 2018 г.
- современные проблемы алгебры и теории чисел. Материалы научно-теоретической конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения профессора Бабаева Г.Б. Душанбе, 14-15 декабря 2018 г.
- XXVI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 9-13 апреля 2019г.

- международная конференция, посвящённой 90 - летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 28-31 мая 2019 г.
- республиканская научно-практическая конференция на тему "Воспитание и подготовка учителей математики в высших педагогических заведениях Таджикистана в современных условиях" посвященная 80-летию доктора педагогических наук, профессора Ислома Гуломова, Куляб, 8-9 июня 2019 г.
- семинары Института математики АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ Рахмонова З.Х. (2018- 2019 г.г);
- семинары кафедры математики и методики её преподавания Кулябского государственного университета имени А. Рудаки (2013-2019 г.г);

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах, 5 статьях и 11 тезисах, список которых приведен в конце автореферата. В работе, написанное совместно с А.Х.Табаровым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из ведения, двух глав, разбитых на 12 параграфов, обзора полученных результатов и списка цитированной литературы. Все теоремы, леммы, предложения, следствия, замечания и формулы нумеруются тремя числами, первое из которых обозначает номер главы, второе номер параграфа. Полный объем диссертации 115 страниц, библиография включает 59 наименований.

Краткое содержание диссертационной работы

Диссертация начинается с введения. В нем освещается актуальность выбранной темы диссертации, цель работы, апробация и краткое изложение полученных результатов.

В главе I "Автоморфизмы и эндоморфизмы обобщенных линейных квазигрупп" приведены основные понятия и необходимые сведения, нужные нам в дальнейшем. В параграфе 1.2. исследованы свойства линейных и алинейных квазигрупп, а именно: порождающие группы внутренних подстановок обобщенных линейных квазигрупп представлены посредством трансляции и автоморфизмов соответствующей группы, доказано условие, когда подквазигруппа линейной слева (справа) квазигруппы является также линейной слева (справа) квазигруппой, найдены все парастрофы названных классов квазигрупп. Кроме того, исследованы изоморфизмы, автоморфизмы, гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных слева (справа) квазигрупп.

Теорема 1.3.2. *Любая автотопия линейной слева квазигруппы* $(Q,\cdot)$ $x\cdot y=\varphi x+c+\beta y$, *имеет вид:*

$$P=(\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1},\tilde{L}_c\beta\tilde{R}_b\theta\beta^{-1}\tilde{L}_{-c},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta),$$

где $\varphi,\theta\in Aut(Q,+)$, β *- подстановка множества* Q, a,b,c *- фиксированные элементы из* Q.

Аналогичные утверждения верны для класса линейных справа квазигрупп, а также алинейных слева (справа) квазигрупп:

Следствие 1.3.1. *Любая автотопия линейной справа квазигруппы*

$x \cdot y = \alpha x + c + \psi y$, *имеет вид:*

$$P = (\alpha \tilde{L}_a \theta \alpha^{-1}, \tilde{L}_c \tilde{R}_{\psi b} \psi \theta \psi^{-1} \tilde{L}_{-c}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta),$$

где $\psi, \theta \in Aut(Q,+)$, α *- подстановка множества* Q, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

Теорема 1.3.3. *Любая автотопия алинейной справа квазигруппы* $(Q, \cdot)$ $x \cdot y = \alpha x + c + \bar{\psi} y$, *имеет вид:*

$$P = (\alpha \tilde{L}_a \theta \alpha^{-1}, \tilde{L}_c \tilde{R}_{\bar{\psi} b} \bar{\psi} \theta \tilde{L}_{-c} \bar{\psi}^{-1}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta),$$

где $\theta \in Aut(Q,+)$, $\bar{\psi}-$ *антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, α *- подстановка множества* Q, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

Следствие 1.3.2. *Любая автотопия алинейной слева квазигруппы* $(Q, \cdot)$ $x \cdot y = \bar{\varphi} x + c + \beta y$, *имеет вид:*

$$P = (\tilde{L}_{\bar{\varphi} a} \bar{\varphi} \theta \bar{\varphi}^{-1}, \tilde{L}_c \beta \tilde{R}_b \beta \beta^{-1} \tilde{L}_{-c}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta),$$

где $\theta \in Aut(Q,+)$, $\bar{\varphi}-$ *антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, β *- подстановка множества* Q, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

Следствие 1.3.3. *Любой автоморфизм* γ *линейной слева (справа) квазигруппы вида* $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$ $(x \cdot y = \alpha x + c + \psi y)$, *можно представить в виде:*

$$\gamma = \tilde{L}_{\varphi a} \varphi \theta \varphi^{-1} = \tilde{L}_c \beta \tilde{R}_b \theta \beta^{-1} \tilde{L}_{-c} = \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta$$

$$(\gamma = \alpha \tilde{L}_a \theta \alpha^{-1} = \tilde{L}_c \tilde{R}_{\psi b} \psi \theta \psi^{-1} \tilde{L}_{-c} = \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta).$$

Теорема 1.3.6. *Любая антиавтотопия линейной слева квазигруппы* $(Q, \cdot)$ $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$, *имеет вид:*

$$P = (\varphi^{-1} \tilde{R}_{-c} \tilde{L}_a \bar{\theta} \beta, \beta^{-1} \tilde{R}_b \bar{\theta} \tilde{R}_c \varphi, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \bar{\theta}),$$

где $\varphi \in Aut(Q,+)$, $\bar{\theta}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, β *- подстановки множества* Q, a,b,c *- фиксированные элементы из* Q.

Следствие 1.3.4. *Любая антиавтотопия линейной справа квазигруппы* $(Q,\cdot)$ $x\cdot y = \alpha x + c + \psi y$, *имеет вид:*

$$P = (\alpha^{-1}\tilde{L}_a\bar{\theta}\tilde{L}_c\psi, \psi^{-1}\tilde{L}_{-c}\tilde{R}_b\bar{\theta}\alpha, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta}),$$

где $\psi \in Aut(Q,+)$, $\bar{\theta}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, α *- подстановка множества* Q, a,b,c *- фиксированные элементы из* Q.

Аналогично, можно показать, что любая антиавтотопия алинейной слева (справа) квазигруппы $x\cdot y = \bar{\varphi}x + c + \beta y$ $(x\cdot y = \alpha x + c + \bar{\psi}y)$, имеет вид:

$$\bar{P} = (\tilde{L}_a\bar{\varphi}^{-1}\bar{\theta}\tilde{L}_c\beta, \beta^{-1}\tilde{L}_{-c}\tilde{R}_b\bar{\theta}\bar{\varphi}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta})$$

$$(\bar{P} = (\alpha^{-1}\tilde{L}_a\bar{\theta}\tilde{L}_c\bar{\psi}, \tilde{L}_{-c}\bar{\psi}^{-1}\tilde{R}_b\bar{\theta}\alpha, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta})),$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$, $\bar{\theta}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$, α,β - подстановки множества Q, a,b,c - фиксированные элементы из Q.

Теорема 1.3.7. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$*- линейные слева над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y = \varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y$, $x\circ y = \varphi_2 x + c_2 + \beta_2 y$, *и* $\gamma \in Aut(Q,+)$. *Тогда автоморфизм* γ *группы* $(Q,+)$ *является изоморфизмом квазигрупп* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma\ \varphi_1\gamma^{-1} = \varphi_2, \quad \gamma\beta_1\gamma^{-1} = \beta_2, \quad \gamma(c_1) = c_2.$$

Теорема 1.3.8. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$*- линейные справа над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y = \alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y$, $x\circ y = \alpha_2 x + c_2 + \psi_2 y$, *и* $\gamma \in Aut(Q,+)$. *Тогда автоморфизм* γ *группы* $(Q,+)$ *является изоморфизмом квазигрупп* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma\ \alpha_1\gamma^{-1} = \alpha_2, \quad \gamma\psi_1\gamma^{-1} = \psi_2, \quad \gamma(c_1) = c_2.$$

Предложение 1.3.1. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *и* $(Q, \circ)$ *- линейные справа над группой* $(Q, +)$ *квазигруппы :* $x \cdot y = \alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y$, $x \circ y = \alpha_2 x + c_2 + \psi_2 y$, γ *- изоморфизм квазигрупп* $(Q, \cdot)$ *и* $(Q, \circ)$*:* $x \cdot y = \gamma^{-1}(\gamma x \circ \gamma y)$*. Тогда изоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma = \gamma^{-1}\alpha_2 \tilde{L}_a \theta \alpha_1^{-1} = \gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\tilde{R}_{\psi_2 b}\psi_2\theta\psi_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Аналогично для линейных слева квазигрупп получим

Предложение 1.3.2. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *и* $(Q, \circ)$ *- линейные слева над группой* $(Q, +)$ *квазигруппы :* $x \cdot y = \varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y$, $x \circ y = \varphi_2 x + c_2 + \beta_2 y$, γ *- изоморфизм квазигрупп* $(Q, \cdot)$ *и* $(Q, \circ)$*:* $x \cdot y = \gamma^{-1}(\gamma x \circ \gamma y)$*. Тогда изоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma = \gamma^{-1}\tilde{L}_{\varphi_2 a}\varphi_2\theta\varphi_1^{-1} = \gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\tilde{R}_{\beta_2 b}\beta_2\theta\beta_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Теорема 1.4.1. *Пусть* (Q, A) *- линейная квазигруппа:* $A(x, y) = = \varphi x + c + \psi y$, (Q, A^{-1}) *- её парастроф:* $A^{-1}(x, y) = J\psi^{-1}\varphi x + J\psi^{-1}c + +\psi^{-1}y$*. Тогда любая автотопия квазигруппы* (Q, A^{-1}) *имеет вид:*

$$P = (J\psi^{-1}\varphi\tilde{L}_a\theta J\psi\varphi^{-1}, \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\theta\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta),$$

где $\varphi, \psi, \theta \in Aut(Q, +)$, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

Аналогично, если $(Q, {}^{-1}A)$ - парастроф квазигруппы вида ${}^{-1}A(x, y) = = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\psi y$, то любая автотопия квазигруппы $(Q, {}^{-1}A)$ имеет вид:

$$P = (\varphi^{-1}\tilde{L}_a\theta\varphi, \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi\tilde{R}_b\theta J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta),$$

где $\tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, левая и правая трансляции группы $(Q, +)$, $\varphi, \psi, \theta, \varphi^{-1}, \psi^{-1} \in Aut(Q, +)$, $a, b \in Q$.

Следствие 1.4.1. *Любой автоморфизм* γ *квазигруппы* $A^{-1}(x,y) = = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y \qquad ({}^{-1}A(x,y) = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\psi y)$, *можно представить в виде:*

$$\gamma = J\psi^{-1}\varphi\tilde{L}_a\theta J\psi\varphi^{-1} = \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\theta\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta$$

$$(\gamma = \varphi^{-1}\tilde{L}_a\theta\varphi = \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi R_b\theta J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

Следствие 1.4.4. Любая антиавтотопия алинейной квазигруппы $A^{-1}(x,y) = J\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}y + J\bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}y$ (${}^{-1}A(x,y) = \bar{\varphi}^{-1}x + J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}y$). имеет вид:

$$P = (J\tilde{L}_{\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}a}\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}\theta\bar{\psi}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\psi}^{-1}c}, \bar{\psi}\tilde{L}_{J\bar{\psi}^{-1}c}\tilde{R}_b\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta),$$

$$(P = (\bar{\varphi}\tilde{L}_a\theta\tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}J\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}, J\bar{\varphi}\bar{\psi}^{-1}\tilde{L}^{-1}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}R_b\theta\bar{\varphi}^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta)),$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$, a, b, c - фиксированные элементы из Q.

Следствие 1.4.5. *Любая антиавтотопия квазигруппы смешанного типа линейности I рода* $A^{-1}(x,y) = J\bar{\psi}^{-1}\varphi y + J\bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}y$ *(соответственно II рода* ${}^{-1}A(x,y) = \bar{\varphi}^{-1}x + J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\psi y$) *имеет вид:*

$$P = (J\tilde{L}_{\bar{\psi}\varphi^{-1}a}\bar{\psi}\varphi^{-1}\theta\bar{\psi}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\psi}^{-1}c}, \bar{\psi}\tilde{L}_{J\bar{\psi}^{-1}c}\tilde{R}_b\bar{\psi}^{-1}\varphi, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta),$$

$$P = (\bar{\varphi}\tilde{L}_a\theta\tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}J\bar{\varphi}^{-1}\psi, J\bar{\varphi}\psi^{-1}\tilde{L}^{-1}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}R_b\theta\bar{\varphi}^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta),$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}$ *- антиавтоморфизмы группы* $(Q,+)$, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- линейная справа квазигруппа вида* $x \cdot y = \alpha x + \psi y$. *Любая эндотопия квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *имеет вид:*

$$P = (\alpha\tilde{L}_a\sigma\alpha^{-1}, \tilde{R}_{\psi b}\psi\sigma\psi^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma),$$

где $\tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, *левая и правая трансляции группы* $(Q,+)$, $\alpha^{-1}(\psi^{-1})$ *- обратная подстановка (автоморфизм) для* $\alpha(\psi)$.

Аналогично, если $(Q,\cdot)$ *- линейная слева квазигруппа вида* $x \cdot y =$ $= \varphi x + \beta y$, *то любая эндотопия квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *имеет вид:*

$$P = (\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\sigma\varphi^{-1}, \beta\tilde{R}_b\sigma\beta^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Следствие 1.5.1. *Любой эндоморфизм линейной слева (справа) квазигруппы вида* $x \cdot y = \varphi x + \beta y$ $(x \cdot y = \alpha x + \psi y)$ *можно представить в виде*

$$E = \tilde{L}_{\varphi a}\varphi\sigma\varphi^{-1} = \beta\tilde{R}_b\sigma\beta^{-1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma$$

$$(E_1 = \alpha\tilde{L}_a\sigma\alpha^{-1} = \tilde{R}_{\psi b}\psi\sigma\psi^{-1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Теорема 1.5.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- алинейная слева квазигруппа вида* $x \cdot y = \bar{\varphi}x + \beta y$. *Любая эндотопия квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *имеет вид:*

$$\bar{P} = (\bar{\varphi}^{-1}\tilde{L}_a\sigma\bar{\varphi}, \beta\tilde{R}_b\sigma\beta^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Следствие 1.5.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- алинейная справа квазигруппа вида* $x \cdot y = \alpha x + \bar{\psi}y$. *Любая эндотопия квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *имеет вид:*

$$\bar{P} = (\alpha\tilde{L}_a\sigma\alpha^{-1}, \bar{\psi}^{-1}\tilde{R}_b\sigma\bar{\psi}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Теорема 1.5.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные справа квазигруппы вида* $x \cdot y = \alpha_1 x + \psi_1 y$, $x \circ y = \alpha_2 x + \psi_2 y$. *Подстановки* α_1, α_2, *такие, что* $\alpha_1 0 = 0$, $\alpha_2 0 = 0$, *где* 0 *- нулевой элемент группы* $(Q,+), \gamma$ *- произвольный эндоморфизм группы* $(Q,+)$. *Тогда* γ *является гомоморфизмом квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\gamma\alpha_1 = \alpha_2\gamma, \quad \gamma\psi_1 = \psi_2\gamma.$$

"Симметричные" утверждения верны и для случая линейных слева квазигрупп.

Теорема 1.5.4. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные слева квазигруппы вида* $x\cdot y=\varphi_1 x+\beta_1 y$, $x\circ y=\varphi_2 x+\beta_2 y$. *Подстановки* β_1, β_2, *такие, что* $\beta_1 0=0$, $\beta_2 0=0$, *где* 0 *- нулевой элемент группы* $(Q,+),\gamma$ *- произвольный эндоморфизм группы* $(Q,+)$. *Тогда* γ *является гомоморфизмом квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\gamma\beta_1=\beta_2\gamma,\quad \gamma\varphi_1=\varphi_2\gamma.$$

Предложение 1.5.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные слева над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y=\varphi_1 x+c_1+\beta_1 y$, $x\circ y=\varphi_2 x+c_2+\beta_2 y$, γ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$*:* $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\tilde{R}_{c_2}\tilde{L}_{\varphi_2 a}\varphi_2\theta\varphi_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1}=\beta_2\tilde{R}_b\theta\beta_1^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Аналогично, если $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные справа над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы вида:* $x\cdot y=\alpha_1 x+c_1+\psi_1 y$, $x\circ y=\alpha_2 x+c_2+\psi_2 y$, γ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$*:* $\gamma(x\cdot y)=(\gamma x\circ\gamma y)$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\tilde{R}_{c_2}\alpha_2\tilde{L}_a\theta\alpha_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1}=\tilde{R}_{\psi_2 b}\psi_2\theta\psi_1^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Предложение 1.5.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- алинейные квазигруппы вида* $x\cdot y=\bar{\varphi}_1 x+c_1+\bar{\psi}_1 y$, $x\circ y=\bar{\varphi}_2 x+c_2+\bar{\psi}_2 y$, γ *является гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$*:* $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить виде*

$$\gamma=\tilde{L}_{\bar{\varphi}_2 a}\bar{\varphi}_2\theta\bar{\varphi}_1^{-1}=\tilde{L}_{c_2}\tilde{R}_{\bar{\psi}_2 b}\bar{\psi}_2\theta\bar{\psi}_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Предложение 1.5.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- квазигруппа смешанного типа линейности I рода* $x\cdot y=\varphi_1 x+c_1+\bar\psi_1 y$, $x\circ y=\varphi_2 x+c_2+\bar\psi_2 y$, γ *является гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$: $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить виде*

$$\gamma=\tilde L_{\varphi_2 a}\varphi_2\theta\varphi_1^{-1}=\tilde L_{c_2}\tilde R_{\bar\psi_2 b}\bar\psi_2\theta\bar\psi_1^{-1}\tilde L_{-c_1}=\tilde L_a\tilde R_b\theta.$$

"Симметричные" утверждения верны для случая квазигрупп смешанного типа линейности II рода, а также алинейных слева (справа) квазигрупп.

Предложение 1.5.4. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- квазигруппа смешанного типа линейности II рода* $x\cdot y=\bar\varphi_1 x+c_1+\psi_1 y$, $x\circ y=\bar\varphi_2 x+c_2+\psi_2 y$, γ *является гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$: $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить виде*

$$\gamma=\tilde L_{\bar\varphi_2 a}\bar\varphi_2\theta\bar\varphi_1^{-1}=\tilde L_{c_2}\tilde R_{\psi_2 b}\psi_2\theta\psi_1^{-1}\tilde L_{-c_1}=\tilde L_a\tilde R_b\theta.$$

Предложение 1.5.5. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- алинейная слева над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y=\bar\varphi_1 x+c_1+\beta_1 y$, $x\circ y=\bar\varphi_2 x+c_2+\beta_2 y$, γ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$: $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\tilde L_{\bar\varphi_2 a}\bar\varphi_2\theta\bar\varphi_1^{-1}=\tilde L_{c_2}\beta_2\tilde R_b\theta\beta_1^{-1}\tilde L_{-c_1}=\tilde L_a\tilde R_b\theta.$$

Предложение 1.5.6. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- алинейная справа над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y=\alpha_1 x+c_1+\bar\psi_1 y$, $x\circ y=\alpha_2 x+c_2+\bar\psi_2 y$, γ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$: $\gamma(x\cdot y)=(\gamma x\circ\gamma y)$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\tilde R_{c_2}\alpha_2\tilde L_a\theta\alpha_1^{-1}\tilde R_{-c_1}=\tilde R_{\bar\psi_2 b}\bar\psi_2\theta\bar\psi_1^{-1}=\tilde L_a\tilde R_b\theta.$$

Теорема 1.6.1. *Пусть* (Q, A) *- линейная квазигруппа:* $A(x, y) = \varphi x + c + \psi y$, (Q, A^{-1}) *- её парастроф,* $A^{-1}(x, y) = J\psi^{-1}\varphi x + J\psi^{-1}c + \psi^{-1}y$. *Любая эндотопия квазигруппы* (Q, A^{-1}) *имеет вид:*

$$P = (J\psi^{-1}\varphi \tilde{L}_a \sigma J\psi\varphi^{-1}, \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\sigma\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma),$$

где $\tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, *левая и правая трансляции группы* $(Q, +)$, $\alpha^{-1}(\psi^{-1})$ *- обратная подстановка (автоморфизм) для* $\alpha(\psi)$.

Следствие 1.6.1. *Любой эндоморфизм* γ *линейной квазигруппы вида* $A^{-1}(x, y) = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y$ $\quad ({}^{-1}A(x, y) = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\psi y)$, *можно представить в виде:*

$$\gamma = J\psi^{-1}\varphi\tilde{L}_a\sigma J\psi\varphi^{-1} = \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\sigma\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma,$$

$$(\gamma = \varphi^{-1}\tilde{L}_a\sigma\varphi = \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi R_b\sigma J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Теорема 1.6.2. *Пусть* (Q, A^{-1}) *и* (Q, B^{-1}) *парастрофы линейной квазигруппы (Q, A):* $A(x, y) = \varphi x + c + \psi y$, $\gamma \in End(Q, +)$, *где* $A^{-1}(x, y) = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y$, $\quad B^{-1}(x, y) = J\psi_2^{-1}\varphi_2 x + J\psi_2^{-1}c_2 + \psi_2^{-1}y$. *Тогда эндоморфизм* γ *группы* $(Q, +)$ *является гомоморфизмом квазигруппы* (Q, A^{-1}) *в квазигруппу* (Q, B^{-1}) *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma J\psi_1^{-1}\varphi_1 = J\psi_2^{-1}\varphi_2\gamma, \quad \gamma\psi_1^{-1} = \psi_2^{-1}\gamma, \quad \gamma J\psi_1^{-1}c_1 = J\psi_2^{-1}\gamma c_2.$$

Предложение 1.6.1. *Пусть* (Q, A^{-1}) *и* (Q, B^{-1}) *- парастрофы линейной над группой* $(Q, +)$ *квазигруппы* (Q, A)*:* $A(x, y) = \varphi x + c + \psi y$, $A^{-1}(x, y) = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y$, $\quad B^{-1}(x, y) = J\psi_2^{-1}\varphi_2 x + J\psi_2^{-1}c_2 + \psi_2^{-1}y$. γ *- гомоморфизм квазигруппы* (Q, A^{-1}) *в* (Q, B^{-1}) $\gamma(x \cdot y) = \gamma x \circ \gamma y$.

Тогда гомоморфизм γ можно представить в виде

$$\gamma = \tilde{R}_{J\psi_2^{-1}\tilde{L}_a\sigma c_2} J\psi_2^{-1}\varphi_2\tilde{L}_a\sigma J\psi_1\varphi_1^{-1}\tilde{R}^{-1}_{J\psi_1^{-1}c_1} = \psi_2^{-1}\tilde{R}_b\sigma\psi_1 = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma,$$

где $\sigma \in Ent(Q,+), a, b \in Q, \tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, *левая и правая трансляции группы* $(Q,+)$.

Глава II посвящена решению проблемы В.Д.Белоусова для некоторых классов линейных квазигрупп. Кроме того, в данной главе приводится описание класса линейных А-квазигрупп тождествами, найдена характеризация смешанных типов линейных квазигрупп известными тождествами (полусимметричности, дистрибутивности т.д.), исследованы нормальные формы обобщенных линейных квазигрупп.

Задача определения нормальных конгруэнций для различных классов квазигрупп поставлена В.Д.Белоусовым в его классической монографии [7] . Формулировка задача следующая: к*аковы квазигруппы или лупы, в которых все конгруэнции являются нормальными* (проблема 20, с.221 из [7]). По настоящее время положительный ответ получены для некоторых классов квазигрупп, а именно: IP-квазигруппы, TS-квазигруппы, CH-квазигруппы, квазигруппа Штейнера, и т.д.

Напомним, что квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется левой (правой) квазигруппой Бола, если в ней выполняется тождество

$$x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R^{-1}_{e_x}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t,$$

$$((t \cdot x) \cdot y) \cdot x = t \cdot L^{-1}_{f_x}((x \cdot y) \cdot x),$$

для любых $x, y, t \in Q$, где $xe_x = x$, $f_x x = x$, $L_a x = ax$, $R_a x = xa$, $L_a^{-1}x = a\backslash x$, $R_a^{-1}x = x/a$, для всех $a, x \in Q$.

Теорема 2.1.1. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная слева квазигруппа $x \cdot y = \varphi x + \beta y$ с условием $\varphi^2 = \varepsilon$. Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняется правое тождество Бола, то есть $(Q, \cdot)$ является правой квазигруппой Бола.*

Теорема 2.1.2. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная справа квазигруппа $x \cdot y = \alpha x + \psi y$ с условием $\psi^2 = \varepsilon$. Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняется левое тождество Бола, то есть $(Q, \cdot)$ является левой квазигруппой Бола.*

Теорема 2.1.3. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная квазигруппа $x \cdot y = \varphi x + \psi y$, с условием $\varphi^2 = \psi^2 = \varepsilon$. Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества Бола, то есть $(Q, \cdot)$ является квазигруппой Бола.*

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется $BG-$квазигруппой, если $(Q, \cdot)$ линейная и в $(Q, \cdot)$ выполняется тождества Бола.

Следствие 2.1.1. *Всякая конгруэнция $BG-$квазигруппы является нормальной конгруэнцией.*

Данное утверждение верно также для случая смешанных типов квазигрупп I и II родов.

Теорема 2.1.4. *Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа смешанного типа линейности I рода: $x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y$ с условием $\varphi^2 = \varepsilon$ (II рода $x \cdot y = \bar{\varphi} x + \psi y$ с условии $\psi^2 = \varepsilon$). Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняется правое (левое) тождество Бола, то есть $(Q, \cdot)$ является правой (левой) квазигруппой Бола.*

Следствие 2.1.2. *В квазигруппах смешанного типа линейности I, II рода с условием $\varphi^2 = \varepsilon$ или $\psi^2 = \varepsilon$ всякая конгруэнция является нормальной.*

Полученные результаты являются решением задачи В.Д.Белоусова для вышеназванных классов квазигрупп.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *- линейная слева квазигруппа:*

$$x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$$

η *- конгруэнция группы* $(Q, +)$ *и* $\varphi|Ker\eta$ *- сужение автоморфизма* φ *на группу* $Ker\eta$*. Тогда* η *- конгруэнция квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi|Ker\eta$ *- эндоморфизм группы* $Ker\eta$*. Далее* η *- нормальная конгруэнция на* $(Q, \cdot)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi|Ker\eta$ *автоморфизм группы* $Ker\eta$*.*

Теорема 2.2.2. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *- линейная слева (справа) квазигруппа:*

$$x \cdot y = \varphi x + c + \beta y \quad (x \cdot y = \alpha x + c + \psi y)$$

причем φ (ψ) *имеет конечный порядок, тогда каждая конгруэнция на* $(Q, \cdot)$ *нормальна.*

Замечание. Теоремы 2.2.2 является решением задачи В.Д. Белоусова для класса линейных слева (справа) квазигрупп.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется А-квазигруппой, если в $(Q, \cdot)$ все внутренные подстановки являются автоморфизмами.

Теорема 2.3.1. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ является А-квазигруппой, если в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, /, \backslash)$ выполняются следующие соотношения:

$$(((z_1 z_2)x)y)/(h\backslash(hx \cdot y)) =$$

$$= ((z_1 x \cdot y)/(h\backslash(hx \cdot y))) \cdot ((z_2 x \cdot y/(h\backslash(hx \cdot y))),$$

$$((x \cdot yh)/h)\backslash(x(y(z_1 z_2))) =$$

$$= (((x \cdot yh)/h)\backslash(x \cdot yz_1)) \cdot (((x \cdot yh)/h)\backslash(x \cdot yz_2)),$$

$$(hx/h)/h)\backslash((z_1 z_2)x) = ((hx/h)\backslash((z_1 x)) \cdot ((hx/h)\backslash((z_2 x)).$$

В.А Щербаковым (см [18]) найдена другая система порождающих для $I_h(Q,\cdot)$, а именно: $I_h(Q,\cdot) =< L_{x,y},\ T_{x,y}, P_{x,y} >,\ L_{x,y} = L^{-1}_{x\circ y}L_xL_y$, $T_{x,y} = L^{-1}_{x*y}R_xL_y$, $P_{x,y} = L^{-1}_{x\bullet y}P_xL_y$, $x\circ y = R_h^{-1}(x\cdot yh)$, $x*y = R_h^{-1}(yh\cdot x)$, $x\bullet y = R_h^{-1}(x/yh)$.

