Институт математики им. А. Джураева

На правах рукописи

Исхоков Фаридун Сулаймонович

Теоремы разделимости для некоторых классов вырождающихся эллиптических операторов

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук

Гадоев М.Г.

Душанбе – 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию L_p-разделимости дифференциальных выражений с частными производными высокого четного порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области Ω n-мерного евклидова пространства R_n, коэффициенты которых могут обращаться в нуль или в бесконечность на границе области. Исследования по разделимости дифференциальных выражений образуют одно из основных самостоятельных направлений современной теории дифференциальных операторов, и результаты, полученные по этому направлению используются в спектральной теории дифференциальных операторов, в теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных, а также при исследовании существования и гладкости решения дифференциальных уравнений.

Степень разработанности темы исследования. Понятие разделимости дифференциального выражения впервые было введено в фундаментальной работе В.Н. Эвериттa (W.N. Everitt) и М. Гирца (M. Giertz) [49], в которой исследовалась разделимость оператора Штурма-Лиувилля в пространстве L_2. Позже результаты этой работы обобщались в других работах этих авторов [50], [51], [52], а также в работах Ф.В. Аткинсона (F.V. Atkinson) [43], В.Н. Эвериттa, М. Гирца, Дж. Вайдмана (J. Weidmann) [54], А. Цеттла (A. Zettl) [74], К.Х.Бойматова [7, 15], М. Отелбаева [38], Т.Т. Амановой и М.Б. Муратбекова [2], Э.З. Гриншпуна, М. Отелбаева [20], А. Биргибаева [5], А. Биргибаева, М. Отелбаева [6], М.М. Бакоевой, С.А. Исхокова [4], Р.С. Брауна (R.C. Brown), Д.Б. Хинтона (D.B. Hinton) [45], Н. Чернявской (N. Chernyavskaya), Л. Шустера (L. Shuster) [46, 47], И.Курбонова, М. Шодиева [33] и др.

Например, понятие разделимости для дифференциального выражения Штурма-Лиувилля

$$M[y] = -y'' + q(x)y, \quad x \in (a, +\infty),$$

в пространстве $L_2(a, +\infty)$ означает, что если $y,\ -y'' + q(x)y \in L_2(a, +\infty)$, то $-y'',\ qy \in L_2(a, +\infty)$.

В некоторых работах по теории разделимости используется понятие разделимости дифференциального оператора. В этих случаях условия разделимости дифференциального выражения проверяются для функций из области определения соответствующего оператора.

В работе А. Цеттла [74] исследовалась разделимость линейного обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка n в пространстве L_p. Коэффициенты исследуемого оператора мало отличаются от постоянных, и доказательство основного результата сводится к применению соответствующего коэрцитивного неравенства для обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Разделимость обыкновенных дифференциальных выражений порядка выше второго также исследовалась в работах А.С. Исхокова [22], Д.С. Гоибова [19] и др.

Отметим, что в работах В.Н. Эверитта и М. Гирца, в основном, исследовалась разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней, и лишь некоторые достаточные критерии разделимости обыкновенных дифференциальных выражений, установленные в работах этих авторов, обобщены на случай дифференциальных выражений с частными производными второго порядка в работах [53], В.Д. Эванса (W.D. Evans), А. Цеттла (A. Zettl) [48]. В этих работах исследовалась разделимость оператора Шредингера в пространстве $L_2(R^n)$. Разделимость оператора Шредингера также исследована в работах К.Х. Бойматова, А. Шарифова [17], Б.М. Муратбекова, М. Отелбаева [36], Р. Ойнарова [37], А.С. Мохамеда [35], А.С. Мохамеда, Х.А. Атиа (H.A. Atia) [56] и др.

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными второго порядка, отличных от оператора Шредингера, исследовалась в работах К.Х. Бойматова [12, 13], Исхокова, А.С. Мохамеда [26] и др.

Разделимость дифференциальных выражений высшего порядка с частными производными исследовалась в работах К.Х. Бойматова [8, 9, 10, 11, 14, 84], М. Отелбаева [39] и некоторых их учеников.

Имеется ряд работ по разделимости дифференциальных выражений с операторозначными (в том числе, с матричными) коэффициентами, среди которых можно отметить работы К.Х.Бойматова, А. Шарифова [16], З. Оера (Z. Oer) [63], А.А. Абудова [1], М. Байрамоглы, А.А. Абудова [3], М.З. Замонова, О.Т. Муртазова [21], О.Х. Кариамова [27, 28, 29, 30], О.Х. Кариамова, Н.У. Усманова [31], А.С. Мохамеда (A.S. Mohamed) [55], А.С. Мохамеда, Б.А. Ел-Генди (B.A. El-Gendi) [57, 58], А.С. Мохамеда, Х.А. Атиа (H.A. Atia) [56], Е.М.Е. Зайеда (E.M.E. Zayed) [69], Е.М.Е. Зайеда, С.А. Омрана (S.A. Omran) [72, 73], Е.М.Е. Зайеда, А.С. Мохамеда (A.S. Mohamed), Х.А. Атиа [71], Е.М.Е. Зайеда, А.С. Мохамеда, Х.А. Атиа [70], Х.А. Атиа [40], С. Омрана (S.Omran), Х.А. Геприла (K.A. Gepreel), Е.Т.А. Нофала (E.T.A. Nofal) [66], С. Омрана, Х.А. Геприла, С. Халила (S. Khalil) [65], С. Омрана, Х.А. Геприла [64], А.С. Исхокова, А.С. Мохамеда [26].

Впервые в 2003 году в работе Р.С. Брауна (R.C. Brown) [44] была установлена связь между свойствами неосцилляционности и разделимости обыкновенных дифференциальных выражений второго порядка. Эта связь позволяла Р.С. Брауну найти новые достаточные условия разделимости дифференциального выражения

$$M[y] = -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

в пространстве $L_2(I_a)$, где $I_a = [a, +\infty)$, $a > -\infty$. Связь между свойствами неосцилляционности и разделимости дифференциальных выражений затем использовалась в работе Х.А.Атиа, Р.А.Махмуда (R.A. Mahmoud) [41].

Исследование разделимости нелинейных дифференциальных выражений сопряжено со многими техническими сложностями, и в научной литературе лишь отдельные работы посвящены этому случаю. Среди этих работ можно отметить работы А. Биргибаева, М. Отелбаева [6], Т.Т. Амановой и М.Б. Муратбекова [2], К.Н. Оспанова, Р.Д. Ахметкалиева [67, 67], которые посвящены нелинейным обыкновенным выражениям, и работы О.Х. Каримова [27, 28, 29, 30], О.Х. Каримова, Н.У. Усманова [31], Б.М. Муратбекова, М. Отелбаева [36], в которых изучена разделимость нелинейных дифференциальных выражений с частными производными.

В работах О. Милатовича (O. Milatovic) [59, 60, 61, 62] и Х.А. Ати, Р.С. Алсаиди, А. Рамади (H.A. Atia, R. S. Alsaedi, A. Ramady) [42] исследовалась разделимость дифференциальных операторов с частными производными, заданных на римановых многообразиях.

Если дифференциальное выражение задается в функциональном пространстве, норма которого определяется интегрированием со степенью $p \geq 1$ и с весом $\omega(x)$, где $\omega(x) \not\equiv 1$ – некоторая измеримая положительная функция, то при выполнении соответствующих включений (см. ниже определение 1.3.1) это дифференциальное выражение называется L_p-разделимым с весом ω, а в случае $\omega(x) \equiv 1$ называется просто L_p-разделимым.

Отметим, что в работах [7-10, 12, 16, 17, 31, 36, 39, 41, 39, 44, 49, 50, 54, 56, 63-69, 71-73] исследуется L_2-разделимость дифференциальных выражений, а их L_2-разделимость с весом $\omega(x)$, не обязательно равным 1, рассматривалась в работах [27, 40, 45]. L_p-разделимость дифференциальных выражений изучалась в работах [4, 5, 13, 15, 22, 46, 57, 74]. Общий случай, то есть, L_p-разделимость с весом $\omega(x)$, не обязательным равным 1, рассматривался в работах [11, 14, 26, 47, 58, 55].

Приведенный выше обзор результатов по разделимости дифференциальных выражений свидетельствует о том, что разделимость общих дифференциальных выражений с частными производными произвольного четного порядка исследована лишь в отдельных работах, и случай, когда область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и удовлетворяют условию погружения, ранее не рассматривался. Именно этот случай исследуется в настоящей диссертационной работе.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование L_p-разделимости и L_p-разделимости с весом $\omega(x)$, не обязательно равным 1, дифференциальных выражений с частными производными произвольного четного порядка в случае, когда область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и удовлетворяют условию погружения.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

1. Для одного класса вырождающихся дифференциальных операторов с частными производными высокого порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства построен правый регуляризатор и доказано существование непрерывного обратного оператора в пространстве L_p, $1 < p < +\infty$.

2. Введены новые функциональные пространства дифференцируемых функций многих вещественных переменных, норма которых задается с помощью дифференциального выражения, и найдены условия плотности класса бесконечно дифференцируемых финитных функций в этих пространствах.

3. Найдены достаточные условия L_p-разделимости $(1 < p < +\infty)$ одного класса вырождающихся дифференциальных операторов с частными производными высокого порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства.

4. Доказана теорема о разделимости вырождающихся дифференциальных операторов с частными производными высокого порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства в пространстве L_p, $1 < p < +\infty$, с весом $\omega(x)$.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными, в теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью уравнений с частными производными в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций многих вещественных переменных.

Апробации результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинаре отдела функционального анализа и теории функций Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международная научная конференция "Современные проблемы математики и ее приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 2016);

- "Международная летняя математическая Школа-Конференция С.Б. Стечкина по теории функций" (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- международная конференция "Математика в современном мире", посвященная 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева Российской академии наук (Новосибирск, Россия, 14-19 августа 2017 г.);
- 8$^{\text{-ая}}$ международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 4-8 июля 2017 г.);
- международная конференция "Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел" (г. Кургантеппа, 27-28 октября 2017 г.).

Публикации и личный вклад автора. Материалы диссертации опубликованы в работах [75] – [79]. Работы [75] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РТ. Работа [79] входит в международные библиографические и реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

Работы [75] – [79] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту – доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 83 наименований и заключения, занимает 106 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX . Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации. Первая глава диссертационной работы посвящена исследованию разделимости одного класса дифференциальных выражений с частными производными высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области, коэффициенты которых могут иметь нестепенное вырождение на границе. Она состоит из трех параграфов. **В первом параграфе** изучается непрерывная обратимость операторов, которые задаются с помощью дифференциальных выражений из указанного выше класса.

Пусть Ω - произвольное открытое множество в n - мерном евклидовом пространстве R_n, и пусть

$$\Pi(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n : |x_j| < \frac{1}{2}, j = \overline{1, n} \right\}$$

- единичный куб с центром в начале системы координат.

Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \left\{ x \in R_n : \left(\frac{x_1 - \xi_1}{t_1}, \frac{x_2 - \xi_2}{t_2}, \ldots, \frac{x_n - \xi_n}{t_n} \right) \in \Pi(0) \right\}.$$

Пусть $g_j(x) (j = \overline{1, n})$ - определенные в Ω положительные функции. Положим

$$\Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon \overrightarrow{g}(\xi)}(\xi),$$

где $\varepsilon > 0$ и $\overrightarrow{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Далее в работе предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$ связаны следующим условием:

(A). существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω.

Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного П.И.Лизоркиным в работе [34]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условию погружения.

Отметим, что вырождающиеся эллиптические операторы дивергентного вида в случае, когда область Ω и функции $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, характеризующие вырождение коэффициентов исследуемого оператора, удовлетворяют сформулированным выше условиям, ранее изучались в работах [18, 23, 24, 25]. В этих работах, в основном, исследовалась разрешимость вариационной задачи Дирихле в пространстве $L_2(\Omega)$, и изучались свойства ее решения. В отличие от этого в настоящей диссертационной работе исследуются эллиптические операторы высокого порядка недивергентного вида и для них строятся обратные операторы, действующие в пространстве $L_p(\Omega), 1 < p < +\infty$.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{0.0.1}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ - длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

и i - мнимая единица.

Символом $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где τ - положительное число, обозначим класс символов

$$L(x, s) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x \in \Omega, s \in R_n} |L(x, s)| = \delta \neq 0$

(II) $|a_k(x) s^{k'}| \le \tau g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x) \ldots g_n^{-k_n''}(x) |L(x, s)|$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n,\ k = k' + k'',\ k'' \neq 0,\ |k| \le 2r$;

(III) $\sum\limits_{|k|\le 2r} \left|(a_k(x)-a_k(y))\,s^k\right| \le \tau|L(x,s)|$

для всех $s\in R_n$ и всех $x,y\in\Omega$ таких, что $|x_j-y_j|<\varepsilon^2 g_j(x)$, $j=1,2\dots,n$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Основные результаты первого параграфа первой главы сформулированы в виде следующих двух теорем.

Теорема 1.1.1. *Пусть существует число $\lambda>0$ такое, что*

$$\lambda^{-1}\le\frac{g_j(x)}{g_j(y)}\le\lambda,\ j=1,2,\dots,n,$$

для всех $y\in\Omega$ и всех $x\in\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa>0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\le 2r}|a_k(x)s^k|\le\varkappa|L(x,s)|$$

для всех $x\in\Omega$, $s\in R_n$.

Тогда найдется число $\tau_0=\tau_0(n,\,r,\,p,\,\varkappa,\,\delta)>0$, $1<p<+\infty$, такое, что если $\tau\in(0,\tau_0)$ и $L(x,s)\in B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, то замыкание $L_{(p)}$ оператора $L=L(\cdot,D)$, $D(L)=C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет непрерывный обратный оператор.

Теорема 1.1.2. *Пусть $1<p<+\infty$, выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть τ_0 – такое же число, как в теореме 1.1.1. Тогда, если $\tau\in(0,\,\tau_0)$ и $L(x,s)\in B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, то имеет место следующее неравенство*

$$\|u;\,L_p(\Omega)\|\le C_0\left\|L_{(p)}u;\,L_p(\Omega)\right\|\quad\left(u\in D\left(L_{(p)}\right)\right),$$

где число $C_0>0$ зависит только от r, n, p, $\varkappa$ и нижней грани функции $|L(x,\,s)|$ $(x\in\Omega,\,s\in R_n)$.

Во втором параграфе первой главы вводятся некоторые пространства дифференцируемых функций многих вещественных переменных, нормы которых задаются с помощью дифференциального выражения (0.0.1), и изучаются свойства этих пространств.

Обозначим через $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx + \sum_{|k|\le 2r} \int\limits_\Omega \left| a_k(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}. \quad (0.0.2)$$

Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, обозначим через $\mathscr{K}$. Пусть $O_{\mathscr{K}}$ – множество функций $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л.Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$.

