На правах рукописи

Исхоков Фаридун Сулаймонович

ТЕОРЕМЫ РАЗДЕЛИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе 2018

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Гадоев Махмадрахим Гафурович

Официальные оппоненты: **Сафаров Джумабой,**
доктор физико-математических наук,
профессор, Курган-Тюбинский
государственный университет
им. Н.Хусрава, заведующий кафедрой
математического анализа

Джангибеков Гулходжа,
доктор физико-математических наук,
профессор, Таджикский национальный
университет, профессор кафедры
функционального анализа и
дифференциальных уравнений

Ведущая организация: Межгосударственное образовательное
учреждение высшего профессионального
образования "Российско-Таджикский
(Славянский) университет "

Защита состоится *28 декабря 2018 г. в 12 ч. 00 мин.* на заседании диссертационного совета 6D.KOA–37 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А. Джураева АН Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан "____"____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D.KOA–37,
кандидат физико–математических наук Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию L_p-разделимости дифференциальных выражений с частными производными высокого четного порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области Ω n-мерного евклидова пространства R_n, коэффициенты которых могут обращаться в нуль или в бесконечность на границе области. Исследования по разделимости дифференциальных выражений образуют одно из основных самостоятельных направлений современной теории дифференциальных операторов, и результаты, полученные по этому направлению, используются в спектральной теории дифференциальных операторов, в теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных, а также при исследовании существования и гладкости решения дифференциальных уравнений.

Понятие разделимости дифференциального выражения впервые было введено в фундаментальной работе В.Н.Эверитта (W.N.Everitt) и М.Гирца (M.Giertz)[1], в которой исследовалась разделимость оператора Штурма-Лиувилля в пространстве L_2. Позже результаты этой работы обобщались в других работах этих авторов, а также в работах Ф.В.Аткинсона (F.V.Atkinson)[2], В.Н.Эверитта, М.Гирца, Дж.Вайдмана (J.Weidmann)[3], А.Цеттла (A.Zettl)[4], К.Х.Бойматова[5–6] , М.Отелбаева[7], А.Биргибаева, М.Отелбаева[8], Р.С.Брауна (R.C.Brown), Д.Б.Хинтона (D.B.Hinton)[9] , Н.Чернявской (N.Chernyavskaya), Л.Шустера (L.Shuster)[10] И.Курбонова,

---

[1] Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. Lond. Math. Soc. – 1971. – V. 23. – No. 3. – P. 301 – 324.

[2] Atkinson F.V. On some results of Everitt and Giertz // Proc. Royal Soc. Edinburg. – 1972/3. – V. 71A. – P. 151 -Џ 158.

[3] Everitt W.N., Giertz M., Weidmann J. Some remarks on a separation and limit-point criterion of second order ordinary differential expressions // Math. Ann. – 1973. – V. 200. – P. 335 – 346.

[4] Zettl, A. Separation for differential expressions and the L^p spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 55. – No. 1. – P. 44 – 46.

[5] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости для оператора Штурма–Лиувиля // Математические заметки. – 1973. – Т. 14. – №3. – С. 349 – 359.

[6] Бойматов К.Х. О методе В.Н. Эвиритта и М. Гирца для банаховых пространств // Доклады АН России. – 1997. – Т. 356. – №1. – С. 10 – 12.

[7] Отелбаев М. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма–Лиувилля // Математические заметки. – 1974. – Т. 16. – №6. – С. 969 – 980.

[8] Биргебаев А., Отелбаев М. О разделимости нелинейного дифференциального оператора третьего порядка // Известия АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1984. – №3. – С. 11 – 13.

[9] Brown R.C., Hinton D.B. Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators // Mathematica Bohemica. – 1999. – V. 124. – No. 2-3. – P. 273 – 292.

[10] Chernyavskaya N., Shuster L. Weighted estimates for solutions of the general Sturm-Liouville equation and the Everitt-Giertz problem I // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2015. – V. 58. – Is. 01. – P. 125 – 147.

М.Шодиева[11] и др.

Например, понятие разделимости для дифференциального выражения Штурма-Лиувилля

$$M[y] = -y'' + q(x)y, \quad x \in (a, +\infty),$$

в пространстве $L_2(a, +\infty)$ означает, что если $y,\ -y'' + q(x)y \in L_2(a, +\infty)$, то $-y'',\ qy \in L_2(a, +\infty)$.