Теорема 2.3.2. *Квазигруппа $(Q,\cdot)$ является A-квазигруппой, если в примитивной квазигруппе $(Q,\cdot,/,\backslash)$ выполняются следующие соотношения:*

$$((x\cdot yh)/h)\backslash(x(y(z_1z_2))) =$$

$$= (((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_1))\cdot(((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_2)),$$

$$((yh\cdot x)/h)\backslash(y(z_1z_2)x) =$$

$$= ((yh\cdot x)/h)\backslash(yz_1x)\cdot((yh\cdot x)/h)\backslash(yz_1x),$$

$$((x/yh)/h)\backslash(x/y(z_1z_2)) =$$

$$= (((x/yh)/h)\backslash(x/yz_1)\cdot(((x/yh)/h)\backslash(x/yz_2).$$

Теорема 2.3.3. *Пусть линейная квазигруппа $(Q,\cdot)$ является A-квазигруппой, относительно элемента h, где $h=0$ - ноль группы $(Q,+)$. Тогда $(Q,\cdot)$ имеет вид $x\cdot y = \varphi x + \psi y, \varphi\psi = \psi\varphi$.*

Определение 2.5.1. *Пусть $(Q,\cdot)$ - линейная слева (справа) квазигруппа: $x\cdot y = \varphi x + c + \beta y \quad (x\cdot y = \alpha x + c + \psi y)$. Четверку $((Q,+),\varphi,\beta,c)$ $(((Q,+),\alpha,\psi,c))$, где $\varphi,(\psi)\in Aut(Q,+)$, $\beta,(\alpha)$ - подстановка множества Q, назовем нормальной формой квазигруппы $(Q,\cdot)$ и обозначим следующим образом $\Lambda = ((Q,+),\varphi,\beta,c)$ $(\Lambda = ((Q,+),\alpha,\psi,c))$. Группу $(Q,+)$ назовем Λ - группой квазигруппы $(Q,\cdot)$.*

Теорема 2.5.1. *Пусть $(Q_1,\cdot)$, $(Q_2,\circ)$ - две линейные слева квазигруппы $\Lambda_1 = ((Q,+),\varphi_1,\beta_1,c_1)$, $\Lambda_2 = ((Q,\oplus),\varphi_2,\beta_2,c_2)$ - нормальные* *формы,* $\eta : (Q_1, \cdot) \to (Q_2, \circ)$ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q_1, \cdot)$ *в* $(Q_2, \circ)$. *Положим* $\xi_1 x = \eta x * \eta 0$, $\xi_2 x = \eta 0 \oplus \eta x$ *для любого* $x \in Q_1$. *Тогда* ξ_1 *и* ξ_2 *- гомоморфизмы группы* $(Q_1, +)$ *в* $(Q_2, \oplus)$ *и* $\xi_1\varphi_1 = \varphi_2\xi_1$, $\xi_2\beta_1 = \beta_2\xi_2$. *Кроме того,* $\xi_1\,(\xi_2)$ *- взаимно однозначно тогда и только тогда, когда* η *- взаимно однозначно.*

Теорема 2.5.2. *Пусть* $(Q_1, \cdot)$, $(Q_2, \circ)$ *- две линейные справа квазигруппы* $\Lambda_1 = ((Q, +), \alpha_1, \psi_1, c_1)$, $\Lambda_2 = ((Q, \oplus), \alpha_2, \psi_2, c_2)$ *- нормальные формы,* $\eta : (Q_1, \cdot) \to (Q_2, \circ)$ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q_1, \cdot)$ *в* $(Q_2, \circ)$. *Положим* $\xi_1 x = \eta x * \eta 0$, $\xi_2 x = \eta 0 \oplus \eta x$ *для любого* $x \in Q_1$. *Тогда* ξ_1 *и* ξ_2 *- гомоморфизм группы* $(Q_1, +)$ *в* $(Q_2, \oplus)$ *и* $\xi_1\varphi_1 = \varphi_2\xi_1$, $\xi_2\beta_1 = \beta_2\xi_2$.

Теорема 2.5.3. *Пусть* $(Q_1, \cdot)$, $(Q_2, \circ)$ *- две линейные слева квазигруппы и* $\Lambda_1 = ((Q, +), \varphi_1, \beta_1, c_1)$ *- нормальные формы,* $(Q_1, \cdot)$, $\eta : (Q_1, \cdot) \to (Q_2, \circ)$ *- квазигрупповой гомоморфизм. Тогда существует нормальная форма* $\Lambda_2 = ((Q, \oplus), \varphi_2, \beta_2, c_2)$ *квазигруппы* $(Q_2, \circ)$ *такая, что* $\eta : (Q_1, +) \to (Q_2, \oplus)$ *групповой гомоморфизм, причем* $\eta\varphi_1 = \varphi_2\eta$, $\eta\beta_1 = \beta_2\eta$, $\eta(c_1) = c_2$.

Глава 1

Автоморфизмы и эндоморфизмы обобщенных линейных квазигрупп

1.1. Основные понятия и необходимые сведения

Приводим некоторые определения и сведения, которые известны и будут использованы в диссертации.

Определение 1.1.1. [7] *Группоид* $(Q, \cdot)$ *то есть множество* Q *с бинарной операцией* $(\cdot)$ *называется квазигруппой, если для любых* $a, b \in Q$ *уравнения*

$$a \cdot x = b, \quad y \cdot a = b, \tag{1.1.1}$$

всегда разрешимы, причем однозначно.

Определение 1.1.2. [18] *Группоид* $(Q, \cdot)$ *называется правой квазигруппой, если уравнение* $a \cdot x = b$ *имеет единственное решение* $x \in Q$, *для всех фиксированных* $a, b \in Q$.

Определение 1.1.3. [18] *Группоид* $(Q, \cdot)$ *называется левой квазигруппой, если уравнение* $y \cdot a = b$ *имеет единственное решение* $y \in Q$, *для всех фиксированных* $a, b \in Q$.

Определение 1.1.4. [18] *Если группоид* $(Q, \cdot)$ *является одновременно левой и правой квазигруппой, то* $(Q, \cdot)$ *называют квазигруппой.*

Существует также другое определение квазигруппы, которое эквивалентно определению 1.1.4 [19], а именно

Определение 1.1.5. [15] *Бинарный группоид* (Q, A) *с операцией* A, *такое что в равенстве* $A(x_1, x_2) = x_3$ *по любым двум элементам из тройки* x_1, x_2, x_3 *однозначно определяется третий элемент называется бинарной квазигруппой.*

В теории квазигрупп, в отличие от теории групп важную роль играют так называемые локальные единицы f_x и e_x произвольного элемента x.

Определение 1.1.6. [15] *Элемент* f_x *квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *называется левой локальной единицей элемента* $x \in Q$, *если* $f_x \cdot x = x$.

В литературе встречается также другая запись: $f(x), f(x) \cdot x = x$.

Определение 1.1.7. [15] *Элемент* e_x *квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *называется правой локальной единицей элемента* $x \in Q$, *если* $x \cdot e_x = x$ *или* $x \cdot e(x) = x$.

Если все левые (правые) единицы равны, то есть $f_x = f_y = \ldots = f$ $(e_x = e_y = \ldots = e)$ то f (e) называется левой (правой) единицей квазигрупы $(Q, \cdot)$. В случае $f = e$, то есть, если левая и правая единичные элементы квазигруппы $(Q, \cdot)$ совпадают, то она называется единицей квазигруппы $(Q, \cdot)$. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ с левым (правым) единичным элементам называется левой (правой) лупой. Квазигруппа с единичным элементам называется лупой. Нетрудно проверить, что единичный элемент лупы является единственным. Из определения локальных единиц и уравнения (1.1.1) следует, что $f_x = x/x$ и $e_x = x \backslash x$. Следовательно квазигруппа $(Q, \cdot, /, \backslash)$ является лупой, если $x/x = x \backslash x$ для всех $x \in Q$.

Известно [7], что квазигруппу можно определить как алгебру $(Q, \cdot, /, \backslash)$ с тремя бинарными операциями $(\cdot), (/)$ и $(\backslash)$, в которой выполняются следующие тождества:

$$x \cdot (x \backslash y) = y, \quad (y/x) \cdot x = y \tag{1.1.2}$$

$$x \backslash (x \cdot y) = y, \quad (y \cdot x)/x = y \tag{1.1.3}$$

В литературе квазигруппу $(Q, \cdot, /, \backslash)$ называют примитивной квазигруппой [7] или e - квазигрупой [20].

Понятие линейности играет важную роль в теории квазигрупп. Впервые связь квазигрупп с группами встречается в работе В.Д.Белоусова [3], где и введен класс линейных квазигрупп. Фундаментальным результатом В.Д.Белоусова является следующая теорема: если в произвольной квазигруппе выполняется уравновешенное тождество первого рода, то квазигруппа изотопна группе.

Определение 1.1.8. *Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется линейной над группой $(Q, +)$, если $(Q, \cdot)$ имеет вид*

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y,$$

где $\varphi, \psi \in Aut(Q, +)$, c - фиксированный элемент из множества Q.

Позднее идея линейности над "хорошей" группой или лупой обобщались другими авторами [4,5,21,22]. Примерами линейных квазигрупп является: медиальные квазигруппы $(xu{\cdot}yv = xy{\cdot}uv)$ [8], CH-квазигруппы [11], F-квазигруппы, T-квазигруппы, дистрибутивные квазигруппы $x \cdot yz = xy \cdot xz$, $xy \cdot z = xz \cdot yz$, дистрибутивные квазигруппы Штейнера, леводистрибутивные квазигруппы, n-арные медиальные квазигруппы и т.д. В литературе встречаются также некоторые обобщенния линейных квазигрупп [23].

Определение 1.1.9. *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *называется линейной слева (справа) над группой* $(Q,+)$, *если* $(Q,\cdot)$ *имеет вид*

$$x\cdot y=\varphi x+c+\beta y \quad (x\cdot y=\alpha x+c+\psi y),$$

где $\varphi,(\psi)\in Aut(Q,+)$, $\beta,(\alpha)$ *- подстановка множества* Q.

По аналогии с линейными квазигруппами Г.Б.Белявской и А.Х. Табаровым в работе [6] введены и исследованы новые классы квазигрупп: алинейные, алинейные слева (справа) и квазигруппы смешанного типа линейности I и II родов.

Определение 1.1.10. *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *называется алинейной над группой* $(Q,+)$, *если* $(Q,\cdot)$ *имеет вид*

$$x\cdot y=\bar{\varphi}x+c+\bar{\psi}y,$$

где $\bar{\varphi},\bar{\psi}-$ *антиавтоморфизмы группы* $(Q,+), c\in Q$ *- фиксированный элемент из множества* Q.

Определение 1.1.11. *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *называется алинейной слева (справа) над группой* $(Q,+)$, *если* $(Q,\cdot)$ *имеет вид*

$$x\cdot y=\bar{\varphi}x+c+\beta y \quad (x\cdot y=\alpha x+c+\bar{\psi}y),$$

где β *(соответственно* α*) - подстановка множества* Q, $\bar{\varphi}(\bar{\psi})$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$.

Определение 1.1.12. *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *называется квазигруппой смешанного типа I рода или II рода, над группой* $(Q,+)$, *если* $(Q,\cdot)$ *имеет вид*

$$x\cdot y=\varphi x+c+\bar{\psi}y \quad (x\cdot y=\bar{\varphi}x+c+\psi y),$$

где $\bar{\psi}, (\bar{\varphi})-$ *антиавтоморфизм группы* $(Q, +)$, $\varphi, (\psi) \in Aut(Q, +)$.

В диссертации также исследованs класс квазигрупп Бола, $A-$квазигруппы и т.д.

Определение 1.1.13. [13] *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *называется квазигруппой Бола, если в ней выполняются следующие тождества*

$$x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R_{e_x}^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t \tag{1.1.4}$$

$$((t \cdot x) \cdot y) \cdot x = t \cdot L_{f_x}^{-1}((x \cdot y) \cdot x) \tag{1.1.5}$$

для любых $x, y, t \in Q$, *где* $xe_x = x, f_xx = x, L_ax = ax, R_ax = xa, L_a^{-1}x = a\backslash x, R_a^{-1}x = x/a$, *для всех* $a, x \in Q$.

Как известно [7] класс квазигрупп с одной бинарной операцией не замкнут относительно гомоморфных образов, другими словами, гомоморфный образ квазигруппы в общем случае является группоидом с делением [15].

Эквивалентное отношение θ в квазигруппе $(Q, \cdot)$ является конгруэнцией, если θ подквазигруппа прямого произведения $Q \times Q$. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется простой, если $(Q, \cdot)$ имеет только тривиальную конгруэнцию.

Приводим другие известные определения о конгруэнциях квазигрупп.

Определение 1.1.14. [24] *Отношение эквивалентности* θ *множества* Q *называется левой конгруэнцией в квазигруппе* $(Q, \cdot)$, *если из* $a\theta b$ *следует* $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ *для любых* $a, b, c \in Q$.

Определение 1.1.15. [24] *Отношение эквивалентности* θ *множества* Q *называется правой конгруэнцией в квазигруппе* $(Q, \cdot)$, *если из* $a\theta b$ *следует* $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ *для любых* $a, b, c \in Q$.

Определение 1.1.16. [24] *Отношение эквивалентности θ множества Q называется конгруэнцией в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $a\theta b$ следует $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ и $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 1.1.17. [24] *Конгруэнция θ называется левой нормальной в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ следует $a\theta b$, для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 1.1.18. [24] *Конгруэнция θ называется правой нормальной в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ следует $a\theta b$, для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 1.1.19. [24] *Конгруэнция θ называется нормальной в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ как и из $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ следует $a\theta b$, для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 1.1.20. [24] *Подстановка α множества Q называется внутренней подстановкой относительно элемента $h \in Q$ если $\alpha(h) = h$.*

Определение 1.1.21. [25] *Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется A-квазигруппой, если $Int(Q, \cdot) \leq Aut(Q, \cdot)$, то есть квазигруппа в которой любая внутренняя подстановка является автоморфизмом $(Q, \cdot)$.*

1.2. Некоторые свойства линейных и алинейных квазигрупп

В данном параграфе приведены некоторые свойства обобщенных линейных квазигрупп. Заметим, что всюду в тексте диссертации термин обобщенные линейные квазигруппы означает класс линейных слева (справа) квазигрупп, алинейных слева (справа) квазигрупп, смешанных типов линейности и т.д.

Известно, что с каждой квазигруппой $(Q,\cdot)$ связана группа $M(Q,\cdot) = \langle L_a, R_a | L_a x = ax, R_a x = xa\rangle$, которая называется группой умножения квазигруппы (или ассоциированная группа квазигруппы, мультипликативная группа квазигруппы [26]). Группа $M(Q,\cdot)$ обозначается также следующим образом $G(Q,\cdot)$, $G(\cdot)$, Mult $G(Q,\cdot)$ и т.д. Важные результаты и информацию о группе умножения квазигруппы можно найти в работах [27].

Подстановка α квазигруппы $(Q,\cdot)$ называется внутренней относительно элемента $h \in Q$, если $\alpha h = h$. Очевидно, что все внутренные подстановки относительно обычного умножения подстановок образуют группу, которую обозначим через $Int(Q,\cdot)$ или $I_h(\cdot)$. Группа $Int(Q,\cdot)$ порождается следующими подстановками: $R_{x,y} = R^{-1}_{x\bullet y}R_x R_y$, $L_{x,y} = L^{-1}_{x\circ y}L_x L_y$, $T_x = L^{-1}_{\sigma x}R_x$, $x \bullet y = L_h^{-1}(hx\cdot y)$ $x \bullet y = L_h^{-1}(hx\cdot y)$, $x \circ y = R_h^{-1}(x\cdot yh)$, $\sigma = R_h^{-1}L_h$, $\sigma \in I_h(\cdot)$.

Через $LM(Q,\cdot)$, $RM(Q,\cdot)$ обозначим группы, порожденные левыми, правыми подстановками:

$$LM(Q,\cdot) = \langle L_a | L_a x = ax\rangle,$$

$$RM(Q,\cdot) = \langle R_a | R_a x = xa\rangle.$$

Группа $I_h(Q,\cdot) = I_h(\cdot)$ по существу является стабилизатором элемента h под действием ($\alpha : x \to \alpha(x)$ для всех $\alpha \in M(Q,\cdot), x \in Q$ группы $M(Q,\cdot)$) на множестве Q.

В случае луп или групп $I_h(+) = I_0(+)$, где 0 - нулевой элемент лупы (группы) $(Q, +)$.

В.А.Шербаковым найдена другая система порождающих для группы $I_h(\cdot) =< L_{x,y}, T_{x,y}, P_{x,y} >$. Так как группа умножения $M(Q, \cdot)$ квазигруппы $(Q, \cdot)$ действует транзитивно на множество Q, то группы внутренних подстановок относительно различных элементов множества Q изоморфны, то есть $I_h(Q, \cdot) \cong I_f(Q, \cdot), h, f \in Q$.

Здесь уместно напомнить, что группа $M(Q, \cdot)$ играет важную рольпри исследовании квазигрупп. Влияние группы $M(Q, \cdot)$ на квазигруппы $(Q, \cdot)$ хорошо известно [27]. Например по теореме Ирингера [28] все диэдральные, симметрические, альтернативные, общие линейные проективные линейные группы, а также группы Матье M_{11}, M_{12} могут быть мультипликативной группы $M(Q, \cdot)$ для некоторой квазигруппы $(Q, \cdot)$.

В настоящем параграфе определены системы порождающих группы $I_h(\cdot)$ обобщенных линейных квазигрупп через трансляции соответствующих (изотопных) групп.

Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная квазигруппа:

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y. \tag{1.2.1}$$

Здесь и всюду в дальнейшем скобки $\langle \cdots \rangle$ заменяют слово "порождается".

Лемма 1.2.1. *Если* $(Q, \cdot)$ *- левая (правая) линейная квазигруппа:* $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y \quad x \cdot y = \alpha x + c + \psi y$. *Тогда* $L_x = \tilde{L}_{\varphi x + c} \beta$, $R_y = \tilde{R}_{c + \psi y} \alpha, \quad L_x^{-1} = \beta^{-1} \tilde{L}_{-c-\varphi x}, R_y^{-1} = \alpha^{-1} \tilde{R}_{-\psi y - c}$.

Доказательство. Действительно, из $x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$ на языке трансляций следует, что $L_x = \tilde{L}_{\varphi x + c} \beta y$ или $L_x = \tilde{L}_{\varphi x + c} \beta$,

$L_x^{-1} = \beta^{-1}\tilde{L}_{\varphi x+c}^{-1} = \beta^{-1}\tilde{L}_{-(\varphi x+c)} = \beta^{-1}\tilde{L}_{-c-\varphi x}$.

Аналогично, из $x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$ следует, что $R_y = \tilde{R}_{c+\psi y}\alpha$, $R_y^{-1} = \alpha^{-1}\tilde{R}_{-\psi y-c}$.

Предложение 1.2.1. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *- линейная квазигруппа:* $x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$, $I_h(\cdot)$ *- её группа внутренних подстановок. Тогда*

$$I_h(\cdot) = \langle L_{e_h}, T_{x,y}, P_{x,y} \rangle,$$

причем

$$L_{e_h} = \tilde{L}_{h-\psi h}\psi, \quad T_{x,y} = \tilde{L}_{h-(\psi^{-1}c+x)-\psi^{-1}\varphi\psi h}\tilde{R}_{\psi^{-1}c+x}\psi^{-1}\varphi\psi,$$

$$P_{x,y} = \tilde{L}_{h+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 h}\tilde{R}_{-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y}L_{-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2},$$

где

$$\tilde{L}_a x = a + x, \quad \tilde{R}_a x = x + a, \quad L_a x = a \cdot x, \quad R_a x = x \cdot a.$$

Доказательство. Согласно следствие 1.107. из [13],

$$I_h(\cdot) = \langle L_{x,y}, T_{x,y}, P_{x,y} | x, y \in Q \rangle,$$

где

$$L_{x,y} = L_{x \circ y}^{-1}L_x L_y, \quad T_{x,y} = L_{x*y}^{-1}R_x L_y, \quad P_{x,y} = L_{x \diamond y}^{-1}P_x L_y.$$

$$x \circ y = R_h^{-1}(x \cdot yh), \quad x * y = R_h^{-1}(yh \cdot x), \quad x \diamond y = R_h^{-1}(x/yh).$$

Вычислим L_x. Из (1.2.1.) следует что

$$L_x = \tilde{L}_{\varphi x+c}\psi, \quad L_x^{-1} = \psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi x-c}, \quad R_x = \tilde{R}_{c+\psi y}\varphi, \quad R_x^{-1} = \psi^{-1}\tilde{R}_{-c-\varphi x}.$$

Тогда

$x \circ y = R_h^{-1}(x \cdot yh) = \varphi^{-1}\tilde{R}_{-c-\psi h}(\varphi x + c + \psi(\varphi y + c + \psi h)) =$

$$= \varphi^{-1}\tilde{R}_{-c-\psi h}(\varphi x + c + \psi\varphi y + \psi c + \psi^2 h) =$$
$$= \varphi^{-1}(\varphi x + c + \psi\varphi y + \psi c + \psi^2 h - \psi h - c) =$$
$$= x + \varphi^{-1}c + \varphi^{-1}\psi\varphi y + \varphi^{-1}\psi c + \varphi^{-1}\psi^2 h - \varphi^{-1}\psi h - \varphi^{-1}c.$$

Откуда

$$L_{x,y}(t) = L_{x\circ y}^{-1}L_x L_y(t) = L_{x\circ y}^{-1}(x \cdot yt) = \psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)-c}[\varphi x + c +$$
$$+\psi(\varphi y + c + \psi t)] = \psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)-c}[\varphi x + c + \psi\varphi y + \psi c + \psi^2 t] =$$
$$= \psi^{-1}[-c - \varphi(x \circ y) + \varphi x + c + \psi\varphi y + \psi c + \psi^2 t] =$$
$$= \psi^{-1}[-c - \varphi R_h^{-1}(x \cdot yh) + \varphi x + c + \psi\varphi y + \psi c + \psi^2 t] =$$
$$= \psi^{-1}[-c - \tilde{R}_{-c-\psi h}(\varphi x + c + \psi\varphi y + \psi c + \psi^2 h) + \varphi x + c + \psi\varphi y +$$
$$+\psi c + \psi^2 t] = \psi^{-1}[-c + c + \psi h - \psi^2 h - \psi c - \psi\varphi y - c - \varphi x + \varphi x + c +$$
$$+\psi\varphi y + \psi c + \psi^2 t] = -\psi^{-1}c + \psi^{-1}c + h - \psi h - c - \varphi y - \psi^{-1}c -$$
$$-\psi^{-1}\varphi x + \psi^{-1}\varphi x + \psi^{-1}c + \varphi y + c + \psi t = h - \psi h + \psi t = \tilde{L}_{h-\psi h}\psi(t),$$

то есть $L_{x,y}(t) = \tilde{L}_{h-\psi h}\psi(t)$, и не зависит от x, y. Но $L_{e_h,e_h} = L_{e_h}$. Следовательно,

$$L_{x,y} = L_{eh} = \tilde{L}_{h-\psi h}\psi.$$

Вычислим $T_{x,y}$:

$$x * y = R_h^{-1}(yh \cdot x) = \varphi^{-1}\tilde{R}_{c+\psi h}^{-1}[\varphi(\varphi y + c + \psi h) + c + \psi x] =$$
$$= \varphi^{-1}\tilde{R}_{c+\psi h}^{-1}[\varphi^2 y + \varphi c + \varphi\psi h + c + \psi x] =$$
$$= \varphi^{-1}[\varphi^2 y + \varphi c + \varphi\psi h + c + \psi x - \psi h - c] =$$
$$= \varphi y + c + \psi h + \varphi^{-1}c + \varphi^{-1}\psi x - \varphi^{-1}\psi h - \varphi^{-1}c.$$

Откуда

$$T_{x,y}(t) = L_{x*y}^{-1}R_x L_y(t) = L_{x*y}^{-1}(yt \cdot x) =$$

$$= \psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi(x*y)-c}[\varphi^2 y + \varphi c + \varphi\psi t + c + \psi x] =$$

$$= \psi^{-1}[-c - \varphi(x * y) + \varphi^2 y + \varphi c + \varphi\psi t + c + \psi x] =$$

$$= \psi^{-1}[-c - \varphi R_h^{-1}(yh \cdot x) + \varphi^2 y + \varphi c + \varphi\psi t + c + \psi x] =$$

$$= \psi^{-1}[-c - \varphi\varphi^{-1}\tilde{R}_{-c-\psi h}(\varphi^2 y + \varphi c + \varphi\psi h + c + \psi x) + \varphi^2 y + \varphi c + \varphi\psi t +$$

$$+ c + \psi x] = \psi^{-1}[-c + c + \psi h - \psi x - c - \varphi\psi h - \varphi c - \varphi^2 y + \varphi^2 y + \varphi c +$$

$$+ \varphi\psi t + c + \psi x] = -\psi^{-1}c + \psi^{-1}c + h - x - \psi^{-1}c - \psi^{-1}\varphi\psi h - \psi^{-1}\varphi c -$$

$$-\psi^{-1}\varphi^2 y + \psi^{-1}\varphi^2 y + \psi^{-1}\varphi c + \psi^{-1}\varphi\psi t + \psi^{-1}c + x = h - x - \psi^{-1}c -$$

$$-\psi^{-1}\varphi\psi h + \psi^{-1}\varphi\psi t + \psi^{-1}c + x = \tilde{L}_{h-(\psi^{-1}c+x)-\psi^{-1}\varphi\psi h}\tilde{R}_{\psi^{-1}c+x}\psi^{-1}\varphi\psi(t),$$

то есть

$$T_{x,y}(t) = \tilde{L}_{h-(\psi^{-1}c+x)-\psi^{-1}\varphi\psi h}\tilde{R}_{\psi^{-1}c+x}\psi^{-1}\varphi\psi(t).$$

Вычислим $P_{x,y}$:

$$x \diamond y = R_h^{-1}(x/yh) = \varphi^{-1}\tilde{R}_{c+\psi h}^{-1}[\varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi(yh)] =$$
$$= \varphi^{-1}\tilde{R}_{c+\psi h}^{-1}[\varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi(yh)] =$$
$$= \varphi^{-1}\tilde{R}_{c+\psi h}^{-1}[\varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi(\varphi y + c + \psi h)] =$$
$$= \varphi^{-1}[\varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi^2 h - \varphi^{-1}\psi c - \varphi^{-1}\psi\varphi y - \psi h - c] =$$
$$= \varphi^{-1}\varphi^{-1}x - \varphi^{-1}\varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 h - \varphi^{-1}\varphi^{-1}\psi c - \varphi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y -$$
$$-\varphi^{-1}\psi h - \varphi^{-1}c.$$

Откуда

$$P_{x,y}(t) = L_{x\diamond y}^{-1}P_x L_y(t) = L_{x\diamond y}^{-1}(x/yt) =$$

$$= \psi^{-1}\tilde{L}_{\varphi(x\diamond y)+c}^{-1}(\varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi^2 t - \varphi^{-1}\psi c - \varphi^{-1}\psi\varphi y) =$$

$$= \psi^{-1}[-c - \varphi(x \diamond y) + \varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi^2 t - \varphi^{-1}\psi c - \varphi^{-1}\psi\varphi y] =$$

$$= \psi^{-1}[-c - \varphi R_h^{-1}(\varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi(\varphi y + c + \psi h)) + \varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi^2 t -$$

$-\varphi^{-1}\psi c - \varphi^{-1}\psi\varphi y] = \psi^{-1}[-c + c + \psi h + \varphi^{-1}\psi\varphi y + \varphi^{-1}\psi c + \varphi^{-1}\psi^2 h + \varphi^{-1}c +$

$-\varphi^{-1}x + \varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi^2 t - \varphi^{-1}\psi c - \varphi^{-1}\psi\varphi y] = -\psi^{-1}c + \psi^{-1}c + h +$

$+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y + \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c + \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 h + \psi^{-1}\varphi^{-1}c - \psi^{-1}\varphi^{-1}x + \psi^{-1}\varphi^{-1}x -$

$-\psi^{-1}\varphi^{-1}c - \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 t - \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c - \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y = h + \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y +$

$+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c + \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 h - \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 t - \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c - \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y =$
$= \tilde{L}_{h+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 h}\tilde{R}_{-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y}L_{-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2}(t),$
то есть
$P_{x,y}(t) = \tilde{L}_{h+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c+\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2 h}\tilde{R}_{-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi c-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi y}L_{-\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi^2}(t).$
Предложение доказано.

Предложение 1.2.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- алинейная квазигруппа:*

$$x \cdot y = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y,$$

$I_h(\cdot)$ *- её группа внутренних подстановок подстановок. Тогда*

$$I_h(\cdot) = \langle L_{e_h}, T_{x,y}, P_{x,y}\rangle,$$

причем

$$L_{hx} = \tilde{R}_{-\bar{\psi}h+h}\tilde{L}_{\bar{\psi}},$$

$$T_{x,y} = \tilde{L}_{x+\bar{\psi}^{-1}c+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^2 y+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}c}\tilde{R}_{-\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}\bar{\psi}h-\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}c-\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^2 y-\bar{\psi}^{-1}c-x+h}L_{\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}\bar{\psi}}.$$

$$P_{x,y} = \tilde{L}_{\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}\bar{\varphi}y-\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}c}\tilde{R}_{\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}c+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}^2 h+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}c+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}\bar{\varphi}y+h}L_{-\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\psi^2}.$$

.

Доказательство. Очевидно, что
$L_x = \tilde{L}_{\bar{\varphi}x+c}\bar{\psi},\ L_x^{-1} = \bar{\psi}^{-1}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\varphi}x+c},\ R_y = \tilde{R}_{c+\bar{\psi}y}\bar{\varphi},\ R_y^{-1} = \bar{\varphi}^{-1}R^{-1}_{c+\bar{\psi}y}.$
Вычислим $L_{x,y}$.

$x \circ y = R_h^{-1}(x \cdot yh) = \bar{\varphi}^{-1}\tilde{R}^{-1}_{c+\bar{\psi}h}[\bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}(\bar{\varphi}y + c + \bar{\psi}h)] =$
$= \bar{\varphi}^{-1}\tilde{R}^{-1}_{c+\bar{\psi}h}[\bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}^2 h + \bar{\psi}c + \bar{\psi}\bar{\varphi}y] =$
$= \bar{\varphi}^{-1}[\bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}^2 h + \bar{\psi}c + \bar{\psi}\bar{\varphi}y - \bar{\psi}h - c] =$
$-\bar{\varphi}^{-1}c - \bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}h + \bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}\bar{\varphi}y + \ \bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}^2 h + \bar{\varphi}^{-1}c + x.$

Откуда

$$L_{x,y}(t) = L^{-1}_{x\circ y}L_x L_y(t) = L^{-1}_{x\circ y}(x \cdot yt) = \bar{\psi}^{-1}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\varphi}(x\circ y)+c}[\bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}(\bar{\varphi}y + c + \bar{\psi}t)] =$$

$$= \bar{\psi}^{-1}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\varphi}(x\circ y)+c}[\bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}^2 t + \bar{\psi}c + \bar{\psi}\bar{\varphi}y] =$$

$$= \bar{\psi}^{-1}[-c - \bar{\varphi}(x \circ y) + \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}^2 t + \bar{\psi}c + \bar{\psi}\bar{\varphi}y] =$$

$$= \bar{\psi}^{-1}[-c - \bar{\varphi}\bar{\varphi}^{-1}\tilde{R}^{-1}_{c+\bar{\psi}h}(\bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}^2 h + \bar{\psi}c + \bar{\psi}\bar{\varphi}y) + \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}^2 t + \bar{\psi}c + \bar{\psi}\bar{\varphi}y] =$$

$$= \bar{\psi}^{-1}[-c + c + \bar{\psi}h - \bar{\psi}\bar{\varphi}y - \bar{\psi}c - \bar{\psi}^2 h - c - \bar{\varphi}x + \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}^2 t + \bar{\psi}c + \bar{\psi}\bar{\varphi}y] =$$

$$= \bar{\varphi}y + c + \bar{\psi}t + \bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}x - \bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}x - \bar{\psi}^{-1}c - \bar{\psi}h - c - \bar{\varphi}y + h + \bar{\psi}^{-1}c -$$

$$-\bar{\psi}^{-1}c = \bar{\psi}t - \bar{\psi}h + h = \ L_{hx} = \tilde{R}_{-\bar{\psi}h+h}\tilde{L}_{\bar{\psi}t}(t).$$

Таким образом, $L_{hx} = \tilde{R}_{-\bar{\psi}h+h}\tilde{L}_{\bar{\psi}}$.