Обозначим через $W'_{p;\,L}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, пространство функций $u(x) \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ с конечной нормой (0.0.2).

Далее предположим, что коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \le 2r$, дифференциального выражения (0.0.1) удовлетворяют следующему условию гладкости

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega) \ (|l| \le |k| \le 2r). \quad (0.0.3)$$

Как обычно, символом $\langle f,\, \varphi \rangle$, где $f \in D'(\Omega)$, обозначим значение обобщенной функции f на функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обобщенная функция f отождествляется с некоторой функцией $g(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, если

$$\langle f,\, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega g(x)\varphi(x)dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

При выполнении условия гладкости (0.0.3) для произвольной функции $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ можно определить обобщенную функцию $a_k(x) D_x^k u(x) \quad (|k| \le 2r)$ по формуле

$$\left\langle a_k D^k u,\, \varphi \right\rangle = (-1)^{|k|} \int\limits_\Omega u(x) D_x^k \left(a_k(x)\varphi(x) \right) dx \quad (0.0.4)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вводим пространство $W_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенные функции $a_k(x) D_x^k u(x)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$ для всех $|k| \le 2r$, и конечна норма (0.0.2).

Для $u(x) \in L_p(\Omega)$ через $L(x,\, D_x)u(x)$ обозначим сумму всех обобщенных функций $a_k(x)D_x^k u(x), \quad |k| \le 2r$, определенных равенством (0.0.4), и вводим пространство $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенная функция $L(x,\, D_x)u(x)$ принадлежит пространству $L_p(\Omega)$, и конечна следующая норма

$$\|u;\, \mathcal{W}_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} |L(x,\, D_x)u(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}. \qquad (0.0.5)$$

Через $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p;\,L}(\Omega)$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (0.0.5).

Таким образом, для дифференциального выражения (0.0.1) мы определили весовые пространства $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. При этом первые два пространства определены без всякого предположения о гладкости коэффициентов $a_k(x), \quad |k| \le 2r$, а два последние пространства определены, когда выполняется условие гладкости (0.0.3).

Заметим, что $W'_{p,\,L}(\Omega) \subset W_{p,\,L}(\Omega)$ и если $a_k(x) \not\equiv 0$ для всех мультииндексов $k\,:\, |k| \le 2r$, то $W'_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega)$. Если условие гладкости (0.0.3) выполняется, то пространство $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ является замыканием класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{p,\,L}(\Omega)$.

Введенные выше пространства $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ являются полными.

Теорема 1.2.1. *Пусть $1 < p < +\infty$, выполнены все условия теоремы 1.1.1, и пусть τ_0 – такое же число, как в теореме 1.1.1. Тогда если $\tau \in (0,\, \tau_0)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то*

$$D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$$

и для всех функций $u \in D\left(L_{(p)}\right)$ выполняются неравенства

$$\|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\| \le M\, \|L(\cdot;\, D)u;\, L_p(\Omega)\| \le M\, \|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\|,$$

где число $M > 0$ зависит только от $r,\, n,\, p,\, \delta,\, \varkappa$.

Теорема 1.2.2. *Пусть $1 < p < +\infty$, выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть τ_0 - такое же число как в этой теореме. Тогда если $\tau \in$*

$(0,\, \tau_0)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то имеет место вложение*

$$W'_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right).$$

Если же при этом выполняется условие гладкости

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l| \le |k| \le 2r),$$

то

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega).$$

В третьем параграфе первой главы изучается разделимость дифференциального выражения (0.0.1) при дополнительных условиях на его коэффициенты. Вводится класс символов $\mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$. По определению $L(x,s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, если $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$,

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l| \le |k| \le 2r),$$

и выполняется одно из следующих условий:

(IVa) $L(x,\, D_x)$ – симметрическое дифференциальное выражение;

(IVб) $\sum\limits_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\, |k|\le 2r}} \left|\left(D_x^l a_k(x)\right) g_1^{k''_1}(x) g_2^{k''_2}(x) \ldots g_n^{k''_n}(x) s^{k'}\right| \le \tau |L(x,\, s)|$ для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n$.

Определение 1.3.1. Дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k, \quad x \in \Omega,$$

называется L_p-*разделимым*, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что

$$u(x) \in L_p(\Omega),\ \ L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega),$$

имеет место включение

$$a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$$

для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $1 < p < +\infty$, *и существует число* $K > 0$ *такое, что*

$$\sum_{|k|\le 2r} \left|a_k(x)s^k\right| \le K\,|L(x,\,s)|$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. *Тогда найдется число* $t_0 = t_0(r,\,n,\,p,\,K) > 0$ *такое, что если*

$$L(x,\,s) \in \mathbb{B}(\tau,\,\overrightarrow{g},\Omega), \quad 0 < \tau < t_0,$$

то дифференциальное выражение $L(x,\,D_x)$ L_p*-разделимо. При этом*

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega),$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию L_p-разделимости $(1 < p < +\infty)$ дифференциального выражения (0.0.1) с весом $\omega(x)$. Она состоит из четырех параграфов. Основные результаты главы сформулированы в первом параграфе, а их доказательства приведены в оставшихся параграфах.

Определение 2.1.1. Пусть $\omega(x)$ – положительная измеримая в Ω функция, $1 < p < +\infty$. Дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k, \quad x \in \Omega, \tag{0.0.6}$$

называется *L_p-разделимым с весом* $\omega(x)$, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что

$$\omega(x)u(x) \in L_p(\Omega),\;\; \omega(x)L(x,\,D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$$

имеет место включение

$$\omega(x)a_k(x)D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$$

для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Теорема 2.1.1. *Пусть существуют числа* $\lambda > 1$, $\nu > 1$ *такие, что*

$$\nu^{-1} \leq \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \leq \nu, \quad \lambda^{-1} \leq \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \leq \lambda, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

для всех $y \in \Omega$ *и всех* $x \in \Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(y)$, *и пусть при некотором* $\varkappa > 0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{|k| \leq 2r} |a_k(x) s^k| \leq \varkappa |L(x, s)| \tag{0.0.7}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. *Тогда найдется число* $\tau_* = \tau_*(r,\, n,\, p,\, \varkappa,\, \lambda,\, \nu) > 0$ *такое, что если*

$$L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega),\ \tau \in (0,\, \tau_*),$$

то дифференциальное выражение $L(x,\, D_x)$ L_p*-разделимо с весом* $\omega(x)$.

Доказательство теоремы 2.1.1 основано на применении сформулированной ниже теоремы 2.1.2 об относительной ограниченности дифференциальных операторов, которая имеет также и самостоятельный интерес.

Наряду с дифференциальным выражением (0.0.6) рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathbb{L}(x, D_x) = \sum_{|k| \leq 2r} b_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega)$$

с непрерывными коэффициентами $b_k(x)(x \in \Omega,\, |k| \leq 2r)$, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{\substack{k'+k''=k, \\ |k| \leq 2r}} \left| b_k(x) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \leq \mathbb{N} |L(x,\, s)| \tag{0.0.8}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$; $\mathbb{N}$ - некоторая положительная постоянная.

Теорема 2.1.2. *Пусть существует число* $\lambda > 0$ *такое, что*

$$\lambda^{-1} \leq \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \leq \lambda, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

для всех $y \in \Omega$ *и всех* $x \in \Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(y)$, *и пусть при некотором* $\varkappa > 0$ *выполняется неравенство (0.0.7) Пусть также выполняется неравенство*

(0.0.8). Тогда найдется число $t_* = t_*(r,\, n,\, p,\, \varkappa,\, \delta) > 0$, $1 < p < +\infty$, *такое, что если* $L(x,\, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < \tau_0^*$, *то для всех* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{|k| \le 2r} \left\| b_k(x) D_x^k u(x);\, L_p(\Omega) \right\| \le \mathbb{M} \, \| L(x,\, D_x) u(x);\, L_p(\Omega) \| \,, \qquad (0.0.9)$$

где $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r,\, n,\, p,\, \varkappa,\, \mathbb{N})$ *- некоторая положительная постоянная. Если же* $L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < \tau_0^*$, *то неравенство (0.0.9) имеет место также для всех* $u(x) \in L_p(\Omega)$ *таких, что* $L(x,\, D_x) u(x) \in L_p(\Omega)$.

Доказательство этой теоремы приведено в §2.2. В §2.3 доказываются некоторые вспомогательные леммы, а в §2.4 приведено доказательство теоремы 2.1.1.

Глава 1

Теоремы разделимости для одного класса дифференциальных операторов в Лебеговом пространстве

1.1 Об обратимости одного класса дифференциальных операторов в лебеговом пространстве

Пусть Ω - произвольное открытое множество в n - мерном евклидовом пространстве R_n и пусть

$$\Pi(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n : |x_j| < \frac{1}{2}, j = \overline{1,n} \right\}$$

- единичный куб с центром в начале системы координат.

Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \left\{ x \in R_n : \left(\frac{x_1 - \xi_1}{t_1}, \frac{x_2 - \xi_2}{t_2}, \ldots, \frac{x_n - \xi_n}{t_n} \right) \in \Pi(0) \right\}.$$

Пусть $g_j(x)(j = \overline{1,n})$ - определенные в Ω положительные функции. Положим

$$\Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon \overrightarrow{g}(\xi)}(\xi),$$

где $\varepsilon > 0$ и $\overrightarrow{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Далее в работе предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$ $(j = \overline{1,n})$ связаны следующим условием:

(A). существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω.

Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного П.И.Лизоркиным в работе [34]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условию погружения.

Отметим, что вырождающиеся эллиптические операторы дивергентного вида в случае, когда область Ω и функции $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, характеризующие вырождение коэффициентов исследуемого оператора, удовлетворяют сформулированным выше условиям, ранее изучались в работах [18, 23-25]. В этих работах, в основном, исследовалась разрешимость вариационной задачи Дирихле и изучались свойства ее решения. В отличие от этого здесь мы исследуем эллиптические операторы высокого порядка не дивергентного вида и занимаемся построением соответствующих обратных операторов в пространстве $L_p(\Omega), 1 < p < +\infty$.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega) \tag{1.1.1}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ - длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

и i - мнимая единица.

Символом $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где τ - положительное число, обозначим класс символов

$$L(x, s) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x\in\Omega, s\in R_n} |L(x,s)| = \delta \neq 0$;

(II) $|a_k(x)s^{k'}| \leq \tau g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x)\ldots g_n^{-k_n''}(x)|L(x,s)|$

для всех $x\in\Omega$, $s\in R_n$, $k=k'+k''$, $k''\neq 0$, $|k|\leq 2r$;

(III) $\sum\limits_{|k|\leq 2r} \left|(a_k(x)-a_k(y))\, s^k\right| \leq \tau |L(x,s)|$

для всех $s\in R_n$ и всех $x,y\in\Omega$ таких, что $|x_j-y_j|<\varepsilon^2 g_j(x)$, $j=1,2\ldots,n$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Теорема 1.1.1. *Пусть существует число $\lambda>0$ такое, что*

$$\lambda^{-1} \leq \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \leq \lambda,\ j=1,2,\ldots,n, \tag{1.1.2}$$

для всех $y\in\Omega$ и всех $x\in\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa>0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\leq 2r} |a_k(x)s^k| \leq \varkappa |L(x,s)| \tag{1.1.3}$$

для всех $x\in\Omega$, $s\in R_n$.

Тогда найдется число $\tau_0=\tau_0(n,\,r,\,p,\,\varkappa,\,\delta)>0$, $1<p<+\infty$, такое, что если $\tau\in(0,\tau_0)$ и $L(x,s)\in B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, то замыкание $L_{(p)}$ оператора $L=L(\cdot,D)$, $D(L)=C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет непрерывный обратный.

Доказательство. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 1.1.1, сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.1.1. *Пусть область Ω и положительные функции $g_j(x)$, $j=1,2,\ldots,n$, удовлетворяют сформулированным выше условиям.*

Тогда существуют неотрицательные функции $\psi_1,\psi_2,\ldots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такие, что:

1) $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \Omega)$;

2) покрытие $\{\mathrm{supp}\ \psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *области* Ω *имеет конечную кратность* $\Lambda(n, \lambda)$, *где* λ *- константа из условия (1.1.2);*

3) для любого мультииндекса k *существует конечное число* $M_k > 0$ *такое, что*

$$\left|D_x^k \psi_m(x)\right| \le M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \dots g_n^{-k_n}(x) \quad (x \in \Omega);$$

4) для всех $x, y \in \mathrm{supp}\ \psi_m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ *выполняется неравенство*

$$|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x),\ j = 1, 2, \dots, n;$$

5) для любой функции $f \in L_1(\Omega)$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{m=N}^{+\infty} \int\limits_{\Omega} \chi_m(x) f(x) dx \to 0,\ N \to +\infty$$

где $\chi_m(x)$ *- характеристическая функция множества* $\mathrm{supp}\ \psi_m$.

Доказательство. Заменяя в лемме 1 работы [23] функции $g_j(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, на $\varepsilon^2 g_j(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, соответственно, получаем следующие результаты:

Существуют такие неотрицательные функции $\varphi_m \in C_0^\infty(\Omega)$, $m = 1, 2, \dots$, что:

1) $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \varphi_m^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \Omega)$;

2) кратность Λ_n покрытия $\{\mathrm{supp}\,\varphi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ конечна и, если число λ из $(1.1.2)$ не превосходит 9^N для некоторого N, то $\Lambda_n < 3^{(4N+1)n}$;

3) для любого мультииндекса k существует конечное число M_k такое, что

$$\left|D_x^k \varphi_m(x)\right| \le M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \dots g_n^{-k_n}(x);$$

4) для всех $x, y \in \operatorname{supp} \varphi_m$, $m = 1, 2, \ldots$, выполняются неравенства

$$|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее нетрудно убедиться в том, что функции

$$\psi_m(x) = \varphi_m(x) \left(\sum_{N=1}^{+\infty} \varphi_N^2(x) \right)^{-1/2},\ m = 1, 2, 3, \ldots,$$

обладают всеми свойствами, сформулированные в лемме 1.1.1.