В некоторых работах по теории разделимости используется понятие разделимости дифференциального оператора. В этих случаях условия разделимости дифференциального выражения проверяются для функций из области определения соответствующего оператора.

В работе А.Цеттла[4] исследовалась разделимость линейного обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка n в пространстве L_p. Коэффициенты исследуемого оператора мало отличаются от постоянных, и доказательство основного результата сводится к применению соответствующего коэрцитивного неравенства для обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Разделимость обыкновенных дифференциальных выражений порядка выше второго также исследовалась в работах С.А.Исхокова[12], Д.С.Гоибова[13] и др.

Отметим, что в работах В.Н.Эверитта и М.Гирца, в основном, исследовалась разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней, и лишь некоторые достаточные критерии разделимости обыкновенных дифференциальных выражений, установленные в работах этих авторов, обобщены на случай дифференциальных выражений с частными производными второго порядка в работах В.Н.Эверитта и М.Гирца[14], В.Д.Эванса (W.D.Evans), А.Цеттла (A.Zettl)[15]. В этих работах исследовалась разделимость оператора Шредингера в пространстве $L_2(R^n)$.

---

[11] Курбанов И., Шодиев М. Разделимость оператора Штурма -Лиувилля в пространстве вектор-функции с взвешенно суммируемыми компонентами // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1995. – Т. 38. – №1-2. – С. 79 – 86.

[12] Исхоков С.А. О разделимости обыкновенных дифференциальных выражений // В сб.:Функционалний анализ и его приложения в механике и теории вероятностей. Москва. Изд-во МГУ. – 1984. С. 130 – 131.

[13] Гаибов Д.С. Обыкновенные дифференциальные операторы класса Трибеля на полуоси // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1993. Т. 36. – №12. – С. 571 – 574.

[14] Everitt W.N., Giertz M. Inequalities and separation for Schrodinger type operators in $L_2(R^n)$ // Proc.Royal Soc. Edinburgh. – 1977. – V. 79A. – P. 257 – 265.

[15] Evans W.D., Zettl A. Dirichlet and separation results for Schrodinger-type operators // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – 1978. – V. 80A. – P. 151 – 162.

Разделимость дифференциальных выражений высшего порядка с частными производными исследовалась в работах К.Х.Бойматова[16–19], М.Отелбаева[20] и др.

Если дифференциальное выражение задается в функциональном пространстве, норма которого определяется интегрированием со степенью $p \geq 1$ и с весом $\omega(x)$, где $\omega(x) \not\equiv 1$ – некоторая измеримая положительная функция, то при выполнении соответствующих включений (см. ниже определение 2.1.1) это дифференциальное выражение называется L_p-разделимым с весом ω, а в случае $\omega(x) \equiv 1$ называется просто L_p-разделимым.

Отметим, что L_2-разделимость с весом $\omega(x)$, не обязательно равным 1, рассматривалась в работах О.Х.Каримова[21] , Х.А.Атиа[22], Р.С.Брауна (R.C. Brown) и Д.Б.Хинтона (D.B. Hinton)[9] и др. А общий случай, то есть L_p-разделимость с весом $\omega(x)$, не обязательно равным 1, рассматривался в работах К.Х.Бойматова[19,23], Н.Чернявской (N.Chernyavskaya), Л.Шустера (L.Shuster)[10] и др.

Приведенный выше обзор результатов по разделимости дифференциальных выражений свидетельствует о том, что разделимость общих дифференциальных выражений с частными производными произвольного четного порядка исследована лишь в отдельных работах и случай, когда область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и удовлетворяют условию погружения, ранее не рассматривался. Именно этот случай исследуется в нашей диссертационной работе.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование L_p-разделимости и L_p-разделимости с весом $\omega(x)$, не обязательно равным

---

[16] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 213. – №5. – С. 1009 – 1011.

[17] Бойматов К.Х. L_2-оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. – №3. – С. 521 – 524.

[18] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения к краевым задачам // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 247. – №3, 532 – 536.

[19] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 37 – 76.

[20] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 195 – 217.