Вычислим $T_{x,y}$:

$x * y = R_h^{-1}(yh \cdot x) = \bar{\varphi}^{-1}\tilde{R}^{-1}_{c+\bar{\psi}h}[\bar{\varphi}(\bar{\varphi}y + c + \bar{\psi}h) + c + \bar{\psi}x] =$
$\bar{\varphi}^{-1}(\bar{\varphi}\bar{\psi}h + \bar{\varphi}c + \bar{\varphi}^2 y + c + \bar{\psi}x) =$
$= \bar{\varphi}^{-1}(\bar{\varphi}\bar{\psi}h + \bar{\varphi}c + \bar{\varphi}^2 y + c + \bar{\psi}x - \bar{\psi}h - c) =$
$= -\bar{\varphi}^{-1}c - \bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}h + \bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}x + \bar{\varphi}^{-1}c + \bar{\varphi}y + c + \bar{\psi}h.$

Откуда

$$T_{x,y}(t) = L^{-1}_{x*y}R_x Ly(t) = L^{-1}_{x*y}(yt \cdot x) = \bar{\psi}^{-1}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\varphi}(x*y)+c}(\bar{\varphi}\bar{\psi}t + \bar{\varphi}c + \bar{\varphi}^2 y + c + \bar{\psi}x) =$$

$$= \bar{\psi}^{-1}[-c - \bar{\varphi}\bar{\varphi}^{-1}\tilde{R}^{-1}_{c+\bar{\psi}h}(\bar{\varphi}\bar{\psi}h + \bar{\varphi}c + \bar{\varphi}^2 y + c + \bar{\psi}x) + \bar{\varphi}\bar{\psi}t + \bar{\varphi}c + \bar{\varphi}^2 y + c + \bar{\psi}x] =$$

$$= \bar{\psi}^{-1}[-c + c + \bar{\psi}h - \bar{\psi}x - c - \bar{\varphi}^2 y - \bar{\varphi}c - \bar{\varphi}\bar{\psi}h + \bar{\varphi}\bar{\psi}t + \bar{\varphi}c + \bar{\varphi}^2 y + c + \bar{\psi}x] =$$

$$= x + \bar\psi^{-1}c + \bar\psi^{-1}\bar\varphi^2 y + \bar\psi^{-1}\bar\varphi c + \bar\psi^{-1}\bar\varphi\bar\psi t - \bar\psi^{-1}\bar\varphi\bar\psi h - \bar\psi^{-1}\bar\varphi c - \bar\psi^{-1}\bar\varphi^2 y - \bar\psi^{-1}c -$$

$$-x + h + \bar\psi^{-1}c - \bar\psi^{-1}c = \tilde L_{x+\bar\psi^{-1}c+\bar\psi^{-1}\bar\varphi^2 y+\bar\psi^{-1}\bar\varphi c}\tilde R_{-\bar\psi^{-1}\bar\varphi\bar\psi h-\bar\psi^{-1}\bar\varphi c-\bar\psi^{-1}\bar\varphi^2 y-\bar\psi^{-1}c-x+h}L_{\bar\psi^{-1}\bar\varphi\bar\psi}(t),$$

то есть

$$T_{x,y}(t) = \tilde L_{x+\bar\psi^{-1}c+\bar\psi^{-1}\bar\varphi^2 y+\bar\psi^{-1}\bar\varphi c}\tilde R_{-\bar\psi^{-1}\bar\varphi\bar\psi h-\bar\psi^{-1}\bar\varphi c-\bar\psi^{-1}\bar\varphi^2 y-\bar\psi^{-1}c-x+h}L_{\bar\psi^{-1}\bar\varphi\bar\psi}(t).$$

Вычислим $P_{x,y}$:

$$x \diamond y = R_h^{-1}(x/yh) = \bar\varphi^{-1}\tilde R^{-1}_{c+\bar\psi h}[\bar\varphi^{-1}x - \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi(\bar\varphi y + c + \bar\psi h)] =$$

$$= \bar\varphi^{-1}\tilde R^{-1}_{c+\bar\psi h}[\bar\varphi^{-1}x - \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 h - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y] =$$

$$= \bar\varphi^{-1}[\bar\varphi^{-1}x - \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 h - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y - \bar\psi h - c] =$$

$$= -\bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi h - \bar\varphi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y - \bar\varphi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 h - \bar\varphi^{-1}\bar\varphi^{-1}c + \bar\varphi^{-1}\bar\varphi^{-1}x.$$

Откуда

$$P_{x,y}(t) = L^{-1}_{x\diamond y}P_x L_y = L^{-1}_{x\diamond y}(x/yt) =$$

$$= \bar\psi^{-1}\tilde L_{\bar\varphi(x\diamond y)+c}(\bar\varphi^{-1}x - \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 t - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y) =$$

$$= \bar\psi^{-1}[-c - \bar\varphi(x\diamond y) + \bar\varphi^{-1}x - \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 t - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y] =$$

$$= \bar\psi^{-1}[-c - \bar\varphi\bar\varphi^{-1}\tilde R^{-1}_{c+\bar\psi h}(\bar\varphi^{-1}x - \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 h - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y\bar\varphi^{-1}) +$$

$$+ \bar\varphi^{-1}x + \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 t - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y] =$$

$$= \bar\psi^{-1}[-c + c + \bar\psi h + \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 h + \bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}x + \bar\varphi^{-1}x -$$

$$-\bar\varphi^{-1}c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 t - \bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y] = \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y - \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi c - \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\psi^2 t -$$

$$-\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}c + \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}x - \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}x + \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}c + \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 h + \bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi c +$$

$$+\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y + h + \bar\psi^{-1}c - \bar\psi^{-1}c =$$

$$= \tilde L_{\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y-\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi c}\tilde R_{\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}c+\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi^2 h+\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi c+\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\bar\psi\bar\varphi y+h}L_{-\bar\psi^{-1}\bar\varphi^{-1}\psi^2}(t).$$

Таким образом,

$$P_{x,y}(t) = \tilde{L}_{\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}\bar{\varphi}y-\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}c}\tilde{R}_{\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}c+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}^2h+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}c+\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}\bar{\varphi}y+h}L_{-\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}^{-1}\psi^2}(t).$$

Предложение 1.2.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- линейная слева квазигруппа:* $x\cdot y = \varphi x + c + \beta y, H \subseteq Q$.

1) $(H,+)$ *- подгруппа группы* $(Q,+)$.

2) $(\varphi H \subseteq H), \beta^{-1}H \subseteq H, \forall x \in H, c \in H$.

Тогда $(H,\cdot)$ *является подквазигруппой квазигруппы* $(Q,\cdot)$.

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ - линейная слева квазигруппа: $x\cdot y = {=}\varphi x + c + \beta y,\ H \subseteq Q$. Рассмотрим уравнение $a\cdot x = b$, где $a,b \in H$. Нам необходимо доказать, что $x \in H$. Из уравнение $a\cdot x = b$ следует, что $\varphi a + c + \beta x = b$ или $\beta x = -c - \varphi a + b$. Из $c \in H$ следует, что $-c \in H$ (так как $(H,+)$ - подгруппа), из $\varphi H \subseteq H$ следует, что $-\varphi a \in H$, далее $(-c-\varphi a + b) \in H$, так как $(H,+)$ есть подгруппа группы $(Q,+)$. Далее из $\beta x = -c - \varphi a + b$ следует, что $x = \beta^{-1}(-c-\varphi a+b) = \beta^{-1}d$, где $d = = (-c-\varphi a + b) \in H$. Так как по условию $\beta^{-1}H \subseteq H$, тогда $\beta^{-1}d \in H$. Таким образом $x \in H$.

Следовательно $(H,\cdot)$ является подквазигруппой квазигруппы $(Q,\cdot)$.

Предложение 1.2.4. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- линейная справа квазигруппа:* $x\cdot y = \alpha x + c + \psi y,\ H \subseteq Q$.

1) $(H,+)$ *- подгруппа группы* $(Q,+)$.

2) $(\psi H \subseteq H), \alpha^{-1}H \subseteq H, \forall y \in H, c \in H$.

Тогда $(H,\cdot)$ *является подквазигруппой квазигруппы* $(Q,\cdot)$.

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ - линейная справа квазигруппа: $x\cdot y = = \alpha x + c + \psi y,\ H \subseteq Q$. Рассмотрим уравнение $y\cdot a = b$, где $a,b \in H$.

Нам необходимо доказать, что $y \in H$. Из уравнение $y \cdot a = b$ следует, что $\alpha y + c + \psi a = b$ или $\alpha y = b - \psi a - c$. Из $c \in H$ следует, что $-c \in H$, из $\psi H \subseteq H$ следует, что $-\psi a \in H$, далее $(b - \psi a - c) \in H$, так как $(H, +)$ есть подгруппа группы $(Q, +)$. Далее из $\alpha y = b - \psi a - c$ следует, что $y = \alpha^{-1}(b - \psi a - c) = \alpha^{-1}t$, где $t = (b - \psi a - c) \in H$. Но по условию $\alpha^{-1}H \subseteq H$ так, что $\alpha^{-1}t \in H$. Таким образом $y \in H$.

Следовательно $(H, \cdot)$ является подквазигруппой квазигруппы $(Q, \cdot)$.

С каждой квазигруппой $(Q, \cdot)$ связаны пять квазигрупп, которых называют парастрофами квазигруппы $(Q, \cdot)$ [7]. Поясним этот факт. Если обозначим квазигрупповую операцию квазигруппы $(Q, \cdot)$ через A, то операцию A можно ассоциировать следующими квазигруповыми операциями: $A(x_1, x_2) = x_3 \Leftrightarrow A^{(12)}(x_2, x_1) = x_3 \Leftrightarrow A^{(13)}(x_3, x_2) = x_1$ $\Leftrightarrow A^{(23)}(x_1, x_3) = x_2 \Leftrightarrow A^{(132)}(x_2, x_3) = x_1 \Leftrightarrow A^{(123)}(x_3, x_1) = x_2$. Это означает, что $A^{\sigma}(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}) = x_{\sigma 3} \Leftrightarrow A(x_1, x_2) = x_3$, где $\sigma \in S_3 =$ $= \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ - группа подстановок третьего порядка.

Таким образом, для квазигруппы (Q, A) существуют следующие пять парастрофов:

$$\sum = \{A^{(12)}, A^{(13)}, A^{(23)}, A^{(123)}, A^{(132)}\} \qquad (1.2.2)$$

Систему (1.2.2) называют *системой парастрофов* квазигруппы A.

В литературе встречается также другая запись парастрофов квазигруппы:

$$A, \quad A^{*}, \quad A^{-1}, \quad {}^{-1}A, \quad {}^{-1}(A^{-1}), \quad ({}^{-1}A)^{-1}.$$

В предложениях 1.2.5 -1.2.10. найдены парастрофы обобщенных линейных квазигрупп.

Предложение 1.2.5. *Пусть* (Q, A) *- линейная слева квазигруппа:*

$$A(x, y) = \varphi x + c + \beta y.$$

Тогда

$$^{-1}A(x, y) = \varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y, \quad ^{*}A(x, y) = \beta y + c + \varphi x,$$

где $\varphi, \varphi_1 \in Aut(Q, +)$, β, β_1 *- подстановки множества* Q, $c_1 \in Q$.

Доказательство. Пусть $A(x, y) = z$. Тогда $^{-1}A(z, y) = x$,

$z = \varphi x + c + \beta y \Rightarrow z = \varphi^{-1}A(z, y) + c + \beta y \Rightarrow \varphi^{-1}A(z, y) = z - \beta y - c =$

$= \varphi^{-1}z + \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\beta y - \varphi^{-1}c = \varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y,$

где $\varphi^{-1} = \varphi_1, \beta y = J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\beta y + J\varphi^{-1}c$ - подстановка множества Q, $c_1 = J\varphi^{-1}c$.

Предложение 1.2.6. *Пусть* (Q, A) *- линейная справа квазигруппа:*

$$A(x, y) = \alpha x + c + \psi y.$$

Тогда

$$A^{-1}(x, y) = \alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y, \quad A^{*}(x, y) = \psi y + c + \alpha x,$$

где $\psi, \psi_1 \in Aut(Q, +)$, α, α_1 *- подстановки множества* Q, $c_1 \in Q$.

Доказательство. Пусть $A(x, y) = z$. Тогда $A^{-1}(x, z) = y$,

$z = \alpha x + c + \psi y \Rightarrow z = \alpha x + c + \psi A^{-1}(x, z) \Rightarrow \psi A^{-1}(x, z) = -c - \alpha x + z =$

$= -\psi^{-1}c - \psi^{-1}\alpha x + \psi^{-1}c - \psi^{-1}c + \psi^{-1}z = \alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y,$

где $\alpha_1 x = J\psi^{-1}c + J\psi^{-1}\alpha x + \psi^{-1}c$ - подстановки множества Q, $\psi_1 = \psi^{-1}$ - автоморфизм группы $(Q, +)$, $c_1 = J\psi^{-1}c$.

Предложение 1.2.7. *Пусть* (Q, A) *- алинейная слева квазигруппа:*

$$A(x, y) = \bar{\varphi}x + c + \beta y.$$

Тогда

$$^{-1}A(x,y) = \beta_1 y + c_1 + \bar{\varphi}_1 x, \quad ^{*}A(x,y) = \beta y + c + \bar{\varphi} x,$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_1$ *- антиавтоморфизмы группы* $(Q,+)$, β, β_1 *- подстановки множества* Q, $c_1 \in Q$.

Доказательство. Пусть $A(x,y) = z$. Тогда $^{-1}A(z,y) = x$,

$z = \bar{\varphi}x + c + \beta y \Rightarrow z = \bar{\varphi}^{-1}A(x,z) + c + \beta y \Rightarrow \bar{\varphi}^{-1}A(x,z) =$

$= z - \beta y - c = -\bar{\varphi}^{-1}c - \bar{\varphi}^{-1}\beta y + \bar{\varphi}^{-1}z = -\bar{\varphi}^{-1}c - \bar{\varphi}^{-1}\beta y + \bar{\varphi}^{-1}c -$

$-\bar{\varphi}^{-1}c + \bar{\varphi}^{-1}z = \beta_1 y + c_1 + \bar{\varphi}_1 z,$

где $\bar{\varphi}^{-1} = \bar{\varphi}_1$, $\beta_1 y = J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\beta y + \varphi^{-1}c$ - подстановка множества Q, $c_1 = J\varphi^{-1}c$.

Предложение 1.2.8. *Пусть* (Q,A) *- алинейная справа квазигруппа:*

$$A(x,y) = \alpha x + c + \bar{\psi} y.$$

Тогда

$$A^{-1}(x,y) = \bar{\psi}_1 x + c_1 + \alpha_1 y, \quad A^{*}(x,y) = \bar{\psi} y + c + \alpha x,$$

где $\psi, \psi_1 \in Aut(Q,+)$, α, α_1 *- подстановка множества* Q, $c_1 \in Q$.

Доказательство. Пусть $A(x,y) = z$. Тогда $A^{-1}(x,z) = y$,

$z = \alpha x + c + \bar{\psi} y \Rightarrow z = \alpha x + c + \bar{\psi} A^{-1}(x,z) \Rightarrow \bar{\psi} A^{-1}(x,z) = -c - \alpha x + z =$

$= \bar{\psi}^{-1}z - \bar{\psi}^{-1}\alpha x - \bar{\psi}^{-1}c = \bar{\psi}^{-1}z + \bar{\psi}^{-1}c - \bar{\psi}^{-1}c - \bar{\psi}^{-1}\alpha x - \bar{\psi}^{-1}c =$

$= \bar{\psi}_1 x + c_1 + \alpha_1 y,$

где $\alpha_1 x = J\bar{\psi}^{-1}c + J\bar{\psi}^{-1}\alpha x + \psi^{-1}c$ - подстановка множества Q, $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}^{-1}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, $c_1 = J\bar{\psi}^{-1}c$.

Предложение 1.2.9. *Пусть* (Q,A) *- квазигруппа смешанного типа линейности I рода:*

$$A(x,y) = \varphi x + c + \bar{\psi} y.$$

Тогда

$$A^{-1}(x,y)=\bar\psi_1 y+c_1+\bar\varphi_1 x,\quad {}^{-1}A(x,y)=\bar\varphi_2 x+c_2+\bar\psi_2 y,$$

$$^{-1}(A^{-1})(x,y)=\varphi_3 x+c_3+\bar\psi_3 y,\quad ({}^{-1}A)^{-1}(x,y)=\bar\psi_4 y+c_4+\varphi_4 x,$$

где $\varphi_i,\psi_i\in\ Aut(Q,+)$, $\bar\varphi_i,\bar\psi_i$ *- антиавтоморфизмы группы* $(Q,+)$, $c_i\in Q,\ i=1,2,3,4.$

Доказательство. Пусть $A(x,y)=z$. Тогда $A^{-1}(x,z)=y$,

$z=\varphi x+c+\bar\psi y\Rightarrow z=\varphi x+c+\bar\psi A^{-1}(x,z)\Rightarrow$

$\bar\psi A^{-1}(x,z)=-c-\varphi x+z=\bar\psi^{-1}z-\bar\psi^{-1}\varphi x-\bar\psi^{-1}c=\bar\psi^{-1}z-\bar\psi^{-1}c+\bar\psi^{-1}c-$ $-\bar\psi^{-1}\varphi x-\bar\psi^{-1}c\ =\bar\psi_1^{-1}z+c_1+\bar\varphi_1 x$, где $\bar\psi_1=\bar\psi^{-1},\bar\varphi_1 x=\bar\psi^{-1}c+J\bar\psi^{-1}\varphi x+$ $J\bar\psi^{-1}c$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, $c_1=J\bar\psi^{-1}c.$

Следовательно, $A^{-1}(x,y)=\bar\psi_1^{-1}x+c_1+\bar\varphi_1 y.$

Обозначим $A^{-1}(x,y)=B(x,y)$. Пусть $B(x,y)=t$. Тогда ${}^{-1}B(t,y)=$ $=x$ и $\bar\psi_1^{-1}({}^{-1}B(t,y))+c_1+\bar\varphi_1 x=t\Rightarrow\ \bar\psi_1^{-1}({}^{-1}B(t,y))=t-\bar\varphi_1 y-c_1=$ $=-\bar\psi_1^{-1}c-\bar\psi_1^{-1}\bar\varphi_1 y+\bar\psi_1^{-1}t=-\bar\psi_1^{-1}c-\bar\psi_1^{-1}\bar\varphi_1 y+\bar\psi_1^{-1}c-\bar\psi_1^{-1}c+\bar\psi_1^{-1}t=$ $=\varphi_3 y+c_3+\bar\psi_3 t,$

то есть ${}^{-1}B(t,y)={}^{-1}(A^{-1})(t,y)=\varphi_3 x+c_3+\bar\psi_3 y$, где $\varphi_3 y=J\bar\psi_1^{-1}c_1+$ $+J\bar\psi_1^{-1}\bar\varphi_1 t+\bar\psi_1^{-1}c_1$ - автоморфизм группы $(Q,+),\bar\psi_3=\bar\psi_1$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+),c_3=-\bar\psi_1^{-1}c_1.$

Предложение 1.2.10. *Пусть* (Q,A) *- квазигруппа смешанного типа линейности II рода:*

$$A(x,y)=\bar\varphi x+c+\psi y.$$

Тогда

$$A^{-1}(x,y)=\varphi_1 x+c_1+\psi_1 y,\quad {}^{-1}A(x,y)=\psi_2 y+c_2+\varphi_2 x$$

$$^{-1}(A^{-1})(x,y) = \varphi_3 x + c_3 + \bar{\psi}_3 y, \quad (^{-1}A)^{-1}(x,y) = \bar{\psi}_4 y + c_4 + \varphi_4 x,$$

где $\varphi_i \in Aut(Q,+)$, $\bar{\psi}_i$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, $c_i \in Q$, $i = 1,2,3,4$.

Доказательство. Пусть $A(x,y) = z$. Тогда $A^{-1}(x,z) = y$,

$z = \bar{\varphi}x + c + \psi y \Rightarrow z = \bar{\varphi}x + c + \psi A^{-1}(x,z) \Rightarrow$

$\psi A^{-1}(x,z) = -c - \bar{\varphi}x + z \Rightarrow A^{-1}(x,z) = -\psi^{-1}c - \psi^{-1}\bar{\varphi}x + \psi^{-1}z =$

$= -\psi^{-1}c - \psi^{-1}\bar{\varphi}x - \psi^{-1}c + \psi^{-1}c + \psi^{-1}z = \varphi_1 x + c_1 + \psi_1 z,$

где $\psi_1 = \psi^{-1}, \varphi_1 x = J\psi^{-1}c + J\psi^{-1}\bar{\varphi}x + \psi^{-1}c$ - автоморфизм группы $(Q,+)$, $c_1 = -\psi^{-1}c$.

Следовательно, $A^{-1}(x,y) = \varphi_1 x + c_1 + \psi_1 y$.

Обозначим $A^{-1}(x,y) = B(x,y)$. Пусть $B(x,y) = t$. Тогда $^{-1}B(t,y) = = x$ и $\varphi_1^{-1}(^{-1}B(t,y)) + c_1 + \psi_1 y = t \Rightarrow \varphi_1^{-1}(^{-1}B(t,y)) = t - \psi_1 y - c_1 = \varphi_1^{-1}t - \varphi_1^{-1}\psi_1 y - \varphi_1^{-1}c_1 = \varphi_1^{-1}t + \varphi_1^{-1}c_1 - \varphi_1^{-1}c_1 - \varphi_1^{-1}\psi_1 y - \varphi_1^{-1}c_1 = \varphi_3 t + c_3 + \bar{\psi}_3 y$,

то есть $^{-1}B(t,y) =^{-1}(A^{-1})(t,y) = \varphi_3 t + c_3 + \bar{\psi}_3 y$, *где* $\bar{\psi}_3 y = J\psi_1^{-1}c_1 + + J\psi_1^{-1}\varphi_1 y + J\psi_1^{-1}c_1$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+), \varphi_3 = \varphi_1$ - автоморфизм группы $(Q,+), c_3 = -\varphi_1^{-1}c_1$.

Предложение доказано.

1.3. Об изоморфизмах и автоморфизмах линейных слева (справа) квазигрупп

В данном параграфе получены результаты об изоморфизмах, автоморфизмах и автотопиях обобщенных линейных квазигрупп.

Тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называется *автотопией* квазигруппы $(Q, \cdot)$ (или группы $(Q,+)$), если для произвольных $x, y \in Q$ выполняется следующее равенство

$$\gamma(x \cdot y) = \alpha x \cdot \beta y. \qquad (1.3.1)$$

В случае, когда $\alpha = \beta = \gamma$, получаем обычное понятие автоморфизма квазигруппы: $\gamma(x \cdot y) = \gamma x \cdot \gamma y$. В случае групп, автотопии имеют простое строение, а именно, верная следующая теорема, доказанная В.Д.Белоусовым.

Теорема 1.3.1. [7] *Любая автотопия группы* $(Q, +)$ *имеет вид:*

$$T = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\theta, \qquad (1.3.2)$$

где $\theta \in Aut(Q, +), \tilde{L}_a = a + x, \tilde{R}_a = x + a, a, b,$ *- фиксированные элементы из* Q.

Следующая теорема дает описание строений автотопий произвольной линейной слева (справа), алинейной слева (справа) квазигруппы.

Теорема 1.3.2. *Любая автотопия линейной слева квазигруппы* $(Q, \cdot)$ $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$*, имеет вид:*

$$P = (\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1}, \tilde{L}_c\beta\tilde{R}_b\theta\beta^{-1}\tilde{L}_{-c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

где $\varphi, \theta \in Aut(Q, +)$, β *- подстановка множества* Q, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

Доказательство. Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная слева квазигруппа: $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$. Тогда $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y = \varphi x + \tilde{L}_c\beta y$ или $(\cdot) = (+)(\varphi, \tilde{L}_c\beta, \varepsilon)$. Если $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ - произвольная автотопия линейной слева квазигруппы $(Q, \cdot)$, то из [29] следует, что $P = TST^{-1}$, где $T = (\varphi, \tilde{L}_c\beta, \varepsilon)$,
$T^{-1} = (\varphi^{-1}, \beta^{-1}\tilde{L}_{-c}, \varepsilon)$, $S = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\theta$. Тогда

$$P = TST^{-1} = (\varphi, \tilde{L}_c\beta, \varepsilon)(\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\theta(\varphi^{-1}, \beta^{-1}\tilde{L}_{-c}, \varepsilon) =$$

$$= (\varphi\tilde{L}_a\theta\varphi^{-1}, \tilde{L}_c\beta\tilde{R}_b\theta\beta^{-1}\tilde{L}_{-c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta) = (\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1}, \tilde{L}_c\beta\tilde{R}_b\theta\beta^{-1}\tilde{L}_{-c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

Аналогичные утверждения верны для класса линейных справа квазигруппы, а также алинейных слева (справа) квазигрупп:

Следствие 1.3.1. *Любая автотопия линейной справа квазигруппы $x \cdot y = \alpha x + c + \psi y$, имеет вид:*

$$P = (\alpha\tilde{L}_a\theta\alpha^{-1}, \tilde{L}_c\tilde{R}_{\psi b}\psi\theta\psi^{-1}\tilde{L}_{-c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

где $\psi, \theta \in Aut(Q, +)$, α - подстановка множества Q, a, b, c - фиксированные элементы из Q.

Теорема 1.3.3. *Любая автотопия алинейной справа квазигруппы $x \cdot y = \alpha x + c + \bar{\psi} y$, имеет вид:*

$$P = (\alpha\tilde{L}_a\theta\alpha^{-1}, \tilde{L}_c\tilde{R}_{\bar{\psi} b}\bar{\psi}\theta\tilde{L}_{-c}\bar{\psi}^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

Доказательство. Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная слева квазигруппа: $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$. Тогда $x \cdot y = \alpha x + c + \bar{\psi} y = \alpha x + \tilde{L}_c\bar{\psi} y$ или $(\cdot) = (+)(\alpha, \tilde{L}_c\bar{\psi}, \varepsilon)$. Если $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ - произвольная автотопия алинейной справа квазигруппы $(Q, \cdot)$, то из [29] следует, что $P = TST^{-1}$. Тогда

$$P = TST^{-1} = (\alpha, \tilde{L}_c\bar{\psi}, \varepsilon)(\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\theta(\alpha^{-1}, \bar{\psi}^{-1}\tilde{L}_{-c}, \varepsilon) =$$

$$= (\alpha\tilde{L}_a\theta\alpha^{-1}, \tilde{L}_c\tilde{R}_{\bar{\psi} b}\bar{\psi}\theta\tilde{L}_{-c}\bar{\psi}^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

Следствие 1.3.2. *Любая автотопия алинейной слева квазигруппы $x \cdot y = \bar{\varphi} x + c + \beta y$, имеет вид*

$$P = (\tilde{L}_{\bar{\varphi} a}\bar{\varphi}\theta\bar{\varphi}^{-1}, \tilde{L}_c\beta\tilde{R}_b\beta\beta^{-1}\tilde{L}_{-c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

Доказательство следует из определения автотопии, антиавтоморфизма квазигрупп и теоремы 1.3.1.

Следствие 1.3.3. *Любой автоморфизм γ линейной слева (справа) квазигруппы вида $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$, ($x \cdot y = \alpha x + c + \psi y$), можно представить в виде:*

$$\gamma = \tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1} = \tilde{L}_c\beta\tilde{R}_b\theta\beta^{-1}\tilde{L}_{-c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta,$$

$$(\gamma = \alpha\tilde{L}_a\theta\alpha^{-1} = \tilde{L}_c\tilde{R}_{\psi b}\psi\theta\psi^{-1}\tilde{L}_{-c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta).$$

Определение 1.3.1. [29] *Антиавтотопия квазигруппы $(Q, \cdot)$ это упорядоченная тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, такая, что*

$$\gamma(x \cdot y) = \alpha y \cdot \beta x. \tag{1.3.3}$$

Если обозначим через $\bar{A}vt(Q, \cdot)$ и $\bar{A}vt(Q, \circ)$ множества антиавтотопий квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ соответственно, то известно следующая теорема, которая устанавливает связь между множествами $\bar{A}vt(Q, \cdot)$ и $\bar{A}vt(Q, \circ)$.

Теорема 1.3.4. [29]. *Если квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ изотопны, $\gamma(x \cdot y) = \alpha x \circ \beta y$, то*

$$\bar{A}vt(Q, \cdot) = T^{-1}\bar{A}vt(Q, \circ)T_1 \tag{1.3.4}$$

где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, $T_1 = (\beta, \alpha, \gamma)$.

Строение антиавтотопий произвольной группы определяет следующая

Теорема 1.3.5. [29]. *Любая антиавтотопия группы $(Q, +)$ имеет вид:*

$$T = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\bar{\theta}, \tag{1.3.5}$$

где $\bar{\theta}$ - антиавтоморфизм группы $(Q, +)$, a, b - фиксированные элементы из Q.

Используя теорему 1.3.5 нетрудно доказать строение антиавтотопий произвольной линейной слева (справа) квазигруппы.

Теорема 1.3.6. *Любая антиавтотопия линейной слева квазигруппы* $(Q,\cdot)$ $x\cdot y=\varphi x+c+\beta y$, *имеет вид:*

$$P=(\varphi^{-1}\tilde{R}_{-c}\tilde{L}_a\bar{\theta}\beta,\beta^{-1}\tilde{R}_b\bar{\theta}\tilde{R}_c\varphi,\tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta}),$$

где $\varphi\in Aut(Q,+)$, $\bar{\theta}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, β *- подстановка множества* Q, a,b,c *- фиксированные элементы из* Q.