Лемма 1.1.2. *(см. лемму 2.2 [11]) Пусть оператор T имеет вид*

$$T = \sum_{m=1}^{+\infty} \chi_m T_m \chi_m$$

где χ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ - характеристическая функция множества supp ψ_m, а $T_1, T_2, T_3, \ldots$ - последовательность непрерывных операторов в $L_p(\Omega)$ таких, что

$$\Lambda = \sup_{m=1,2,3,\ldots} \|T_m\|_p < +\infty$$

где число $p \in (1, +\infty)$. Тогда T - ограниченный оператор и выполняется неравенство

$$\|T_m\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n, \lambda)\Lambda,$$

где $\Lambda(n, \lambda)$ - кратность покрытия $\{\operatorname{supp}\ \psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ области Ω

Будем говорить, что T - псевдодифференциальный оператор с символом $t(s)$, если

$$(Tu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} e^{isx} \left(t(s) \int\limits_{R_n} e^{-isx} u(y) dy \right) ds,\ D(T) = C_0^\infty(\Omega).$$

Лемма 1.1.3. *(см. лемму 2.3 из [11]) Пусть $A(s) = \sum_{|k| \leq 2r} b_k s^k$ - полином с постоянными коэффициентами $A(s) \neq 0$ для всех $s \in R_n$, и* *пусть* $T_k(|k| \leq 2r)$ *- псевдодифференциальный оператор в* R_n *с символом* $t_k(s) = s^k A^{-1}(s)$.

Пусть выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\leq 2r} |b_k s^k| \leq K|A(s)| \tag{1.1.4}$$

Тогда оператор T_k $(|k| \leq 2r)$ *имеет непрерывное продолжение в* $L_p(R_n)$ *при любом* $p \in (1, +\infty)$, *и имеет место неравенство*

$$\|T_k\|_p \leq M \sup_{s\in R_n} |t_k(s)|\,, \tag{1.1.5}$$

где числом M *зависит только от* r, p, n *и* K.

Замечание 1.1.1. *В случае* $p = 2$ *утверждение леммы 1.1.3 имеет место без предположении о выполнении неравенства (1.1.4), при этом в (1.1.5)* $M = 1$.

Пусть $1 < p < +\infty$. Положим $q = p/(p-1)$. В силу неравенство Гельдера

$$\left| \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx \right| \leq \|u; L_p(\Omega)\| \cdot \|v; L_q(\Omega)\|$$

обозначение

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx$$

имеет смысл для всех $u \in L_p(\Omega)$ и всех $v \in L_q(\Omega)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Qu)(x) = \sum_{|k|\leq 2r} q_k(x) D_x^k u(x),\ D(Q) = C_0^\infty(\Omega).$$

Предположим, что существуют локально ограниченные в Ω производные $D^l q_k(x) \quad (|l| \leq |k| \leq 2r)$ и рассмотрим оператор

$$(Q'u)(x) = \sum_{|k|\leq 2r} D_x^k \left(\overline{q_k(x)} u(x)\right),\ D(Q') = C_0^\infty(\Omega).$$

Обозначим через $Q_{(p)}$ замыкания оператора Q в пространстве $L_p(\Omega)$, а через $Q'_{(q)}$ - замыкание оператора Q' в пространстве $L_q(\Omega)$.

По определению сопряженного оператора функции $u(x) \in L_p(\Omega)$ принадлежит областью определения оператора $\left(Q'_{(q)}\right)^*$ тогда и только тогда, когда найдется функция $U(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что

$$(U, \varphi) = \left(u, Q'_{(q)}\varphi\right), \ \forall \ \varphi \in D\left(Q'_{(q)}\right),$$

при этом $U = \left(Q'_{(q)}\right)^* u$.

Символом $< f, \varphi >$ обозначим значение обобщенной функции $f \in D'(\Omega)$ на функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обобщенная функция $f(x)$ отождествляется с некоторой функцией $g(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$, если

$$< f, \varphi >= \int\limits_\Omega g(x)\varphi(x)dx \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Для $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ определим обобщенные функции $q_k(x)D_x^k u(x)$ $(|k| \leq 2r)$ по формуле

$$< q_k D^k u, \varphi >= (-1)^{|k|} \int\limits_\Omega u(x) D_x^k \left(q_k(x)\varphi(x)\right) dx, \ \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Положим

$$U(x) = \sum_{|k| \leq 2r} q_k(x) D_x^k u(x). \tag{1.1.6}$$

Лемма 1.1.4. *(см. лемму 2.6 из [11]). Справедливы следующие утверждения:*

(а) Функция $u(x)$ принадлежит областью определения оператора $\left(Q'_{(q)}\right)^*$ тогда и только тогда, когда $u(x) \in L_p(\Omega)$ и найдется функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что

$$(v, \varphi) = (u, Q'\varphi), \ \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(б) Оператор $\left(Q'_{(q)}\right)^*$ является расширением оператора $Q_{(p)}$, т.е. $Q_{(p)} \subset \left(Q'_{(q)}\right)^*$.

(в) Если ядро $\ker\left(Q'_{(q)}\right)^* = 0$ *и область значений* $R(Q_{(p)})$ *оператора* $Q_{(p)}$ *совпадает с* $L_p(\Omega)$, *то* $Q_{(p)} = \left(Q'_{(q)}\right)^*$.

(г) Функция $u(x) \in D\left(\left(Q'_{(q)}\right)^*\right)$ *тогда и только тогда, когда* $u(x) \in L_p(\Omega)$, *и обобщенная функция* $U(x)$ *(1.1.6) принадлежит пространству* $L_p(\Omega)$.

В каждом множестве $\operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, фиксируем точки $\{x^{(m,k)}, |k| \leq 2r\}$ и положим

$$L_m(s) = \sum_{|k|\leq 2r} a_k(x^{(m,k)}) s^k \quad (s \in R_n). \tag{1.1.7}$$

В пространстве $L_p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ вводим операторы

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \; D(F) = C_0^\infty(\Omega), \tag{1.1.8}$$

$$F' = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi'_m \psi_m, \; D(F') = C_0^\infty(\Omega),$$

где Φ_m, Φ'_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ - псевдодифференциальные операторы в R_n с символами $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$, $\Phi'_m(s) = \overline{\Phi_m(s)}$, соответственно. На функциях $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства

$$(Fu, v) = (u, F'v), \; (\Phi_m u, v) = (u, \Phi'_m v), \; m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Символами $F_{(p)}$, $F'_{(q)}$ обозначим замыкания операторов F, F' с областями определения $D(F) = D(F') = C_0^\infty(\Omega)$ в пространствах $L_p(\Omega)$, $L_q(\Omega)$, соответственно.

Если коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leq 2r$, дифференциального оператора $L = L(x, D_x)$, $(D(L) = C_0^\infty(\Omega))$ дифференцируемы достаточное число раз, то формально сопряженный дифференциальный оператор $L'(x, D_x)$ задается равенством

$$L'(x, D_x)u = \sum_{|k|\leq 2r} D_x^k (a_k(x) u(x)) \tag{1.1.9}$$

Однако в теореме 1.1.1 дифференцируемость коэффициентов $a_k(x), |k| \leq 2r$, не предполагается. Поэтому в рассматриваемом случае равенство (1.1.9) теряет смысл, и трудно исследовать оператор $(L_{(q)})^*$, сопряженный относительно оператора $L_{(q)}$. В связи с этим обстоятельством мы вводим другое дифференциальное выражение с гладкими коэффициентами, которое связано с выражением $L(x, D_x)$ и имеет некоторые близкие свойства.

Положим

$$G(x, D_x) = \sum_{|k| \leq 2r} \widetilde{a}_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega) \tag{1.1.10}$$

где

$$\widetilde{a}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_k(x^{(m,k)}) \psi_m^2(x), \quad |k| \leq 2r. \tag{1.1.11}$$

Обозначим через $G'(x, D_x)$ дифференциальное выражение, сопряженное к $G(x, D_x)$

Далее отметим некоторые соотношения между символами $L(x, s)$, $L_m(s)$ и

$$G(x, s) = \sum_{|k| \leq 2r} \widetilde{a}_k(x) s^k. \tag{1.1.12}$$

Из условие (III) имеем

$$|(a_k(x) - a_k(y) s^k| \leq \tau |L(x, s)| \quad (|k| \leq 2r)$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \text{supp } \psi_m$, $m = 1, 2, 3 \ldots$. Подставляя в этом неравенстве $y = x^{(k,m)}$ имеем

$$\left|(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)})) s^k\right| \leq \tau |L(x, s)|. \tag{1.1.13}$$

Далее, в силу этого неравенства получаем

$$|L(x, s) - L_m(s)| \leq \sum_{|k| \leq 2r} |(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)})) s^k| \leq$$

$$\leq \tau |L(x, s)| \cdot \sum_{|k| \leq 2r} 1 = \tau (2r)^n |L(x, s)|.$$

Отсюда при выполнении условия

$$0 < \tau < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2r}\right)^n \tag{1.1.14}$$

следует, что

$$|L(x,s) - L_m(s)| \leq \frac{1}{2}|L(x,s)| \ (x \in \operatorname{supp} \psi_m).$$

Отсюда имеем

$$|L(x,s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x,s)| \tag{1.1.15}$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x \in \operatorname{supp} \psi_m, \ m = 1, 2, 3, \ldots$

Согласно лемме 1.1.1 семейство функций $\{\psi_m^2(x)\}_{m=1}^{\infty}$ образует разбиение единицы области Ω конечной кратности $\Lambda(n, \lambda)$. Поэтому используя равенство (1.1.11) имеем

$$a_k(x) - \widetilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_k(x)\psi_j^2(x) - \widetilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_k(x) - a_k(x^{(k,j)}))\psi_j^2(x)$$

Далее в силу условии (III) имеем

$$|(a_k(x) - \widetilde{a}_k(x))s^k| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |(a_k(x) - a_k(x^{(k,j)}))s^k| \cdot \psi_j^2(x) \leq$$

$$\leq \tau|L(x,s)| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2(x) = \tau|L(x,s)|,$$

то есть

$$\left|(a_k(x) - \widetilde{a}_k(x))s^k\right| \leq \tau|L(x,s)|. \tag{1.1.16}$$

Теперь используя равенство (1.1.12), получаем

$$|L(x,s) - G(x,s)| \leq \sum_{|k| \leq 2r} |(a_k(x) - \widetilde{a}_k(x))s^k| \leq$$

$$\leq \tau|L(x,s)| \sum_{|k| \leq 2r} 1 = \tau(2r)^n|L(x,s)|.$$

Отсюда при условии (1.1.14) следует, что

$$|L(x,s)| \leq 2|G(x,s)| \leq 3|L(x,s)|$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x \in \Omega$.

Лемма 1.1.5. *В условиях теоремы 1.1.1 существует положительное число t_0^* такое, что если $\tau \in (0, t_0^*)$, то существуют операторы Γ_1, $\Gamma_2 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ с $\|\cdot\|_p$ - нормами, не превосходящими 1/2, такие, что на функциях $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства*

$$GFu = (E + \Gamma_1)u, \; G'F'u = (E + \Gamma_2)u. \tag{1.1.17}$$

Доказательство. Здесь в этой лемме и далее символом $\mathscr{L}_p[\Omega]$ обозначено пространство всех линейных операторов, действующих из $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, замыкания которых в пространстве $L_p(\Omega)$ является ограниченным оператором.

Так как Φ_m - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m(s)$ (см. (1.1.7)) и

$$L_m = L_m(x; D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x^{(m,k)}) D_x^k, \; D(L_m) = C_0^\infty(\Omega)$$

- дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m L_m \Phi_m \psi_m = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2 = E.$$

Используя это равенство имеем

$$GFu = \sum_{m=1}^{\infty} G\psi_m \Phi_m \psi_m u = \sum_{m=1}^{\infty} [G, \psi_m] \Phi_m \psi_m u + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m G \Phi_m \psi_m =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [G, \psi_m] \Phi_m \psi_m u + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m (G - L_m) \Phi_m \psi_m u + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m L_m \psi_m \Phi_m u = (\Gamma_1 + E)u,$$

где

$$\Gamma_1 = \sum_{m=1}^{\infty} [G, \psi_m] \Phi_m \psi_m + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m (G - L_m) \Phi_m \psi_m. \tag{1.1.18}$$

Здесь и далее символ $[\cdot, \cdot]$ обозначает операторный коммутатор, т.е. $[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$.

Таким образом, мы доказали равенство

$$GFu = (E + \Gamma_1)u, \; u \in C_0^\infty(\Omega),$$

где оператор Γ_1 определяется равенством (1.1.18).

Оператор Γ_1 представим в виде

$$\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0, \tag{1.1.19}$$

где

$$\Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty} [G, \psi_m] \Phi_m \psi_m,$$

$$\Gamma_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m (G - L_m) \Phi_m \psi_m. \tag{1.1.20}$$

Далее заметим, что

$$[G, \psi_m] u = G(\psi_m u) - \psi_m G(u) = \sum_{|k| \le 2r} \widetilde{a}_k(x) D_x^k (\psi_m(x) u(x)) -$$

$$- \sum_{|k| \le 2r} \widetilde{a}_k(x) \psi_m(x) D_x^k u(x) = \sum_{|k| \le 2r} \widetilde{a}_k(x) \left[\sum_{\substack{k'+k^*=k, \\ k' \ne 0}} (D_x^{k'} \psi_m(x))(D_x^{k^*} u(x)) \right].$$

Поэтому

$$\Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{|k| \le 2r} \widetilde{a}_k(x) \sum_{\substack{k'+k^*=k, \\ k' \ne 0}} \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k^*)} \psi_m \right),$$

где $\psi_m^{(k')} = D_x^{k'} \varphi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k^*)}$-псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k^*} L_m^{-1}(s)$. На основе этого равенства, применяя лемму 1.1.2, получаем

$$\|\Gamma_*\|_p \le M_1 \sum_{|k| \le 2r} \sum_{\substack{k'+k^*=k, \\ k' \ne 0}} \mathbb{P}_k^{(k',k^*)}, \tag{1.1.21}$$

где

$$\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} = \sup_{m=1,2,3,\dots} \left\| \psi_m^{(k')} \widetilde{a}_k \Phi_m^{(k^*)} \psi_m \right\|_p. \tag{1.1.22}$$

Применяя лемму 1.1.3 оценим норму псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k^*)}$

$$\left\| \Phi_m^{(k^*)} \right\|_p \le M_2 \sup_{s \in R_n} \left| s^{k^*} L_m^{-1}(s) \right|. \tag{1.1.23}$$

Согласно п.3 леммы 1.1.1 имеет место неравенство

$$\sup \left| \psi_m^{(k')}(x) g_1^{k_1'}(x) g_2^{k_2'}(x) \dots g_n^{k_n'}(x) \right| \le M_k^* < \infty, \tag{1.1.24}$$

где супремум берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m$.

Из (1.1.22)-(1.1.24) следует, что

$$\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} \le M \sup \left| g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \dots g_n^{-k_n'}(x) \widetilde{a}_k(x) \cdot s^{k^*} L_m^{-1}(s) \right|, \tag{1.1.25}$$

где супремум берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m,\ s \in R_n,\ m = 1, 2, 3, \dots$.