[21] Каримов О.Х. О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом в весовом пространстве // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2005. – Т. 48. – №3-4. – С. 38 – 43.

[22] Atia H.A. Separation of the Grushin differential operator in weighted Hilbert spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2011. – V. 32. – No. 3. 180 – 188.

[23] Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений // Доклады АН России. – 1993. – Т. 330. – №4. – С. 409 – 414.

1, дифференциальных выражений с частными производными произвольного четного порядка в случае, когда область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и удовлетворяют условию погружения.

Объекты исследования. Объектами исследования являются эллиптические дифференциальные операторы высшего порядка, заданные в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства.

Методы исследования. Основными методами исследования являются современные методы теории функций, функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными. Доказательство теорем разделимости основано на построении правого регуляризатора.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

1. Для одного класса вырождающихся дифференциальных операторов с частными производными высокого порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства построен правый регуляризатор и доказано существование непрерывного обратного оператора в пространстве L_p, $1 < p < +\infty$.

2. Введены новые функциональные пространства дифференцируемых функций многих вещественных переменных, норма которых задается с помощью дифференциального выражения, и найдены условия плотности класса бесконечно дифференцируемых финитных функций в этих пространствах.

3. Найдены достаточные условия L_p-разделимости $(1 < p < +\infty)$ одного класса вырождающихся дифференциальных операторов с частными производными высокого порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства.

4. Доказана теорема о разделимости вырождающихся дифференциальных операторов с частными производными высокого порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства в пространстве L_p, $1 < p < +\infty$, с весом $\omega(x)$.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными, в теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью уравнений с частными производными в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций многих вещественных переменных.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинаре отдела функционального анализа и теории функций и общеинститутском семинаре Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международная научная конференция "Современные проблемы математики и ее приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 2016);
- "Международная летняя математическая Школа-Конференция С.Б. Стечкина по теории функций" (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- международная конференция "Математика в современном мире", посвященная 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева Российской академии наук (Новосибирск, Россия, 14-19 августа 2017 г.);
- 8-ая международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 4-8 июля 2017 г.);
- международная конференция "Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел" (г. Қургантеппа, 27-28 октября 2017 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в девяти работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РТ. Работа [3] входит в международные библиографические и реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

В работах опубликованных в соавторстве с научным руководителем, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 83 наименований и заключения, занимает 106 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX . Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении дачтся обоснование актуальности темы диссертации, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены еч основные результаты.

Первая глава диссертационной работы посвящена исследованию разделимости одного класса дифференциальных выражений с частными производными высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области, коэффициенты которых могут иметь нестепенное вырождение на границе. Она состоит из трех параграфов.

В первом параграфе изучается непрерывная обратимость операторов, которые задаются с помощью дифференциальных выражений из указанного выше класса.

Пусть Ω – произвольное открытое множество в n - мерном евклидовом пространстве R_n, и пусть

$$\Pi(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n : |x_j| < \frac{1}{2}, j = \overline{1,n} \right\}$$

– единичный куб с центром в начале системы координат.

Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \left\{ x \in R_n : \left(\frac{x_1 - \xi_1}{t_1}, \frac{x_2 - \xi_2}{t_2}, \ldots, \frac{x_n - \xi_n}{t_n} \right) \in \Pi(0) \right\}.$$

Пусть $g_j(x)(j = \overline{1,n})$ – определенные в Ω положительные функции. Положим

$$\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon\overrightarrow{g}(\xi)}(\xi),$$

где $\varepsilon > 0$ и $\overrightarrow{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Далее в работе предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$ связаны следующим условием:

(A). существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω.

Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного П.И.Лизоркиным[24]. В его работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условию погружения.

Отметим, что вырождающиеся эллиптические операторы дивергентного вида в случае, когда область Ω и функции $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, характеризующие вырождение коэффициентов исследуемого оператора, удовлетворяют сформулированным выше условиям, ранее изучались в работах С.А.Исхокова, М.Г.Гадоева и И.А.Якушева[25–27] . В этих работах, в основном, исследовалась разрешимость вариационной задачи Дирихле в пространстве $L_2(\Omega)$, и изучались свойства ее решения. В отличие от этого в настоящей диссертационной работе исследуются эллиптические операторы высокого порядка недивергентного вида и для них строятся обратные операторы, действующие в пространстве $L_p(\Omega), 1 < p < +\infty$.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ – длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

и i – мнимая единица.