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ - линейная слева квазигруппа: $x\cdot y=$ $=\varphi x+c+\beta y$. Тогда $x\cdot y=\varphi x+c+\beta y=\varphi x+\tilde{L}_c\beta y$ или $(\cdot)=$ $=(+)(\varphi x,\tilde{L}_c\beta,\varepsilon)$. Если $P=(\alpha,\beta,\gamma)$ - произвольная антиавтотопия линейной слева квазигруппы $(Q,\cdot)$, то из (1.3.5) следует, что $P=$ $=T^{-1}ST_1$, где $T=(\varphi,\tilde{L}_c\beta,\varepsilon),T_1=(\tilde{L}_c\beta,\varphi,\varepsilon)$, $S=(\tilde{L}_a\bar{\theta},\tilde{R}_b\bar{\theta},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta})$. Тогда

$$P=T^{-1}ST_1=(\varphi^{-1},\beta^{-1}\tilde{L}_{-c},\varepsilon)(\tilde{L}_a\bar{\theta},\tilde{R}_b\bar{\theta},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta})(\tilde{L}_c\beta,\varphi,\varepsilon)=$$

$$=(\varphi^{-1}\tilde{L}_a\bar{\theta}\tilde{L}_c\beta,\beta^{-1}\tilde{L}_{-c}\tilde{R}_b\bar{\theta}\varphi,\tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta}).$$

Следствие 1.3.4. *Любая антиавтотопия линейной справа квазигруппы* $(Q,\cdot)$ $x\cdot y=\alpha x+c+\psi y$, *имеет вид:*

$$P=(\alpha^{-1}\tilde{L}_a\bar{\theta}\tilde{L}_c\psi,\psi^{-1}\tilde{L}_{-c}\tilde{R}_b\bar{\theta}\alpha,\tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta}),$$

где $\psi\in Aut(Q,+)$, $\bar{\theta}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, α *- подстановка множества* Q, a,b,c *- фиксированные элементы из* Q.

Аналогично можно показать, что любая антиавтотопия алинейной слева (справа) квазигруппы $x\cdot y=\bar{\varphi}x+c+\beta y$, $(x\cdot y=\alpha x+c+\bar{\psi}y)$, имеет вид:

$$\bar{P} = (\tilde{L}_a\bar{\varphi}^{-1}\bar{\theta}\tilde{L}_c\beta, \beta^{-1}\tilde{L}_{-c}\tilde{R}_b\bar{\theta}\bar{\varphi}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta}),$$

$$(\bar{P} = (\alpha^{-1}\tilde{L}_a\bar{\theta}\tilde{L}_c\bar{\psi}, \tilde{L}_{-c}\bar{\psi}^{-1}\tilde{R}_b\bar{\theta}\alpha, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\bar{\theta})),$$

где $\bar{\varphi}, (\bar{\psi})$, $\bar{\theta}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, $\alpha(\beta)$ - подстановка множества Q, a,b,c - фиксированные элементы из Q.

Теорема 1.3.7. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$*- линейные слева над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y = \varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y$, $x\circ y = \varphi_2 x + c_2 + \beta_2 y$*,, и* $\gamma \in Aut(Q,+)$. *Тогда автоморфизм* γ *группы* $(Q,+)$ *является изоморфизмом квазигрупп* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma\ \varphi_1\gamma^{-1} = \varphi_2, \quad \gamma\beta_1\gamma^{-1} = \beta_2, \quad \gamma(c_1) = c_2.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in Aut(Q,+)$ и $\gamma(x\cdot y) = \gamma x \circ \gamma y$. Тогда $\gamma(\varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y) = \varphi_2\gamma x + c_2 + \beta_2\gamma y, \gamma\varphi_1 x + c_1 + \gamma\beta_1 y = \varphi_2\gamma x + c_2 + \beta_2\gamma y$.

Положим $x = y = 0$ - нулевой элемент группы $(Q,+)$: $\gamma(c_1) = c_2$. Теперь, если $y = 0$, то $\gamma\beta_1 0 = 0$, $\gamma 0 = 0$, $\beta_2\gamma 0 = 0, \beta_2 0 = 0$, то $\gamma\varphi_1 = \varphi_2\gamma$ или $\gamma\varphi_1\gamma^{-1} = \varphi_2$, если $x = 0$, то $\gamma\varphi_1 0 + \gamma\beta_1 y = \varphi_2\gamma 0 + \beta_2\gamma y$, $\gamma\beta_1 y = \beta_2\gamma y$, $\gamma\beta_1 = \beta_2\gamma$ или $\gamma\beta_1\gamma^{-1} = \beta_2$.

Обратное, легко проверяется

$$\gamma(x\cdot y) = \gamma(\varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y) = \gamma\varphi_1 x + c_1 + \gamma\beta_1 y = \varphi_2\gamma x + c_2 + \beta_2\gamma y = \gamma x \circ \gamma y.$$

Теорема 1.3.8. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$*- линейные справа над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y = \alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y$, $x\circ y = \alpha_2 x + c_2 + \psi_2 y$, *и* $\gamma \in Aut(Q,+)$. *Тогда автоморфизм* γ *группы* $(Q,+)$ *является изоморфизмом квазигрупп* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma\ \alpha_1\gamma^{-1} = \alpha_2, \quad \gamma\psi_1\gamma^{-1} = \psi_2, \quad \gamma(c_1) = c_2.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in Aut(Q,+)$ и $\gamma(x \cdot y) = \gamma x \circ \gamma y$. Тогда $\gamma(\alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y) = \alpha_2 \gamma x + c_2 + \psi_2 \gamma y, \gamma\alpha_1 x + c_1 + \gamma\psi_1 y = \alpha_2\gamma x + c_2 + \psi_2\gamma y$.

Положим $x = y = 0 : \gamma(c_1) = c_2$. Теперь, если $y = 0$, $\gamma\psi_1 0 = 0$, $\gamma 0 = 0$, $\psi_2\gamma 0 = 0$, $\psi_2 0 = 0$ то $\gamma\alpha_1 = \alpha_2\gamma$ или $\gamma\alpha_1\gamma^{-1} = \alpha_2$, $x = 0$, то $\gamma\alpha_1 0 + \gamma\psi_1 y = \alpha_2\gamma 0 + \psi_2\gamma y$, $\gamma\psi_1 y = \psi_2\gamma y, \gamma\psi_1 = \psi_2\gamma$ или $\gamma\psi_1\gamma^{-1} = \psi_2$.

Обратное утверждение аналогично проверяется

$$\gamma(x \cdot y) = \gamma(\alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y) = \gamma\alpha_1 x + c_1 + \gamma\psi_1 y = \alpha_2\gamma x + c_2 + \psi_2\gamma y =$$

$$= \gamma x \circ \gamma y.$$

Предложение 1.3.1. *Пусть $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ - линейные справа над группой $(Q,+)$ квазигруппы : $x \cdot y = \alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y$, $x \circ y = \alpha_2 x + c_2 + \psi_2 y$, γ - изоморфизм квазигруппы $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$: $x \cdot y = \gamma^{-1}(\gamma x \circ \gamma y)$. Тогда изоморфизм γ можно представить в виде*

$$\gamma = \gamma^{-1}\alpha_2\tilde{L}_a\theta\alpha_1^{-1} = \gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\tilde{R}_{\psi_2 b}\psi_2\theta\psi_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Доказательство. Действительно, пусть $x \cdot y = \gamma^{-1}(\gamma x \circ \gamma y)$. Тогда

$$\alpha_1 x + c_1 + \psi_1 y = \gamma^{-1}(\alpha_2\gamma x + c_2 + \psi_2\gamma y),$$

$$\alpha_1 x + \tilde{L}_{c_1}\psi_1 y = \gamma^{-1}(\alpha_2\gamma x + \tilde{L}_{c_2}\psi_2\gamma y),$$

$$x + y = \gamma^{-1}(\alpha_2\gamma\alpha_1^{-1}x + \tilde{L}_{c_2}\psi_2\gamma\psi_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}y),$$

$$x + y = \gamma^{-1}\alpha_2\gamma\alpha_1^{-1}x + \gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\psi_2\gamma\psi_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}y,$$

$(\gamma^{-1}\alpha_2\gamma\alpha_1^{-1}, \gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\psi_2\gamma\psi_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}, \gamma) \in Avt(Q,+)$. Любая автотопия группы $(Q,+)$ имеет вид: $T = (\tilde{L}_a\theta, \tilde{R}_b\theta, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta)$. Следовательно, $\tilde{L}_a\theta =$ $= \gamma^{-1}\alpha_2\gamma\alpha_1^{-1}$, $\tilde{R}_b\theta = \gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\psi_2\gamma\psi_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}$, $\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta = \gamma$. Откуда

$$\gamma = \gamma^{-1}\alpha_2\tilde{L}_a\theta\alpha_1^{-1} = \gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\tilde{R}_{\psi_2 b}\psi_2\theta\psi_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Предложение 1.3.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные слева над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y=\varphi_1 x+c_1+\beta_1 y$, $x\circ y=\varphi_2 x+c_2+\beta_2 y$, γ *- изоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$*:* $x\cdot y=\gamma^{-1}(\gamma x\circ\gamma y)$*. Тогда изоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\gamma^{-1}\tilde{L}_{\varphi_2 a}\varphi_2\theta\varphi_1^{-1}=\gamma^{-1}\tilde{L}_{c_2}\beta_2\tilde{R}_b\theta\beta_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Аналогичное утверждение верно для класса линейных слева квазигрупп.

1.4. Автотопии, антиавтотопии и автоморфизмы парастрофов линейных и алинейных квазигрупп

В данном параграфе получены результаты относительно строений автотопий, антиавтотопий, автоморфизмов, парастрофов линейных и алинейных квазигрупп.

Известно [7], что квазигруппу можно определить как алгебру $(Q,A,A^{-1},{}^{-1}A)$ с тремя бинарными операциями $A,A^{-1},{}^{-1}A$, в которой выполняются следующие тождества:

$$A(x,A^{-1}(x,y))=y,\quad A({}^{-1}A(y,x),x)=y \tag{1.4.1}$$

$$A^{-1}(x,A(x,y))=y,\quad {}^{-1}A(A(y,x),x)=y \tag{1.4.2}$$

В литературе квазигруппу $(Q,A,A^{-1},{}^{-1}A)$ (или в обычной записи $(Q,\cdot,/,\backslash)$) также называют примитивной квазигруппой (или $\varepsilon-$квазигруппой).

В литературе равенства (1.4.1) и (1.4.2) имеют также другую запись:

$$x(x\backslash y) = y, \quad (y/x)x = y,$$

$$x\backslash(xy) = y, \quad (yx)/x = y.$$

Как известно [7], с каждой квазигруппой (Q, A) связаны еще следующие пять квазигрупп, называемые обратными квазигрупами или парастрофами. Обозначим через Σ_A систему парастрофов квазигруппы (Q, A).

$$\Sigma_A = \{A, \quad A^*, \quad A^{-1}, \quad {}^{-1}A, \quad {}^{-1}(A^{-1}), \quad ({}^{-1}A)^{-1}.\}$$

Используя теорему о строениях автотопий и антиавтотопий групп легко доказать утверждения о представлении автотопии и антиавтотопии произвольного парастрофа обобщенных линейных квазигрупп. Ввиду однотипности, некоторая часть утверждений приводится без доказательств.

Следующая теорема дает описание строений автотопий некоторых парастрофов линейных (алинейных) квазигрупп, и парастрофов квазигрупп смещенного типа линейности.

Теорема 1.4.1. *Пусть* (Q, A) *- линейная квазигруппа:* $A(x, y) = \varphi x + c + \psi y$, (Q, A^{-1}) *- её парастроф:* $A^{-1}(x, y) = J\psi^{-1}\varphi x + J\psi^{-1}c + \psi^{-1}y$, *Тогда любая автотопия квазигруппы* (Q, A^{-1}) *имеет вид:*

$$P = (J\psi^{-1}\varphi\tilde{L}_a\theta J\psi\varphi^{-1}, \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\theta\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta). \qquad (1.4.3)$$

где $\varphi, \psi, \theta \in Aut(Q, +)$, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

Аналогично, если $(Q,^{-1} A)$ - парастроф квазигруппы вида ${}^{-1}A(x, y) = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\psi y$, то любая автотопия квазигруппы $(Q,^{-1} A)$

имеет вид:

$$P = (\varphi^{-1}\tilde{L}_a\theta\varphi, \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi\tilde{R}_b\theta J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \qquad (1.4.4)$$

где $\tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, левая и правая трансляции группы $(Q,+)$, $\varphi, \psi, \theta, \varphi^{-1}, \psi^{-1} \in Aut(Q,+)$, $a, b \in Q$.

Следствие 1.4.1. *Любой автоморфизм γ квазигруппы $A^{-1}(x,y) = = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y$ $\quad ({}^{-1}A(x,y) = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\psi y)$, можно представить в виде:*

$$\gamma = J\psi^{-1}\varphi\tilde{L}_a\theta J\psi\varphi^{-1} = \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\theta\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \qquad (1.4.5)$$

$$(\gamma = \varphi^{-1}\tilde{L}_a\theta\varphi = \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi R_b\theta J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta). \qquad (1.4.6)$$

Следствие 1.4.2. *Любая автотопия квазигрупп $A^{-1}(x,y) = = J\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}y + J\bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}y$ и ${}^{-1}A(x,y) = \bar{\varphi}^{-1}x + J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}y$ имеют вид:*

$$P = (J\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}\tilde{L}_a\theta J\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}, \tilde{L}_{J\bar{\psi}^{-1}c}\bar{\psi}^{-1}\theta\bar{\psi}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\psi}^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \qquad (1.4.7)$$

$$P = (\bar{\varphi}^{-1}\tilde{L}_a\theta\bar{\varphi}, \tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}J\bar{\varphi}^{-1}\psi R_b\theta J\bar{\varphi}\bar{\psi}^{-1}\tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \qquad (1.4.8)$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$, $a, b \in Q$.

Аналогичный результат можно получить для квазигрупп смешанного типа линейности I ($A(x,y) = \varphi x + c + \bar{\psi}y$) и II ($A(x,y) = \bar{\varphi}x + c + \psi y$) родов.

Следствие 1.4.3. *Любая автотопия квазигруппы смешанного типа линейности I рода $A^{-1}(x,y) = J\bar{\psi}^{-1}\varphi y + J\bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}y$ (соответственно II рода ${}^{-1}A(x,y) = \bar{\varphi}^{-1}x + J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\psi y$, имеет вид:*

$$P = (J\bar{\psi}^{-1}\varphi\tilde{L}_a\theta J\bar{\psi}\varphi^{-1}, \tilde{L}_{J\bar{\psi}^{-1}c}\bar{\psi}^{-1}\theta\bar{\psi}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\psi}^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \qquad (1.4.9)$$

$$P=(\bar\varphi^{-1}\tilde L_a\sigma\bar\varphi,\tilde L_{J\bar\varphi^{-1}c}J\bar\varphi^{-1}\psi R_b\sigma J\bar\varphi\psi^{-1}\tilde L_{J\bar\varphi^{-1}c},\tilde L_a\tilde R_b\sigma). \qquad (1.4.10)$$

В следующей теореме приводится описание строения антиавтотопий парастрофа линейной, алинейной квазигруппы, а также антиавтотопий парастрофа квазигрупп смешанного типа линейности.

Теорема 1.4.2. *Пусть* (Q,A)*:* $A(x,y)=\varphi x+c+\psi y$*- линейная квазигруппа,* $A^{-1}(x,y)=J\psi^{-1}\varphi x+J\psi^{-1}c+\psi^{-1}y$ *её парасртроф. Тогда любая антиавтотопия квазигруппы* (Q,A^{-1})*, имеет вид:*

$$P=(J\psi\varphi^{-1}\tilde L_a\theta\tilde L_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1},\psi\tilde L^{-1}_{J\psi^{-1}c}\tilde R_b\theta J\psi^{-1}\varphi,\tilde L_a\tilde R_b\theta), \qquad (1.4.11)$$

где $\varphi,\psi,\theta\in Aut(Q,+)$*,* a,b,c *- фиксированные элементы из* Q*.*

Аналогично, если $(Q,^{-1}A)$ - парастроф вида $^{-1}A(x,y)=\varphi^{-1}x+$ $+J\varphi^{-1}c+J\varphi^{-1}\psi y$, то любая автотопия квазигруппы $(Q,^{-1}A)$ имеет вид:

$$P=(\tilde L_{\varphi a}\varphi\theta\tilde L_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi,J\varphi\psi^{-1}\tilde L_{J\varphi^{-1}c}\tilde R_b\theta\varphi,\tilde L_a\tilde R_b\theta). \qquad (1.4.12)$$

Следствие 1.4.4. *Любая антиавтотопия алинейной квазигруппы* $A^{-1}(x,y)=J\bar\psi^{-1}\bar\varphi y+J\bar\psi^{-1}c+\bar\psi^{-1}y$ *(* $^{-1}A(x,y)=\bar\varphi^{-1}x+J\bar\varphi^{-1}c+J\bar\varphi^{-1}\bar\psi y$*), имеет вид:*

$$P=(J\tilde L_{\bar\psi\bar\varphi^{-1}a}\bar\psi\bar\varphi^{-1}\theta\bar\psi\tilde L^{-1}_{\bar\psi^{-1}c},\bar\psi\tilde L_{J\bar\psi^{-1}c}\tilde R_b\bar\psi^{-1}\bar\varphi,\tilde L_a\tilde R_b\theta), \qquad (1.4.13)$$

$$P=(\bar\varphi\tilde L_a\theta\tilde L_{J\bar\varphi^{-1}c}J\bar\varphi^{-1}\bar\psi,J\bar\varphi\bar\psi^{-1}\tilde L^{-1}_{J\bar\varphi^{-1}c}R_b\theta\bar\varphi^{-1},\tilde L_a\tilde R_b\theta), \qquad (1.4.14)$$

где $\bar\varphi,\bar\psi,\bar\theta$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$*,* a,b,c *- фиксированные элементы из* Q*.*

Следствие 1.4.5. *Любая антиавтотопия квазигруппы смешанного типа линейности I рода* $A^{-1}(x,y)=J\bar\psi^{-1}\varphi y+J\bar\psi^{-1}c+\bar\psi^{-1}y$ *(соответственно II рода* $^{-1}A(x,y)=\bar\varphi^{-1}x+J\bar\varphi^{-1}c+J\bar\varphi^{-1}\psi y$*) имеет вид:*

$$P=(J\tilde L_{\bar\psi\varphi^{-1}a}\bar\psi\varphi^{-1}\theta\bar\psi\tilde L^{-1}_{\bar\psi^{-1}c},\bar\psi\tilde L_{J\bar\psi^{-1}c}\tilde R_b\bar\psi^{-1}\varphi,\tilde L_a\tilde R_b\theta), \qquad (1.4.15)$$

$$P = (\bar{\varphi}\tilde{L}_a\theta\tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}J\bar{\varphi}^{-1}\psi, J\bar{\varphi}\psi^{-1}\tilde{L}^{-1}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}R_b\theta\bar{\varphi}^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \qquad (1.4.16)$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, a, b, c *- фиксированные элементы из* Q.

1.5. Эндоморфизмы линейных слева (справа) квазигрупп

В классе квазигрупп, изотопных группам, большой интерес представляют линейные квазигруппы. Согласно В.Д.Белоусову [6], квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *линейной* над группой $(Q,+)$, если она имеет вид

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y, \qquad (1.5.1)$$

где $\varphi, \psi \in Aut(Q,+), c-$ фиксированный элемент из множества Q. Впервые эти квазигруппы были введены В.Д.Белоусовым в связи с исследованием уравновешенных тождеств в квазигруппах. При этом возникли также квазигруппы, близкие к линейным. Г.Б.Белявская и А.Х.Табаров в работах [30,31] ввели новые классы квазигрупп: алинейные и их обобщения, а именно алинейные слева (справа) квазигруппы, квазигруппы смешанного типа линейности и другие. Названные классы квазигрупп также связаны с уравновешенными и неуравновешенными тождествами.

В работе [31] установлена связь между названными типами линейности. Различными авторами изучались также квазигруппы различных типов с ограничениями на изотопные им группы и используемые автоморфизмы и антиавтоморфизмы. Частным случаем линейных квазигрупп являются медиальные квазигруппы, то есть квазигруппы с тождеством $xy \cdot uv = xu \cdot yv$. Согласно теореме Брака-Тойоды [7], эти квазигруппы линейны над абелевой группой, причем автоморфизмы φ, ψ коммутируют между собой: $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа. Отображение $x \to ax$ называется левой трансляцией квазигруппы $(Q, \cdot)$ (с помощью элемента a) и обозначается через L_a:$L_a x = ax$. Очевидно, L_a - взаимно однозначное отображение множества Q на себя, то есть, L_a - подстановка множества Q. Это следует из определения квазигруппы. Правая трансляция R_a (с помощью элемента a) определяется равенством $R_a x = xa$, и следовательно, тоже является подстановкой. Все трансляции квазигруппы $(Q, \cdot)$ порождают группу $M(Q, \cdot)$, которую называют группой, ассоциированной с квазигруппой $(Q, \cdot)$. Если $(Q, \cdot)$ - группа, то имеют место очевидные равенства, каждое из которых эквивалентно ассоциативному закону.

$$L_a(xy) = L_a x \cdot y,$$

$$R_a(xy) = x \cdot R_a y.$$

Группа $M(Q, \cdot)$ имеет подгруппу $I_h(\cdot)$ такая, что $\alpha h = h$, то есть α оставляет элемент h неподвижным. Группа $M(Q, \cdot)$ содержит большую информацию о квазигруппе и существенно используется при изучении квазигруппы. Например, если в квазигруппе $(Q, \cdot)$ группа $I_h(\cdot)$ - нормальная подгруппа группы $M(Q, \cdot)$, то $(Q, \cdot)$ - абелева группа. Исследованием группы $M(Q, \cdot)$ посвящены множества работ [26,32,33]. В настоящем параграфе получены некоторые результаты относительно эндоморфизмов линейных слева (справа) квазигрупп, которые обобщают утверждения из [30].

Пусть $(Q, \cdot)$ - произвольная квазигруппа. Тройка отображений

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,)$ называется *эндотопией* квазигруппы $(Q, \cdot)$, если $\sigma_3(x \cdot y) = = \sigma_1 x \cdot \sigma_2 y$. В случае, если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то σ - называется эндоморфизмом квазигруппы $(Q, \cdot)$. Другим словами, эндотопия является естественным обобщением эндоморфизма алгебраической структуры.

Теорема 1.5.1. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная справа квазигруппа вида $x \cdot y = \alpha x + \psi y$. Любая эндотопия квазигруппы $(Q, \cdot)$ имеет вид:*

$$P = (\alpha \tilde{L}_a \sigma \alpha^{-1}, \tilde{R}_{\psi b} \psi \sigma \psi^{-1}, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \sigma) \tag{1.5.2}$$

где $\tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, левая и правая трансляции группы $(Q, +)$, $\alpha^{-1}(\psi^{-1})$ - обратная подстановка (автоморфизм) для $\alpha(\psi)$.

Доказательство. Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная справа квазигруппа вида $x \cdot y = \alpha x + \psi y$. Как известно [34], любая эндотопия группы $(Q, +)$ имеет вид:

$$T = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a \tilde{R}_b)\sigma, \tag{1.5.3}$$

где $\sigma \in End(Q, +), a, b \in Q, \tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$. Далее, в [35] доказано, что если квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ изотопны $\gamma(x \circ y) = \alpha x \cdot \beta y$, $(\circ) = (\cdot)T, T = (\alpha, \beta, \gamma)$, то их полугруппы эндотопий сопряжены.

$$Ent(Q, \cdot) = T^{-1} Ent(Q, \circ) T. \tag{1.5.4}$$

Через $Ent(Q, \cdot)$ и $Ent(Q, \circ)$ обозначены соответственно полугруппы эндотопий квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$. Используя (1.5.3) и (1.5.4), находим общий вид эндотопии линейной справа квазигруппы вида $x \cdot y = \alpha x + \psi y$.

Действительно, $(\cdot) = (+)(\alpha, \psi, \varepsilon)$. Если $S \in Ent(Q, \cdot)$, то согласно (1.5.4), $S = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a \tilde{R}_b)\sigma$, где $\sigma \in End(Q, +), a, b \in Q$. Согласно (1.5.4), для любой $P \in Ent(Q, \cdot)$.

$$P = TST^{-1} = (\alpha, \psi, \varepsilon)(\tilde{L}_a \sigma, \tilde{R}_b \sigma, \tilde{L}_a \tilde{R}_b \sigma)(\alpha^{-1}, \psi^{-1} \varepsilon) =$$

$$= (\alpha\tilde{L}_a\sigma\alpha^{-1}, \tilde{R}_{\psi b}\psi\sigma\psi^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Аналогично, если $(Q,\cdot)$ - линейная слева квазигруппа вида $x\cdot y =$ $= \varphi x + \beta y$, то любая эндотопия квазигруппы $(Q,\cdot)$ имеет вид:

$$P = (\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\sigma\varphi^{-1}, \beta\tilde{R}_b\sigma\beta^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.5.5}$$

Следствие 1.5.1. *Любой эндоморфизм линейной слева (справа) квазигруппы вида* $x\cdot y = \varphi x + \beta y$ $(x\cdot y = \alpha x + \psi y)$ *можно представить в виде*

$$E = \tilde{L}_{\varphi a}\varphi\sigma\varphi^{-1} = \beta\tilde{R}_b\sigma\beta^{-1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma \tag{1.5.6}$$

$$(E_1 = \alpha\tilde{L}_a\sigma\alpha^{-1} = \tilde{R}_{\psi b}\psi\sigma\psi^{-1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.5.7}$$

Теорема 1.5.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- алинейная слева квазигруппа вида* $x\cdot y = \bar{\varphi}x + \beta y$. *Любая эндотопия квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *имеет вид:*

$$\bar{P} = (\bar{\varphi}^{-1}\tilde{L}_a\sigma\bar{\varphi}, \beta\tilde{R}_b\sigma\beta^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.5.8}$$

Доказательство. Действительно, пусть $(Q,\cdot)$ - алинейная слева квазигруппа вида $x\cdot y = \bar{\varphi}x+\beta y$. Тогда $(\cdot) = (+)(\bar{\varphi}, \beta, \varepsilon)$. Если $S \in Ent(Q,\cdot)$, то согласно (1.4.4), $S = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\sigma$, где $\sigma \in End(Q,+), a, b \in Q$. Согласно (1.4.4), для любой $\bar{P} \in Ent(Q,\cdot)$.

$$\bar{P} = TST^{-1} = (\bar{\varphi}, \beta, \varepsilon)(\tilde{L}_a\sigma, \tilde{R}_b\sigma, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma)(\bar{\varphi}^{-1}, \beta^{-1}\varepsilon) =$$

$$= (\bar{\varphi}^{-1}\tilde{L}_a\sigma\bar{\varphi}, \beta\tilde{R}_b\sigma\beta^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Следствие 1.5.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- алинейная справа квазигруппа вида* $x\cdot y = \alpha x + \bar{\psi}y$. *Любая эндотопия квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *имеет вид:*

$$\bar{P} = (\alpha\tilde{L}_a\sigma\alpha^{-1}, \bar{\psi}^{-1}\tilde{R}_b\sigma\bar{\psi}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.5.9}$$

Теорема 1.5.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные справа квазигруппы вида* $x\cdot y=\alpha_1 x+\psi_1 y$, $x\circ y=\alpha_2 x+\psi_2 y$. *Подстановки* α_1, α_2, *такие, что* $\alpha_1 0=0$, $\alpha_2 0=0$, *где* 0 *- нулевой элемент группы* $(Q,+),\gamma$ *- произвольный эндоморфизм группы* $(Q,+)$. *Тогда* γ *является гомоморфизмом квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\gamma\alpha_1=\alpha_2\gamma,\quad \gamma\psi_1=\psi_2\gamma.$$

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ - линейные справа над группой $(Q,+)$ квазигруппы вида $x\cdot y=\alpha_1 x+\psi_1 y$, $x\circ y=\alpha_2 x+\psi_2 y$, и $\alpha_1 0=0$, $\alpha_2 0=0$. Далее $\gamma\in End(Q,+)$, и $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. Тогда

$$\gamma(\alpha_1 x+\psi_1 y)=\alpha_2\gamma x+\psi_2\gamma y,$$

$$\gamma\alpha_1 x+\gamma\psi_1 y=\alpha_2\gamma x+\psi_2\gamma y,$$

Положим: $x=0$. Тогда $\gamma\alpha_1 0+\gamma\psi_1 y=\alpha_2\gamma 0+\psi_2\gamma y$, учитывая, что $\alpha_1 0=0$, $\gamma 0=0$, $\alpha_2 0=0$, получим: $\gamma\psi_1 y=\psi_2\gamma y$ или $\gamma\psi_1=\psi_2\gamma$. Теперь, если положим $y=0$, тогда $\gamma\alpha_1 x+\gamma\psi_1 0=\alpha_2\gamma x+\psi_2\gamma 0$, где $\gamma 0=0$, $\psi_1 0=0$, и $\psi_2 0=0$, получим $\gamma\alpha_1 x=\alpha_2\gamma x$ или $\gamma\alpha_1=\alpha_2\gamma$.

Обратно $\gamma(x\cdot y)=\gamma(\alpha_1 x+\psi_1 y)=\gamma\alpha_1 x+\gamma\psi_1 y=\alpha_2\gamma x+\psi_2\gamma y$, то есть $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$.

"Симметричное" утверждение верно и для случая линейных слева квазигрупп.

Теорема 1.5.4. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные слева квазигруппы вида* $x\cdot y=\varphi_1 x+\beta_1 y$, $x\circ y=\varphi_2 x+\beta_2 y$. *Подстановки* β_1, β_2, *такие, что* $\beta_1 0=0$, $\beta_2 0=0$, *где* 0 *- нулевой элемент группы* $(Q,+),\gamma$ *- произвольный эндоморфизм группы* $(Q,+)$. *Тогда* γ *является гомоморфизмом* *квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\gamma\beta_1=\beta_2\gamma,\quad \gamma\varphi_1=\varphi_2\gamma.$$

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ - линейные слева над группой $(Q,+)$ квазигруппы вида $x\cdot y=\varphi_1x+\beta_1y$, $x\circ y=\varphi_2x+\beta_2y$, и $\beta_10=0$, $\beta_20=0$. Далее $\gamma\in End(Q,+)$, и $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. Тогда

$$\gamma(\varphi_1x+\beta_1y)=\varphi_2\gamma x+\beta_2\gamma y,$$

$$\gamma\varphi_1x+\gamma\beta_1y=\varphi_2\gamma x+\beta_2\gamma y.$$

Положим: $x=0$. Тогда $\gamma\varphi_10+\gamma\beta_1y=\varphi_2\gamma0+\beta_2\gamma y$, учитывая, что $\varphi_10=0$, $\gamma0=0$, $\varphi_20=0$, получим: $\gamma\beta_1y=\beta_2\gamma y$ или $\gamma\beta_1=\beta_2\gamma$. Теперь, если положим $y=0$, то $\gamma\varphi_1x=\varphi_2\gamma x$ или $\gamma\varphi_1=\varphi_2\gamma$.