Из равенства (1.1.11) в силу условия (II) имеем

$$\left|\widetilde{a}_k(x) s^{k^*}\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_k(x^{(k,j)}) s^{k^*}| \psi_j^2(x) \le$$

$$\le \tau \sum_{j=1}^{\infty} g_1^{-k_1^{'}}(x^{(k,j)}) g_2^{-k_2^{'}}(x^{(k,j)}) \dots g_n^{-k_n^{'}}(x^{(k,j)}) \cdot |L(x^{(k,j)}, s)| \psi_j^2(x). \tag{1.1.26}$$

Далее заметим, что для всех $x \in \operatorname{supp} \psi_j$ имеют место следующие неравенства

$$g_m^{-1}(x^{(k,j)}) \le \lambda g_m^{-1}(x),\ m = 1, 2, \dots;$$

$$|L(x, s) - L(x^{(k,j)}, s)| < \tau |L(x, s)|.$$

Первое неравенство следует из (1.1.2), а второе неравенство - из условии (III).

Теперь в силу последних неравенств из (1.1.26) получим

$$|\widetilde{a}_k(x) s^{k*}| \le \tau \lambda^{|k'|} (1 + \tau) |L(x, s)| g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \dots g_n^{-k_n'}(x)$$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n\ , k = k' + k^*,\ k' \ne 0$.

Если $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, то в силу неравенства (1.1.15) из последнего неравенства следует, что

$$\left|\widetilde{a}_k(x) s^{k^*}\right| \le \tau M_0\ g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \dots g_n^{-k_n'}(x) |L_m(s)|.$$

Используя это неравенство из (1.1.25) имеем

$$\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} \le \tau \cdot M_2 \tag{1.1.27}$$

для всех $k = k' + k^*,\ |k| \leq 2r,\ k' \neq 0$.

Таким образом (см. (1.1.21), (1.1.27)) существует число $M_3 > 0$ такое, что

$$\|\Gamma_*\|_p \leq \tau M_3. \tag{1.1.28}$$

Теперь оценим норму оператора Γ_0. Из равенства (1.1.20) в силу леммы 1.1.2 имеем

$$\|\Gamma_0\|_p \leq \Lambda(n,\nu) \cdot \sup_{m=1,2,\ldots} \|\psi_m(G - L_m)\Phi_m \psi_m\|_p \,. \tag{1.1.29}$$

Далее заметим, что

$$(G - L_m)u = \sum_{|k|\leq 2r} (\widetilde{a}_k(x) - a_k(x^{(k,m)}) D_x^k u.$$

Поэтому

$$\|\psi_m(G - L_m)\Phi_m \psi_m\|_p \leq \sup \left| (\widetilde{a}_k(x) - a_k(x^{(k,m)}) s^k L_m^{-1}(s) \right|, \tag{1.1.30}$$

где супремум берется по $s \in R_n$ и $x \in \mathrm{supp}\ \psi_m$. Здесь мы также воспользовались леммой 1.1.3.

Из неравенств (1.1.13) и (1.1.15) следует, что

$$\left| \left(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)}) \right) s^k \right| \leq 2\tau |L_m(s)| \quad (x \in supp\ \psi_m,\ s \in R_n).$$

С другой стороны из (1.1.15), (1.1.16) имеем

$$|(a_k(x) - \widetilde{a}_k(x)) s^k| \leq \tau 2 |L_m(s)| \quad (x \in supp\ \psi_m,\ s \in R_n).$$

Поэтому из (1.1.30) следует, что

$$\|\psi_m(G - L_m)\Phi_m \psi_m\|_p \leq \tau \cdot M_4 \tag{1.1.31}$$

для всех $m = 1, 2, \ldots;$ M_4 - некоторое конечное положительное число.

Таким образом (см. (1.1.29), (1.1.31)) существует положительное число M_5 такое, что

$$\|\Gamma_0\|_p \leq \tau M_5.$$

Теперь учитывая равенство (см. (1.1.19)) $\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0$ из (1.1.28) получим

$$\|\Gamma_1\|_p \le \tau(M_3 + M_5).$$

Следовательно, существует число $t' > 0$, такое, что при $\tau \in (0, t')$ норма оператора Γ_1 не превосходит $1/2$.

Утверждение леммы 1.1.5 относительно оператора GF доказано. Оставшаяся часть утверждения этой леммы относительно оператора $G'F'$ доказываются аналогично.

Если T - некоторый оператор с областью определения $D(T) = C_0^\infty(\Omega)$ и допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$, то далее обозначим это замыкание через $T_{(p)}$.

Лемма 1.1.6. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1. Тогда найдется положительное число* t_1^* *такое, что если* $\tau \in (0, t_1^*)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$*, то оператор*

$$G = G(\cdot, D),\ D(G) = C_0^\infty(\Omega)$$

в пространстве $L_p(\Omega)$*,* $1 < p < \infty$*, имеет замыкание* $G_{(p)}$ *со следующими свойствами:*

$$G_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{1,(p)}; \tag{1.1.32}$$

$$R(G_{(p)}) = L_p(\Omega). \tag{1.1.33}$$

Здесь $\Gamma_{1,(p)}$ *- замыкание в* $L_p(\Omega)$ *оператора* Γ_1*,* $D(\Gamma_1) = C_0^\infty(\Omega)$*, из леммы 1.1.5*

Доказательство. Согласно лемме 1.1.5 (см. (1.1.17))

$$GFu = (E + \Gamma_1)u,\ u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.1.34}$$

где $\Gamma_1 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma_1\|_p \le 1/2$.

Следовательно

$$\|\Gamma_1 u; L_p(\Omega)\| \le \frac{1}{2}\|u; L_p(\Omega)\| \tag{1.1.35}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ из (1.1.35), следует, что оператор Γ_1, $D(\Gamma_1) = C_0^\infty(\Omega)$ допускает в $L_p(\Omega)$ замыкание $\Gamma_{1,(p)}$, норма которого не превосходит $1/2$. Поэтому

$$D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega)$$

Обозначим через $\underset{p}{\longrightarrow}$ сходимость по норме пространства $L_p(\Omega)$.

Пусть v - произвольный элемент из $L_p(\Omega)$. В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ существует последовательность функций $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$ при $j \longrightarrow \infty$. В силу определения оператора $\Gamma_{1,(p)}$ имеем

$$(E + \Gamma_1)v_j \underset{p}{\longrightarrow} (E + \Gamma_{1,(p)})v \text{ при } j \longrightarrow \infty$$

Из (1.1.34) следует, что

$$(E + \Gamma_1)v_j = GFv_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Поэтому

$$GFv_j \underset{p}{\longrightarrow} (E + \Gamma_{1,(p)})v, \quad j \longrightarrow \infty \tag{1.1.36}$$

По определению (см. (1.1.8))

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m$$

где Φ_m - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m^{-1}(s)$ (см. (1.1.8)). Согласно лемме 1.1.3 оператор Φ_m имеет непрерывное продолжение в $L_p(R_n)$ и

$$\|\Phi_m\|_p \le M \sup_{s \in R_n} |L_m^{-1}(s)|.$$

Поэтому оператор F, $D(F) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$. Это замыкание обозначим через $F_{(p)}$.

Следовательно

$$Fv_j \underset{p}{\longrightarrow} F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{1.1.37}$$

Пусть $R(F_{(p)})$ - область значений оператора $F_{(p)}$, и пусть $u(x)$ - произвольный элемент из $R(F_{(p)})$. Существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такой, что $u = F_{(p)}v$. Пусть $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ - последовательность функций из $C_0^{\infty}(\Omega)$, такая, что $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$, $j \longrightarrow \infty$. Тогда из (1.1.37) следует, что $u_j \underset{p}{\longrightarrow} u$, $j \longrightarrow \infty$, где $u_j = Fv_j$, $j = 1, 2, 3 \ldots$.

Так как $u_j \in C_0^{\infty}(\Omega)$ для всех $j = 1, 2, 3 \ldots$ и $G_{(p)}$ - замыкание оператора $G = G(\cdot, D)$, $D(G) = C_0^{\infty}(\Omega)$, то

$$Gu_j \underset{p}{\longrightarrow} G_{(p)}u, \; j \longrightarrow \infty.$$

Отсюда в силу равенств $u_j = Fv_j$, $u = F_{(p)}v$ имеем

$$GFv_j \underset{p}{\longrightarrow} G_{(p)}F_{(p)}v, \; j \longrightarrow \infty.$$

Теперь применяя (1.1.36) имеем

$$G_{(p)}F_{(p)}v = (E + \Gamma_{1,(p)})v \tag{1.1.38}$$

для всех $v \in L_p(\Omega) \cap D(F_{(p)})$. Так как $F_{(p)}$ - непрерывное продолжение оператора $F, D(F) = C_0^{\infty}(\Omega)$, во всем пространстве, то равенство (1.1.38) имеет место для всех $v \in L_p(\Omega)$. Равенство (1.1.32) доказано.

Так как $D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega)$ и $\|\Gamma_{1,(p)}\|_p \leq 1/2$, то согласно известной теореме из теории операторов (см., например, [32, стр.230]), $(E + \Gamma_{1,(p)})$ - непрерывно обратимый оператор и

$$\|(E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}\|_p < \frac{1}{1 - \|\Gamma_{1,(p)}\|_p}.$$

Следовательно

$$R\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right) = D\left((E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}\right) = L_p(\Omega).$$

Отсюда и из равенства (1.1.32) следует, что $G_{(p)}F_{(p)}$-обратимый оператор и

$$\left(G_{(p)}F_{(p)}\right)^{-1} = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} \tag{1.1.39}$$

Поэтому

$$R\left(G_{(p)}F_{(p)}\right) = D\left(\left(G_{(p)}F_{(p)}\right)^{-1}\right) = L_p(\Omega)$$

Так как $R\left(G_{(p)}F_{(p)}\right) \subseteq R\left(G_{(p)}\right)$ и $R\left(G_{(p)}\right) \subseteq L_p(\Omega)$, то отсюда следует, что $R\left(G_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Равенство (1.1.33) доказано.

Лемма 1.1.7. *В условиях теоремы 1.1.1 существует число* $t_2^* > 0$ *такое, что если* $\tau \in (0, t_2^*)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то оператор*

$$G' = G'(\cdot, D), \ D(G') = C_0^\infty(\Omega)$$

в пространстве $L_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, *имеет замыкание* $G'_{(q)}$ *со следующими свойствами:*

$$G'_{(q)} F'_{(q)} = E + \Gamma_{2,(q)}; \tag{1.1.40}$$

$$R\left(G'_{(q)}\right) = L_q(\Omega).$$

Здесь $\Gamma_{2,(q)}$ *- замыкание в* $L_q(\Omega)$ *оператора* $\Gamma_2, D(\Gamma_2) = C_0^\infty(\Omega)$, *из леммы 1.1.5.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1.1.6.

Лемма 1.1.8. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть* $t_3^* = \min\{t_1^*, t_2^*\}$, *где* t_1^*, t_2^* *- константы из леммы 1.1.6, 1.1.7, соответственно. Тогда если* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $1 < p < \infty$ *и* $q = p/(p-1)$, *то*

$$G_{(p)} = (G'_{(q)})^*, \ G'_{(q)} = G^*_{(p)}. \tag{1.1.41}$$

Более того операторы $G_{(p)}$ *и* $G'_{(q)}$ *имеют непрерывные обратные и для них выполняются равенства*

$$G^{-1}_{(p)} = F_{(p)}(E + \mathscr{S}_1), \ (G'_{(q)})^{-1} = F'_{(q)}(E + \mathscr{S}_2) \tag{1.1.42}$$

где операторы $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ *соответственно принадлежат пространствам* $\mathscr{L}_p[\Omega]$, $\mathscr{L}_q[\Omega]$ *и их нормы меньше единицы.*

Доказательство. Обычным интегрированием по частям доказывается равенство

$$(Gu, v) = (u, G'v)$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно

$$(G_{(p)}u, v) = (u, G'_{(q)}v) \quad (u, v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

С другой стороны, согласно определении сопряженного оператора,

$$\left(G_{(p)}u, v\right) = \left(u, (G_{(p)})^* v\right)$$

для всех $u \in D\left(G_{(p)}\right)$, $v \in D\left(G^*_{(p)}\right)$. Таким образом

$$G^*_{(p)}v = G'_{(q)}v, \quad \left(v \in C_0^\infty(\Omega)\right).$$

Согласно известной теореме в теории операторов в банаховом пространстве (см.,например,[32, стр.233]), если A - непрерывный линейный оператор в некотором банаховым пространстве, то имеет место следующее равенство

$$(\ker A)^\perp = R(A^*),$$

где знак $\perp$ означает ортогональное дополнение. Поэтому из равенства (1.1.40), то есть $R\left(G'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)$, следует, что

$$\ker \left(G'_{(q)}\right)^* = 0. \tag{1.1.43}$$

Так как (см. (1.1.33)) область значений $R\left(G_{(p)}\right)$ оператора $G_{(p)}$ совпадает с $L_p(\Omega)$, то применяя пункт (в) леммы 1.1.4 из (1.1.43) получим $G_{(p)} = \left(G'_{(q)}\right)^*$. Первое равенство в (1.1.41) доказано. Аналогичным рассуждением доказывается и второе равенство в (1.1.41).

Из равенств (1.1.41) и (1.1.43) следует, что

$$\ker G_{(p)} = \ker \left(G'_{(q)}\right)^* = 0.$$

Следовательно, $G_{(p)}$ - обратимый оператор. Поэтому из равенства (1.1.39) имеем

$$F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = \left(F_{(p)}G_{(p)}\right)^{-1} = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}. \tag{1.1.44}$$

Вводим оператор

$$\mathscr{S}_1 = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} - E.$$

Используя (1.1.44) имеем

$$F_{(p)}\left(E + \mathscr{S}_1\right) = F_{(p)}\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} = F_{(p)}F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = G^{-1}_{(p)}.$$

Первое равенство в (1.1.42) доказано.

Из (1.1.33), (1.1.41) имеем

$$R\left(\left(G'_{(q)}\right)^*\right) = R\left(G_{(p)}\right) = L_p(\Omega).$$

Так как $\left(\ker\left(G'_{(q)}\right)\right)^{\perp} = R\left(\left(G'_{(q)}\right)^*\right)$, то отсюда следует, что $\ker\left(G'_{(q)}\right) = 0$. Поэтому $G'_{(q)}$ – непрерывно обратимый оператор.

Обозначим

$$\mathscr{S}_2 = \left(E + \Gamma_{2,(q)}\right)^{-1} - E.$$

Действуя также как в доказательстве равенства (1.1.39) из равенства (1.1.40) находим

$$\left(G'_{(q)}F'_{(q)}\right)^{-1} = \left(E + \Gamma_{2,(q)}\right)^{-1}.$$

Далее имеем

$$F'_{(q)}\left(E + \mathscr{S}_2\right) = F'_{(q)}\left(E + \Gamma_{2,(q)}\right)^{-1} = F'_{(q)}F^{-1}_{(q)}\left(G'_{(q)}\right)^{-1} = \left(G'_{(q)}\right)^{-1}.$$

Второе равенство в (1.1.42) доказано.