---

[24] Лизоркин П. И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 156. – С. 130 – 142.

[25] Гадоев М.Г., Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле для одного класса эллиптических уравнений с вырождением // Математические заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18. – №1. – С. 25 – 35.

[26] Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением // Доклады АН России. – 2012. – Т. 443. – №3. – С. 286 – 289.

[27] Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением и его приложения // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – Вып. 1. – С. 54 – 71.

Символом $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где τ – положительное число, обозначим класс символов

$$L(x,s) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x)s^k \quad (x\in\Omega, s\in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x\in\Omega, s\in R_n} |L(x,s)| = \delta \ne 0$;

(II) $|a_k(x)s^{k'}| \le \tau g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x)\dots g_n^{-k_n''}(x)|L(x,s)|$

для всех $x\in\Omega$, $s\in R_n$, $k=k'+k''$, $k''\ne 0$, $|k|\le 2r$;

(III) $\sum\limits_{|k|\le 2r} \left|(a_k(x)-a_k(y))\, s^k\right| \le \tau |L(x,s)|$

для всех $s\in R_n$ и всех $x,y\in\Omega$ таких, что $|x_j-y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j=1,2\dots,n$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Основные результаты первого параграфа первой главы сформулированы в виде следующих двух теорем.

Теорема 1.1.1. *Пусть существует число* $\lambda>0$ *такое, что*

$$\lambda^{-1} \le \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \le \lambda, \ j=1,2,\dots,n,$$

для всех $y\in\Omega$ *и всех* $x\in\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$, *и пусть при некотором* $\varkappa>0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{|k|\le 2r} |a_k(x)s^k| \le \varkappa |L(x,s)|$$

для всех $x\in\Omega$, $s\in R_n$.

Тогда найдется число $\tau_0=\tau_0(n,\,r,\,p,\,\varkappa,\,\delta)>0$, $1<p<+\infty$, *такое, что если* $\tau\in(0,\tau_0)$ *и* $L(x,s)\in B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, *то замыкание* $L_{(p)}$ *оператора* $L=L(\cdot,D)$, $D(L)=C_0^\infty(\Omega)$, *в пространстве* $L_p(\Omega)$ *существует и имеет непрерывный обратный.*

Теорема 1.1.2. *Пусть* $1<p<+\infty$, *выполнены все условия теоремы 1.1.1, и пусть* τ_0 *– такое же число как в теореме 1.1.1. Тогда, если* $\tau\in(0,\,\tau_0)$ *и* $L(x,s)\in B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, *то имеет место следующее неравенство*

$$\|u;\,L_p(\Omega)\| \le C_0 \left\|L_{(p)}u;\,L_p(\Omega)\right\| \quad \left(u\in D\left(L_{(p)}\right)\right),$$

где число $C_0 > 0$ *зависит только от* $r,\ n,\ p,\ \varkappa$ *и нижней грани функции* $|L(x,\ s)|$ $(x \in \Omega,\ s \in R_n)$.

Во втором параграфе первой главы вводятся некоторые пространства дифференцируемых функций многих вещественных переменных, нормы которых задаются с помощью дифференциального выражения (1), и изучаются свойства этих пространств.

Обозначим через $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\ W_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx + \sum_{|k| \le 2r} \int\limits_\Omega \left| a_k(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, обозначим через $\mathscr{K}$. Пусть $O_{\mathscr{K}}$ – множество функций $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л.Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$.

Обозначим через $W'_{p;\,L}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, пространство функций $u(x) \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ с конечной нормой (2).