Обратно $\gamma(x\cdot y)=\gamma(\varphi_1x+\beta_1y)=\gamma\varphi_1x+\gamma\beta_1y=\varphi_2\gamma x+\beta_2\gamma y$, то есть $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$.

Предложение 1.5.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные слева над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y=\varphi_1x+c_1+\beta_1y$, $x\circ y=\varphi_2x+c_2+\beta_2y$, *отображение* γ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$*:* $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\tilde{R}_{c_2}\tilde{L}_{\varphi_2a}\varphi_2\theta\varphi_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1}=\beta_2\tilde{R}_b\theta\beta_1^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(xy)=\gamma x\circ\gamma y$. Тогда

$$\gamma(\varphi_1x+c_1+\beta_1y)=\varphi_2\gamma x+c_2+\beta_2\gamma y,$$

$$\gamma(\tilde{R}_{c_1}\varphi_1x+\beta_1y)=\tilde{R}_{c_2}\varphi_2\gamma x+\beta_2\gamma y,$$

$$\gamma(x+y)=\tilde{R}_{c_2}\varphi_2\gamma\varphi_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1}x+\beta_2\gamma\beta_1^{-1}y,$$

то есть $(\tilde{R}_{c_2}\varphi_2\gamma\varphi_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1},\beta_2\gamma\beta_1^{-1},\gamma)\in Ent(Q,+)$. Но любая эндотопия группы $(Q,+)$ имеет вид: $T=(\tilde{L}_a,\tilde{R}_b,\tilde{L}_a\tilde{R}_b)\theta$. Следовательно $\tilde{L}_a\theta=$ $=\tilde{R}_{c_2}\varphi_2\gamma\varphi_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1}, \tilde{R}_b\theta=\beta_2\gamma\beta_1^{-1}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta=\gamma$. Откуда

$$\gamma=\tilde{R}_{c_2}\tilde{L}_{\varphi_2 a}\varphi_2\theta\varphi_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1}=\beta_2\tilde{R}_b\theta\beta_1^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Аналогично, если $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ - линейные справа над группой $(Q,+)$ квазигруппы вида: $x\cdot y=\alpha_1x+c_1+\psi_1y$, $x\circ y=\alpha_2x+c_2+\psi_2y$, γ - гомоморфизм квазигруппы $(Q,\cdot)$ в $(Q,\circ)$: $\gamma(x\cdot y)=(\gamma x\circ\gamma y)$, то гомоморфизм γ можно представить в виде

$$\gamma=\tilde{R}_{c_2}\alpha_2\tilde{L}_a\theta\alpha_1^{-1}\tilde{R}_{-c_1}=\tilde{R}_{\psi_2 b}\psi_2\theta\psi_1^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Предложение 1.5.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- алинейные квазигруппы вида* $x\cdot y=\bar{\varphi}_1x+c_1+\bar{\psi}_1y$, $x\circ y=\bar{\varphi}_2x+c_2+\bar{\psi}_2y$ *отображение* γ *является гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$*:* $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$*. Тогда гомоморфизм* γ *можно представить виде*

$$\gamma=\tilde{L}_{\bar{\varphi}_2 a}\bar{\varphi}_2\theta\bar{\varphi}_1^{-1}=\tilde{L}_{c_2}\tilde{R}_{\bar{\psi}_2 b}\bar{\psi}_2\theta\bar{\psi}_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Предложение 1.5.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- квазигруппы смешанного типа линейности I рода* $x\cdot y=\varphi_1x+c_1+\bar{\psi}_1y$, $x\circ y=\varphi_2x+c_2+\bar{\psi}_2y$, γ *является гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$*:* $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$*. Тогда гомоморфизм* γ *можно представить виде*

$$\gamma=\tilde{L}_{\varphi_2 a}\varphi_2\theta\varphi_1^{-1}=\tilde{L}_{c_2}\tilde{R}_{\bar{\psi}_2 b}\bar{\psi}_2\theta\bar{\psi}_1^{-1}\tilde{L}_{-c_1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

"Симметричные" утверждения верны для случая квазигрупп смешанного типа линейности II рода, а также алинейных слева (справа) квазигрупп.

Предложение 1.5.4. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- квазигруппы смешанного типа линейности II рода* $x\cdot y=\bar\varphi_1 x+c_1+\psi_1 y$, $x\circ y=\bar\varphi_2 x+c_2+\psi_2 y$, γ *является гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$: $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить виде*

$$\gamma=\tilde L_{\bar\varphi_2 a}\bar\varphi_2\theta\bar\varphi_1^{-1}=\tilde L_{c_2}\tilde R_{\psi_2 b}\psi_2\theta\psi_1^{-1}\tilde L_{-c_1}=\tilde L_a\tilde R_b\theta.$$

Предложение 1.5.5. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- алинейные слева над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы :* $x\cdot y=\bar\varphi_1 x+c_1+\beta_1 y$, $x\circ y=\bar\varphi_2 x+c_2+\beta_2 y$, γ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$: $\gamma(x\cdot y)=\gamma x\circ\gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\tilde L_{\bar\varphi_2 a}\bar\varphi_2\theta\bar\varphi_1^{-1}=\tilde L_{c_2}\beta_2\tilde R_b\theta\beta_1^{-1}\tilde L_{-c_1}=\tilde L_a\tilde R_b\theta.$$

Аналогичное утверждение верно для случая алинейных справа квазигрупп.

1.6. Эндотопии и эндоморфизмы парастрофов линейных и алинейных квазигрупп

В данном параграфе получены результаты об гомоморфизмах, эндоморфизмах и эндотопиях некоторых парастрофов линейных квазигрупп.

Теорема 1.6.1. *Пусть* (Q,A) *- линейная квазигруппа:* $A(x,y)=\varphi x+$ $+c+\psi y$, (Q,A^{-1}) *- её парастрофов:* $A^{-1}(x,y)=J\psi^{-1}\varphi x+J\psi^{-1}c+\psi^{-1}y$. *Тогда любая эндотопия квазигруппы* (Q,A^{-1}) *имеет вид:*

$$P=(J\psi^{-1}\varphi\tilde L_a\sigma J\psi\varphi^{-1},\tilde L_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\sigma\psi\tilde L^{-1}_{\psi^{-1}c},\tilde L_a\tilde R_b\sigma),\qquad(1.6.1)$$

где $\tilde L_a x=a+x,\tilde R_b x=x+b$, *левая и правая трансляции группы* $(Q,+)$, $\alpha^{-1}(\psi^{-1})$ *- обратная подстановка (автоморфизм) для* $\alpha(\psi)$.

Доказательство. Пусть (Q, A^{-1}) - парастроф вида $A^{-1}(x, y) = = J\psi^{-1}\varphi x + J\psi^{-1}c + \psi^{-1}y$. Как известно [36], любая эндотопия группы $(Q, +)$ имеет вид:

$$T = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\sigma, \tag{1.6.2}$$

где $\sigma \in End(Q, +), a, b \in Q, \tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$. Далее, в [37] доказано, что если квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ изотопны $\gamma(x \circ y) = \alpha x \cdot \beta y$, $(\circ) = (\cdot)T, T = (\alpha, \beta, \gamma)$, то их полугруппы эндотопий сопряжены.

$$Ent(Q, \cdot) = T^{-1}Ent(Q, \circ)T. \tag{1.6.3}$$

Через $Ent(Q, \cdot)$ и $Ent(Q, \circ)$ обозначены соответственно полугруппы эндотопий квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$. Используя (1.6.2) и (1.6.3), находим общий вид эндотопии квазигруппы $A^{-1}(x, y) = J\psi^{-1}\varphi x + J\psi^{-1}c + \psi^{-1}y$.

Действительно, $A^{-1} = (+)(J\psi^{-1}\varphi, \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}, \varepsilon)$. Если $S \in Ent(Q, \cdot)$, то согласно (1.6.3), $S = (\tilde{L}_a, \tilde{R}_b, \tilde{L}_a\tilde{R}_b)\sigma$, где $\sigma \in End(Q, +), a, b \in Q$. Согласно (1.6.3), для любой $P \in Ent(Q, \cdot)$.

$$P = TST^{-1} = (J\psi^{-1}\varphi, \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}, \varepsilon) \cdot (\tilde{L}_a\sigma, \tilde{R}_b\sigma, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma)\cdot$$

$$\times(J\psi\varphi^{-1}, \psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c}, \varepsilon) = (J\psi^{-1}\varphi\tilde{L}_a\sigma J\psi\varphi^{-1}, \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\sigma\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma).$$

Аналогично, если $(Q,{}^{-1}A)$ - линейная квазигруппа вида ${}^{-1}A(x, y) = = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\psi y$, то любая эндотопия квазигруппы $(Q, \cdot)$ имеет вид:

$$P = (\varphi^{-1}\tilde{L}_a\sigma\varphi, \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi R_b\sigma J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.6.4}$$

Из теорема 1.6.1. подобными рассуждениями получим ряд следствий, доказательство которых считаем нет надобности привести.

Следствие 1.6.1. *Любой эндоморфизм* γ *линейной квазигруппы вида* $A^{-1}(x,y) = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y$ $\quad ({}^{-1}A(x,y) = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\psi y)$, *можно представить в виде:*

$$\gamma = J\psi^{-1}\varphi\tilde{L}_a\sigma J\psi\varphi^{-1} = \tilde{L}_{J\psi^{-1}c}\psi^{-1}\sigma\psi\tilde{L}^{-1}_{\psi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma, \tag{1.6.5}$$

$$(\gamma = \varphi^{-1}\tilde{L}_a\sigma\varphi = \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi R_b\sigma J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.6.6}$$

Следствие 1.6.2. *Пусть* (Q, A^{-1}) *и* $(Q,^{-1}A)$ *- левая и правая линейные квазигруппы вида* $A^{-1}(x,y) = J\beta^{-1}\varphi x + J\beta^{-1}c + \beta^{-1}y$ *и* ${}^{-1}A(x,y) = \varphi^{-1}x + J\varphi^{-1}c + J\varphi^{-1}\alpha y$. *Тогда любая эндотопия квазигрупп* (Q, A^{-1}) *и* $(Q,^{-1}A)$ *имеют вид:*

$$P = (J\beta^{-1}\varphi\tilde{L}_a\sigma J\beta\varphi^{-1}, \tilde{L}_{J\beta^{-1}c}\beta^{-1}\sigma\beta\tilde{L}^{-1}_{\beta^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma), \tag{1.6.7}$$

$$P = (\varphi^{-1}\tilde{L}_a\sigma\varphi, \tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}J\varphi^{-1}\psi\tilde{R}_b\sigma J\varphi\psi^{-1}\tilde{L}_{J\varphi^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.6.8}$$

Следствие 1.6.3. *Любая эндотопия алинейных квазигрупп* $A^{-1}(x,y) = = J\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}x + J\bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}y$ *и* ${}^{-1}A(x,y) = \bar{\varphi}^{-1}x + J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\bar{\psi}y$. *имеют соответственно вид:*

$$P = (J\bar{\psi}^{-1}\bar{\varphi}\tilde{L}_a\sigma J\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}, \tilde{L}_{J\bar{\psi}^{-1}c}\bar{\psi}^{-1}\sigma\bar{\psi}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\psi}^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma), \tag{1.6.9}$$

$$P = (\bar{\varphi}^{-1}\tilde{L}_a\sigma\bar{\varphi}, \tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}J\bar{\varphi}^{-1}\psi\tilde{R}_b\sigma J\bar{\varphi}\bar{\psi}^{-1}\tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.6.10}$$

Следствие 1.6.4. *Любая эндотопия квазигруппы смешанного типа линейности I рода* $A^{-1}(x,y) = J\bar{\psi}^{-1}\varphi x + J\bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}y$ *(соответственно II рода* ${}^{-1}A(x,y) = \bar{\varphi}^{-1}x + J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\psi y$*). имеет вид:*

$$P = (J\bar{\psi}^{-1}\varphi\tilde{L}_a\sigma J\bar{\psi}\varphi^{-1}, \tilde{L}_{J\bar{\psi}^{-1}c}\bar{\psi}^{-1}\sigma\bar{\psi}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\psi}^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma), \tag{1.6.11}$$

$$P = (\bar{\varphi}^{-1}\tilde{L}_a\sigma\bar{\varphi}, \tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}J\bar{\varphi}^{-1}\psi\tilde{R}_b\sigma J\bar{\varphi}\psi^{-1}\tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}, \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma), \tag{1.6.12}$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ *- антиэндоморфизм группы* $(Q,+)$, $\sigma \in Ent(Q,+)$, $a, b \in Q$, $\tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, *левая и правая трансляции группы* $(Q,+)$.

Следствие 1.6.5. *Любой эндоморфизм* γ *квазигруппы смешанного типа линейности I рода* $A^{-1}(x,y) = J\bar{\psi}^{-1}\varphi y + J\bar{\psi}^{-1}c + \bar{\psi}^{-1}y$ *(соответственно II рода* ${}^{-1}A(x,y) = \bar{\varphi}^{-1}x + J\bar{\varphi}^{-1}c + J\bar{\varphi}^{-1}\psi y$*), можно представить в следующем виде:*

$$\gamma = J\bar{\psi}^{-1}\varphi \tilde{L}_a \sigma J\bar{\psi}\varphi^{-1} = \tilde{L}_{J\bar{\psi}^{-1}c}\bar{\psi}^{-1}\sigma\bar{\psi}\tilde{L}^{-1}_{\bar{\psi}^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma), \tag{1.6.13}$$

$$(\gamma = \bar{\varphi}^{-1}\tilde{L}_a\sigma\bar{\varphi} = \tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c}J\bar{\varphi}^{-1}\psi R_b\sigma J\bar{\varphi}\psi^{-1}\tilde{L}_{J\bar{\varphi}^{-1}c} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma). \tag{1.6.14}$$

Теорема 1.6.2. *Пусть* (Q, A^{-1}) *и* (Q, B^{-1}) *парастрофы линейной квазигруппы (Q, A):* $A(x,y) = \varphi x + c + \psi y$, $\gamma \in End(Q,+)$, *где* $A^{-1}(x,y) = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y$, $B^{-1}(x,y) = J\psi_2^{-1}\varphi_2 x + J\psi_2^{-1}c_2 + \psi_2^{-1}y$. *Тогда эндоморфизм* γ *группы* $(Q,+)$ *является гомоморфизмом квазигруппы* (Q, A^{-1}) *в квазигруппу* (Q, B^{-1}) *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma J\psi_1^{-1}\varphi_1 = J\psi_2^{-1}\varphi_2\gamma, \quad \gamma\psi_1^{-1} = \psi_2^{-1}\gamma, \quad \gamma J\psi_1^{-1}c_1 = J\psi_2^{-1}\gamma c_2.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in End(Q,+)$ и $\gamma(x \cdot y) = \gamma x \circ \gamma y$. Тогда

$$\gamma(J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y) = J\psi_2^{-1}\varphi_2\gamma x + J\psi_2^{-1}\gamma c_2 + \psi_2^{-1}\gamma y,$$

$$\gamma J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + \gamma J\psi_1^{-1}c_1 + \gamma\psi_1^{-1}y = J\psi_2^{-1}\varphi_2\gamma x + J\psi_2^{-1}\gamma c_2 + \psi_2^{-1}\gamma y.$$

Положим в последнем равенстве $x = y = 0$: $\gamma J\psi_1^{-1}c_1 = J\psi_2^{-1}\gamma c_2$. Теперь, если $y = 0$, то $\gamma J\psi_1^{-1}\varphi_1 = J\psi_2^{-1}\varphi_2\gamma$, если $x = 0$, то $\gamma\psi_1^{-1} = \psi_2^{-1}\gamma$.

Обратно,

$$\gamma(x \cdot y) = \gamma(J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y) = \gamma J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + \gamma J\psi_1^{-1}c_1 + \gamma\psi_1^{-1}y =$$

$$= J\psi_2^{-1}\varphi_2\gamma x + J\psi_2^{-1}\gamma c_2 + \psi_2^{-1}\gamma y = \gamma x \circ \gamma y.$$

Аналогично, если $(Q,^{-1}A)$ и $(Q,^{-1}B)$ парастрофы линейной квазигруппы (Q, A): $A(x,y) = \varphi x + c + \psi y$, $\gamma \in End(Q,+)$, где $^{-1}A(x,y) =$ $= \varphi_1^{-1}x + J\varphi_1^{-1}c_1 + J\varphi_1^{-1}\psi_1 y$, $\quad B^{-1}(x,y) = \varphi_2^{-1}x + J\varphi_2^{-1}c_2 + J\varphi_2^{-1}\psi_2 y$, то эндоморфизм γ группы $(Q,+)$ является гомоморфизмом квазигруппы $(Q,^{-1}A)$ в квазигруппу $(Q,^{-1}B)$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma J\varphi_1^{-1} = \varphi_2^{-1}\gamma, \quad \gamma J\varphi_1^{-1}\psi = J\varphi_2^{-1}\psi\gamma, \quad \gamma J\varphi_1^{-1}c_1 = J\varphi_2^{-1}\gamma c_2.$$

Предложение 1.6.1. *Пусть* (Q, A^{-1}) *и* (Q, B^{-1}) *- парастрофы линейной над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы* (Q, A)*:* $A(x,y) = \varphi x + c + \psi y$, $A^{-1}(x,y) = J\psi_1^{-1}\varphi_1 x + J\psi_1^{-1}c_1 + \psi_1^{-1}y$, $\quad B^{-1}(x,y) = J\psi_2^{-1}\varphi_2 x + J\psi_2^{-1}c_2 +$ $\psi_2^{-1}y$. γ *- гомоморфизм квазигруппы* (Q, A^{-1}) *в* (Q, B^{-1}), $\gamma(x\cdot y) =$ $= \gamma x \circ \gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma = \tilde{R}_{J\psi_2^{-1}\tilde{L}_a\sigma c_2} J\psi_2^{-1}\varphi_2\tilde{L}_a\sigma J\psi_1\varphi_1^{-1}\tilde{R}^{-1}_{J\psi_1^{-1}c_1} = \psi_2^{-1}\tilde{R}_b\sigma\psi_1 = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma.$$

где $\varphi, \psi, \sigma \in Ent(Q,+), a, b \in Q, \tilde{L}_a x = a + x, \tilde{R}_b x = x + b$, *левая и правая трансляции группы* $(Q,+)$.

Аналогично, если $(Q,^{-1}A)$ и $(Q,^{-1}B)$ - парастрофы линейной над группой $(Q,+)$ квазигруппы (Q,A): $A(x,y) = \varphi x + c + \psi y$, $^{-1}A(x,y) =$ $= \varphi_1^{-1}x + J\varphi_1^{-1}c_1 + J\varphi_1^{-1}\psi_1 y$, $\quad B^{-1}(x,y) = \varphi_2^{-1}x + J\varphi_2^{-1}c_2 + J\varphi_2^{-1}\psi_2 y$. γ - гомоморфизм квазигруппы $(Q,^{-1}A)$ в $(Q,^{-1}B)$ $\gamma(x\cdot y) = \gamma x \circ \gamma y$, то гомоморфизм γ можно представить в виде

$$\gamma = \tilde{R}_{J\varphi_2^{-1}\tilde{L}_a\sigma c_2}\varphi_2^{-1}\tilde{L}_a\sigma\varphi_1\tilde{R}^{-1}_{J\varphi_1^{-1}c_1} = J\varphi_2^{-1}\psi_2\tilde{R}_b\sigma J\varphi_1\psi_1^{-1} = \tilde{L}_a\tilde{R}_b\sigma.$$

1.7. Порядок элемента и обобщение идемпотентного элемента в квазигруппах

Понятие порядок элемента для произвольных неассоциативных алгебраических структур разными авторами определены различными вариантами. Но общая идея, общий подход единый. Например, В.А.Шербаковым в работе [36] введено понятие (m, n) - элемента квазигруппы, где m, n - произвольные конечные натуральные числа. Более того, введены классы (m, n) - линейных и (m, n) - Т-квазигрупп. Ввиду отсутствие единичного элемента и закона ассоциативности в квазигруппах имеются различные подходы к определению порядка элемента в квазигруппах. М.М.Чобан и Л.Л.Кирияк в работе [37] ввели понятие (m, n) - единичного элемента и изучали топологические медиальные квазигруппы с (m, n) - единичным элементом. Известно, что всякая лупа Муфанг является диассоциативной, то есть произвольные два элемента лупы порождают подгруппу, левая лупа Бола является степенно ассоциативной, то есть любой элемент порождает подгруппу [7]. Порядок элемента степенно ассоциативной лупы $(Q, \cdot)$ определяется как обычное понятие порядка элемента в группах [7].

Определение 1.7.1. [7] *Порядок элемента x степенно ассоциативной лупы $(Q, \cdot)$ называется порядок циклической группы $< x >$, которая порождается этим элементом.*

В.А.Шербаковым предложен естественное обобщение понятие порядка элемента в квазигруппах.

Определение 1.7.2. [36] *Элемент x квазигруппы $(Q, \cdot)$ имеет порядок (m, n), если существуют натуральные числа m и n, такие, что*

$L_x^m = R_x^n = \varepsilon$ и для произвольных m_1, n_1, где $1 \le m_1 < n$, $1 \le n_1 < n$, элемент x неявляется (m_1, n_1) - элементом, где L_x и R_x элементы мультипликативной группы $M(Q, \cdot)$ квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Замечание.. Из определения 1.7.2 следует, что элемент L_x группы $M(Q, \cdot)$ имеет порядок m и элемент R_x имеет порядок n. Поэтому название (m, n) - порядок элемента можно интерпретировать как (L, R) порядок или двусторонний порядок элемента x.

В теории неассоциативных колец [38], используют левое (правое) порядок элементов, а именно: $(...(((x_1x_2)x_3)x_4)...)$ и $(...(x_4(x_3(x_2x_1)...)$. Поэтому, естественным образом предложено понятие порядок элемента (или обобщение понятия идемпотентного элемента).

Определение 1.7.3. *Элемент x называется идемпотентым, если $x^2 = x$.*

По индукции определяется правый (левый) идемпотентый элемент степени $n(m)$, где $n, m \in N$.

Определение 1.7.4. *Элемент x называется правым идемпотентным степени n, если*

$$\underbrace{(...((x \cdot x) \cdot x) \cdot x...x) \cdot x}_{n-\text{раз}} = x, \tag{1.7.1}$$

Симметрично определяется левой идемпотентной элемент степени m

$$\underbrace{x \cdot (...x \cdot (x \cdot x))...)}_{m-\text{раз}} = x. \tag{1.7.2}$$

При $n = m = 2$ получим $x^2 = x$ обычное понятие идемтпотентного элемента в полугруппах, квазигруппах и т.д.

Для краткости тождества (1.7.1) и (1.7.2) обозначим следующим образом:

$$x^{[n]} = \underbrace{(...((x \cdot x) \cdot x) \cdot x...x) \cdot x}_{n-\text{раз}} = x,$$

Аналогично

$$^{[m]}x = \underbrace{x \cdot (...x \cdot (x \cdot x))...)}_{m-\text{раз}} = x.$$

Таким образом имеем

$$x^{[n]} = x \tag{1.7.3}$$

$$^{[m]}x = x \tag{1.7.4}$$

Если для элемента x выполняется одновременно тождества (1.7.3) и (1.7.4), то элемент x называется *идемтпотентным степени* (n, m).

Пример. Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа 4-того порядка $Q = \{a, b, c, d\}$ со следующей таблицей умножения

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	d	c	b	a
d	b	a	d	c

легко проверить, что $[a]^4 = a$, $[b]^4 = b$, $[c]^4 = c$, $[d]^4 = d$. то есть. $[x]^4 = x, \forall x \in Q$.

Далее $^{[4]}a = a$, $^{[4]}b \neq b$, $^{[3]}c = c$, $^{[3]}d = d$, *то есть* $[a]^4 =^{[4]} a = a$.

Таким образом $\forall x \in Q$, $x = \{b, c, d\}$, $[x]^3 =^{[4]} x = x$, $^{[3]}b = b$, $^{[3]}b = b^{[4]} = b$, $^{[3]}d = d$, $^{[4]}d \neq d$.Элемент a является идемпотентным элементом степени (4,4), элементы b, c, d идемпотентные элементы степени (3,4).

Исследуем характер идемпотентого элемента степени (m,n) при морфизмах квазигрупп.

Пусть $x^{[n]}=x$, $y^{[n]}=y$ - две правоидемпотентные элементы степени n, где $n\in N$ квазигруппы $(Q,\cdot)$, φ- автоморфизм $(Q,\cdot)$, то есть $\varphi\in Aut(Q,\cdot)$.

Тогда $\varphi(x^{[n]}\cdot y^{[n]})=\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)=\varphi(x^{[n]})\cdot\varphi(y^{[n]})=$

$$=\varphi(x^{[n-1]}\cdot x)\cdot\varphi(y^{[n-1]}\cdot y)=[\varphi(x^{[n-1]})\cdot\varphi(x)]\cdot[\varphi(y^{[n-1]})\cdot\varphi(y)]=$$

$$=[(\varphi(x^{[n-2]}\cdot x))\cdot\varphi(x)]\cdot[(\varphi(y^{[n-2]}\cdot y))\cdot\varphi(y)]=$$

$$=[[\varphi(x^{[n-2]})\cdot\varphi(x)]\cdot\varphi(x)]\cdot[[\varphi(y^{[n-1]})\cdot\varphi(y)]\cdot\varphi(y)]=$$

$$=\ldots=\underbrace{[\ldots[\ldots[\varphi(x)\cdot\varphi(x)]\cdot\varphi(x)]\ldots\varphi(x)]}_{n-\text{раз}}\cdot[\ldots[\underbrace{[\varphi(y)\cdot\varphi(y)]\cdot\varphi(y)]\ldots}_{n-\text{раз}}]=$$

$=\varphi(x)^{[n]}\cdot\varphi(y)^{[n]}$.

то есть

$$\varphi(x^{[n]}\cdot y^{[n]})=\varphi(x)^{[n]}\cdot\varphi(y)^{[n]}.$$

Аналогично, можно доказать, что

$$\varphi(^{[k]}x\ {}^{[k]}\!\cdot\ y)={}^{[k]}\varphi(x)\ {}^{[k]}\!\cdot\ \varphi(y).$$

Пусть φ - гомоморфизм квазигруппы $(Q,\cdot)$ на квазигруппу $(Q,\circ)$. Тогда индукции по n, где $n\in N$ можно доказать что

$$\varphi(x^{[n]})=(\varphi(x))^{[n]}, \tag{1.5.5}$$

или

$$\varphi(^{[k]}x)={}^{[k]}(\varphi(x)), \tag{1.7.6}$$

Доказательство легко проводится индукцией по n.

Действительно, пусть $\varphi{:}(Q,\cdot) \to (Q,\circ)$ гомоморфизм квазигруппы $(Q,\cdot)$ на квазигрупу $(Q,\circ)$, то есть $\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\circ\varphi(y)$ и x правоидемпотентный элемент ступени $n, x^{[n]} = x$.

Справедливость равенства (1.7.5) проверяется методом математической индукции.

Пусть 1) $n = 2, x^2 = x,\ x\cdot x = x$.

$$\varphi(x^2) = \varphi(x\cdot x) = \varphi(x)\circ\varphi(x) = (\varphi(x))^2.$$

2) $n = 3, x^3 = x^2\cdot x = (x\cdot x)\cdot x = x$.

$$\varphi(x^3) = \varphi(x^2\cdot x) = \varphi(x^2)\circ\varphi(x) = (\varphi(x))^2\circ\varphi(x) = (\varphi(x))^3.$$

3) $n = k, \varphi(x^k) = \varphi(x^{k-1}\cdot x) = \varphi(x^{k-1})\circ\varphi(x) = (\varphi(x))^{k-1}\circ\varphi(x) = $ $= (\varphi(x))^k$.

$$\varphi(x^{[k]}) = (\varphi(x))^{[k]}.$$

Глава 2

Задача В.Д. Белоусова для некоторых классов линейных квазигрупп

2.1. Решение проблемы В.Д.Белоусова для класса $BG-$квазигрупп

Задача изучения (нормальных) конгруэнций или вообще подалгебр, структура решетки конгруэнций является важной и трудной для различных алгебраических структур. Данная задача для различных классов групп, полугрупп, колец и т.д. решены. В теории квазигрупп задача определения нормальных конгруэнций для различных классов квазигрупп поставлена В.Д.Белоусовым в его монографии [7]. Постановка задачи следующая: *каковы квазигруппы или лупы в которых все конгруэнции являются нормальными?* (Проблема 20, с.221 из [7]). Для многих классов квазигрупп данная задача решена, а именно: $IP-$квазигруппы, $TS-$квазигруппы, $CH-$квазигруппы и квазигруппы Штейнера. В конечной квазигруппе каждая конгруэнция нормальна.

Приводим необходимые определения и некоторые сведения. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ со свойством обратимости называется $IP-$*квазигруппой* если в ней выполняются следующие соотношения $\lambda x \cdot (x \cdot y) = y, (x \cdot y) \cdot \rho y = x$, где λ, ρ - некоторые подстановки множества Q. Сушествует также другое определение. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ с тождествами $x \cdot y = y \cdot x, x \cdot (x \cdot y) = y$, $(x \cdot y) \cdot y = x$ называется $IP-$*квазигруппой.* Если в квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется тождество $xy \cdot uv = xu \cdot yv$, то $(Q, \cdot)$ называют *медиальной* *квазигруппой.* Согласно теоремы Брака-Тойоды [7] медиальную квазигруппу $(Q,\cdot)$ можно представить в следующем виде:

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$$

где $(Q,+)$ - коммутативная группа, φ и ψ автоморфизмы группы $(Q,+)$, такие что $\varphi\psi = \psi\varphi$, с - фиксированный элемент множества Q.

$CH-$*квазигруппой* называется квазигруппа с тождествами $xy = yx$, $x \cdot (x \cdot y) = y$, любые три элемента которой порождают медиальную подквазигруппу. Заметим что $CH-$квазигруппы введены Ю.И.Маниным в связи с исследованием кубических гиперповерхностей [8].