Применяя теорему 5 из [32, стр.230], получаем

$$\left\|\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}\right\|_p = \left\|\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\Gamma_{1,(p)}\right)^j\right\|_p \le \frac{1}{1 - \left\|\Gamma_{1,(p)}\right\|_p}.$$

Аналогично имеем

$$\left\|\left(E + \Gamma_{2,(q)}\right)^{-1}\right\|_q = \left\|\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\Gamma_{2,(q)}\right)^j\right\|_q \le \frac{1}{1 - \left\|\Gamma_{2,(q)}\right\|_q}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathscr{S}_1 = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} - E = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\Gamma_{1,(p)}\right)^j$$

и поэтому

$$\|\mathscr{S}_1\|_p \le \frac{\left\|\Gamma_{1,(p)}\right\|_p}{1 - \left\|\Gamma_{1,(p)}\right\|_p} < 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathscr{S}_2 = \left(E + \Gamma_{2,(q)}\right)^{-1} - E = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\Gamma_{2,(q)}\right)^j,$$

$$\|\mathscr{S}_2\|_q \leq \frac{\left\|\Gamma_{2,(q)}\right\|_q}{1 - \left\|\Gamma_{2,(q)}\right\|_q} < 1.$$

Лемма 1.1.8 доказана полностью.

Лемма 1.1.9. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть* t_3^* *– постоянная из леммы 1.1.8. Тогда если* $\tau \in (0, t_3^*)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то имеют место следующие равенства*

$$R\left(F_{(p)}\right) = D\left(G_{(p)}\right), \tag{1.1.45}$$

$$\ker F_{(p)} = 0. \tag{1.1.46}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – произвольный элемент из $R\left(F_{(p)}\right)$. Тогда существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что

$$u(x) = \left(F_{(p)} v\right)(x),\ x \in \Omega. \tag{1.1.47}$$

Согласно нашим обозначениям $F_{(p)}$ – замыкание оператора

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^{\infty}(\Omega),$$

в пространстве $L_p(\Omega)$. Поэтому существует последовательность $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что

$$v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \quad F v_j \underset{p}{\longrightarrow} F_{(p)} v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{1.1.48}$$

Положим $u_j = F v_j$. Тогда из (1.1.47), (1.1.48) следует, что

$$u_j \underset{p}{\longrightarrow} u, \quad j \longrightarrow \infty.$$

Так как $u_j \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то согласно лемме 1.1.5

$$G F v_j = (E + \Gamma_1)\, v_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

В силу ограниченности оператора $E + \Gamma_1$ имеем

$$(E + \Gamma_1)\, v_j \underset{p}{\longrightarrow} \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right) v, \quad j \longrightarrow \infty.$$

Поэтому

$$GFv_j \underset{p}{\longrightarrow} \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right) v = G_{(p)}F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow \infty.$$

Следовательно $u_j \underset{p}{\longrightarrow} u$ и $Gu_j \underset{p}{\longrightarrow} Gu$ при $j \longrightarrow \infty$, то есть $u \in D\left(G_{(p)}\right)$.

Таким образом, мы доказали включение

$$R\left(F_{(p)}\right) \subset D\left(G_{(p)}\right). \tag{1.1.49}$$

Пусть $w \in D\left(G_{(p)}\right)$. Положим $v = G_{(p)}w$. Так как согласно лемме 1.1.8 существует обратный оператор $G_{(p)}^{-1}$, то $w = G_{(p)}^{-1}v$. Отсюда и из равенства (1.1.42) следует, что

$$w = F_{(p)}\,(E + \mathscr{S}_1)\, v.$$

Следовательно, $w \in R\left(F_{(p)}\right)$ и доказано включение $D\left(G_{(p)}\right) \subset R\left(F_{(p)}\right)$. Отсюда и из (1.1.49) следует равенство (1.1.45).

Докажем равенство (1.1.46). Пусть $F_{(p)}v = 0$. Тогда из равенство (см. (1.1.32)) $G_{(p)}F_{(p)}v = (E + \Gamma_1)\, v$ следует, что

$$(E + \Gamma_1)\, v = 0. \tag{1.1.50}$$

Из обратимости оператора $(E + \Gamma_1)$ следует, что $\ker(E + \Gamma_1) = 0$. Поэтому из (1.1.50) имеем $v = 0$. Равенство (1.1.46) доказано, что завершает доказательство леммы 1.1.9.

Лемма 1.1.10. *В условиях теоремы 1.1.1 существует, число* $t_4^* > 0$ *такое, что если* $\tau \in (0, t_4^*)$ *и* $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то существует оператор* $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ *с* $\|\cdot\|_p$*-нормой, не превосходящей* $1/2$, *такой, что*

$$LFu = (E + \Gamma)u \tag{1.1.51}$$

для всех функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Напомним, что (см. (1.1.8))

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^\infty(\Omega),$$

где Φ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ - псевдодифференциальные операторы в R_n с символами $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$,

$$L_m(s) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x^{(m,k)}) s^k \ \ (s \in R_n).$$

Определим дифференциальный оператор

$$L_m(x,\, D) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x^{(m,k)}) D_x^k \ \ D(L_m) = C_0^\infty(\Omega).$$

Так как этот оператор с постоянными коэффициентами, то

$$\left(L_m \Phi_m u\right)(x) = u(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Далее, в силу того, что система функций $\left\{\psi_m^2\right\}_{m=1}^\infty$ образуют разбиение единицы области Ω, имеем

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m L_m \Phi_m \psi_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2 = E, \tag{1.1.52}$$

где E – тождественный оператор. Теперь используя равенство (1.1.52) получаем

$$\begin{aligned} LFu = \sum_{m=1}^{+\infty} L\psi_m \Phi_m \psi_m u = \sum_{m=1}^{+\infty} [L,\, \psi_m] \Phi_m \psi_m u + \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m L \Phi_m \psi_m u = \sum_{m=1}^{+\infty} [L,\, \psi_m] \Phi_m \psi_m u + \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \left(L - L_m\right) \Phi_m \psi_m u + u. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место равенство (1.1.51), если мы определим оператор Γ следующим образом

$$\Gamma = \sum_{m=1}^{+\infty} [L,\, \psi_m] \Phi_m \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \left(L - L_m\right) \Phi_m \psi_m.$$

Далее оценим норму этого оператора. Для этого представим оператор Γ в виде

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma'', \tag{1.1.53}$$

где

$$\Gamma' = \sum_{m=1}^{+\infty} [L,\, \psi_m] \Phi_m \psi_m, \quad \Gamma'' = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \left(L - L_m\right) \Phi_m \psi_m. \tag{1.1.54}$$

Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\left[D_x^k,\, \psi_m\right] u(x) = D_x^k \left(\psi_m(x) u(x)\right) - \psi_m(x) D_x^k u(x) =$$

$$= \sum_{\substack{k'+k''=k, \\ k' \neq 0}} \left(D_x^{k'} \psi_m(x)\right) \left(D_x^{k''} u(x)\right).$$

Поэтому

$$\Gamma' = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) \sum_{\substack{k'+k''=k, \\ k' \neq 0}} \psi_m^{k'} \Phi_m^{k''} \psi_m \right),$$

где $\psi_m^{k'}(x) = D_x^{k'} \psi_m(x)$ и $\Phi_m^{k''}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''} L_m^{-1}(s)$.

Применяя лемму 1.1.2 оценим норму оператора Γ'. Имеем

$$\|\Gamma'\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n,\, \lambda) \sum_{|k| \leq 2r} \sum_{\substack{k'+k''=k, \\ k' \neq 0}} \mathcal{F}_{k',k''}^{(k)}, \tag{1.1.55}$$

где

$$\mathcal{F}_{k',k''}^{(k)} = \sup_{m=1,\,2,\,3,\,\dots} \left\| \psi_m^{k'} a_k \Phi_m^{k''} \psi_m \right\|_p. \tag{1.1.56}$$

Согласно п.3 леммы 1.1.1 функции $\psi_m(x)$ для любого мультииндекса k' : $|k'| \leq 2r$ удовлетворяют условию

$$\sup \left| \psi_m^{(k')}(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \cdots g_n^{k'_n}(x) \right| \leq M_{k'} < +\infty, \tag{1.1.57}$$

где супремум берется по всем $x \in \operatorname{supp} \psi_m$.

Для оценки нормы псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{k''}$ используем лемму 1.1.3 и неравенство (1.1.15). В результате имеем

$$\left\|\Phi_m^{k''}\right\|_p \leq M_* \sup_{s\in R_n} \left|s^{k''} L_m^{-1}(s)\right| \leq M_*' \sup \left|s^{k''} L^{-1}(x,\, s)\right|, \tag{1.1.58}$$

где супремум берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, $s \in R_n$.

Теперь из (1.1.56) – (1.1.58) получим

$$\mathcal{F}_{k',k''}^{(k)} \leq M_*'' \sup_{x\in \operatorname{supp}\, \psi_m,\, s\in R_n} \left|a_k(x) g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \cdots g_n^{-k_n'}(x) s^{k''} L^{-1}(x,\, s)\right|.$$

Так как $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то в силу условии (II) (см. определение класса $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$) из этого неравенства следует, что

$$\mathcal{F}_{k',k''}^{(k)} \leq M_{**}\tau.$$

С учетом этой оценки из (1.1.55) имеем

$$\|\Gamma'\|_p \leq \mathbb{M}_0 \tau, \tag{1.1.59}$$

где $\mathbb{M}_0$ – некоторая положительная постоянная.

Далее оценим норму оператора Γ''. Применяя лемму 1.1.2 из (1.1.54) имеем

$$\|\Gamma''\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n, \lambda) \sup_{m=1,2,\ldots} \|\psi_m (L - L_m) \Phi_m \psi_m\|_p. \tag{1.1.60}$$

Так как

$$L(x,\, D_x) - L_m(D_x) = \sum_{|k|\leq 2r} \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,k)}\right)\right) D_x^k,$$

то

$$\|\psi_m (L - L_m) \Phi_m \psi_m\|_p \leq \sum_{|k|\leq 2r} \left\|\psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,k)}\right)\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m\right\|_p, \tag{1.1.61}$$

где $\Phi_m^{(k)}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L_m^{-1}(s)$.

В силу леммы 1.1.3 для оценки нормы псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k)}$ имеем

$$\left\|\Phi_m^{(k)}\right\|_p \leq M \sup_{s\in R_n} \left|s^k L_m^{-1}(s)\right|.$$

Отсюда и из (1.1.61) следует, что

$$\|\psi_m(L-L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq M \sup \sum_{|k|\leq 2r} \left|\left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,k)}\right)\right) s^k L_m^{-1}(s)\right|,$$

где супремум берется по $x \in \operatorname{supp}\,\psi_m$, $s \in R_n$.

Далее используя неравенство (1.1.15)

$$|L(x,s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x,s)| \quad (x \in \operatorname{supp}\,\psi_m,\ s\in R_n,\, m = 1,2,3,\ldots)$$

и условию (III) (см. определение класса $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$), получаем

$$\|\psi_m(L-L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq M' \sup \sum_{|k|\leq 2r} \left|\left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,k)}\right)\right) s^k L^{-1}(x,\, s)\right| \leq M_0\tau.$$

Таким образом (см. (1.1.60)),

$$\|\Gamma''\|_p \leq \mathbb{M}_1\tau, \tag{1.1.62}$$

где $\mathbb{M}_1$ – некоторая положительная постоянная.

Теперь объединяя (1.1.53), (1.1.59), (1.1.62) находим

$$\|\Gamma\|_p \leq \tau\left(\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_1\right).$$

Следовательно, при $t_4^* = \dfrac{1}{2\left(\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_1\right)}$ и $\tau \in (0,\, t_4^*)$ норма оператора Γ не превосходит $1/2$.

Лемма 1.1.10 доказана.

Теперь переходим к непосредственному доказательству теоремы 1.1.1. Сначала покажем, что оператор (см. (1.1.1)) $L = L(\cdot,\, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Для этого нам достаточно показать, что если $Lu_j \underset{p}{\longrightarrow} v$, $u_j \underset{p}{\longrightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$, где $v \in L_p(\Omega)$ и $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ для $j = 1,\, 2, \ldots,$ то $v = 0$.

Так как $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G_{(p)})$ и согласно лемме 1.1.6 (см. (1.1.33)) $D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, то $u_j \in R(F_{(p)})$ для $j = 1, 2, \ldots$. Следовательно существуют функции $v_j \in L_p(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$u_j = F_{(p)}v_j,\ j = 1,\ 2, \ldots.$$

Поэтому

$$LF_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} v \text{ и } F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Далее применяя лемму 1.1.10 (см. (1.1.51)) имеем

$$LF_{(p)}v_j = \left(E + \Gamma_{(p)}\right) v_j \underset{p}{\longrightarrow} v\ \ F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \,\text{при}\, j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу обратимости оператора $\left(E + \Gamma_{(p)}\right)$ следует, что

$$v_j \underset{p}{\longrightarrow} \left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1} v,\ \ F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \,\text{при}\, j \longrightarrow +\infty. \tag{1.1.63}$$

Так как $F_{(p)}$ – замкнутый непрерывный оператор, то из $v_j \underset{p}{\longrightarrow} w$, $F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$ следует, что $F_{(p)}w = 0$. Поэтому из (1.1.63) получаем.

$$F_{(p)} \left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1} v = 0.$$

Отсюда в силу равенства (1.1.46) имеем $\left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1} v = 0$, то есть $v = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что оператор $L = L(\cdot,\, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, имеет в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, замыкание. Это замыкание обозначим через $L_{(p)}$.

Далее докажем равенство

$$\ker L_{(p)} = 0. \tag{1.1.64}$$

Для этого мы докажем, что если $L_{(p)}v = 0$, то $v = 0$. Пусть $L_{(p)}v = 0$. Так как $L_{(p)}$ – замыкание оператора $L = L(\cdot,\, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, то существует последовательность $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$u_j \underset{p}{\longrightarrow} v,\ Lu_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty. \tag{1.1.65}$$

Так как (см. (1.1.45)) $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, то функции u_j, $j = 1, 2, \ldots$, можно представить в виде

$$u_j = F_{(p)} v_j, \; j = 1, 2, \ldots.$$

Подставляя это в (1.1.65) имеем

$$F_{(p)} v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \; LF_{(p)} v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу леммы 1.1.10 получим

$$\left(E + \Gamma_{(p)}\right) v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Поскольку $\left(E + \Gamma_{(p)}\right)$ – обратимый оператор, то

$$v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Таким образом, мы имеем

$$F_{(p)} v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \; v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $F_{(p)}$ находим

$$F_{(p)} v = 0.$$

Следовательно (см. лемму 1.1.9), $v = 0$. Равенство (1.1.64) доказано.