Далее предположим, что коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \le 2r$, дифференциального выражения (1) удовлетворяют следующему условию гладкости

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l| \le |k| \le 2r). \tag{3}$$

Как обычно, символом $\langle f,\ \varphi\rangle$, где $f \in D'(\Omega)$, обозначим значение обобщенной функции f на функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обобщенная функция f отождествляется с некоторой функцией $g(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, если

$$\langle f,\ \varphi\rangle = \int\limits_\Omega g(x)\varphi(x)dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

При выполнении условия гладкости (3) для произвольной функции $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ можно определить обобщенную функцию $a_k(x)D_x^k u(x)$ $(|k| \le 2r)$ по формуле

$$\left\langle a_k D^k u,\ \varphi\right\rangle = (-1)^{|k|} \int\limits_\Omega u(x) D_x^k \left(a_k(x)\varphi(x)\right) dx \tag{4}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вводим пространство $W_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенные функции $a_k(x) D_x^k u(x)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$ для всех $|k| \le 2r$, и конечна норма (2).

Для $u(x) \in L_p(\Omega)$ через $L(x,\, D_x) u(x)$ обозначим сумму всех обобщенных функций $a_k(x) D_x^k u(x), \quad |k| \le 2r$, определенных равенством (4), и вводим пространство $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенная функция $L(x,\, D_x) u(x)$ принадлежит пространству $L_p(\Omega)$ и конечна следующая норма

$$\|u;\, \mathcal{W}_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} |L(x,\, D_x) u(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}. \qquad (5)$$

Через $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p;\,L}(\Omega)$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (5).

Таким образом, для дифференциального выражения (1) мы определили весовые пространства $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. При этом первые два пространства определены без всякого предположения о гладкости коэффициентов $a_k(x), \quad |k| \le 2r$, а два последних пространства определены, когда выполняется условие гладкости (3).

Заметим, что $W'_{p,\,L}(\Omega) \subset W_{p,\,L}(\Omega)$ и если $a_k(x) \not\equiv 0$ для всех мультииндексов $k : \ |k| \le 2r$, то $W'_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega)$. Если условие гладкости (3) выполняется, то пространство $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ является замыканием класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{p,\,L}(\Omega)$.

Введенные выше пространства $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ являются полными.

Теорема 1.2.1. *Пусть $1 < p < +\infty$, выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть τ_0 – такое же число, как в теореме 1.1.1. Тогда, если $\tau \in (0,\, \tau_0)$ и $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то*

$$D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega),$$

и для всех функций $u \in D\left(L_{(p)}\right)$ выполняются неравенства

$$\|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\| \le M \,\|L(\cdot;\, D) u;\, L_p(\Omega)\| \le M \,\|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\|\,,$$

где число $M > 0$ зависит только от $r,\, n,\, p,\, \delta,\, \varkappa$.

Теорема 1.2.2. *Пусть $1 < p < +\infty$, выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть τ_0 – такое же число как в этой теореме. Тогда если $\tau \in (0,\, \tau_0)$ и $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то имеет место вложение*

$$W'_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right).$$

Если же при этом выполняется условие гладкости

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l| \le |k| \le 2r),$$

то

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega).$$

В третьем параграфе первой главы изучается разделимость дифференциального выражения (1) при дополнительных условиях на его коэффициенты. Вводится класс символов $\mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$. По определению $L(x,s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, если $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$,

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l| \le |k| \le 2r),$$

и выполняется одно из следующих условий:

(IVa) $L(x,\, D_x)$ – симметрическое дифференциальное выражение;

(IVб) $\sum\limits_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\,|k|\le 2r}} \left| \left(D_x^l a_k(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \le \tau |L(x,\, s)|$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n$.

Определение 1.3.1. Дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k, \quad x \in \Omega,$$

называется L_p-*разделимым*, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что

$$u(x) \in L_p(\Omega),\ \ L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega),$$

имеет место включение

$$a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$$

для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $1 < p < +\infty$, *и существует число* $K > 0$ *такое, что*

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| a_k(x) s^k \right| \le K\, |L(x,\, s)|$$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n$. *Тогда найдется число* $t_0 = t_0(r,\, n,\, p,\, K) > 0$ *такое, что если*

$$L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega), \quad 0 < \tau < t_0,$$

то дифференциальное выражение $L(x,\, D_x)$ L_p*-разделимо. При этом*

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega),$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию L_p-разделимости ($1 < p < +\infty$) дифференциального выражения (1) с весом $\omega(x)$. Она состоит из четырех параграфов. Основные результаты главы сформулированы в первом параграфе, а их доказательства приведены в оставшихся параграфах.