Отношение эквивалентности θ множества Q называется *конгруэнцией* в квазигруппе $(Q,\cdot)$, если из $a\theta b$ следует $ac\theta bc$ и $ca\theta cb$ для любых $a,b,c \in Q$. Конгруэнция θ называется нормальной, если из $ac\theta bc$ как и из $ca\theta cb$ следует $a\theta b$.

В.А.Щербаковым в [39] найдены необходимые и достаточное условия нормальности конгруэнции квазигруппы в терминах подгруппы мультипликативной группы $(MQ,\cdot)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$. Следует отметить что с каждой квазигруппой $(Q,\cdot)$ связана некоторая группа $M(Q,\cdot)$, следующим образом. Из уравнений $ax = b, ya = b$ следует $L_a x = b, R_a y = b$. Подстановки L_a, R_a множества Q относительно операции умножения подстановок образуют группу $M(Q,\cdot)$, которая называется мультипликативной группой квазигруппы $(Q,\cdot)$, то есть,

$$M(Q,\cdot) = \langle L_a, R_a \mid L_a x = b, R_a y = b, \forall x, y \in Q\rangle.$$

Группу $M(Q,\cdot)$, в литературе называют также группой умножения или ассоциированный группы для квазигруппы $(Q,\cdot)$.

В работе [40] доказано, что в линейной квазигруппе $(Q,\cdot)$: $x\cdot y = = \varphi x + c + \psi y$, где автоморфизмы φ и ψ имеют конечные порядки, всякая конгруэнция является нормальной.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *линейной слева (справа)* над группой $(Q,+)$, если она имеет вид $xy = \varphi x + c + \beta y$ $(xy = \alpha x + c + \psi y)$, где β (соответственно α) - подстановка множества Q, $\varphi \in Aut(Q,+)$ $(\psi \in Aut(Q,+))$. Если квазигруппа одновременно является линейной слева и линейной справа, то такую квазигруппу называют *линейной квазигруппой* [41].

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называются *квазигруппой Бола*, если в ней выполняются следующие тождества

$$x\cdot(y\cdot(x\cdot t)) = R^{-1}_{e_x}(x\cdot(y\cdot x))\cdot t \tag{2.1.1}$$

$$((t\cdot x)\cdot y)\cdot x = t\cdot L^{-1}_{f_x}((x\cdot y)\cdot x) \tag{2.1.2}$$

для любых $x, y, t \in Q$, где $xe_x = x, f_x x = x, L_a x = ax, R_a x = xa$, $L^{-1}_a x = a\backslash x, R^{-1}_a x = x/a$, для всех $a, x \in Q$.

Теорема 2.1.1. *Пусть $(Q,\cdot)$ - линейная слева квазигруппа $x\cdot y = = \varphi x + \beta y$ с условием $\varphi^2 = \varepsilon$. Тогда в $(Q,\cdot)$ выполняется правое тождество Бола, то есть $(Q,\cdot)$ является правой квазигруппой Бола.*

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ - линейная слева квазигруппа $x\cdot y = = \varphi x + \beta y$, с условием $\varphi^2 = \varepsilon$. Из равенства $x\cdot y = \varphi x + \beta y$ имеем: $L_y x = L^+_{\varphi x}\beta y$, где $L_y x = yx$, $L^+_y x = y + x$. Далее, $f_x x = x$ или $\varphi f_x + \beta x = = x, \varphi f_x = x - \beta x$, $L_{f_x} x = L^+_{-\varphi f x}\beta x$ или $L^{-1}_{f_x} x = \beta^{-1} L^+_{-\varphi f_x} x$.

Учитывая полученные соотношения переходим в равенстве (2.1.2) к групповой операции:

$$((t \cdot x) \cdot y) \cdot x = \varphi((t \cdot x) \cdot y) + \beta x = \varphi(\varphi(\varphi t + \beta x) + \beta y) + \beta x =$$

$$= \varphi^3 t + \varphi^2 \beta x + \varphi \beta y + \beta x = \varphi t + \beta x + \varphi \beta y + \beta x.$$

$$t \cdot L_{f_x}^{-1}((x \cdot y) \cdot x) = \varphi t + \beta L_{f_x}^{-1}(\varphi(\varphi x + \beta y) + \beta x) =$$

$$= \varphi t + \beta \beta^{-1} L_{-\varphi f_x}^{+}(\varphi^2 x + \varphi \beta y) + \beta x =$$

$$= \varphi t - \varphi f_x + \varphi^2 x + \varphi \beta y + \beta x = \varphi t - (x - \beta x) + \varphi^2 x + \varphi \beta y + \beta x =$$

$$= \varphi t + \beta x - x + x + \varphi \beta y + \beta x = \varphi t + \beta x + \varphi \beta y + \beta x.$$

то есть в линейной квазигруппе $(Q, \cdot)$ с условием $\varphi^2 = \varepsilon$ выполняется правое тождество Бола.

Теорема 2.1.2. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная справа квазигруппа $x \cdot y = \alpha x + \psi y$ с условием $\psi^2 = \varepsilon$. Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняется левое тождество Бола, то есть $(Q, \cdot)$ является левой квазигруппой Бола.*

Теорема 2.1.3. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная квазигруппа $x \cdot y = \varphi x + \psi y$, с условием $\varphi^2 = \psi^2 = \varepsilon$. Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества Бола, то есть $(Q, \cdot)$ является квазигруппой Бола.*

Доказательство. Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная квазигруппа $x \cdot y = \varphi x + \psi y$, с условием $\varphi^2 = \psi^2 = \varepsilon$. Из равенства $xy = \varphi x + \psi y$ имеем: $R_y x = R_{\psi y}^{+} \varphi x$, где $R_y x = xy$, $R_y^{+} x = x + y$. Далее, $x e_x = x$ или $\varphi x + \psi e_x = x$, $\psi e_x = -\varphi x + x$, $R_{e_x} x = R_{\psi e_x}^{+} \varphi x$, или $R_{e_x}^{-1} x = \varphi^{-1} R_{-\psi e_x}^{+} x$.

Учитывая полученные соотношения переходим в равенстве (2.1.1) к групповой операции:

$$x \cdot ((y \cdot (x \cdot t)) = \varphi x + \psi(\varphi y + \psi(\varphi x + \psi t)) = \varphi x + \psi \varphi y + \psi^2 \varphi x + \psi^3 t =$$

$$= \varphi x + \psi\varphi y + \varphi x + \psi t.$$

$$R_{e_x}^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t = \varphi R_{e_x}^{-1}(\varphi x + \psi(\varphi y + \psi x)) + \psi t =$$

$$= \varphi\varphi^{-1} R_{-\psi e_x}^{+}(\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 x) + \psi t =$$

$$= \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 x - \psi e_x + \psi t = \varphi x + \psi\varphi y + x - (-\varphi x + x) + \psi t =$$

$$= \varphi x + \psi\varphi y + x - x + \varphi x + \psi t = \varphi x + \psi\varphi y + \varphi x + \psi t.$$

Таким образом в линейной квазигруппе $(Q, \cdot)$ с условием $\psi^2 = \varepsilon$ выполняется левое тождество Бола, то есть тождество (2.1.1).

Переходим в равенстве (2.1.2) к групповой операции:

$$((t \cdot x) \cdot y)) \cdot x = \varphi((t \cdot x) \cdot y) + \psi x = \varphi(\varphi(\varphi t + \psi x) + \psi y) + \psi x =$$

$$= \varphi^3 t + \varphi^2 \psi x + \varphi\psi y + \psi x = \varphi t + \psi x + \varphi\psi y + \psi x.$$

$$t \cdot L_{f_x}^{-1}((x \cdot y) \cdot x) = \varphi t + \psi L_{f_x}^{-1}(\varphi(\varphi x + \psi y) + \psi x) =$$

$$= \varphi t + \psi\psi^{-1} L_{-\psi f_x}^{+}(\varphi(\varphi x + \psi y) + \psi x) =$$

$$= \varphi t - \varphi f_x + \varphi^2 x + \varphi\psi y + \psi x = \varphi t - (x - \psi x) + \varphi^2 x + \varphi\psi y + \psi x =$$

$$= \varphi t + \psi x - x + x + \varphi\psi y + \psi x = \varphi t + \psi x + \varphi\psi y + \psi x.$$

Это значит, что в линейной квазигруппе $(Q, \cdot)$ с условием $\varphi^2 = \varepsilon$ выполняется правое тождество Бола, то есть тождество (2.1.2).

Таким образом, если $(Q, \cdot)$ - линейная квазигруппа с условием $\varphi^2 = \psi^2 = \varepsilon$, то $(Q, \cdot)$ является квазигруппой Бола. В [40] доказано, что в линейной квазигруппе $(Q, \cdot)$ с условием $\varphi^n = \psi^m = \varepsilon$, где n, m - конечные натуральные числа, всякая конгруэнция является нормальной. Следовательно, в линейной квазигруппе с тождествами Бола всякая конгруэнция является нормальной. Для краткости, линейную квазигруппу с тождествами Бола назовем $BG-$*квазигруппой.*

Следствие 2.1.1. *Всякая конгруэнция $BG-$квазигруппы является нормальной конгруэнцией .*

Данное утверждение верно также для случая смешанных типов квазигрупп I и II родов.

Теорема 2.1.4. *Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа смешанного типа линейности I рода: $x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y$ с условием $\varphi^2 = \varepsilon$ (II рода $x \cdot y = \bar{\varphi} x + \psi y$ с условии $\psi^2 = \varepsilon$.) Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняется правое (левое) тождество Бола, то есть $(Q, \cdot)$ является правой (левой) квазигруппой Бола.*

Следствие 2.1.2. *В квазигруппах смешанного типа линейности I, II рода с условием $\varphi^2 = \varepsilon$ или $\psi^2 = \varepsilon$ всякая конгруэнция являются нормальной*

Полученные результаты являются решением задачи В.Д.Белоусова для вышеназванных классов квазигрупп.

2.2. О нормальности конгруэнций линейных слева (справа) квазигрупп

Пусть Q непустое множестве. Под бинарным отношением множества Q подразумевается подмножество прямого произведения $Q \times Q$ [42]. Обычно бинарное отношение обозначается греческими или латинскими шрифтами α, β, γ и т.д. Если α и β две бинарные отношения на множестве Q, то произведение $\alpha \circ \gamma$ определяется следующим образом: $(a, b) \in \alpha \circ \gamma$, если существует элемент $(c) \in Q$, такое что $(a, c) \in \alpha$ и $(c, b) \in \beta$. Если α бинарное отношение на множестве Q, то $\alpha^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in \varphi\}$. Очевидно, что операция бинарное отношение ассоциативна. Бинарное отношение

α на множестве Q называется рефлексивным, если $(a, a) \in \alpha, \forall a \in Q$, симметричным, если из $(a, b) \in \alpha$ следует $(b, a) \in \alpha$ и транзитивным, если из $(a, b) \in \alpha$ и $(b, c) \in \alpha$ следует $(a, c) \in \alpha, \forall a, b, c \in Q$.

Бинарное отношение α называется *эквиваленцией*, если α является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Другими словами, если $\varepsilon \subseteq \alpha,\ \alpha^{-1} = \alpha,\ \alpha^2 = \alpha$, где $\varepsilon = \{(a, a) | a \in Q\}$. Известно, что эквивалентное отношение на множестве Q разделяет Q на классы эквивалентности, такие что если H_i и H_j две класса эквивалентности, то $H_i \cap H_j \neq \oslash$, $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = Q$, если $|Q| = n$.

Если класс эквивалентности α содержит элемент $a \in Q$, то это обозначается следующим образом: $\alpha(a)$.

Определение 2.2.1. [24] *Отношение эквивалентности θ множества Q называется левой конгруэнцией в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $a\theta b$ следует $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 2.2.2. [24] *Отношение эквивалентности θ множества Q называется правой конгруэнцией в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $a\theta b$ следует $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 2.2.3. [24] *Отношение эквивалентности θ множества Q называется конгруэнцией в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $a\theta b$ следует $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ и $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 2.2.4. [24] *Конгруэнция θ называется левой нормальной в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ следует $a\theta b$, для любых $a, b, c \in Q$.*

Определение 2.2.5. [24] *Конгруэнция* θ *называется правой нормальной в квазигруппе* $(Q, \cdot)$, *если из* $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ *следует* $a\theta b$, *для любых* $a, b, c \in Q$.

Определение 2.2.6. [24] *Конгруэнция* θ *называется нормальной в квазигруппе* $(Q, \cdot)$, *если из* $(a \cdot c)\theta(b \cdot c)$ *как и из* $(c \cdot a)\theta(c \cdot b)$ *следует* $a\theta b$, *для любых* $a, b, c \in Q$.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *- линейная слева квазигруппа:*

$$x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$$

η *- конгруэнция группы* $(Q, +)$ *и* $\varphi|Ker\eta$ *- сужение автоморфизма* φ *на группу* $Ker\eta$. *Тогда* η *- конгруэнция квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi|Ker\eta$ *- эндоморфизм группы* $Ker\eta$. *Далее* η *- нормальная конгруэнция на* $(Q, \cdot)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi|Ker\eta$ *автоморфизм группы* $Ker\eta$.

Доказательство. Заметим, что údaння теорема доказывается аналогичными рассуждениями как и для случая T-квазигруппы, линейной квазигруппы, доказанная в [5, 40]. Приведем его для случая линейных слева квазигрупп.

Итак, пусть η - конгруэнция группы $(Q, +)$. Покажем, что $\varphi|Ker\eta$ - эндоморфизмы группы $Ker\eta$. Пусть $d\eta 0$, то есть $d \in Ker\eta$. Тогда $d \cdot \beta^{-1}(-c)\eta 0 \cdot \beta^{-1}(-c)$. Но $d \cdot \beta^{-1}(-c) = \varphi d + c - c = \varphi d$, $0 \cdot \beta^{-1}(-c) =$ $= \varphi 0 + c - c = 0$. Следовательно $\varphi d \eta 0$, то есть $\varphi d \in Ker\eta$.

Пусть $\varphi|Ker\eta$ - эндоморфизмы группы $Ker\eta$. Покажем, что η - конгруэнция квазигруппы $(Q, \cdot)$. Пусть $l\eta d$, где $l, d, \in Q$.

Тогда $(l - d)\eta 0$ и $\varphi(l - d)\eta 0$, а следовательно $\varphi l \eta \varphi d$.

Так как η - конгруэнция группы $(Q,+)$ и $c\eta c$, где $c \in Q$, то $(\varphi p + c)\eta(\varphi b + c)$. Откуда $(\varphi p + c + \psi q)\eta(\varphi b + c + \psi d)$ или $(pq)\eta(bd)$, то есть η - конгруэнция квазигруппы $(Q,\cdot)$.

Допустим, что η - нормальная конгруэнция на $(Q,\cdot)$. Покажем, что $\varphi|Ker\eta = \varphi_1 \in AutKer\eta$. По условию $\varphi|Ker\eta = \varphi_1 \in EndKer\eta$. Достаточно показать, что $\varphi_1^{-1} \in EndKer\eta$. Пусть $d \in Ker\eta$, то есть $d\eta 0$ и $d = \varphi b$. Так как $\varphi b = b\cdot\beta^{-1}(-c), \quad 0 = 0\cdot\beta^{-1}(-c)$, то $b\eta 0$, то есть $\varphi^{-1}d\eta 0$.

Пусть теперь $\varphi|Ker\eta \in AutKer\eta$. Покажем, что η - нормальная конгруэнция на $(Q,\cdot)$. Как известно, в группе $(Q,+)$ каждая конгруэнция нормальна. Пусть $(pb)\eta(qd), p\eta q$. Тогда $(\varphi p + c + \beta b)\eta(\varphi q + c + \beta d)$, откуда $\beta b\eta\beta d$, так как $\varphi p\eta\varphi q$.

Аналогично устанавливается, что $pb\eta qd$ влечет $p\eta q$, если $b\eta d$.

Теорема доказана.

"Симметрично" теорема доказывается для случая линейных справа квазигрупп.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- линейная слева (справа) квазигруппа:*

$$x\cdot y = \varphi x + c + \beta y \quad (x\cdot y = \alpha x + c + \psi y)$$

причем φ (ψ) *имеет конечный порядок, тогда каждая конгруэнция на* $(Q,\cdot)$ *нормальна.*

Доказательство. Пусть η - конгруэнция квазигруппы $(Q,\cdot)$ и $\varphi^n = \varepsilon$ где n - натуральное число. Пусть $d\eta l$. Очевидно, что $d\cdot\beta^{-1}(-c)\eta l\cdot\beta^{-1}(-c)$, следовательно $\varphi d\eta\varphi l$. Поэтому $\varphi^{n-1}d\eta\varphi^{n-1}l$. Но $\varphi^{n-1} = \varphi^{-1}$, так что $\varphi^{-1}d\eta\varphi^{-1}l$. Пусть k - произвольный элемент из Q. Тогда $\varphi^{-1}d\cdot\beta^{-1}(-c+k)\eta\varphi^{-1}l\cdot\beta^{-1}(-c+k)$, Следовательно $(d+k)\eta(l+k)$. Поэтому η

- конгруэнция группы $(Q,+)$. По теорема 2.2.1 $\varphi|Ker\eta$ - эндоморфизмы группы $Ker\eta$. Так как $\varphi^n = \varepsilon$ то $\varphi|Ker\eta$ - автоморфизмы группы $Ker\eta$. По теорема 2.2.1 η - нормальна на $(Q,\cdot)$.

Аналогично теорема доказывается для случая линейной справа квазигруппы.

Замечание. Теорема 2.2.2 является решением задачи В.Д. Белоусова для класса линейных слева (справа) квазигрупп.

2.3. Описание класса линейных А-квазигрупп тождествами

Известно [7], что квазигруппу можно определить как алгебру $(Q,\cdot,/,\backslash)$ с тремя бинарными операциями $(\cdot),(/)$ и $(\backslash)$, в которой выполняются следующие тождества:

$$x\cdot(x\backslash y) = y, \quad (y/x)\cdot x = y \tag{2.3.1}$$

$$x\backslash(x\cdot y) = y, \quad (y\cdot x)/x = y \tag{2.3.2}$$

В литературе квазигруппу $(Q,\cdot,/,\backslash)$ называют также *примитивной квазигруппой* или ε - *квазигруппой* (см.[20])

Г.Б. Белявская и А.Х.Табаров в работах [6,31] изучали различные обобщения линейных квазигрупп, а именно, полулинейные, алинейные, смешанные типы линейности квазигрупп.

Автоморфизм φ группы $(Q,+)$ называется внутренним автоморфизмом относительно элемента $a\in Q$ если $\varphi_a(x) = a+x-a$. Как известно [42] все внутренние автоморфизмы группы $(Q,+)$ образуют группу относительно операции умножения автоморфизмов, которая обозначается через $Int(Q,+)$. Очевидно, $Int(Q,+) \trianglelefteq Aut(Q,+)$, где $Aut(Q,+)$ - группа автоморфизмов группы $(Q,+)$. Если группа $(Q,+)$ - коммутативная, то $Int(Q,+) = Aut(Q,+)$.

Определение 2.3.1. *Подстановка α множества Q называется внутренной подстановкой относительно элемента $h \in Q$ если*
$\alpha(h) = h$.

Очевидно, что все внуренные подстановки квазигруппы $(Q,\cdot)$ образуют группу, которую обозначим через $I_h(Q,\cdot)$.

Р.Брак в работе [43] ввел так называемый класс $A-$луп, то есть лупы, в которых все внутрунные подстановки относительно единицы лупы е являются автоморфизмами, другими словами если $I_e(Q,\circ) \trianglelefteq Aut(Q,\circ)$.

По аналогии с $A-$лупами Китороагэ в работе [44] ввела и подробно исследовала класс $A-$квазигрупп.

Определение 2.3.2. *Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется А-квазигруппой, если $Int(Q,\cdot) \trianglelefteq Aut(Q,\cdot)$, то есть все внутренные подстановки являются автоморфизмами $(Q,\cdot)$.*

В [18] доказано, что группа $I_h(Q,\cdot)$ порождается следующими подстановками $R_{x,y}$, $L_{x,y}$ и T_x, где $R_{x,y} = R^{-1}_{x\bullet y}R_yR_x$, $L_{x,y} = L^{-1}_{x\circ y}L_xL_y$, $T_x = L^{-1}_{\sigma x}R_x$, $x \bullet y = L^{-1}_h(hx \cdot y)$, $x \circ y = R^{-1}_h(x \cdot yh)$, $\sigma = R^{-1}_h L_h$, $R_a x = xa, L_a y = ay$, то есть

$$I_h(Q,\cdot) =< R_{x,y}, L_{x,y}, T_x > \qquad (2.3.3)$$

Теорема 2.3.1. *Квазигруппа $(Q,\cdot)$ является А-квазигруппой, если в примитивной квазигруппе $(Q,\cdot,/,\backslash)$ выполняются следующие соотно-*

шения:

$$(((z_1z_2)x)y)/(h\backslash(hx\cdot y)) =$$

$$= ((z_1x\cdot y)/(h\backslash(hx\cdot y)))\cdot((z_2x\cdot y/(h\backslash(hx\cdot y))), \tag{2.3.4}$$

$$((x\cdot yh)/h)\backslash(x(y(z_1z_2))) =$$

$$= (((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_1))\cdot(((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_2)), \tag{2.3.5}$$

$$(hx/h)/h)\backslash((z_1z_2)x) = ((hx/h)\backslash((z_1x))\cdot((hx/h)\backslash((z_2x)). \tag{2.3.6}$$

Доказательство. По определению $I_h(Q,\cdot) =< R_{x,y}, L_{x,y}, T_x >$ $\trianglelefteq Aut(Q,\cdot)$. Это значить, что

$$R_{x,y}(z_1z_2) = R_{x,y}(z_1)\cdot R_{x,y}(z_2), \tag{2.3.7}$$

$$L_{x,y}(z_1z_2) = L_{x,y}(z_1)\cdot L_{x,y}(z_2), \tag{2.3.8}$$

$$T_x(z_1z_2) = T_x(z_1)\cdot T_x(z_2), \tag{2.3.9}$$

где z_1, z_2 - произвольные элементы квазигруппы $(Q,\cdot)$. Поэтапно раскрывая равенства (2.3.7), (2.3.8) и (2.3.9), получим:

$$R_{x,y}(z_1z_2) = R^{-1}_{x\bullet y}R_yR_x(z_1z_2) = R^{-1}_{x\bullet y}(((z_1z_2)x)y) = (((z_1z_2)x)y)/(x\bullet y) =$$

$$= (((z_1z_2)x)y)/L_h^{-1}(hx\cdot y) = (((z_1z_2)x)y)/(h\backslash(hx\cdot y)).$$

$$R_{x,y}(z_1)\cdot R_{x,y}(z_2) = R^{-1}_{x\bullet y}R_yR_x(z_1)\cdot R^{-1}_{x\bullet y}R_yR_x(z_2) =$$

$$= R^{-1}_{x\bullet y}(z_1x\cdot y)\cdot R^{-1}_{x\bullet y}(z_2x\cdot y) = ((z_1x\cdot y)(x\bullet y))\cdot((z_2x\cdot y)(x\bullet y) =$$

$$= ((z_1x\cdot y)/L_h^{-1}(hx\cdot y))\cdot((z_2x\cdot y)/L_h^{-1}(hx\cdot y)) =$$

$$= ((z_1x\cdot y)/(h\backslash(hx\cdot y)))\cdot((z_2x\cdot y)/(h\backslash(hx\cdot y))).$$

Из равенства (2.3.8) имеем:

$$L_{x,y}(z_1z_2) = L^{-1}_{x\circ y}L_xL_y(z_1z_2) = L^{-1}_{x\circ y}(x(y(z_1z_2))) = (x\circ y)\backslash(x(y(z_1z_2))) =$$

$$= R_h^{-1}(x\cdot yh)\backslash(x(y(z_1z_2))) = ((x\cdot yh)/h)\backslash(x(y(z_1z_2))).$$

$$L_{x,y}(z_1)\cdot L_{x,y}(z_2) = L^{-1}_{x\circ y}L_xL_y(z_1)\cdot L^{-1}_{x\circ y}L_xL_y(z_2) = L^{-1}_{x\circ y}(x\cdot yz_1)\cdot L^{-1}_{x\circ y}(x\cdot yz_2) =$$

$$= ((x\circ y)\backslash(x\cdot yz_1))\cdot((x\circ y)\backslash(x\cdot yz_2)) =$$

$$= (R_h^{-1}(x\cdot yh)\backslash(x\cdot yz_1))\cdot(R_h^{-1}(x\cdot yh)\backslash(x\cdot yz_2)) =$$

$$= (((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_1))\cdot(((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_2)).$$

Аналогично из равенства (2.3.9) получим:

$$T_x(z_1z_2) = L^{-1}_{\sigma x}R_x(z_1z_2) = L^{-1}_{\sigma x}(z_1z_2)x = \sigma x\backslash((z_1z_2)x) = R_h^{-1}L_hx\backslash(z_1z_2)x =$$

$$= R_h^{-1}(hx)\backslash((z_1z_2)x) = (hx/h)\backslash((z_1z_2)x).$$

$$T_x(z_1\cdot z_2) = L^{-1}_{\sigma x}R_x(z_1)\cdot L^{-1}_{\sigma x}R_x(z_2) = L^{-1}_{\sigma x}(z_1x)\cdot L^{-1}_{\sigma x}(z_2x) =$$

$$= \sigma x\backslash(z_1x)\cdot\sigma x\backslash(z_2x) = R_h^{-1}L_hx\backslash(z_1x)\cdot R_h^{-1}L_hx\backslash(z_2x) =$$

$$= R_h^{-1}(hx)\backslash(z_1x) = R_h^{-1}(hx)\backslash(z_2x) = ((hx/h)\backslash(z_1x))\cdot((hx/h)\backslash(z_2x)).$$

В.А Щербаковым (см [13]) найдена другая система порождающих для $I_h(Q,\cdot)$, а именно: $I_h(Q,\cdot) =< L_{x,y},\ T_{x,y}, P_{x,y} >,\ L_{x,y} = L^{-1}_{x\circ y}L_xL_y,$
$T_{x,y} = L^{-1}_{x*y}R_xL_y,\ P_{x,y} = L^{-1}_{x\bullet y}P_xL_y,\ x\circ y = R_h^{-1}(x\cdot yh),$
$x*y = R_h^{-1}(yh\cdot x),\ x\bullet y = R_h^{-1}(x/yh).$

Теорема 2.3.2. *Квазигруппа $(Q,\cdot)$ является А-квазигруппой, если в примитивной квазигруппе $(Q,\cdot,/,\backslash)$ выполняются следующие соотношения:*

$$((x\cdot yh)/h)\backslash(x(y(z_1z_2))) =$$

$$= (((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_1))\cdot(((x\cdot yh)/h)\backslash(x\cdot yz_2)), \qquad (2.3.10)$$

$$((yh \cdot x)/h)\backslash(y(z_1z_2)x) =$$

$$= ((yh \cdot x)/h)\backslash(yz_1x) \cdot ((yh \cdot x)/h)\backslash(yz_1x), \qquad (2.3.11)$$

$$((x/yh)/h)\backslash(x/y(z_1z_2)) =$$

$$= (((x/yh)/h)\backslash(x/yz_1) \cdot (((x/yh)/h)\backslash(x/yz_2). \qquad (2.3.12)$$

Доказательство. По определению $I_h(Q, \cdot) =< L_{x,y}, T_{x,y}, P_{x,y} >$ $\trianglelefteq Aut(Q, \cdot)$. Это значить, что

$$L_{x,y}(z_1z_2) = L_{x,y}(z_1) \cdot L_{x,y}(z_2), \qquad (2.3.13)$$

$$T_{x,y}(z_1z_2) = T_{x,y}(z_1) \cdot T_{x,y}(z_2), \qquad (2.3.14)$$

$$P_{x,y}(z_1z_2) = P_{x,y}(z_1) \cdot P_{x,y}(z_2), \qquad (2.3.15)$$

где z_1, z_2 - произвольные элементы квазигруппы $(Q, \cdot)$. Поэтапно раскрывая равенства (2.3.14) и (2.3.15), получим:

$$T_{x,y}(z_1z_2) = L^{-1}_{x*y}R_xL_y(z_1z_2) = L^{-1}_{x*y}(y(z_1z_2)x) = (x * y)\backslash(y(z_1z_2)x) =$$

$$= R_h^{-1}(yh \cdot x)\backslash(y(z_1z_2)x) = ((yh \cdot x)/h)\backslash(y(z_1z_2)x).$$

$$T_{x,y}(z_1) \cdot T_{x,y}(z_2) = L^{-1}_{x*y}R_xL_y(z_1) \cdot L^{-1}_{x*y}R_xL_y(z_2) =$$

$$= (x*y)\backslash(yz_1 \cdot x) \cdot (x*y)\backslash(yz_1 \cdot x) = R_h^{-1}(yh \cdot x)\backslash(yz_1 \cdot x) \cdot R_h^{-1}(yh \cdot x)\backslash(yz_2 \cdot x) =$$

$$= ((yh \cdot x)/h)\backslash(yz_1 \cdot x) \cdot ((yh \cdot x)/h)\backslash(yz_2 \cdot x).$$

Аналогично из равенства (2.3.15) получим:

$$P_{x,y}(z_1z_2) = L^{-1}_{x \bullet y}P_xL_y(z_1z_2) = L^{-1}_{x \bullet y}(x/y(z_1z_2)) = (x \bullet y)\backslash(x/y(z_1z_2)) =$$

$$= R_h^{-1}(x/yh)\backslash(x/y(z_1z_2)) = ((x/yh)/h)\backslash(x/y(z_1z_2)).$$

$$P_{x,y}(z_1) \cdot P_{x,y}(z_2) = L^{-1}_{x \bullet y}P_xL_y(z_1)L^{-1}_{x \bullet y}P_xL_y(z_2) =$$

$$= L_{x\bullet y}^{-1}(x/(yz_1)) \cdot L_{x\bullet y}^{-1}(x/(yz_2)) = (x \bullet y)\backslash(x/(yz_1)) \cdot (x \bullet y)\backslash(x/(yz_2)) =$$

$$= R_h^{-1}(x/yh)\backslash(x/(yz_1)) = R_h^{-1}(x/yh)\backslash(x/(yz_2)) =$$

$$= (((x/yh)/h)\backslash(x/(yz_1))) \cdot (((x/yh)/h)\backslash(x/(yz_2))).$$

Теорема 2.3.3. *Пусть линейная квазигруппа $(Q, \cdot)$ является А-квазигруппой, относительно элемента h, где $h = 0$ - ноль группы $(Q, +)$. Тогда $(Q, \cdot)$ имеет вид $x \cdot y = \varphi x + \psi y, \varphi\psi = \psi\varphi$.*

Доказательство. Пусть линейная квазигруппа $(Q, \cdot)$ является А-квазигруппой. Очевидно, что

$R_y x = \tilde{R}_{\psi y}\varphi x,\ L_x y = \tilde{L}_{\varphi x}\psi y,\ R_y^{-1}x = \varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi y}x,\ L_x^{-1}y = \varphi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi x}y$, где $\tilde{L}_x, \tilde{R}_x$ - трансляции группы $(Q, +)$.