Далее, поступая так же как в доказательстве леммы 1.1.6, докажем равенство

$$L_{(p)} F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}. \tag{1.1.66}$$

Согласно лемме 1.1.10

$$LFu = (E + \Gamma)u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.1.67}$$

где $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$. Оператор Γ имеет в $L_p(\Omega)$ замыкание $\Gamma_{(p)}$ и $D(\Gamma_{(p)}) = L_p(\Omega)$.

Пусть v – произвольный элемент из $L_p(\Omega)$. В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ существует последовательность $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ элементов класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$ при $j \longrightarrow +\infty$.

Так как $(E+\Gamma)v_j \underset{p}{\longrightarrow} \left(E+\Gamma_{(p)}\right)v$ при $j \longrightarrow +\infty$, то из равенства (1.1.67) следует, что

$$LFv_j \underset{p}{\longrightarrow} \left(E+\Gamma_{(p)}\right)v \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

С другой стороны из $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$, $j \longrightarrow +\infty$, следует, что

$$Fv_j \underset{p}{\longrightarrow} F_{(p)}v,\ j \longrightarrow +\infty.$$

Вводим обозначения

$$w_j = Fv_j,\ \ j = 1,\, 2,\, \ldots;\ w = F_{(p)}v.$$

В этих обозначениях полученные выше соотношения записываются в виде

$$w_j \underset{p}{\longrightarrow} w,\ \ L_{(p)}w_j \underset{p}{\longrightarrow} \left(E+\Gamma_{(p)}\right)v \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $L_{(p)}$ следует, что

$$L_{(p)}w = \left(E+\Gamma_{(p)}\right)v.$$

Подставляя в этом равенстве $w = F_{(p)}v$, получим

$$L_{(p)}F_{(p)}v = \left(E+\Gamma_{(p)}\right)v.$$

Равенство (1.1.66) доказана.

Так как $R\left(E+\Gamma_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$, то из (1.1.66) следует, что $R\left(L_{(p)}F_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Отсюда в силу того, что

$$R\left(L_{(p)}F_{(p)}\right) \subseteq R\left(L_{(p)}\right) \subseteq L_p(\Omega).$$

получим

$$R\left(L_{(p)}\right) = L_p(\Omega). \tag{1.1.68}$$

Таким образом, мы доказали, что (см. (1.1.64)) $\ker L_{(p)} = 0$ и $R\left(L_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Эти равенства обеспечивают существование обратного оператора $L_{(p)}^{-1}$.

Так же как в доказательстве леммы 1.1.8 из $\left\|\Gamma_{(p)}\right\| \leq 1/2$ следует, что $\left(E+\Gamma_{(p)}\right)$ – обратимый оператор и $\left\|\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}\right\| \leq 1/\left(1-\|\Gamma_{(p)}\|\right)$.

Положим

$$\mathcal{J}=\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}-E.$$

Используя равенство (1.1.66) имеем

$$F_{(p)}(E+\mathcal{J})=F_{(p)}\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}=F_{(p)}\left(L_{(p)}F_{(p)}\right)^{-1}=L_{(p)}^{-1}.$$

Таким образом, обратный оператор $L_{(p)}^{-1}$ существует и представляется в виде

$$L_{(p)}^{-1}=F_{(p)}(E+\mathcal{J}),$$

где $\mathcal{J}\in\mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathcal{J}\|_p<1$.

Теорема 1.1.1 доказана.

Теорема 1.1.2. *Пусть $1<p<+\infty$, выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть τ_0 – такое же число как в этой теореме. Тогда если $\tau\in(0,\,\tau_0)$ и $L(x,s)\in B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, то имеет место следующее неравенство*

$$\|u;\,L_p(\Omega)\|\leq C_0\left\|L_{(p)}u;\,L_p(\Omega)\right\|\quad\left(u\in D\left(L_{(p)}\right)\right),\tag{1.1.69}$$

где число $C_0>0$ зависит только от r, n, p, $\varkappa$ и нижней грани функции $|L(x,\,s)|$ $(x\in\Omega,\,s\in R_n)$.

Доказательство. В процессе доказательства теоремы 1.1.1 мы показывали, что для обратного оператора $L_{(p)}^{-1}$ имеет место представление

$$L_{(p)}^{-1}=F_{(p)}(E+\mathcal{J}),\tag{1.1.70}$$

где $\mathcal{J}\in\mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathcal{J}\|_p<1$. Напомним, что $F_{(p)}$ – замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора (см. (1.1.8))

$$F=\sum_{m=1}^{+\infty}\psi_m\Phi_m\psi_m,\ D(F)=C_0^{\infty}(\Omega).$$

Применяя лемму 1.1.2 для нормы оператора $F_{(p)}$, получаем следующее неравенство

$$\left\|F_{(p)}\right\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n, \lambda) \sup_{m=1,\,2,\,\dots} \|\Phi_m\|_p . \tag{1.1.71}$$

Так как Φ_m - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m^{-1}(s)$, то по лемме 1.1.3 имеем

$$\|\Phi_m\|_p \leq M \sup_{s\in R_n} \left|L_m^{-1}(s)\right| , \tag{1.1.72}$$

где число $M > 0$ зависит только от $r,\, n,\, p,\, K$.

В условиях нашей теоремы

$$\inf_{x\in\Omega,\, s\in R_n} |L(x,\, s)| = \delta \neq 0.$$

Поэтому из (1.1.71), (1.1.72) следует, что

$$\left\|F_{(p)}\right\|_p \leq M_0(r,\, n,\, p,\, K,\, \delta,\, \lambda) < +\infty.$$

Отсюда и из (1.1.70) имеем

$$\left\|L_{(p)}^{-1}\right\|_p \leq M_0(r,\, n,\, p,\, K,\, \delta,\, \lambda)\|E + \mathcal{J}\|_p \leq 2M_0(r,\, n,\, p,\, K,\, \delta,\, \lambda).$$

Следовательно

$$\left\|L_{(p)}^{-1}v;\, L_p(\Omega)\right\| \leq 2M_0 \left\|v;\, L_p(\Omega)\right\|$$

для всех $v \in R\left(L_{(p)}\right)$. Подставляя в этом равенстве $v = L_{(p)}u$, получим (1.1.69).

Теорема 1.1.2 доказана.

1.2 Некоторые функциональные пространства, связанные с дифференциальным выражением $L(x,\, D_x)$

Пусть область $\Omega \subset R_n$ такая же как в §1.1 и $L(x,\, D_x)$ – дифференциальное выражение, рассмотренное в этом параграфе, то есть

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\leq 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{1.2.1}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ - длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

и i - мнимая единица.

Обозначим через $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx + \sum_{|k|\le 2r} \int\limits_\Omega \left| a_k(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}. \quad (1.2.2)$$

Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, обозначим через $\mathscr{K}$. Пусть $O_{\mathscr{K}}$ – множество функций $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л.Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$.

Обозначим через $W'_{p;\,L}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, пространство функций $u(x) \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ с конечной нормой (1.2.2).

Далее предположим, что коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \le 2r$, дифференциального выражения (1.2.1) удовлетворяют следующую условию гладкости

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega) \ (|l| \le |k| \le 2r). \quad (1.2.3)$$

Как обычно, символом $\langle f,\, \varphi \rangle$, где $f \in D'(\Omega)$, обозначим значение обобщенной функции f на функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обобщенная функция f отождествляется с некоторой функцией $g(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, если

$$\langle f,\, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega g(x)\varphi(x)dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

При выполнении условия гладкости (1.2.3) для произвольной функции $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ можно определить обобщенную функцию $a_k(x)D_x^k u(x) \quad (|k| \le 2r)$ по формуле

$$\left\langle a_k D^k u,\, \varphi \right\rangle = (-1)^{|k|} \int\limits_\Omega u(x) D_x^k \left(a_k(x)\varphi(x)\right) dx \quad (1.2.4)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вводим пространство $W_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенные функции $a_k(x) D_x^k u(x)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$ для всех $|k| \le 2r$ и конечна норма (1.2.2).

Для $u(x) \in L_p(\Omega)$ через $L(x,\, D_x)u(x)$ обозначим сумму всех обобщенных функций $a_k(x) D_x^k u(x), \quad |k| \le 2r$, определенных равенством (1.2.4) и вводим пространство $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенная функция $L(x,\, D_x)u(x)$ принадлежит пространству $L_p(\Omega)$ и конечна следующая норма

$$\|u;\, \mathcal{W}_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx + \int\limits_\Omega |L(x,\, D_x)u(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}. \qquad (1.2.5)$$

Через $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p;\,L}(\Omega)$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.2.5).

Таким образом для дифференциального выражения (1.2.1) мы определили весовые пространства $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. При этом первые два пространства определены без всякого предположения о гладкости коэффициентов $a_k(x), \quad |k| \le 2r$, а две последние пространства определены, когда выполняется условие гладкости (1.2.3).

Заметим, что $W'_{p,\,L}(\Omega) \subset W_{p,\,L}(\Omega)$ и если $a_k(x) \not\equiv 0$ для всех мультииндексов $k : |k| \le 2r$, то $W'_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega)$. Если условие гладкости (1.2.3) выполняется, то пространство $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ является замыканием класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{p,\,L}(\Omega)$.

Докажем, что $W_{p,\,L}(\Omega)$ – полное пространство. Пусть $u_1(x), u_2(x), \ldots$ – фундаментальная последовательность в пространстве $W_{p,\,L}(\Omega)$. Тогда в силу очевидного неравенства

$$\left\| a_k(x) D_x^k u(x);\, L_p(\Omega) \right\| \le \|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\|, \quad |k| \le 2r,$$

следует, что последовательность $\left\{ a_k(x) D_x^k u_j(x) \right\}_{j=1}^\infty$, $|k| \le 2r$, фундаментальна в $L_p(\Omega)$. Теперь, используя полноты пространства $L_p(\Omega)$ можно выделить подпоследовательность $\left\{u_j'\right\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$a_k(x)D_x^k u_j'(x) \underset{p}{\longrightarrow} v_k \in L_p(\Omega), j \longrightarrow +\infty; \tag{1.2.6}$$

$$u_j'(x) \underset{p}{\longrightarrow} u \in L_p(\Omega), j \longrightarrow +\infty.$$

Далее из определения обобщенных функций $a_k(x)D_x^k u(x), \quad |k| \leq 2r$, (см. (1.2.4)) имеем

$$\left\langle a_k D^k u_j',\, \varphi\right\rangle - \left\langle a_k D^k u,\, \varphi\right\rangle = (-1)^{|k|}\int\limits_{\Omega}\left(u_j'(x) - u(x)\right) D_x^k\left(a_k(x)\varphi(x)\right)dx$$

для всех $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Следовательно $a_k(x)D^k u_j'(x)$ сходится к $a_k(x)D^k u(x)$ при $j \longrightarrow +\infty$ в смысле сходимости в $D'(\Omega)$. Отсюда и из (1.2.6) имеем $v_k(x) = a_k(x)D^k u(x)$, $|k| \leq 2r$.

Таким образом

$$u_j'(x) \underset{p}{\longrightarrow} u(x),\ a_k(x)D^k u_j'(x) \underset{p}{\longrightarrow} a_k(x)D^k u(x),\ |k| \leq 2r \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\left\|u_j' - u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\right\| &\leq \left\|u_j' - u;\, L_p(\Omega)\right\| + \\ &+ \sum_{|k|\leq 2r}\left\|a_k(x)D^k u_j'(x) - a_k(x)D^k u(x);\, L_p(\Omega)\right\| \text{ при } j \longrightarrow +\infty,\end{aligned}$$

то есть последовательность $\left\{u_j'\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к $u(x)$ в смысле сходимости в пространстве $W_{p,\,L}(\Omega)$.

Полнота пространства $W_{p,\,L}(\Omega)$ доказана. Аналогичными рассуждениями доказывается полнота пространства $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $1 < p < +\infty$*, выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть* τ_0 *– такое же число как в этой теореме. Тогда если* $\tau \in (0,\, \tau_0)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$*, то*

$$D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$$

и для всех функций $u \in D\left(L_{(p)}\right)$ *выполняются неравенства*

$$\|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\| \le M\, \|L(\cdot;\, D)u;\, L_p(\Omega)\| \le M\, \|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\|\,, \qquad (1.2.7)$$

где число $M > 0$ *зависит только от* $r,\, n,\, p,\, \delta,\, K$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$\left\|a_k D^k F\right\|_p \le C_1 < +\infty,\ |k| \le 2r, \qquad (1.2.8)$$

где

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m,\ D(F) = C_0^\infty(\Omega),$$

а Φ_m - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m^{-1}(s)$ (см. (1.1.7)).

Используя равенство

$$a_k D^k F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m a_k D^k \Phi_m \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[a_k D^k,\, \psi_m\right] \Phi_m \psi_m,$$

где символ $[\cdot,\, \cdot]$ обозначает коммутатор $[T_1,\, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$, представим оператор $a_k D^k F$ в виде

$$a_k D^k F = F_*^{(k)} + F_{**}^{(k)}, \qquad (1.2.9)$$

где

$$F_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m a_k \Phi_m^{(k)} \psi_m,\ F_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[a_k D^k,\, \psi_m\right] \Phi_m \psi_m, \qquad (1.2.10)$$

$\Phi_m^{(k)}$ - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L_m^{-1}(s)$.

Далее оценим норму оператора $F_*^{(k)}$. Для этого представим оператор $F_*^{(k)}$ в виде

$$F_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m a_k\left(x^{(m,\,k)}\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m.$$

Применяя лемму 1.1.2, получаем

$$\left\| F_*^{(k)} \right\|_p \leq M_1 \left(\mathbb{C}_{1,\,k} + \mathbb{C}_{2,\,k} \right), \tag{1.2.11}$$

где

$$\mathbb{C}_{1,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \left\| \psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p ,$$

$$\mathbb{C}_{2,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \left\| \psi_m a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p .$$

Действуя также как при оценки нормы оператора Γ'' в доказательстве леммы 1.1.10, в силу леммы 1.1.3, неравенство (1.1.15) и условие (III) (см. определение класса $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$ в §1.1), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p \leq \\ &\qquad \leq M_{11} \sup \left| \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) s^k L_m^{-1}(s) \right| \leq \\ &\qquad\qquad \leq M_{12} \sup \left| \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) s^k L^{-1}(x,\, s) \right| \leq M_{13}\tau. \end{aligned}$$

В этих неравенствах супремум берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, $s \in R_n$.

Таким образом, доказано неравенство

$$\mathbb{C}_{1,\,k} \leq M_{13}\tau, \ |k| \leq 2r, \tag{1.2.12}$$

где M_{13} – некоторая положительная постоянная.

