

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Давлатбекова Акимбека Авалбековича «Автоморфизмы, эндоморфизмы и конгруэнции обобщенных линейных квазигрупп», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теории чисел

Основным предметом исследования диссертационной работы А. А. Давлатбекова является определения структуры автоморфизмов, изоморфизмов, эндоморфизмов, гомоморфизмов и конгруэнции обобщенных линейных квазигрупп.

Впервые термин квазигруппа появился в работе Руфи Муфанг (1935) по координатизации проективных плоскостей. Другими словами, с одной стороны, квазигруппы возникли в недрах (проективной) геометрии, а с другой, - еще раньше, как комбинаторный объект – латинские квадраты в работах Леонарда Эйлера. Можно утверждать, что термин квазигруппа появился при изучении вопроса независимости аксиом в системах аксиом проективной плоскости. Таким образом, после упомянутой работы Р.Муфанг квазигруппы приобрели “законное право” на самостоятельное существование.

В 30-е годы XX века было введено понятие сети (ткани). В терминах теории сетей понятие квазигруппы имеет ясную и естественную геометрическую интерпретацию.

Квазигруппы, как решения некоторых возникающих в математической логике функциональных уравнений, неявно (без названия и без определения) появляются в работах немецкого логика Эрнста Шрёдера.

В настоящее время теория квазигрупп представляет собой самостоятельный раздел общей алгебры со своими задачами и проблемами. Имеется несколько обзоров по теории квазигрупп.

Фундаментальные результаты в теории бинарных и  $n$ -арных квазигрупп, в теории сетей и теории функциональных уравнений принадлежат В.Д.Белюсову, начинавшему свою деятельность в этой области под руководством профессора А.Г.Куроша.

В современной алгебре теорию квазигрупп можно рассматривать как одно из звеньев между классическими алгебраическими системами – группами и общими системами универсальной алгебры. Квазигруппы являются удобным объектом для проверки гипотез и идей универсальной алгебры. Ввиду близости к группам, к теории квазигрупп во многом применимы постановки задач и иногда методы теории групп.

Теория линейных квазигрупп занимает одно из центральных мест в общей теории квазигрупп. Первые исследования в этом направлении принадлежат работам Р.Брака и Тойода по исследованию так называемых медиальных квазигрупп. Квазигруппа  $(Q, \cdot)$  называется медиальной, если в ней выполняется тождество  $xy \cdot uv = xi \cdot yv$ . Брак и Тойода доказали, что всякая медиальная квазигруппа  $(Q, \cdot)$  имеет следующую конструкцию

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y, \quad (1)$$

где  $(Q, +)$  - абелева группа,  $\varphi$  и  $\psi$  - автоморфизмы группы  $(Q, +)$ ,  $c$  - фиксированный

элемент из  $Q$ , причем  $\varphi\psi = \psi\varphi$ . Другими словами, любая медиальная квазигруппа "строится" из абелевой группы представлением (1).

Класс линейных квазигрупп представляет большой интерес для исследования ввиду их близости к группам. Линейные квазигруппы введены и исследованы В.Д.Белоусовым и доказано, что если в квазигруппе выполняется уравновешенное тождество, то изотопна некоторой группе.

Квазигруппа  $(Q, \cdot)$  называется *линейной* над группой  $(Q, +)$ , если  $(Q, \cdot)$  имеет вид (1).

В литературе встречается также более общий подход к понятию линейной квазигруппы, а именно, линейными над некоторой лупой, (Т.Кепка и П.Немец, П.Немец, Я.Ежек и Т.Кепка, В.А.Щербаков и др.), называют квазигруппу  $(Q, \cdot)$  линейной над лупой  $(Q, +)$  если она имеет вид  $x \cdot y = (\varphi x + \psi y) + d$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  - автоморфизмы группы  $(Q, +)$  с - фиксированный элемент и предполагая, что при этом в качестве луп  $(Q, +)$  будут использоваться достаточно известные и изученные лупы, например лупы Муфанг, то есть лупа с тождеством  $x + (y + (x + z)) = ((x + y) + x) + z$ . Общая идея квазигруппы, линейной над некоторой лупой, выкристаллизовалась в работах алгебраистов из Праги (Т.Кепка, Я.Ежек, П.Немец). Многие известные классы объектов лежат в классе обобщенных линейных квазигрупп. Например, медиальные квазигруппы (теорема Тойоды), дистрибутивные квазигруппы (теорема Белоусова), дистрибутивные квазигруппы Штейнера, леводистрибутивные квазигруппы (теорема Белоусова-Оноя), СН-квазигруппы (теорема Манина), Т-квазигруппы  $n$ -арные группы (теорема Глускина-Хоссу),  $n$ -арные медиальные квазигруппы (теорема Ивэнса и теорема Белоусова), F-квазигруппы (теорема Кепки-Киньона-Филлипса,) являются квазигруппами такого вида.

Линейные квазигруппы и некоторые их обобщения, достаточно интенсивно изучались чешскими алгебраистами Т.Кепка, П.Немец, Я.Ежек и представителями квазигрупповой школы В.Д.Белоусова - Г.Б.Белявская, В.А.Щербаков, В.И.Избаш, К.К.Щукин, Ф.Н.Сохатский, П.Н.Сырбу, А.Х.Табаров, В.А.Дудек.

Все рассуждения, приведенные выше, можно отнести к обоснованию и актуальности выбранной темы исследования.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней получены общий вид автотопий, эндотопий, автоморфизмы, эндоморфизмы обобщенных линейных квазигрупп. Кроме того, доказана проблема Белоусова о нормальности конгруэнций для некоторых классов обобщенных линейных квазигрупп.