По определению $R_{x,y}, L_{x,y}, T_x \in Aut(Q, \cdot)$. Тогда

$$R_{x,y}(z_1 z_2) = R_{x,y}(z_1) \cdot R_{x,y}(z_2).$$

Раскрывая левые и правые части последнего равенства, получим:

$$R_{x,y}(z_1 z_2) = R_{x\bullet y}^{-1} R_y R_x(z_1 z_2) = \varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}\tilde{R}_{\psi y}\varphi\tilde{R}_{\psi x}\varphi(z_1 z_2) =$$

$$= \varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}\tilde{R}_{\psi y}\varphi\tilde{R}_{\psi x}\varphi(\varphi z_1 + \psi z_2) = \varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}\tilde{R}_{\psi y}\varphi(\varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x) =$$

$$= \varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}(\varphi^3 z_1 + \varphi^2\psi z_2 + \varphi\psi x + \psi y) =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi^3 z_1 + \varphi^2\psi z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi(x \bullet y)) =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi^3 z_1 + \varphi^2\psi z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi L_h^{-1}(hx \cdot y)) =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi^3 z_1 + \varphi^2\psi z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi\psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi h}(\varphi^2 h + \varphi\psi x + \psi y)) =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi^3 z_1 + \varphi^2\psi z_2 + \varphi\psi x + \psi y - (-\varphi h + \varphi^2 h + \varphi\psi x + \psi y)) =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi^3 z_1 + \varphi^2\psi z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi y - \varphi\psi x - \varphi^2 h + \varphi h) =$$

$$= \varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x + \varphi^{-1}\psi y - \varphi^{-1}\psi y - \psi x - \varphi h + h.$$

$$R_{x,y}(z_1) \cdot R_{x,y}(z_1) = \varphi \tilde{R}_{x,y}(z_1) + \psi \tilde{R}_{x,y}(z_1) = \varphi R^{-1}_{x\bullet y} R_y R_x(z_1) + \psi R^{-1}_{x\bullet y} R_y R_x(z_2) =$$

$$= \varphi\varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}\tilde{R}_{\psi y}\varphi\tilde{R}_{\psi x}\varphi(z_1) + \psi\varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}\tilde{R}_{\psi y}\varphi\tilde{R}_{\psi x}\varphi(z_2) =$$

$$= \tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}(\varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y) + \psi\varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi(x\bullet y)}(\varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y) =$$

$$= (\varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y - \psi(x \bullet y)) + \psi\varphi^{-1}(\varphi^2 z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi(x \bullet y)) =$$

$$= (\varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y - \psi\psi^{-1} L^{-1}_{-\varphi h}(hx \cdot y)) +$$

$$+\psi\ \varphi^{-1}(\varphi^2 z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi L^{-1}_{h}(hx \cdot y)) =$$

$$= (\varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y - \psi\psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi h}(\varphi^2 h + \varphi\psi x + \psi y)) +$$

$$+\psi\varphi^{-1}(\varphi^2 z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi\psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi h}(\varphi^2 h + \varphi\psi x + \psi y)) =$$

$$= (\varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y - \psi y - \varphi\psi x - \varphi^2 h + \varphi h) +$$

$$+\psi\varphi^{-1}(\varphi^2 z_2 + \varphi\psi x + \psi y - \psi y - \varphi\psi x - \varphi^2 h + \varphi h) =$$

$$= \varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y - \psi y - \varphi\psi x - \varphi^2 h + \varphi h + \psi\varphi z_2 + \psi^2 x + \psi\varphi^{-1}\psi y -$$

$$-\psi\varphi^{-1}\psi y - \psi^2 x - \psi\varphi h + \psi h.$$

Из полученных равенств имеем:

$$\varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x + \varphi^{-1}\psi y - \varphi^{-1}\psi y - \psi x - \varphi h + h =$$

$$= \varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y - \psi y - \varphi\psi x - \varphi^2 h + \varphi h + \psi\varphi z_2 + \psi^2 x + \psi\varphi^{-1}\psi y -$$

$$-\psi\varphi^{-1}\psi y - \psi^2 x - \psi\varphi h + \psi h.$$

По условию $h = 0$, где 0 - ноль группы $(Q, +)$. Тогда

$$\varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x + \varphi^{-1}\psi y - \varphi^{-1}\psi y - \psi x = \varphi^2 z_1 + \varphi\psi x + \psi y - \psi y - \varphi\psi x +$$

$$+\psi\varphi z_2 + \psi^2 x + \psi\varphi^{-1}\psi y - \psi\varphi^{-1}\psi y - \psi^2 x.$$

Положим в последнем равенстве $x = 0$:

$$\varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \varphi^{-1}\psi y - \varphi^{-1}\psi y = \varphi^2 z_1 + \psi y - \psi y + \psi\varphi z_2 + \psi\varphi^{-1}\psi y - \psi\varphi^{-1}\psi y.$$

Аналогично, при $y = 0$, имеем:

$$\varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 = \varphi^2 z_1 + \psi\varphi z_2.$$

Положим $z_1 = 0$. Тогда $\varphi\psi z_2 = \psi\varphi z_2$, то есть, $\varphi\psi = \psi\varphi$, для любого $z_2 \in (Q, \cdot)$.

Из соотношения $L_{x,y}(z_1 \cdot z_2) = L_{x,y}(z_1) \cdot L_{x,y}(z_2)$ имеем:

$$L_{x,y}(z_1 \cdot z_2) = L_{x\circ y}^{-1} L_x L_y (z_1 \cdot z_2) = \psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)} \tilde{L}_{\varphi x} \psi \tilde{L}_{\varphi y} \psi (z_1 \cdot z_2) =$$

$$= \psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)} \tilde{L}_{\varphi x} \psi (\varphi y + \psi\varphi z_1 + \psi^2 z_2) =$$

$$= \psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)} (\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 \varphi z_1 + \psi^3 z_2) =$$

$$= \psi^{-1} (-\varphi(x \circ y) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 \varphi z_1 + \psi^3 z_2) =$$

$$= \psi^{-1} (-\varphi R_h^{-1}(x \cdot yh) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 \varphi z_1 + \psi^3 z_2) =$$

$$= \psi^{-1} (-\varphi R_h^{-1}(\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 h) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 \varphi z_1 + \psi^3 z_2) =$$

$$= \psi^{-1} (-\varphi\varphi^{-1} \tilde{R}_{-\psi h}(\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 h) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 \varphi z_1 + \psi^3 z_2) =$$

$$= \psi^{-1} (\psi h - \psi^2 h - \psi\varphi y - \varphi x + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 \varphi z_1 + \psi^3 z_2) =$$

$$= h - \psi h - \varphi y - \psi^{-1}\varphi x + \psi^{-1}\varphi x + \varphi y + \psi\varphi z_1 + \psi^2 z_2 = h - \psi h + \psi\varphi z_1 + \psi^2 z_2.$$

$$L_{x,y}(z_1) \cdot L_{x,y}(z_2) = \varphi L_{x,y}(z_1) + \psi L_{x,y}(z_2) = \varphi L_{x\circ y}^{-1} L_x L_y (z_1) + \psi L_{x\circ y}^{-1} L_x L_y (z_2)$$

$$= \varphi\psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)} \tilde{L}_{\varphi x} \psi \tilde{L}_{\varphi y} \psi (z_1) + \psi\psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)} \tilde{L}_{\varphi x} \psi \tilde{L}_{\varphi y} \psi (z_2) =$$

$$= \varphi\psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)} \tilde{L}_{\varphi x} \psi (\varphi y + \psi z_1) + \tilde{L}_{-\varphi(x\circ y)} \tilde{L}_{\varphi x} \psi (\varphi y + \psi z_2) =$$

$$= \varphi\psi^{-1} (-\varphi(x \circ y) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 z_1) + (-\varphi(x \circ y) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 z_2) =$$

$$= \varphi\psi^{-1}(-\varphi R_h^{-1}(x\cdot yh)+\varphi x+\psi\varphi y+\psi^2 z_1)+(-\varphi R_h^{-1}(x\cdot yh)+\varphi x+\psi\varphi y+\psi^2 z_2) =$$

$$= \varphi\psi^{-1}(-\varphi R_h^{-1}(\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 h) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 z_1)+$$

$$+(-\varphi R_h^{-1}(\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 h) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 z_2) =$$

$$= \varphi\psi^{-1}(-\varphi\varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi h}(\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 h) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 z_1) =$$

$$+(-\varphi\varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi h}(\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 h) + \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 z_2) =$$

$$= \varphi\psi^{-1}(\psi h-\psi^2 h-\psi\varphi y-\varphi x+\varphi x+\psi\varphi y+\psi^2 z_1)+\psi h-\psi^2 h-\psi\varphi y-\varphi x+\varphi x+$$

$$+\psi\varphi y + \psi^2 z_2 = \varphi h - \varphi\psi h + \varphi\psi z_1 + \psi h - \psi^2 h + \psi^2 z_2.$$

Таким образом $h-\psi h+\psi\varphi z_1+\psi^2 z_2 = \varphi h-\varphi\psi h+\varphi\psi z_1+\psi h-\psi^2 h+\psi^2 z_2$ По условию теоремы $h = 0$, следовательно $\varphi h = \varphi 0 = 0, \psi h = \psi 0 = 0$, тогда

$$\psi\varphi z_1 + \psi^2 z_2 = \varphi\psi z_1 + \psi^2 z_2.$$

Положим $z_2 = 0$. Тогда $\psi\varphi z_1 = \varphi\psi z_1$ или $\psi\varphi = \varphi\psi$.

Из соотношения $T_x(z_1 \cdot z_2) = T_x(z_1) \cdot T_x(z_2)$ имеем:

$$T_x(z_1 \cdot z_2) = L_{\sigma x}^{-1} R_x(z_1 \cdot z_2)= \psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi\sigma x}\tilde{R}_{\psi x}\varphi(z_1 \cdot z_2) =$$

$$= \psi^{-1}\tilde{L}_{-\varphi\sigma x}(\varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + +\psi x) =$$

$$= \psi^{-1}(-\varphi\sigma x + \varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x) =$$

$$= \psi^{-1}(-\varphi R_h^{-1} L_h x + \varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x) =$$

$$= \psi^{-1}(-\varphi\varphi^{-1}\tilde{R}_{-\psi h}\tilde{L}_{\varphi h}\psi x + \varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x) =$$

$$= \psi^{-1}(-\tilde{R}_{-\psi h}\tilde{L}_{\varphi h}\psi x + \varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x) =$$

$$= \psi^{-1}(\psi h - \psi x - \varphi h + \varphi^2 z_1 + \varphi\psi z_2 + \psi x) =$$

$$= h - x - \psi^{-1}\varphi h + \psi^{-1}\varphi^2 z_1 + \psi^{-1}\varphi\psi z_2 + x.$$

$$T_x(z_1) \cdot T_x(z_2) = \varphi T_x(z_1) + \psi T_x(z_2) =$$

$$L_{\sigma x}^{-1} R_x(z_1 z_2) = \varphi L_{\sigma x}^{-1} R_x(z_1) + \psi L_{\sigma x}^{-1} R_x(z_2) =$$

$$= \varphi \psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi\sigma x} \tilde{R}_{\psi x}(z_1) + \psi \psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi\sigma x} \tilde{R}_{\psi x}(z_2) =$$

$$= \varphi \psi^{-1} \tilde{L}_{-\varphi\sigma x}(\varphi z_1 + \psi x) + \tilde{L}_{-\varphi\sigma x}(\varphi z_2 + \psi x) =$$

$$= \varphi \psi^{-1}(-\varphi\sigma x + \varphi z_1 + \psi x) + (-\varphi\sigma x + \varphi z_2 + \psi x) =$$

$$= \varphi \psi^{-1}(-\varphi\varphi^{-1} \tilde{R}_{-\psi h} \tilde{L}_{\varphi h} \psi x + \varphi z_1 + \psi x) + (-\varphi\varphi^{-1} \tilde{R}_{-\psi h} \tilde{L}_{\varphi h} \psi x + \varphi z_2 + \psi x) =$$

$$= \varphi \psi^{-1}(\psi h - \psi x - \varphi h + \varphi z_1 + \psi x) + \psi h - \psi x - \varphi h + \varphi z_1 + \psi x =$$

$$= \varphi h - \varphi x - \varphi \psi^{-1} \varphi h + \varphi \psi^{-1} \varphi z_1 + \varphi x + \psi h - \psi x - \varphi h + \varphi z_2 + \psi x.$$

Из полученных равенств имеем:

$$h - x - \psi^{-1}\varphi h + \psi^{-1}\varphi^2 z_1 + \psi^{-1}\varphi\psi z_2 + x =$$

$$= \varphi h - \varphi x - \varphi \psi^{-1} \varphi h + \varphi \psi^{-1} \varphi z_1 + \varphi x + \psi h - \psi x - \varphi h + \varphi z_2 + \psi x.$$

Пусть $h = 0$, где $0-$ ноль группы $(Q, +)$. Тогда

$$-x + \psi^{-1}\varphi^2 z_1 + \psi^{-1}\varphi\psi z_2 + x = -\varphi x + \varphi\psi^{-1}\varphi z_1 + \varphi x - \psi x + \varphi z_2 + \psi x.$$

Положим в последнем равенстве $x = 0$:

$$\psi^{-1}\varphi^2 z_1 + \psi^{-1}\varphi\psi z_2 = \varphi\psi^{-1}\varphi z_1 + \varphi z_2.$$

Аналогично, если $z_1 = 0$, то имеем:

$$\psi^{-1}\varphi\psi z_2 = \varphi z_2, \quad \psi^{-1}\varphi\psi = \varphi, \quad \varphi\psi = \psi\varphi.$$

Теорема доказана.

2.4. О квазигруппах смешанного типа линейности с дополнительными тождествами

Класс линейных квазигрупп представляет большой интерес для исследования ввиду их близости к группам. В.Д.Белоусовым доказано, что если в квазигруппе выполняется уравновешенное тождество, то она изотопна некоторой группе.

Частными случаями линейных квазигрупп являются достаточно известные классы квазигрупп - медальные квазигруппы и T-квазигруппы. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется медиальной, если в ней выполняется тождество $xu \cdot yv = xv \cdot yu$. Согласно теоремы Брака-Тойоды [7]) медиальная квазигруппа линейна над абелевой группой $(Q,+)$, причем $\varphi\psi = \psi\varphi$. T-квазигруппы введены чешскими алгебраистами Т.Кепка и Р.Немец в работах [4,5]. Линейная квазигруппа называется T-квазигруппой, если группа $(Q,+)$ - абелева, а φ и ψ не обязаны коммутировать. В работах [6,31] введены и подробно исследованы различные типы обобщенных (или односторонних) линейных квазигрупп.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется квазигруппой смешанного типа линейности I рода (II рода,) если $(Q,\cdot)$ имеет вид

$$x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y + c \quad (x \cdot y = \bar{\varphi} x + \psi y + c),$$

где $\varphi, \psi \in Aut(Q,+)$, $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$, c - фиксированный элемент из множества Q [6,31].

В настоящем параграфе найдены необходимые и достаточные условия, когда в некоторых классах обобщенных линейных квазигрупп выполняется известные тождества.

Теорема 2.4.1. *Пусть $(Q,+)$ - квазигруппа смешанного типа линейности II рода: $x \cdot y = \bar{\varphi}x + \psi y + c$. Следующие условия эквивалентны:*

1) В квазигруппе $(Q,\cdot)$ выполняется тождество полусимметричности

$$x \cdot yx = y, \qquad (2.5.1)$$

2) $(Q,\cdot)$ является T-квазигруппа вида $x \cdot y = \varphi x + \varphi^{-1} y + c$, где $\psi^2 = J\varphi, \psi c = Jc,\ Jx = -x$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $(Q,\cdot)$ - квазигруппа смешанного типа линейности II рода с тождеством (2.5.1). Переходим в (2.5.1) к групповой операции $(+)$:

$$x \cdot yx = \bar{\varphi}x + \psi(\bar{\varphi}y + \psi x + c) + c = \bar{\varphi}x + \psi\bar{\varphi}y + \psi^2 x + \psi c + c = y, \quad (2.5.2)$$

Пусть $x = y = 0$, где 0 - нулевой элемент группы $(Q,+)$. Тогда из равенства (2.5.2) получим: $\bar{\varphi}x + \psi\bar{\varphi}y + \psi^2 x = y$. Положим в последнем равенстве $x = 0$. Тогда $\psi\bar{\varphi}y = y$ или $\psi y = \bar{\varphi}^{-1} y$, $\psi = \bar{\varphi}^{-1}$. Учитывая полученные равенства из (2.5.2) следует $\bar{\varphi}x + \psi\bar{\varphi}y + \psi^2 x = \bar{\varphi}x + y + \psi^2 x =$
$= \bar{\varphi}x + y + J\bar{\varphi}x = y$. или $\bar{\varphi}x + y = y + J\bar{\varphi}x$. Заменяя x на $\bar{\varphi}x$ получим $x + y = y + x$, то есть группа $(Q,+)$ - абелева, следовательно, $(Q,\cdot)$ - Т-квазигруппа, причем $\psi^2 x = J\varphi x$, $\psi c = Jc$.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $(Q,\cdot)$ является Т-квазигруппой вида $\varphi x + \psi y + c$, где $\psi^2 = J\varphi x$, $\psi c = Jc$. Справедливость тождества (2.5.2) проверяется непосредственно:

$$x \cdot yx = \varphi x + \psi(\varphi y + \psi x + c) + c = \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 x + \psi c + c = \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 x =$$

$$= \psi\varphi y + \varphi x + \psi^2 x = y + \varphi x + J\varphi x = y.$$

Теорема 2.4.1 доказана.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $(Q,+)$ *- квазигруппа смешанного типа линейности I рода:* $x\cdot y=\varphi x+\bar{\psi}y+c$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) В квазигруппе $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество полусимметричности:*

$$xy\cdot y=x, \tag{2.5.3}$$

2) $(Q,\cdot)$ *является* T*-квазигруппой вида* $x\cdot y=\varphi x+\varphi^{-1}y+c$, *где* $\varphi^2=\varepsilon, c=0,\ \varphi c=0, Jy=y$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $(Q,\cdot)$ - квазигруппа смешанного типа линейности I рода с (2.5.3). Переходим в (2.5.3) к групповой операции $(+)$:

$$xy\cdot x=\varphi(\varphi x+\bar{\psi}y+c)+\bar{\psi}y+c=\varphi^2x+\varphi\bar{\psi}y+\varphi c+\bar{\psi}y+c=x, \tag{2.5.4}$$

Пусть $x=y=0$, тогда $c=0,\varphi c=0$, где 0 - нулевой элемент группы $(Q,+)$. Тогда из равенств (2.5.4) получим: $\varphi^2x+\varphi\bar{\psi}y+\bar{\psi}y=x$. Положим в последнем равенстве $x=0$. Тогда $\varphi\bar{\psi}y+\bar{\psi}y=0$ или $\varphi\bar{\psi}y=J\bar{\psi}y$, $\varphi\bar{\psi}=J\bar{\psi}$. Из равенства (5.2.4) при $y=0$ следует, что $\varphi^2x=x$, $\varphi^2=\varepsilon$. Учитывая полученные равенства, имеем $\varphi^2x+\varphi\bar{\psi}y+\bar{\psi}y=x+J\bar{\psi}y+\bar{\psi}y=x$ или $\bar{\varphi}x+y=y+J\bar{\varphi}x$. Заменяя x на $\bar{\varphi}x$ получим $x+y=y+x$, то есть группа $(Q,+)$ - абелева, следовательно, $(Q,\cdot)$ - Т-квазигруппа, причем $\psi^2=J\varphi x$, $\psi c=Jc$.

Теорема 2.4.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа смешанного типа линейности II рода:* $x\cdot y=\varphi x+\bar{\psi}y+c$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) В квазигруппе выполняется тождество :

$$x(y\cdot yx)=y, \tag{2.5.5}$$

2) $(Q,\cdot)$ *является Т-квазигруппой вида* $x\cdot y=\varphi x+\varphi^{-1}y+c$, *где* $\psi^2c+c=$ $=0,\ \varphi=J\psi^3,\psi+\psi^2=\varphi^{-1}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $(Q,\cdot)$ - квазигруппа смешанного типа линейности II рода (2.5.5). Переходим в (2.5.5) к групповой операции $(+)$:

$$x(y\cdot yx)=\bar{\varphi}x+\psi(\bar{\varphi}y+\psi(\bar{\varphi}y+\psi x+c))+c=\bar{\varphi}x+\psi\bar{\varphi}y+$$

$$+\psi^2\bar{\varphi}y+\psi^3x+\psi^2c+c=y \tag{2.5.6}$$

Пусть $x=y=0$, тогда $\psi^2c+c=0$. Тогда из (2.5.5) получим: $\bar{\varphi}x+\psi\bar{\varphi}y+\psi^2\bar{\varphi}y+\psi^3x=y$. Положим в последнем равенстве $x=0$. Тогда $\psi\bar{\varphi}y+\psi^2\bar{\varphi}y=y$. Заменяя y на $\bar{\varphi}^{-1}y$, имеем, $\psi y+\psi^2y=y,\psi+\psi^2=\varepsilon$. Из (2.5.6) при $y=0$ следует, что $\bar{\varphi}x+\psi^3x=0$, $\bar{\varphi}x=J\psi^3x$, $\bar{\varphi}=J\psi^3$. Учитывая полученные равенства, имеем $\bar{\varphi}x+\psi\bar{\varphi}y+\psi^2\bar{\varphi}y+\psi^3x=J\psi^3+\psi\bar{\varphi}y+\psi^2\bar{\varphi}y+\psi^3x=\psi\bar{\varphi}y+\psi^2\bar{\varphi}y=y$ или $\bar{\varphi}x+y=y+\bar{\varphi}x$ Заменяя x на $\bar{\varphi}^{-1}x$ получим $x+y=y+x$, то есть группа $(Q,+)$ - абелева, следовательно, $(Q,\cdot)$ - Т-квазигруппа.

2)$\Rightarrow$ 1). Пусть является Т-квазигруппой вида $x\cdot y=\varphi x+\varphi^{-1}x+c$, где $\psi^2c+c=0,\ \varphi=J\psi^3,\psi+\psi^2=\varphi^{-1}$. Справедливость тождества (2.5.6) проверяется непосредственно:

$$x(y\cdot yx)=\varphi x+\psi(\varphi y+\psi(\varphi y+\psi x+c))+c=\varphi x+\psi\varphi y+\psi^2\varphi y+\psi^3x+\psi^2c+c=$$

$$=J\psi^3x+\psi\varphi y+\psi^2\varphi y+\psi^3x=y.$$

Нетрудно показать, что дистрибутивная квазигруппа смешанного типа линейности I рода является медиальной. Действительно, предположим, что $(Q, \cdot)$ квазигруппа смешанного типа линейности I рода и в ней выполняется, например тождество правой дистрибутивности:

$$yz \cdot x = yx \cdot zx.$$

Переходим в последнем равенстве к групповой операции $(+)$:

$$\varphi(\varphi y + \bar{\psi} z + c) + \bar{\psi} x + c = \varphi(\varphi y + \bar{\psi} x + c) + \bar{\psi}(\varphi z + \bar{\psi} x + c) + c,$$

$$\varphi^2 y + \varphi\bar{\psi} z + \varphi c + \bar{\psi} x + c = \varphi^2 y + \varphi\bar{\psi} x + \varphi c + \bar{\psi} c + \bar{\psi}^2 x + \bar{\psi}\varphi z + c.$$

После сокращения имеем:

$$\varphi\bar{\psi} z + \bar{\psi} x = \varphi\bar{\psi} x + \bar{\psi} c + \bar{\psi}^2 x + \bar{\psi}\varphi z.$$

При $x = y = 0, \bar{\psi} c = 0$, откуда $c = 0$.Тогда последнее равенство имеет вид $\varphi\bar{\psi} z + \bar{\psi} x = \varphi\bar{\psi} x + \bar{\psi}^2 x + \bar{\psi}\varphi z$. Заменяем x на $\bar{\psi}^{-1} x$: $\varphi\bar{\psi} z + x = = \varphi x + \bar{\psi} x + \bar{\psi}\varphi z$. Если $x = 0$, то $\varphi\bar{\psi} z = \varphi\bar{\psi}\varphi z$, то есть, $\varphi\bar{\psi} = \varphi\bar{\psi}\varphi$, Учитывая это получим $z + x = \varphi x + \bar{\psi} x + z$. При $z = 0$: $x = \varphi x + \bar{\psi} x$. Тогда $z + x = x + z$, то есть группа $(Q, +)$ - абелева. Таким образом, $(Q, \cdot)$ - медиальная дистрибутивная квазигруппа.

Лемма 2.4.1. *Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа смешанного типа линейности I рода: $x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y + c$. Тогда $\varphi = R_{e(0)}, \bar{\psi} = L_{f(0)} c = 0 \cdot 0$, где $0 \cdot e(0) = 0$, $f(0) \cdot 0 = 0$, $R_a x = x \cdot a$, $L_a x = a \cdot x$, для всех $x, a \in Q$.*

Доказательство. Положим в равенстве $x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y + c$, $y = = \bar{\psi}^{-1}(-c), x \cdot \bar{\psi}^{-1}(-c) = \varphi x + \bar{\psi}\bar{\psi}^{-1}(-c) + c = \varphi x$, то есть $\bar{\psi}^{-1}(-c) = e(0)$, тогда $R_{\bar{\psi}^{-1}(-c)} = R_{e(0)}$. Из $x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y + c$ при $x = \varphi^{-1}(-c)$, получим $\varphi^{-1}(-c) \cdot y = \varphi\varphi^{-1}(-c) + \bar{\psi} y + c = \bar{\psi} y$. Тогда $L_{\varphi^{-1}(-c)} y = \psi y, \psi = L_{\varphi^{-1}(-c)}$. Учитывая, что $\varphi^{-1}(-c) \cdot 0 = \varphi\varphi^{-1}(-c) + \psi 0 + c = 0$ заключаем, что $\varphi^{-1}(-c) = f(0)$, то есть $\varphi = L_{f(0)}$.

Из $x \cdot y = \varphi x + \bar{\psi} y + c$ при $x = y = 0$ получим: $0 \cdot 0 = \varphi 0 + \bar{\psi} 0 + c = 0$, то есть $c = 0 \cdot 0$.

Лемма доказана.

2.5. Нормальные формы линейных слева (справа) квазигрупп

В теории линейных квазигрупп важную роль играют группы, изотопные этим квазигруппам. Многие результаты и важную информацию о структуре линейной квазигруппы можно получить посредством изотопной группы. Как обычно, в качестве изотопной группы рассматривается достаточно изученная и хорошо известная группа (например, абелева, циклическая, разрешимая, нильпотентная и т.д.). Такой подход является естественным и прослеживается почти во всех работах в этом направлении. В этой связи по аналогии с линейными квазигруппами при исследовании обобщенных линейных квазигрупп вводим понятие нормальной формы обобщенной линейной квазигруппы.

Определение 2.5.1. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная слева (справа) квазигруппа: $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y \quad (x \cdot y = \alpha x + c + \psi y)$. Четверка $((Q,+), \varphi, \beta, c)$ $(((Q,+), \alpha, \psi, c))$, где $\varphi, (\psi) \in Aut(Q,+)$, $\beta, (\alpha)$ - подстановка множества Q, называется нормальной формой квазигруппы $(Q, \cdot)$ и обозначается следующим образом $\Lambda = ((Q,+), \varphi, \beta, c)$ $(\Lambda = ((Q,+), \alpha, \psi, c))$. Группа $(Q,+)$ называется Λ - группой квазигруппы $(Q, \cdot)$.*

Лемма 2.5.1. *Пусть $(Q,+)$ - группа, $\varphi \in Aut(Q,+)$, β - подстановка группы $(Q,+)$, $(Q, \circ)$ - лупа с единицей e, α_2, β_2 - подстановки на* *множестве* Q *и* $c \in Q$ *такие, что для любых* $x, y \in Q$

$$\alpha_2 x \circ \beta_2 y = \varphi x + c + \beta y. \qquad (2.5.1)$$

Тогда $(Q, \circ)$ *- группа и существуют автоморфизм* $\varphi_1 \in Aut(Q, \circ)$ *и подстановка* β_1 *множества* Q *такие, что*

$$\alpha_2 x = \varphi_1 x \circ \alpha_2 e, \quad \beta_2 x = \beta_2 e \circ \beta_1 y. \qquad (2.5.2)$$

Доказательство. Определяем подстановки α_3, β_3 следующим образом

$$\alpha_3 x = \varphi \alpha_2^{-1} x, \quad \beta_3 x = c + \beta \beta_2^{-1} y.$$

Из (2.5.1) следует

$$x \circ y = \alpha_3 x + \beta_3 y. \qquad (2.5.3)$$

Поэтому лупа $(Q, \circ)$ главно изотопна группе $(Q, +)$ и, следовательно, по теореме Алберта [2] $(Q, \circ) \cong (Q, +)$.

Из (2.5.3) следует, что

$$x + y = \alpha_3^{-1} x \circ \beta_3^{-1} y. \qquad (2.5.4)$$

Пусть в (2.5.4) $y = 0$. Тогда

$$x = \alpha_3^{-1} x \circ \beta_3^{-1} 0, \quad \alpha_3^{-1} x = x * \beta_3^{-1} 0,$$

где $(*)$ означает операцию вычитания в группе $(Q, \circ)$. Аналогично, полагая $x = 0$ в (2.5.4) находим $y = \alpha_3^{-1} 0 \circ \beta_3^{-1} y$, откуда $\beta_3^{-1} y = * \alpha_3^{-1} 0 \circ y$.