Согласно (1.1.15)

$$|L(x,s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x,s)|$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Отсюда, в частности при $x = x^{(m,\,k)}$ имеем

$$\left| L\left(x^{(m,\,k)}, s \right) \right| \leq 2|L_m(s)| \leq 3 \left| L\left(x^{(m,\,k)}, s \right) \right| \tag{1.2.13}$$

для всех $s \in R_n$ и всех $m = 1, 2, 3, \ldots$.

При $x = x^{(m,\,k)}$ из условии (1.1.3) теоремы 1.1.1 имеем

$$\left| a_k\left(x^{(m,\,k)} s^k \right) \right| \leq K \left| L\left(x^{(m,\,k)}, s \right) \right|, \ s \in R_n.$$

Отсюда и из (1.2.13) следует, что

$$\left|a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)s^k L_m^{-1}(s)\right| \leq M_{14} \tag{1.2.14}$$

для всех $s \in R_n$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Далее применяя лемму 1.1.3 в силу (1.2.14) получаем

$$\mathbb{C}_{2,\,k} \leq M_{15} \sup_{m=1,2,3,\ldots} \sup_{s\in R_n} \left|a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)s^k L_m^{-1}(s)\right| \leq M_{15}M_{14}.$$

В силу этого неравенства из (1.2.11) и (1.2.12) имеем

$$\|F_*^{(k)}\|_p \leq M_{16} < +\infty, \tag{1.2.15}$$

где M_{16} – положительная постоянная, зависящая от r, n, p, K, δ, λ.

Теперь переходим к оценке нормы оператора (см. (1.2.10)) $F_{**}^{(k)}$. Для этого представим оператор $F_{**}^{(k)}$ в виде

$$F_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k'\neq 0}} C(k',\,k'')a_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m,$$

где $C(k',\,k'')$ – постоянные числа, $\psi_m^{(k')}(x) = D_x^{k'}\psi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k'')}$ - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''}L_m^{-1}(s)$.

Применяя лемму 1.1.2, получим

$$\left\|F_{**}^{(k)}\right\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n,\,\lambda) \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k'\neq 0}} \mathbb{C}_{(k',\,k'')}^{(k)}, \tag{1.2.16}$$

где

$$\mathbb{C}_{(k',\,k'')}^{(k)} = \sup_{1,\,2,\,\ldots} \left\|a_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m\right\|_p. \tag{1.2.17}$$

Согласно утверждения п. 3 леммы 1.1.1

$$\left|\psi_m^{(k')}(x)\right| \leq M_{k'} g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \ldots g_n^{-k_n'}(x)$$

для всех $x \in \Omega$. Учитывая это и применяя неравенство (1.1.15) из условии (II) получим

$$\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left|\psi_m^{(k')}(x) a_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)\right| \le$$
$$\le M_{21} \sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left|a_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)\right| \le$$
$$\le M_{22} \sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left|a_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L^{-1}(x,\, s)\right| \le \tau M_{22} < +\infty.$$

В силу этого неравенства, а также неравенства

$$\left\|\Phi_m^{(k'')}\right\|_p \le M_{23} \sup_{s\in R_n} \left|s^{k''} L_m^{-1}(s)\right|,$$

которое доказывается применением леммы 1.1.3, получаем

$$\left\|a_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m\right\|_p \le$$
$$\le M_{23} \sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left|\psi_m^{(k')}(x) a_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)\right| \le \tau M_{22} M_{23} < +\infty.$$

Отсюда и из (1.2.16), (1.2.17) имеем

$$\left\|F_{**}^{(k)}\right\|_p \le M_{24} < +\infty, \tag{1.2.18}$$

где M_{24} – некоторая положительная постоянная, зависящая только от $r,\, n,\, p,\, K,\, \delta,\, \lambda$.

Из (1.2.9), (1.2.15), (1.2.18) следует неравенство (1.2.8).

Далее докажем неравенство

$$\left\|a_k D^k u;\, L_p(\Omega)\right\| \le C_2 \left\|Lu;\, L_p(\Omega)\right\| \quad (1 < p < +\infty) \tag{1.2.19}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$; C_2 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от $u(x)$.

Пусть $u(x)$ – произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Так как (см. лемму 1.1.9) $C_0^\infty(\Omega) \subset R\left(F_{(p)}\right) = D\left(G_{(p)}\right)$, то существует функция $v \in L_p(\Omega)$ такая, что $u = F_{(p)} v$. Учитывая это, в силу равенства (1.1.66) имеем

$$Lu = LF_{(p)} v = \left(E + \Gamma_{(p)}\right) v.$$

Так как $\left(E+\Gamma_{(p)}\right)$ – непрерывно обратимый оператор, то отсюда следует, что

$$v=\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}Lu.$$

Далее применяя неравенство (1.2.8) имеем

$$\begin{aligned}\left\|a_kD^ku;\,L_p(\Omega)\right\|&=\left\|a_kD^kF_{(p)}v;\,L_p(\Omega)\right\|\le\left\|a_kD^kF_{(p)}\right\|_p\|v;\,L_p(\Omega)\|\le\\ &\le C_1\|v;\,L_p(\Omega)\|=C_1\left\|\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}Lu;\,L_p(\Omega)\right\|\le\\ &\le C_1\left\|\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}\right\|_p\|Lu;\,L_p(\Omega)\|=C_2\|Lu;\,L_p(\Omega)\|.\end{aligned}$$

Неравенство (1.2.19) доказано.

Согласно теореме 1.1.2 существует положительная постоянная C_0 такая, что

$$\|u;\,L_p(\Omega)\|\le C_0\|Lu;\,L_p(\Omega)\| \tag{1.2.20}$$

для всех $u\in C_0^\infty(\Omega)$.

Теперь применяя неравенства (1.2.19), (1.2.20) находим (см. (1.2.2))

$$\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\|\le\|u;\,L_p(\Omega)\|+\sum_{|k|\le 2r}\left\|a_kD^ku;\,L_p(\Omega)\right\|\le M_3\|Lu;\,L_p(\Omega)\|,$$

где постоянная M_3 зависит только от r, n, p, K, δ, λ.

Далее заметим следующее очевидное неравенство

$$\|Lu;\,L_p(\Omega)\|\le\sum_{|k|\le 2r}\left\|a_kD^ku;\,L_p(\Omega)\right\|\le(2r)^n\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\|.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\|\le M_{31}\|Lu;\,L_p(\Omega)\|\le M_{32}\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\| \tag{1.2.21}$$

для всех $u\in C_0^\infty(\Omega)$.

Так как по определение $\overset{0}{W}_{p;\,L}(\Omega)$ – пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\|=\left\{\int\limits_\Omega|u(x)|^pdx+\sum_{|k|\le 2r}\int\limits_\Omega\left|a_k(x)D_x^ku(x)\right|^pdx\right\}^{1/p}$$

и $L_{(p)}$ – замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора $L = L(\cdot,\, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, то из (1.2.21) следует, что $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$.

Неравенство (1.2.7) следует из (1.2.21) по непрерывности.

Теорема 1.2.1 доказана.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, *выполнены все условия теоремы 1.1.1 и пусть* τ_0 *- такое же число как в теореме 1.1.1. Тогда, если* $\tau \in (0,\, \tau_0)$ *и* $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то имеет место вложение*

$$W'_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right). \tag{1.2.22}$$

Если же при этом выполняется условие гладкости

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega) \ (|l| \le |k| \le 2r), \tag{1.2.23}$$

то

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega).$$

Доказательство. Предварительно докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 1.2.1. *Всякая функция* $u(x) \in L_p(\Omega)$ *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{|k| \le 2r} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_\Omega \left| a_k\left(x^{(m,\,k)}\right) \psi_m^2(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right) < +\infty, \tag{1.2.24}$$

где $x^{(m,\,k)}$, $\psi_m(x)$ $(|k| \le 2r,\, m = 1,\, 2,\, \ldots)$ *– такие же объекты как в §1.1, принадлежит областью определения оператора* $L_{(p)}$, *то есть* $u \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Доказательство. Пусть $G(x,\, D_x)$ – вспомогательное дифференциальное выражение, введенное в §1.1 (см. (1.1.10), (1.1.11)), то есть

$$G(x,\, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} \widetilde{a}_k(x) D_x^k \ (x \in \Omega), \tag{1.2.25}$$

где

$$\widetilde{a}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\psi_m^2(x),\ \ |k| \le 2r. \tag{1.2.26}$$

Так же как в §1.1 обозначим через $G_{(p)}$ замыкание оператора $G(x,\,D_x)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $L_p(\Omega)$.

Так как коэффициенты $\widetilde{a}_k(x)$ дифференциального выражения $G(x,\,D_x)$ достаточно гладкие, то можно определить выражение $G'(x,\,D_x)$ сопряженное к $G(x,\,D_x)$. Через $G'_{(q)}$ обозначим замыкание оператора $G'(x,\,D_x)$, $D(G') = C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $L_q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$.

Из (1.2.25), (1.2.26) имеем

$$\|Gu;\,L_p(\Omega)\| \le \sum_{|k|\le 2r}\left\|\widetilde{a}_k D^k u;\,L_p(\Omega)\right\| \le$$

$$\le \sum_{|k|\le 2r}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_\Omega \left|a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\psi_m^2(x)D_x^k u(x)\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда в силу условии (1.2.24) получим $Gu \in L_p(\Omega)$. Теперь в силу пункта (г) леммы 1.1.4 из $u \in L_p(\Omega)$ и $Gu \in L_p(\Omega)$ следует, что $u \in D\left(\left(G'_{(q)}\right)^*\right)$. Согласно лемме 1.1.8 (см. (1.1.41)) $\left(G'_{(q)}\right)^* = G_{(p)}$. Поэтому $u \in D\left(G_{(p)}\right)$. Так как (см. (1.1.45)) $D\left(G_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right)$, то отсюда следует, что

$$u \in R\left(F_{(p)}\right).$$

Теперь для завершения доказательства леммы 1.2.1 нам достаточно доказать равенство

$$D\left(L_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right). \tag{1.2.27}$$

Пусть $u(x)$ – произвольный элемент из $R\left(F_{(p)}\right)$. Тогда существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что

$$u(x) = \left(F_{(p)}v\right)(x),\ \ x \in \Omega.$$

Так как $F_{(p)}$ – замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty}\psi_m\Phi_m\psi_m,\ \ D(F) = C_0^\infty(\Omega),$$

то существует последовательность функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, … из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$v_j \underset{p}{\longrightarrow} v \text{ и } Fv_j \underset{p}{\longrightarrow} F_{(p)}v, \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Обозначим $u_j = Fv_j$. Тогда имеем

$$v_j \underset{p}{\longrightarrow} v \text{ и } u_j \underset{p}{\longrightarrow} u \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Так как $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$, то применяя лемму 1.1.10 имеем

$$LFv_j = (E+\Gamma)v_j, \ j = 1, 2, \ldots .$$

В силу ограниченности оператора $(E+\Gamma)$ из $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \ j \longrightarrow +\infty$, следует, что

$$(E+\Gamma)v_j \underset{p}{\longrightarrow} (E+\Gamma)v \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Поэтому применяя равенство (см. (1.1.66)) $L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$ получим

$$LFv_j \underset{p}{\longrightarrow} L_{(p)}F_{(p)}v \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Подставляя сюда $u_j = Fv_j$, $u = F_{(p)}v$ находим

$$u_j \underset{p}{\longrightarrow} u \text{ и } Lu_j \underset{p}{\longrightarrow} L_{(p)}u \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Следовательно $u \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Таким образом, мы доказали включение

$$R\left(F_{(p)}\right) \subset D\left(L_{(p)}\right). \tag{1.2.28}$$

Обратное включение следует из равенства

$$L_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E+\mathcal{J}), \tag{1.2.29}$$

где $\mathcal{J} \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathcal{J}\|_p < 1$. Действительно, если $w \in D\left(L_{(p)}\right)$ и $v = L_{(p)}w$, то из (1.2.29) следует, что

$$w = L_{(p)}^{-1}v = F_{(p)}(E+\mathcal{J})v,$$

то есть $w \in R\left(F_{(p)}\right)$. Включение

$$D\left(L_{(p)}\right) \subset R\left(F_{(p)}\right) \tag{1.2.30}$$

доказано.

Из (1.2.28) и (1.2.30) следует (1.2.27).

Лемма 1.2.1 доказана.

Далее докажем вложение (1.2.22). Пусть $u \in W'_{p;\,L}(\Omega)$. Тогда $u \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ и конечна следующая норма

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx + \sum_{|k| \le 2r} \int\limits_{\Omega} \left| a_k(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Выберем точки $x^{(m,\,k)} \in \operatorname{supp} \psi_m,\ |k| \le 2r,\ m = 1,\, 2,\, \ldots,$ которые имеются в определении вспомогательного дифференциального выражения $G(x,\, D_x)$ (см. (1.2.26)), таким образом, чтобы для почти всех $x \in \operatorname{supp} \psi_m$ выполнялось неравенство

$$\left| a_k\left(x^{(m,\,k)}\right) \right| \le 2\, |a_k(x)|\,.$$

Тогда учитывая конечность покрытия $\{\operatorname{supp} \psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ области Ω (см. пункт 2) леммы 1.1.1), имеем

$$\sum_{|k| \le 2r} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \left| a_k\left(x^{(m,\,k)}\right) \psi_m^2(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right) \le$$

$$\le 2^p \sum_{|k| \le 2r} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \left| a_k\left(x\right) \psi_m^2(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right) \le$$

$$\le 2^p \Lambda(n,\, \lambda) \sum_{|k| \le 2r} \int\limits_{\Omega} \left| a_k\left(x\right) D_x^k u(x) \right|^p dx \le$$

$$\le 2^p \Lambda(n,\, \lambda)\, \|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| < +\infty.$$

Следовательно, условие (1.2.24) выполняется и по лемме 1.2.1 $u \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Вложение (1.2.22) доказано.

Пусть выполнено условие гладкости (1.2.23). Тогда для любой функции $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ по формуле (1.2.4) можно определить обобщенную функцию $a_k\,(x)\,D_x^k u(x)$. Следовательно, можно определить и пространства $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. Заметим, что норма в пространствах $\overset{0}{W}_{p,\,L}\,(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$ определяется одним и тем же равенством (1.2.2). Поэтому с помощью рассуждений аналогичных доказательству вложения (1.2.22) можно показать, что для любой функции $u \in W_{p,\,L}(\Omega)$ выполняется условие (1.2.24), и следовательно $u \in D\left(L_{(p)}\right)$, то есть имеет место вложение

$$W_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right). \tag{1.2.31}$$

Так как $\overset{0}{W}_{p,\,L}\,(\Omega) \subset W_{p,\,L}(\Omega)$ и по теореме 1.2.1 $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}\,(\Omega)$, то из (1.2.31) следует, что

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}\,(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega).$$

Равенство

$$\overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}\,(\Omega) = D\left(L_{(p)}\right)$$

непосредственно следует из определения оператора $L_{(p)}$ и пространства $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}\,(\Omega)$.