Определение 2.1.1. Пусть $\omega(x)$ – положительная измеримая в Ω функция, $1 < p < +\infty$. Дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

называется *L_p-разделимым с весом* $\omega(x)$, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что

$$\omega(x)u(x) \in L_p(\Omega),\;\; \omega(x)L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$$

имеет место включение

$$\omega(x)a_k(x)D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$$

для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Теорема 2.1.1. *Пусть существуют числа* $\lambda > 1$, $\nu > 1$ *такие, что*

$$\nu^{-1} \le \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \le \nu, \quad \lambda^{-1} \le \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \le \lambda,\;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

для всех $y \in \Omega$ *и всех* $x \in \Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$, *и пусть при некотором* $\varkappa > 0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{|k|\le 2r} |a_k(x)s^k| \le \varkappa |L(x, s)| \tag{7}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. *Тогда найдется число* $\tau_* = \tau_*(r,\, n,\, p,\, \varkappa,\, \lambda,\, \nu) > 0$ *такое, что если*

$$L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega),\; \tau \in (0,\, \tau_*),$$

то дифференциальное выражение $L(x,\, D_x)$ L_p*-разделимо с весом* $\omega(x)$.

Доказательство теоремы 2.1.1 основано на применении сформулированной ниже теоремы 2.1.2 об относительной ограниченности дифференциальных операторов, которая имеет также и самостоятельный интерес.

Наряду с дифференциальным выражением (6) рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathbb{L}(x, D_x) = \sum_{|k|\leq 2r} b_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega)$$

с непрерывными коэффициентами $b_k(x)(x \in \Omega,\ |k| \leq 2r)$, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\leq 2r}} \left| b_k(x) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \leq \mathbb{N} |L(x,\, s)| \tag{8}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$; $\mathbb{N}$ – некоторая положительная постоянная.

Теорема 2.1.2. *Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что*

$$\lambda^{-1} \leq \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \leq \lambda,\ \ j = 1, 2, \dots, n,$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa > 0$ выполняется неравенство (7). Пусть также выполняется неравенство (8). Тогда найдется число $\tau_0^* = \tau_0^*(r,\, n,\, p,\, \varkappa,\, \delta) > 0$, $1 < p < +\infty$, такое, что если $L(x,\, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < \tau_0^*$, то для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\leq 2r} \left\| b_k(x) D_x^k u(x);\, L_p(\Omega) \right\| \leq \mathbb{M}\, \| L(x,\, D_x) u(x);\, L_p(\Omega) \| \,, \tag{9}$$

где $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r,\, n,\, p,\, \varkappa,\, \mathbb{N})$ - некоторая положительная постоянная. Если же $L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < \tau_0^*$, то неравенство (9) имеет место также для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$.

Доказательство этой теоремы приведено в §2.2. В §2.3 доказываются некоторые вспомогательные леммы, а в §2.4 приведено доказательство теоремы 2.1.1.

В **заключении,** приведённом в конце диссертации, излагаются итоги приведённого исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Махмадрахиму Гафуровичу Гадоеву за полезные советы, обсуждения и поддержку.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

1. Исхоков Ф.С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве [Текст] / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. – №7. – С. 558 – 563.

2. Исхоков Ф.С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве [Текст] / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Математические заметки СВФУ – 2016. – Т. 23. – №3(91). – С. 3 – 26.

3. Iskhokov F.S. Separation of a class of degenerate differential operators in L_p-spaces [Текст] / M.G.Gadoev, F.S.Iskhokov //Proceedings of the 8th international conference on mathematical modeling (ICMM-2017). AIP Conference Proceedings, vol. 1907, 030003 (2017), p. 1–5. https://doi.org/10.1063/1.5012625.

4. Исхоков Ф.С. Об относительной ограниченности одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве [Текст] / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Математические заметки СВФУ – 2018. – Т. 25. – №1(97). – С. 3 – 14.

Прочие публикации

5. Исхоков Ф.С. О разделимости одного класса эллиптических операторов в лебеговом пространстве [Текст] / Ф.С.Исхоков // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложений". – Душанбе: Филиал МГУ им. М.В. Ломоносов. – 2016. – С. 76 – 78.