Поэтому из (2.5.4) имеем

$$x + y = (x * \beta_3^{-1} 0) \circ (* \alpha_3^{-1} 0 \circ y),$$

$$x + y = (x * \beta_3^{-1}0) * (\alpha_3^{-1}0 \circ y),$$

$$x + y = (x * a) \circ y, \tag{2.5.5}$$

где $a = \alpha_3^{-1}0 \circ \beta_3^{-1}0$ $(*a = *\beta_3^{-1}0 * \alpha_3^{-1}0)$.

Определяем отображение $\eta :$ $\eta x = x * a$

Так как $\eta(x + y) = (x + y) * a = x * a \circ y * a = \eta x \circ \eta y$, то η является изоморфизмом групп $(Q,+)$ и $(Q, \circ)$.

Очевидно, $\varphi_1 = \eta\varphi\eta^{-1} \in Aut(Q, \circ)$.

Действительно

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x \circ y) = \eta\varphi\eta^{-1}(x \circ y) = \\
&= \eta\varphi\eta^{-1}[\eta(\eta^{-1}x + \eta^{-1}y)] = \eta\varphi[\eta^{-1}x + \eta^{-1}y] = \\
&\eta[\varphi\eta^{-1}x + \varphi\eta^{-1}y] = \eta\varphi\eta^{-1}x \circ \eta\varphi\eta^{-1}y = \varphi_1 x \circ \varphi_1 y.
\end{aligned}$$

Полагая $y = \beta^{-1}(-c)$ в 2.5.1, получим $\alpha_2 x \circ \beta_2\beta^{-1}(-c) = \varphi x$, откуда $\varphi x = \alpha_2 x \circ b$, где $b = \beta_2\beta^{-1}(-c)$.

Следовательно,

$$\varphi_1 x = \eta\varphi\eta^{-1}x = \varphi\eta^{-1}x * a = \alpha_2\eta^{-1}x \circ b * a.$$

Но

$$\eta x = x * a, \quad \eta^{-1}x * a = x, \quad \eta^{-1}x = x \circ a.$$

Поэтому

$$\varphi_1^{-1}x = \alpha_2\eta^{-1}x \circ b * a = \alpha_2(x \circ a) \circ b * a = \alpha_2(x \circ a) \circ c,$$

где $c = b * a$.

Следовательно, для любого $x \in Q$,

$$\alpha_2 x = \varphi_1(x * a) * c = \varphi_1 x \circ \varphi_1(*a) * c = \varphi_1 x \circ \alpha_2 e,$$

так как $\alpha_2 e = \varphi_1 e \circ \varphi_1(*a) * c = e \circ \varphi_1(*a) * c = \varphi_1(*a) * c$.

Аналогично можно показать, что существует $\beta_1 \in Aut(Q, \circ)$ такой, что $\beta_2 x = \beta_2 e \circ \beta_1 x$.

Лемма 2.5.2. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *- левая линейная квазигруппа:* $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$*, причем* β *- подстановка, такое что* $\beta 0 = 0$*. Тогда*

$$\varphi = R_{e_0}, \quad \beta = L_{f_0}, \quad c = 0 \cdot 0, \quad x + y = R_{e_0}^{-1} x \cdot L_0^{-1} y \quad (x + y = R_0^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} y).$$

$$-x = L_0 L^{-1}_{R^{-1}_{e_0} x}(0) \ .$$

Доказательство. Пусть $(Q, \cdot)$ - левая линейная квазигруппа: $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$. Положим $x = \varphi^{-1}(-c)$, $\varphi^{-1}(-c) \cdot y = \varphi\varphi^{-1}(-c) + c + \beta y = \beta y$, $\beta y = \varphi^{-1}(-c) y$, то есть в $\beta = L_{\varphi^{-1}(-c)}$. Требуем: $\beta 0 = 0$ далее, $\varphi^{-1}(-c) \cdot 0 = \varphi\varphi^{-1}(-c) + c + \beta 0 = 0 + 0 = 0$. Поэтому $\varphi^{-1}(-c) = f_0$, следовательно $\beta 0 = L_{f_0}$. Далее, $0 \cdot \beta^{-1}(-c) = \varphi 0 + c + \beta\beta^{-1}(-c) = \varphi 0 = 0$, $0 \cdot \beta^{-1}(-c) = 0$. так как $\beta^{-1}(-c) = e_0$ $x \cdot \beta^{-1}(-c) = \varphi x + c +$
$+ \beta\beta^{-1}(-c) = \varphi x$, $\varphi = R_{\beta^{-1}(-c)}$.

При $x = 0$ имеем: $0 \cdot \beta^{-1}(-c) = \varphi 0 + c + \beta^{-1}(-c) = 0 + 0 = 0$, $0 \cdot \beta^{-1}(-c) = 0$, то есть $\beta^{-1}(-c) = e_0$. Тогда $\varphi = R_{\beta^{-1}(-c)} = R_{e_0}$, то есть $\varphi = R_{e_0}$. Далее, $0 \cdot 0 = \varphi 0 + c + \beta 0 = c$, $c = 0 \cdot 0$ (так как как по условии $\beta 0 = 0$).

Тогда $x + c + y = \varphi^{-1} x \cdot \beta^{-1} y = R_{e_0}^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} y$.

Положим $x = 0$: $c + y = R_{e_o}^{-1} 0 \cdot L_{f_0}^{-1} y$. $y = 0$: $x + c = R_{e_o}^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} 0$.

Далее предположим $x = y = 0$: $0 \cdot 0 = \varphi 0 + c + \beta 0 = c$, $0 \cdot 0 = c$, но $f_0 = e_0 = 0$. Тогда $0 = c/0$, $0 = 0 \backslash c$, $(0 \cdot e_0)/e_0 = 0/e_0$, $0 = 0/e_0$, $f_0 0 = 0$, $f_0 \setminus (f_0 \cdot 0) = f_0 \setminus 0$, $0 = f_0 \setminus 0$. *Но* $R_{e_0}^{-1} 0 = 0/e_0 = 0$.

Тогда $c + y = 0 \cdot L_{f_0}^{-1} y = L_o L_{f_0}^{-1} y$, то есть $\tilde{L}_c y = L_o L_{f_0}^{-1} y$ откуда $\tilde{L}_c^{-1} = L_{f_0} L_0^{-1}$. Учитывая это, имеем

$$x + \tilde{L}_c y = R_{e_0}^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} y,$$

или

$$x + y = R_{e_o}^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} \tilde{L}_c^{-1} y = R_{e_o}^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} L_{f_0} L_0^{-1} y = R_{e_o}^{-1} x \cdot L_0^{-1} y,$$

то есть $x + y = R_{e_0}^{-1} x \cdot L_0^{-1} y$.

Аналогично можно показать, что $x + y = R_0^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} y$.

Далее,

$x + (-x) = 0, \quad$ или $\quad R_{e_0}^{-1} x \cdot L_0^{-1} Jx = 0, \quad L_0^{-1} Jx = L_{R_0^{-1}}^{-1}(0),$
$= Jx = -x = L_0 L_{R_0^{-1}}^{-1}(0)$.

Лемма доказана.

Аналогично можно доказать, что если $(Q, \cdot)$ - правая линейная квазигруппа: $x \cdot y = \alpha x + c + \psi y$, с условием, что $\alpha 0 = 0$, то

$$\psi = L_{f_0}, \quad \beta = R_{e_0}, \quad c = 0 \cdot 0, \quad x + y = R_{e_0}^{-1} x \cdot L_0^{-1} y \quad (x + y = R_0^{-1} x \cdot L_{f_0}^{-1} y).$$

$$-x = L_0 L_{R_{e_0}^{-1} x}^{-1}(0) \ .$$

Теперь докажем боле общее утверждение для случая квазигруппы изотопных группам.

Лемма 2.5.3. *Пусть* $(Q, \cdot)$*:* $x \cdot y = \alpha_1 x + \beta_1 y$ *и* $(Q, \circ)$*:* $x \circ y = \alpha_2 x \oplus \beta_2 y$ *- две квазигруппы изотопные соответственно группам* $(Q, +)$ *и* $(Q, \oplus)$*. Если* $(Q, \cdot)$ *и* $(Q, \circ)$ *изотопны, то группы* $(Q, +)$ *и* $(Q, \oplus)$ *изоморфны, то есть* $(Q, +) \cong (Q, \oplus)$.

Доказательство. Предположим, что квазигруппа $(Q,\cdot)$ главно изотопна квазигруппе $(Q,\circ)$:

$$x\cdot y = R_a x \circ L_b y.$$

Тогда

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \alpha_2 R_a x \oplus \beta_2 L_b y.$$

То

$$x + y = \alpha_2 R_a \alpha_1^{-1} x \oplus \beta_2 L_b \beta_1^{-1} y.$$

Это значить, что группы $(Q,+)$ и $(Q,\oplus)$ изотопны, следовательно, по теорема Алберта, она изоморфны, то есть $(Q,+)\cong(Q,\oplus)$.

Замечание. Очевидно, лемма верна для случая всех линейных слева (справа) квазигрупп.

Лемма 2.5.3 можно считать обобщением теоремы Алберта, согласно которой, если две группы изотопны то они изоморфны.

Теорема 2.5.1. *Пусть $(Q_1,\cdot)$, $(Q_2,\circ)$ - две линейные слева квазигруппы $\Lambda_1=((Q,+),\varphi_1,\beta_1,c_1)$, $\Lambda_2=((Q,\oplus),\varphi_2,\beta_2,c_2)$ - нормальные формы, $\eta:(Q_1,\cdot)\to(Q_2,\circ)$ - гомоморфизм квазигруппы $(Q_1,\cdot)$ в $(Q_2,\circ)$. Положим $\xi_1 x = \eta x * \eta 0$, $\xi_2 x = \eta 0 \oplus \eta x$ для любого $x\in Q_1$. Тогда ξ_1 и ξ_2 - гомоморфизмы группы $(Q_1,+)$ в $(Q_2,\oplus)$ и $\xi_1\varphi_1=\varphi_2\xi_1$, $\xi_2\beta_1=\beta_2\xi_2$. Кроме того, $\xi_1\,(\xi_2)$ - взаимно однозначно тогда и только тогда, когда η - взаимно однозначно.*

Доказательство. Пуст $\eta{:}(Q_1,\cdot)\to(Q_2,\circ)$ - гомоморфизм квазигруппы $(Q_1,\cdot)$ в казигруппу $(Q_2,\circ)$, то есть $\eta(x\cdot y)=\eta x\circ\eta y$,

$$\eta(\varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y) = \varphi_2\eta x \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta y. \tag{2.5.5}$$

Положим в (2.6.1) $y = \beta_1^{-1}(-c_1)$:

$$\eta(\varphi_1 x + c_1 + \beta_1\beta_1^{-1}(-c_1)) = \varphi_2\eta x \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta\beta_1^{-1}(-c_1),$$

$$\eta\varphi_1 x = \varphi_2\eta x \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta\beta_1^{-1}(-c_1) = \varphi_2\eta x \oplus c_3, \tag{2.6.2}$$

где $c_3 = c_2 \oplus \beta_2\eta\beta_1^{-1}(-c_1)$.

Положим в (2.6.1) $x = \varphi_1^{-1}(-c_1)$, получим

$$\eta(\varphi_1\varphi_1^{-1}(-c_1) + c_1 + \beta_1 y) = \varphi_2\eta\varphi_1^{-1}(-c_1) \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta y,$$

$$\eta\beta_1 y = \varphi_2\eta\varphi_1^{-1}(-c_1) \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta y = c_4 + \beta_2\eta y, \tag{2.6.3}$$

где $c_4 = \varphi_2\eta\varphi_1^{-1}(-c_1) \oplus c_2$.

Теперь при $x = \varphi_1^{-1}(-c_1)$, $y = \beta_1^{-1}(-c_1)$ из (2.6.1) следует

$$\eta(-c_1) = \varphi_2\eta\varphi_1^{-1}(-c_1) \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta\beta_1^{-1}(-c_1) = c_4 * c_2 \oplus c_3,$$

$$\eta(-c_1) = c_4 * c_2 \oplus c_3. \tag{2.6.4}$$

Из (2.6.1), (2.6.2), (2.6.3), (2.6.4) следует

$$\eta(x+y) = \eta(\varphi_1\varphi_1^{-1}x + c_1 + \beta_1\beta_1^{-1}(-c_1+y)) = \varphi_2\eta\varphi_1^{-1}x \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta\beta_1^{-1}(-c_1+y) =$$

$$= \eta\varphi_1\varphi_1^{-1}x * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \eta\beta_1\beta_1^{-1}(-c_1+y)) = \eta x * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus (-c_1+y) =$$

$$= \eta x * (c_4 * c_2 \oplus c_3) \oplus \eta(-c_1+y) = \eta x * \eta(-c_1) \oplus \eta(-c_1+y),$$

$$\eta(x+y) = \eta x * \eta(-c_1) \oplus \eta(-c_1+y). \tag{2.6.5}$$

Аналогично,

$$\eta(x+y) = \eta(\varphi_1\varphi_1^{-1}(x-c_1) + c_1 + \beta_1\beta_1^{-1}y) = \varphi_2\eta\varphi_1^{-1}(x-c_1) \oplus c_2 \oplus \beta_2\eta\beta_1^{-1}y =$$

$$= \eta\varphi_1\varphi_1^{-1}(x-c_1) * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \eta\beta_1\beta_1^{-1}y = \eta(x-c_1) * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \eta y =$$

$$= \eta(x-c_1) * (c_4 * c_2 \oplus c_3) \oplus \eta y = \eta(x-c_1) * \eta(-c_1) \oplus \eta y. \tag{2.6.6}$$

Из (2.6.4) при $y = -c_1$ получаем,

$$\eta(x - c_1) = \eta x * \eta(-c_1) \oplus \eta(-2c_1).$$

Положим значение $\eta(x - c_1)$ в (2.6.6)

$$\eta(x + y) = \eta x * \eta(-c_1) \oplus \eta(-2c_1) * \eta(-c_1) + \eta y. \tag{2.6.7}$$

Положим в (2.6.7). $x = y = 0$: $\eta 0 = \eta 0 * \eta(-c_1) \oplus \eta(-2c_1) * \eta(-c_1) + \eta 0$.

Тогда

$$\eta 0 = \eta(-c_1) * \eta(-2c_1) \oplus \eta(-c_1)$$

Следовательно, (2.6.5) имеет вид

$$\eta(x + y) = \eta x * \eta 0 \oplus \eta y. \tag{2.6.8}$$

Определим следующие отображения Q_1 в Q_2:

$$\xi_1 x = \eta x * \eta 0, \quad \xi_2 x = \eta 0 * \eta x.$$

Легко заметить, что ξ_1 и ξ_2 являются групповыми гомоморфизмами. Действительно,

$$\xi_1(x + y) = \eta(x + y) * \eta 0 = \eta x * \eta 0 \oplus \eta y * \eta 0,$$

$$\xi_1 x \oplus \xi_2 y = \eta x * \eta 0 \oplus \eta y * \eta 0.$$

Следовательно, $\xi_1(x + y) = \xi_1 x \oplus \xi_1 y$.

Второе проверяется аналогично.

Далее учитывая определение ξ и (2.6.2), имеем:

$$\xi_1 \varphi_1 x = \eta \varphi_1 x * \eta 0 \oplus c_3 * \eta 0.$$

Но из (2.6.2) при $x = 0$ следует, что $\eta 0 = \varphi_2 \eta 0 \oplus c_3$, откуда $c_3 * \eta 0 = \varphi_2 \eta 0$.

Следовательно, $\xi_1\varphi_1 x = \varphi_2\eta x * \varphi_2\eta 0 = \varphi_2(\eta x * \eta 0) = \varphi_2\xi_1 x$, то есть $\xi_1\varphi_1 = \varphi_2\xi_1$,

Аналогично,

$$\xi_2\beta_1 x = *\eta 0 \oplus \eta\beta_1 x = *\eta 0 \oplus c_4\eta \oplus \beta_2\eta x.$$

С другой стороны из (2.6.3) при $x = 0$ следует $\eta 0 = c_4 \oplus \beta_2\eta 0, *\beta_2\eta 0 = = *\eta 0 \oplus c_4$.

Следовательно,

$$\beta_2\xi_2 x = *\beta_2\eta 0 \oplus \beta_2\eta x = \oplus\beta_2\eta x = *\eta 0 \oplus c_4\eta \oplus \beta_2\eta x.$$

Таким образом, $\beta_2\xi_2 = \xi_2\beta_1 x$

Теорема 2.5.2. *Пусть* $(Q_1,\cdot)$, $(Q_2,\circ)$ *- две линейные справа квазигруппы* $\Lambda_1 = ((Q,+),\alpha_1,\psi_1,c_1)$, $\Lambda_2 = ((Q,\oplus),\alpha_2,\psi_2,c_2)$ *- нормальные формы,* $\eta : (Q_1,\cdot) \to (Q_2,\circ)$ *- гомоморфизм квазигруппы* $(Q_1,\cdot)$ *в* $(Q_2,\circ)$. *Положим* $\xi_1 x = \eta x * \eta 0$, $\xi_2 x = \eta 0 \oplus \eta x$ *для любого* $x \in Q_1$. *Тогда* ξ_1 *и* ξ_2 *- гомоморфизмы группы* $(Q_1,+)$ *в* $(Q_2,\oplus)$ *и* $\xi_1\varphi_1 = \varphi_2\xi_1$, $\xi_2\beta_1 = \beta_2\xi_2$.

Ввиду того, что доказательство теоремы 2.5.2. почти полностью повторяет доказательство теоремы 2.5.1, поэтому считаем нет необходимости привести доказательство теоремы.

В конце этого параграфа приводим утверждение согласно которой квазигрупповй гомоморфизм двух линейных слева квазигрупп является групповым гомоморфизмом.

Теорема 2.5.3. *Пусть* $(Q_1,\cdot)$, $(Q_2,\circ)$ *- две линейные слева квазигруппы и* $\Lambda_1 = ((Q,+),\varphi_1,\beta_1,c_1)$ *- нормальные формы,* $(Q_1,\cdot)$, $\eta :$ $(Q_1,\cdot) \to (Q_2,\circ)$ *- квазигрупповой гомоморфизм. Тогда существует нормальная форма* $\Lambda_2 = ((Q,\oplus),\varphi_2,\beta_2,c_2)$ *квазигруппы* $(Q_2,\circ)$ *такая, что*

$\eta : (Q_1, +) \to (Q_2, \oplus)$ *групповой гомоморфизм,* $\eta\varphi_1 = \varphi_2\eta$, $\eta\beta_1 = \beta_2\eta$, $\eta(c_1) = c_2$.

Заметим, что нормальные формы линейных и обобщенных линейных квазигрупп играют важную роль при исследовании названных квазигрупп, в особенности при изучении различных морфизмов квазигрупп.

Заключение

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- исследованы гомоморфизмы, автоморфизмы, эндоморфизмы, конгруэнции обобщенных линейных квазигрупп, описано строение автотопий, антиавтотопий и эндотопий обобщенных линейных квазигрупп;
- получено строение автотопий, антиавтотопий и эндотопий обобщенных линейных квазигрупп;
- решена задача В.Д.Белоусова об условиях нормальности конгруэнции некоторых подклассов обобщенных линейных квазигрупп;

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы в различных разделах общей теории групп, теории квазигрупп и неассоциативных алгебраических систем.

Список литературы

1. Toyoda K. On axioms of linear functions. [Текст] /K. Toyoda// Proc. Imp. Acad.Tokyo, 1941, vol.17, P. 221-227.
2. Bruck R.H. A survey of binary systems /R.H. Bruck Berlin - New York, 1958.
3. Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах [Текст] /В.Д.Белоусов // Мат. сборник, 1966, 70(112): 1. С. 55-97.
4. Kepka T. and Nemec P. T-quasigroups. I [Текст] /T.Kepka and P.Nemec// Acta univ. Carolin. Math.Phis., 1971, vol.12, №. 1, P. 31-39.
5. Kepka T. and Nemec P. T-quasigroups.II [Текст] /T.Kepka and P.Nemec// Acta univ.Carolin. Math.Phis., 1971, vol.12, №. 2, P. 39-49.
6. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп [Текст] /Г.Б.Белявская., А.Х.Табаров// Дискретная математика, РАН, 1992, том 4, вып.2, С. 142-147.
7. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп /В.Д.Белоусов-М.: Наука, 1967.- 222. С.
8. Манин Ю.И. Кубические формы /Ю.И.Манин- М. Наука, 1972.
9. Белоусов В.Д. О структуре дистрибутивных квазигрупп [Текст] /В.Д. Белоусов// - Мат. сборник, 1960, 50(92), 3, С. 267-298.
10. Белоусов В.Д. Оной В.И. О лупах, изотопных леводистрибутивным квазигруппам [Текст] /В.Д. Белоусов., В.И.Оной // - Мат. исслед., Кишинев, 1972, 3(25), С. 135-152.
11. Kepka T., Kinyon M.K. and Phillips J.D. The structure of F-quasigroups [Текст] /T.Kepka, M.K. Kinyon and J.D.Phillips//

http://arxiv.org/ abs/math/0510298(2005), P. 24.

12. Evans T. Abstract mean values [Текст] /T.Evans// Duke math. J. 1963, vol. 30, P. 331-347.
13. Белоусов В.Д. Элементы теории квазигрупп. Учебное пособие по спецкурсу /В.Д.Белоусов - Кишиневский государственный университет. Кишинев, 1981. - 95.С.
14. Галкин В.М. Квазигруппы. Итоги науки и техники. Серия. Алгебра. Топология. Геометрия. - М.: ВИНИТИ, 1988, том 26, С. 3-44.
15. Shcerbacov V.A. On linear and inverse quasigroups and their applications in code theory [Текст] /V.A. Shcerbacov// Thesis a Doctor's Degree, Chisinau, 2006.-245.P.
16. Bruck R.H. Contributions to the theory of loops [Текст] /R.H. Bruck// Trans. Amer. Math. Soc., 1946, vol.60, P. 245-354.
17. Pflugfelder H.O. Quasigroups and loops [Текст] /H.O. Pflugfelder// Introduction. Sigma Series in Pure Math., 8, Heldermann Verlag, Berlin, 1990.
18. Shcherbacov V.A. Elements of Quasigroup Theory and Applications /V.A. Shcerbacov - Moldova. 2017. -540.C.
19. Белоусов В.Д. n-арные квазигруппы [Текст] /В.Д.Белоусов// Кишинев, Штиинца, 1971.
20. Birkhoff G. Lattice theory [Текст] /G. Birkhoff// Nauka, Moscow, 1984, (in Russian).
21. Щукин К.К. О простых медиальных квазигруппах [Текст] /К.К. Щукин // - Матем. исследования, Кишинев, 1991, вып.120, С. 114-117.
22. Щербаков В.А. Об одном классе медиальных квазигрупп [Текст]

/В.А. Щербаков // Матем. исследования, 1988, вып.102, С. 111-116.

23. Nemec P. Commutative Moufang loops corresponding to linear quasigroups [Текст] /P. Nemec // Comment. Math. Univ. Carolin. 1988, vol.29, no.2, P. 303-308.

24. Shcherbacov V.A. On Bruck-Belousov problem /V.A. Shcerbacov// Bull. Acad. Stiinte. Repub. Mold., Math. 2005, no.3, P. 123-140.

25. Китороагэ М.Д. О некоторых свойствах луп с коммутантом в ядре /М.Д. Китороагэ// математические исследования, Кишинев "ШТИИНЦА"1990, С. 52-56.

26. Белоусов В.Д. О группе, ассоциированной квазигруппе [Текст] /В.Д.Белоусов// - Мат. исслед., Кишинев, 1969, 4(3), С. 21-39.

27. Щукин К.К. Действие группы на квазигруппе /К.К. Щукин - Кишинев, КГУ, 1985, - 91 С.

28. Ihringer T. On multiplication groups of quasigroups [Текст] /T. Ihringer // Eurp. J. Comb.,1984, vol.5(2), P. 137-141.

29. Табаров А.Х. Автотопии и антиавтотопии линейных квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров // Доклады АН РТ, 2009, том 52, №1, С. 10-16.

30. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Ядра и центр линейных квазигрупп [Текст] /Г.Б.Белявская, А.Х. Табаров // Известия АН Республики Молдова. Математика, Кишинев, 1991, №3(6), С. 37-42.

31. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп [Текст] /Г.Б.Белявская, А.Х. Табаров // Дискретная математика, РАН, 2009, том 21, вып.1, С. 39-54.

32. Belyavskaya G.B. Centre and multiplication groups of quasigroups

[Текст] /G.B. Belyavskaya // Известия АН Республики Молдова. Математика, 1992, №2. С. 81-89.

33. Izbash V.I. On quasigroups isotopic to groups, 1989, Reg.in VINITI 29.06.1989,№4228-B89, Moscow (in Russian).

34. Головко И.А. Эндотопии в квазигруппах [Текст] /И.А. Головко // Резюме докладов 1 Всесоюзного симпозиума по теории квазигрупп и ее приложениям. Сухуми, 1968, С. 14-15.

35. Табаров А.Х. Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров // Дискретная математика, РАН., 2007, том 19, вып.2, с.67-73. (Translation in Discrete Math.Appl.17 (2007), no.3, P. 253-260).

36. Shcherbacov V.A. On orders of elements in quasigroups. Bul. Acad [Текст] /V.A.Sherbacov // Stinite Repub. Moldova, Mat (2004) no.2, P. 49-54.

37. Choban M. M and Kiriyak L.L. The medial topological ouasigroups with identities, Applied and Industrial Mathematics [Текст] /sc M. M.Choban and L. L. Kiriyak. // Oradea, Romania and Chishinau, Moldova, Abstracts (Kishinev, Moldova), August 1995, P. 11.

38. Жевлаков К.А., Слинко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным [Текст] / К.А.Жевлаков, А.М. Слинко, И.П.Шестаков, А.И.Ширшов // Москва, наука 1978.

39. Shcherbacov V.A. On congruences of quasigroups [Текст] /V.A.Shcherbacov // 1990, Reg.in VINITI 01.08.90,№4413-B90, Moscow, 16 pages. (in Russian).

40. Табаров А.Х. Простые линейные и алинейные квазигруппы [Текст]

/А.Х. Табаров // Вестник ТГНУ, серия естественных наук, 2007, №3 (35), С. 259-262.

41. Табаров А.Х. О связи между типами линейных квазигрупп. Сборник научных трудов Налогово-правового института [Текст] /А.Х. Табаров // вып. №7, ч. 1, Душанбе, 2005, С. 182-187.

42. Мальцев А.И. Алгебраические системы /А.И. Мальцев -М. Наука, 1970.

43. Bruck R.H. Contributions to the theory of loops [Текст] /R.H. Bruck // Trans. Amer. Math. Soc., 1946, vol.60, P. 245-254.

Список опубликованных работ автора по теме диссертации:

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК РФ и ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

44–А. Давлатбеков А.А. К теории эндоморфизмов полулинейных квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. №8. С. 660 – 664.

45–А. Давлатбеков А.А. Линейные А-квазигруппы [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. №10. С. 475 – 481.

46–А. Давлатбеков А.А. Решение проблемы В.Д. Белоусова для класса BG-квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2017. №1/5. С. 38 – 41.

47–А. Давлатбеков А.А. Решение проблемы В.Д.Белоусова для некоторых классов линейных квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2017. №1/5. С. 98 – 103.

48–А. Давлатбеков А.А. О квазигруппах смешанного типа линейности с дополнительными тождествами [Текст] /А.А. Давлатбеков // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2018. №3. С. 97 – 101.

В других изданиях:

49–А. Давлатбеков А.А. Линейные А-квазигруппы [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков // Международная научная конференция, "Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного совета Республики Таджикистан, 27-28 октября 2017 года в г. Курган-Тюбе. С. 159-160.

50–А. Давлатбеков А.А. О проблеме Белоусова В.Д. /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «20-ой годовщине Дня национального единства» и « Году молодёжи» Душанбе, 2017. С. 576.

51–А. Давлатбеков А.А. Автотопии и антиавтотопии линейных слева (справа) квазигрупп [Текст] /А.А. Давлатбеков //Материалы международной научной конференции, посящённой 90-летию академика АН Республики Таджикистан, лаурета государственной премии имени Абуали Ибн Сино, Михайлова Леонида Григорьевича, 27-28 февраля 2018 года в г. Душанбе. С. 42-43.

52–А. Давлатбеков А.А. Задача В.Д.Белоусова для класса одностаронных линейных квазигрупп [Текст] /А.А. Давлатбеков // Международная алгебраическая конференция посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша, Москва, 2018. С. 80-81.

53–А. Давлатбеков А.А. Об изоморфизмах и автоморфизмах линейны слева (справа) квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков // Международная алгебраическая конференция посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша, Москва, 2018. С. 187-188.

54–А. Давлатбеков А.А. Задача В.Д.Белоусова для класса смешанных линейных квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Международная алгебраическая конференция посвящённая 90-летию со дня рождения профессора В.Д.Белоусова, Молдова, 2018. С. 124.

55–А. Давлатбеков А.А. О гомоморфизмах линейных слева (справа) квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков // Современные проблемы алгебры и теории чисел. Материалы республиканской научно-теоретической конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения профессора Г.Б.Бабаева, Душанбе, 14-15 декабря 2018 г. С.7-9.

56–А. Давлатбеков А.А. Некоторые гомоморфизмах линейных слева (справа) квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Международная конференция "Мальцевские чтения"Новосибирск, 19-22 ноября 2018 г. С. 204.

57–А. Давлатбеков А.А. Критерия изоморфизма парастрофов линейных квазигрупп [Текст] /А.А. Давлатбеков // - XXVI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. МГУ им.

М.В.Ломоносова, Москва, 8-12 апреля 2019 г. С. 104.

58–А. Давлатбеков А.А. Порядок элемента и обобщение идемпотентного элемента в квазигруппах [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Международная конференция, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико- математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 28-31 мая 2019 г. С. 57-58.

59–А. Давлатбеков А.А. Эндотопии и эндоморфизмы парастрофов линейных квазигрупп [Текст] /А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, З. Имомов // Республиканская научно-практическая конференция на тему "Воспитание и подготовка учителей математики в высших педагогических заведениях Таджикистана в современных условиях посвященная 80-летию доктора педагогических наук, профессора Ислома Гуломова, Куляб, 8-9 июня 2019 г. С. 5-6.