Степень обоснованности полученных в диссертации результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов алгебраических структур, а именно:

- методы теории групп и теории квазигрупп;
- метод В.Д.Белоусова исследования тождеств в квазигруппах;
- методы В.А.Щербакова и А.Х.Табарова вычисления автотопий и эндотопий квазигрупп.
- алгебраические комбинаторные методы;

- метод исследования неассоциативных алгебраических систем.

Полученные в диссертации результаты являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами, дополняют исследования выше указанных ученых и заключаются в следующем:

1. Исследованы гомоморфизмы, автоморфизмы, эндоморфизмы, конгруэнции обобщенных линейных квазигрупп, описано строение автотопий, антиавтотопий и эндотопий обобщенных линейных квазигрупп;
2. Получено строение автотопий, антиавтотопий и эндотопий обобщенных линейных квазигрупп;
3. Решена задача В.Д.Белоусова об условиях нормальности конгруэнции некоторых подклассов обобщенных линейных квазигрупп;

Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся теории квазигрупп и неассоциативных алгебраических систем, в том числе в Математическом институте Молдавии РАН, в Институте математики им. А. Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Кулябском государственном университете им. А.Рудаки и в других учебных заведениях.

Диссертация А. А. Давлатбекова состоит из введения, двух глав, разбитых на 12 параграфов, обзора полученных результатов и списка цитированной литературы. Все теоремы, леммы, предложения, следствия, замечания и формулы нумеруются тремя числами, первое из которых обозначает номер соответствующей главы, второе - номер параграфа. Аналогично формулы нумеруются тремя числами, первое из которых обозначает номер главы, второе номер параграфа. Полный объем диссертации 115 страниц, библиография включает 59 наименований, включая 16 работ автора.

Основным результатом первой главы является теоремы (1.3.2, 1.3.6, 1.3.7, 1.5.1), следствие (1.1.3, 1.4.1, 1.5.1) и предложение (1.3.1, 1.5.1) об исследовании изоморфизмов, автоморфизмов, гомоморфизмов и эндоморфизмов линейных слева (справа) квазигрупп. Описано строение автотопий, антиавтотопий, эндотопий обобщенных линейных квазигрупп и автотопии, антиавтотопии и эндотопии парастрофов линейных и алинейных квазигрупп.

Основными результатами второй главы посвящена решению одной из проблем теории квазигрупп и луп, которая поставлена В.Д.Белоусовым в его монографии "Основы теории квазигрупп и луп". Постановка задачи следующая: *каковы квазигруппы или лупы в которых все конгруэнции являются нормальными?* (Проблема 20, с.221). В параграф 2.1 решена проблема В.Д. Белоусова для различных классов линейных квазигрупп и  $BG$ -квазигрупп, то есть доказано, что в линейных слева (справа) квазигруппах Бола и квазигруппах смешанного типа линейности I, II рода каждая конгруэнция является нормальной. Кроме того, в данной главе описаны смешанные линейные квазигруппы I и II типа и определены соотношения смешанных линейных квазигрупп I и II типа с помощью дополнительных тождеств с T-квазигруппами. Также найдены необходимые и достаточные условия линейности класса A-квазигрупп.

- пусть  $(Q, \cdot)$  - линейная квазигруппа  $x \cdot y = \varphi x + \psi y$ , с условием  $\varphi^2 = \psi^2 = \varepsilon$ . Тогда в  $(Q, \cdot)$  выполняются тождества Бола, то есть  $(Q, \cdot)$  является квазигруппой Бола. (теорема 2.1.3.);
- всякая конгруэнция  $BG$ -квазигруппы является нормальной конгруэнцией. (следствие 2.1.1).

Безусловными достоинствами диссертационной работы А. А. Давлатбекова являются тщательность проведенного анализа поставленных задач, строгое математическое доказательство приведённых утверждений, логическая последовательность изложения материалов и её основные результаты. К недостаткам диссертации можно отнести несколько незначительных отпечаток и грамматических ошибок, не влияющих на научную значимость полученных результатов. В целом, автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо.

Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты, а именно описано строение автотопий, эндотопий автоморфизмов и эндоморфизмов обобщенных линейных квазигрупп, также решена проблема определения нормальных конгруэнций для вышеназванных классов квазигрупп. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах, 5 из которых опубликованы в изданиях из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Диссертационная работа Давлатбекова Акимбека Авалбековича «Автоморфизмы, эндоморфизмы и конгруэнции обобщенных линейных квазигрупп», на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно – квалификационной работой, которая посвящена исследованию автоморфизмов, эндоморфизмов, изоморфизмов, гомоморфизмов и конгруэнций обобщенных линейных квазигрупп, и полностью удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней» ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Официальный оппонент: Усманов Зафар Джураевич,  
доктор физико-математических наук  
академик Академии наук Республики Таджикистан,  
заведующий отделом математического моделирования  
Института математики им. А.Джураева



Конкретная информация: Институт математики им. А. Джураева  
АН Республики Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299  
тел: +992 (372) 25 77 76, +992 (372) 25 16 00,  
e-mail: mitas@mail.tj, веб-сайт: <http://www.mitas.tj>

*Подпись З. Ф. Усманова заверяю  
Учёный секретарь Института математики  
им. А. Джураева, к.ф.-м.н. Назруллоев А. А.*