6. Исхоков Ф.С. О некоторых функциональных пространствах, норма которых задается с помощью дифференциального оператора [Текст] / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. – Душанбе. – 2016. – С. 82 – 84.

7. Исхоков Ф.С. О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве [Текст] / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // VIII Международная конференция по математическому моделированию. Якутск, Россия. 4-8 июля, 2017. Тезисы докладов. – С. 35.

8. Исхоков Ф.С. О разделимости одного класса вырождающихся эллиптических операторов [Текст] / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // ”Математика в современном мире”. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С.Л.Соболева. Новосибирск, Россия. 14-18 августа, 2017. Тезисы докладов. – С. 201.

9. Исхоков Ф.С. К теории разделимости эллиптических дифференциальных операторов [Текст] / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // ”Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел”. Материалы международной конференции, посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан. Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017 г. – С. 32–33.

Шарҳи мухтасари

диссертатсияи Исҳоқов Фаридун Сулаймонович дар мавзӯи ”Теоремаҳои ҷудошавандагӣ барои баъзе синфҳои операторҳои эллиптикии таназзулёбанда”, ки барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯи ихтисоси 01.01.01-Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ пешниҳод шудааст

Вожаҳои калидӣ: оператори дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, ҳосилаи умумишуда, ҷудошавандагӣ, регуляризатори рост, оператори баръакс.

Муҳимияти мавзӯъ: Кори диссертатсионӣ ба тадқиқи ҷудошавандагии операторҳои эллиптикии дараҷаи олӣ дар фазои $L_p(\Omega)$ ва фазои вазндори $L_{p;\,\omega}(\Omega)$ бахшида шудааст.

Мафҳуми ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалӣ бори аввал аз тарафи В.Н.Эверитт (W.N.Everitt) ва М.Гиртс (M.Giertz) дар соли 1971 ба адабиёти илмӣ ворид карда шуда, дар марҳилаи ҳозира тадқиқот оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалӣ яке аз равияҳои мустақили назарияи муосири муодилаҳои дифференсиалиро ташкил медиҳанд. Натиҷаҳои дар ин равия ба даст овардашуда дар назарияи спектралии операторҳои дифференсиалӣ, дар назарияи фазоҳои нормиронидашудаи функсияҳои дифференсиронидашавандаи бисёртағйирёбандаи ҳақиқи дошта ва инчунин ҳангоми тадқиқи мавҷудият ва суфтагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ истифода мешаванд. Натиҷаҳои назаррас дар ин равия дар корҳои К.Ҳ.Бойматов, М.Ғ.Гадоев, О.Х.Каримов, М.Б.Муратбеков, А.С.Мохамед (A.S.Mohamed), Р.Ойнаров, М.Отелбаев, Х.А.Атиа (H.A.Atia), Ф.В.Аткинсон (F.V.Atkinson), Р.С.Браун (R.C.Brown), Д.Б.Хинтон (D.B.Hinton), Н.Чернявская (N.Chernyavskaya), В.Н.Эверитт (W.N.Everitt), М.Гиртс (M.Giertz), О.Милатович (O.Milatovic), С.Омран (S.Omran), Л.Шустер (L.Shuster), Е.М.Е.Зайед (E.M.E.Zayed) ва дигарон ба даст оварда шудаанд.

Мақсади кор. Мақсади кори диссертатсионӣ тадқиқи L_p-ҷудошавандагӣ ва L_p-ҷудошавандагӣ бо вазни $\omega(x)$-и операторҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии дараҷаи дилхоҳи ҷуфт дар ҳолате, ки соҳаи Ω ва функсияҳое, ки таназзулёбии коэффитсиентҳои оператори тадққшавандаро тавсиф мекунанд, дар як ҷуфт бо ҳам дода мешаванд ва шарти ғӯтонишро (погружение) қаноат мекунонанд, мебошад.

Навоварии илмӣ. Натиҷаҳои илмии диссертатсия, ки барои ҳимоя пешниҳод мешаванд, нав мебошанд ва аз инҳо иборатанд:

1. Барои як синфи операторҳои диффернсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣи дараҷаи олӣ дар соҳаи дилхоҳи (маҳдуд ва ё номаҳдуд) фазои $n-$ченакаи евклидӣ регуляризатори рост сохта шудааст ва мавҷудияти оператори баръакси бефосила дар фазои L_p, $1 < p < +\infty$, исбот карда шудааст.

2. Фазоҳои нави функсияҳои дифференсиронидашавандаи бисёр тағйирёбандаи ҳақиқӣ дошта муайян карда шуданд, ки нормаҳояшон бо воситаи ифодаи дифференсиалӣ дода мешаванд, ва шартҳои дар ин фазоҳо зич будани синфи функсияҳои беохирдифференсиронидашаванда муайян карда шудаанд.

3. Шартҳои кифоягии L_p-ҷудошавандагии ($1 < p < +\infty$) як синфи ифодаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии дараҷаи олии таназзулёбанда, ки дар соҳаи дилхоҳи (маҳдуд ва ё номаҳдуд) фазои n-ченакаи евклидӣ дода шудаанд, муайян карда шудаанд.

4. Теорема оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии дараҷаи олии таназзулёбанда, ки дар соҳаи дилхоҳи (маҳдуд ва ё номаҳдуд) фазои n-ченакаи евклидӣ дода шудаанд, дар фазои L_p, $1 < p < +\infty$, бо вазни $\omega(x)$ исбот карда шуд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, ду боб, феҳристи адабиёти истифодашуда, ки 83 номгӯйро дарбар мегирад, иборат мебошад. Ҳаҷми умумии диссертатсия 106 саҳифаи компютерӣ буда, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст.

Summary
of the thesis of Iskhokov Faridun Sulaimonovich "Separation theorems for some classes of degenerate elliptic operators" presented for Candidate physico-mathematical sciences degree on the speciality 01.01.01 – real, complex and functional analysis

Key words: partial differential operator, generalized derivative, separation theorem, right-hand regularizing operator, inverse operator.

Actuality of the work: The thesis is devoted to investigation of separation of higher-order degenerate elliptic operators in the space $L_p(\Omega)$ and the weighted space $L_{p;\omega}(\Omega)$.

The concept of separation for differential operators was first introduced in scientific literature by W.N. Everitt and M. Giertz in 1971 and now investigations on separation of differential operators constitute one of important independent directions of modern theory of differential operators and results obtained in this direction are used in spectral theory of differential operators, in the theory of normed spaces of differentiable functions of many real variables as well as during investigation of existence and smoothness of solutions of differential equations.

Significant results on this direction were obtained in works of K.Kh.Boimatov, M.G.Gadoev, O.Kh.Karimov, M.B.Muratbekov, A.S.Mohamed, R.Oinarov, M.Otelbaev, H.A.Atia, F.V.Atkinson, R.C.Brown, D.B.Hinton, N.Chernyavskaya, W.N.Everitt, M.Giertz, O.Milatovic, S.Omran, L.Shuster, E.M.E.Zayed and etc.

Purpose of the research. The purpose of the research is an investigation of L_p-separation and L_p-separation with weight $\omega(x)$, which is not necessarily equal to one, for partial differential expressions of arbitrary even order in a case when the domain Ω and the functions characterizing degeneracies of the operator's coefficients paired with each other, and it is required to fulfill the condition of immersion.

Scientific novelity. The results to be presented for defence are new and are as follows:

1. A right-hand regularizing operator is constructed for a class of higher-order degenerate partial differential operators in an arbitrary (bounded or unbounded) domain of the n-dimensional Euclidian space and existence of a continuous inverse operator in the space L_p, $1 < p < +\infty$ is proved.

2. New spaces of differentiable functions of many real variables, which norms are defined by differential expression, are introduced and conditions for density of the class of infinitely differentiable functions with compact supports in these spaces are find.

3. Sufficient conditions for L_p-separation $(1 < p < +\infty)$ of a class of higher-order degenerate partial differential operators in an arbitrary (bounded or unbounded) domain of the n-dimensional Euclidian space are find

4. A theorem of separability in the space L_p, $1 < p < +\infty$, with wight $\omega(x)$ for a class of higher-order degenerate partial differential operators in an arbitrary (bounded or unbounded) domain of the n-dimensional Euclidian space, is proved.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, two chapters, conclusion and a list of literature, which includes 83 titles. Volume of the thesis is 106 pages prepared by LaTeX .