Теорема 1.2.1 доказана.

1.3 О разделимости дифференциального оператора высокого порядка в лебеговом пространстве

Пусть область $\Omega \subset R_n$ и дифференциальное выражение (см. (1.1.1)) $L(x,\,D_x)$ такие же как в предыдущих параграфах. Пусть также $\overset{0}{W}_{p,\,L}\,(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ – функциональные пространства, введенные в §1.2.

Согласно определению класса (см. §1.1) $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$ символ

$$L(x,s) = \sum_{|k|\leq 2r} a_k(x)s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

принадлежит классу $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, если выполняются следующие условия:

(I) $\inf\limits_{x\in\Omega, s\in R_n} |L(x,s)| = \delta \neq 0;$

(II) $|a_k(x)s^{k'}| \leq \tau g_1^{-k''_1}(x) g_2^{-k''_2}(x) \dots g_n^{-k''_n}(x) |L(x,s)|$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n,\ k = k' + k'',\ k'' \neq 0,\ |k| \leq 2r;$

(III) $\sum\limits_{|k|\leq 2r} \left| \left(a_k(x) - a_k(y)\right) s^k \right| \leq \tau |L(x,s)|$

для всех $x \in R_n$ и всех $x, y \in \Omega$ таких, что $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2 \dots, n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, ε_0 – положительное число из условии (A) (см. §1.1).

Далее будем писать $L(x,s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, если $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$,

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty, loc}(\Omega) \ (|l| \leq |k| \leq 2r),$$

и выполняется одно из следующих условий:

(IVa) $L(x,\, D_x)$ – симметрическое дифференциальное выражение;

(IVб) $\sum\limits_{\substack{l+k'+k''=k, \\ k''\neq 0,\, |k|\leq 2r}} \left| \left(D_x^l a_k(x)\right) g_1^{k''_1}(x) g_2^{k''_2}(x) \dots g_n^{k''_n}(x) s^{k'} \right| \leq \tau |L(x,\, s)|$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n$.

Заметим, что в §1.2 символом $\mathscr{K}$ мы обозначили множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, а через $O_{\mathscr{K}}$ обозначили множество всех функций $u(x) \in L_{1, loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л.Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$.

Определение 1.3.1. Дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\leq 2r} a_k(x) D_x^k, \quad x \in \Omega,$$

называется L_p-*разделимым*, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что

$$u(x) \in L_p(\Omega), \;\; L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega),$$

имеет место включение

$$a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$$

для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $1 < p < +\infty$ *и существует число* $K > 0$ *такое, что*

$$\sum_{|k| \le 2r} \left| a_k(x) s^k \right| \le K \left| L(x,\, s) \right|$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. *Тогда найдется число* $t_0 = t_0(r,\, n,\, p,\, K) > 0$ *такое, что если*

$$L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega), \quad 0 < \tau < t_0,$$

то дифференциальное выражение $L(x,\, D_x)$ L_p*-разделимо. При этом*

$$\overset{0}{W}_{p,\,L} (\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega) \tag{1.3.1}$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

Доказательство. Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1.3.1. *Пусть символ*

$$A(x, s) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

принадлежит классу $B(\tau_1, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau_1 \in (0,\, 1)$, *и пусть коэффициенты* $b_k(x)$ *символа*

$$A_0(x,\, s) = \sum_{|k| \le 2r} b_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\le 2r}} \left| b_k(x) s^{k'} g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \dots g_n^{k_n''}(x) \right| \le \tau_2 |A(x,\, s)|, \tau_2 \in (0,\, 1/2), \quad (1.3.2)$$

для всех $x \in \Omega,\, s \in R^n$.

Тогда символ

$$A_1(x,\, s) = A(x,\, s) + A_0(x,\, s) \qquad (1.3.3)$$

принадлежит классу $B(\tau_3, \overrightarrow{g}, \Omega)$*, где* $\tau_3 \ge 2\tau_1 + 6\tau_2$.

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{b}_k(x)$ коэффициенты символа $A_1(x,\, s)$ (см. (1.3.3)), то есть

$$\widetilde{b}_k(x) = a_k(x) + b_k(x),\ x \in \Omega,\ |k| \le 2r. \qquad (1.3.4)$$

Условие леммы $A(x,\, s) \in B(\tau_1, \overrightarrow{g}, \Omega)$ означает следующее:

(a) $\inf\limits_{x\in\Omega, s\in R_n} |A(x,\, s)| = \delta \ne 0;$

(b) $|a_k(x) s^{k'}| \le \tau_1 g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x) \dots g_n^{-k_n''}(x) |A(x,\, s)|$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k''$, $k'' \ne 0$, $|k| \le 2r$;

(c) $\sum\limits_{|k|\le 2r} \left| (a_k(x) - a_k(y))\, s^k \right| \le \tau_1 |A(x,\, s)|$

для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \Omega$ таких, что

$$|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x),\ j = 1, 2 \dots, n,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \qquad (1.3.5)$$

Для того чтобы доказать принадлежность символа $A_1(x,\, s)$ классу $B(\tau_3, \overrightarrow{g}, \Omega)$ докажем, что:

(a^0) $\inf\limits_{x\in\Omega, s\in R_n} |A_1(x,\, s)| = \delta \ne 0;$

(b^0) $|\widetilde{b}_k(x) s^{k'}| \le \tau_3 g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x) \dots g_n^{-k_n''}(x) |A_1(x,\, s)|$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k''$, $k'' \ne 0$, $|k| \le 2r$;

(c^0) $\sum\limits_{|k|\le 2r}\left|\left(\widetilde{b}_k(x)-\widetilde{b}_k(y)\right)s^k\right|\le \tau_3|A_1(x,\,s)|$

для всех $s\in R_n$ и всех $x,y\in\Omega$, удовлетворяющих условию (1.3.5).

Из условии (1.3.2), в частности, следует, что (при $k''=0$)

$$\sum_{|k|\le 2r}|b_k(x)s^k|\le \tau_2|A(x,\,s)|. \tag{1.3.6}$$

Следовательно, $|A_0(x,\,s)|\le\tau_2|A(x,\,s)|$ и поэтому

$$|A_1(x,\,s)|\ge|A(x,\,s)|-|A_0(x,\,s)|\ge(1-\tau_2)\,|A(x,\,s)|\,. \tag{1.3.7}$$

Отсюда в силу условии (a) следует условие (a^0).

Проверим выполнение условия (b^0). Используя (1.3.2), (1.3.4), (1.3.7) и условие (b) имеем

$$\begin{aligned}
&|\widetilde{b}_k(x)g_1^{k_1''}(x)g_2^{k_2''}(x)\dots g_n^{k_n''}(x)s^{k'}|\le\\
&\quad\le|a_k(x)g_1^{k_1''}(x)g_2^{k_2''}(x)\dots g_n^{k_n''}(x)s^{k'}|+|b_k(x)g_1^{k_1''}(x)g_2^{k_2''}(x)\dots g_n^{k_n''}(x)s^{k'}|\le\\
&\qquad\le\tau_1|A(x,\,s)|+\tau_2|A(x,\,s)|\le\frac{\tau_1+\tau_2}{1-\tau_2}\,|A_1(x,\,s)|\,.
\end{aligned}$$

Так как $\tau_2\in(0,\,1/2)$ и $2\tau_1+2\tau_2\le\tau_3$, то отсюда следует, что условие (b^0) выполняется.

Далее будем считать, что $x,\,y\in\Omega$ удовлетворяют условиям (1.3.5). Используя (1.3.4), (1.3.6) и условию (c), получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{|k|\le 2r}\left|\left(\widetilde{b}_k(x)-\widetilde{b}_k(y)\right)s^k\right|\le\\
&\quad\le\sum_{|k|\le 2r}\left|(a_k(x)-a_k(y))\,s^k\right|+\sum_{|k|\le 2r}\left|b_k(x)s^k\right|+\left|b_k(y)s^k\right|\le\\
&\qquad\le\tau_1|A(x,\,s)|+\tau_2|A(x,\,s)|+\tau_2|A(y,\,s)|.
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

В силу условии (c) имеем

$$\begin{aligned}
&|A(y,\,s)|-|A(x,\,s)|\le|A(x,\,s)-A(y,\,s)|=\\
&\quad=\left|\sum_{|k|\le 2r}(a_k(x)-a_k(y))\,s^k\right|\le\tau_1|A(x,\,s)|.
\end{aligned}$$

Следовательно, $|A(y,\, s)| \le (1+\tau_1)|A(x,\, s)|$ и из неравенство (1.3.8) следует, что

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| \left(\widetilde{b}_k(x) - \widetilde{b}_k(y) \right) s^k \right| \le$$

$$\le [(1+\tau_1)\tau_2 + \tau_1 + \tau_2]\, |A(x,\, s)| \le \frac{2\tau_2 + \tau_1 + \tau_1\tau_2}{1-\tau_2} \, |A_1(x,\, s)| \,. \quad (1.3.9)$$

Здесь мы также воспользовались неравенством (1.3.7). Так как $\tau_2 \in (0,\, 1/2)$ и $\tau_3 \ge 2\tau_1 + 6\tau_2$, то из (1.3.9) следует, что условие (c^0) выполняется.

Лемма 1.3.1 доказана.

Обозначим через $L'(x,\, s)$ символ дифференциального выражения $L'(x,\, D_x)$, сопряженное к дифференциальному выражению $L(x,\, D_x)$.

Лемма 1.3.2. *Существует число $\mu \in (0,\, 1/4)$, зависящее только от r и n, такое, что если $L(x,s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau \in (0,\, \mu)$, то $L'(x,s) \in B\left(\frac{8\tau}{\mu}, \overrightarrow{g}, \Omega\right)$. Если при этом выполняется неравенство*

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| a_k(x) s^k \right| \le \varkappa \, |L(x,\, s)| \quad (x \in \Omega,\, s \in R^n)\,,$$

то

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| a'_k(x) s^k \right| \le K' \, |L'(x,\, s)| \quad (x \in \Omega,\, s \in R^n)\,, \qquad (1.3.10)$$

где $\varkappa' = 4K + 3$ и $a'_k(x)$ – коэффициенты символа $L'(x,\, s)$.

Доказательство. Если выполняется условие (IVa), то есть когда $L(x,\, D_x)$ – симметричное дифференциальное выражение, то $L'(x,\, s) = L(x,\, s)$ и утверждение леммы очевидно. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $L(x,\, D_x)$ – несимметричное дифференциальное выражение и выполняется условие (IVб).

Для всех $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$(L(x,\, D_x)u,\, v) = (u,\, L'(x,\, D_x)v)\,,$$

где $(\cdot,\, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

С другой стороны, интегрируя по частям, получим

$$(L(x,\, D_x)u,\, v) = \int\limits_{\Omega} (L(x,\, D_x)u)(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{|k|\le 2r} \int\limits_{\Omega} a_k(x) D_x^k u(x)\overline{v(x)}dx =$$

$$= \sum_{|k|\le 2r} (-1)^{|k|} \int\limits_{\Omega} u(x) D_x^k \left(a_k(x)\overline{v(x)} \right) dx = \sum_{|k|\le 2r} \overline{D_x^k \left(\overline{a_k(x)} v(x) \right)} dx.$$

Поэтому

$$L'(x,\, D_x)v = \sum_{|k|\le 2r} D_x^k \left(\overline{a_k(x)} v(x) \right).$$

Напомним, что

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}.$$

Далее, используя формулу Лейбница, представим дифференциальное выражение $L'(x,\, D_x)$ в виде

$$L'(x,\, D_x) = \sum_{\substack{|k|\le 2r,\\ k=k'+k''}} C_{k',\,k''} D_x^{k'} \left(\overline{a_k(x)} \right) D_x^{k''}.$$

Следовательно

$$L'(x,\, s) = \overline{L(x,\, s)} + A_2(x,\, s), \tag{1.3.11}$$

где

$$A_2(x,\, s) = \sum_{\substack{|k|\le 2r,\\ k=k'+k'',\, k'\ne 0}} C_{k',\,k''} D_x^{k'} \left(\overline{a_k(x)} \right) s^{k''}.$$

Символ $A_2(x,\, s)$ представим в виде

$$A_2(x,\, s) = \sum_{|k|\le 2r} \widetilde{b}_k(x) s^k,$$

где

$$\widetilde{b}_k(x) = \sum C_{l,\,l'} D_x^l \left(\overline{a_{l'}(x)} \right),$$

а суммирование берется по всем мультииндексам $l,\, l'$ таким, что $k + l = l',\, l \ne 0$.

Условие (1.3.2) для символа $A_2(x,\, s)$ имеет вид

$$\sum_{\substack{|k|\le 2r,\\ k=k'+k''}} \left| \widetilde{b}_k(x) s^{k'} g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) \right| \le \tau_2 |A_2(x,\, s)| \qquad (1.3.12)$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R^n$. Если выполняется это условие, то можно применить лемму 1.3.1.

Используя условие (IVб) имеем

$$\sum_{\substack{|k|\le 2r,\\ k=k'+k''}} \left| \widetilde{b}_k(x) s^{k'} g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{\substack{|k|\le 2r,\\ k=k'+k''}} \sum_{\substack{k+l=l',\\ l\ne 0}} C_{l,\,l'} \left| D_x^l \left(\overline{a_{l'}(x)} \right) s^{k'} g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) \right| =$$

$$= \sum_{\substack{k'+k''+l=l',\\ |l'|\le 2r,\, l\ne 0}} C_{l,\,l'} \left| D_x^l \left(\overline{a_{l'}(x)} \right) s^{k'} g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) \right| \le$$

$$\le \tau c^*_{r,\,n} |L(x,\, s)|, \quad (1.3.13)$$

где $c^*_{r,\,n}$ – некоторое положительное число. Следовательно, при $\tau_2 = \tau c^*_{r,\,n}$ выполняется условие (1.3.12).

Определим число μ из равенства $(4\mu)^{-1} = 1 + c^*_{r,\,n}$. Тогда, естественно, $0 < \mu < 1/4$.

Теперь, равенство (1.3.11) и неравенство (1.3.12) позволяют нам применить лемму 1.3.1 при $A_1(x,\, s) = L'(x,\, s)$, $A(x,\, s) = \overline{L(x,\, s)}$, $A_0(x,\, s) = A_2(x,\, s)$. В результате находим

$$L'(x,\, s) \in B(\tau_3, \overrightarrow{g}, \Omega)$$

при $\tau_3 \ge 2\tau_1 + 6\tau_2 = 2\tau + 6\tau c^*_{r,\,n}$. Выражая значение $c^*_{r,\,n}$ через μ, получаем

$$\tau_3 = \left(\frac{3}{2\mu} - 4 \right) \tau.$$

В частности, можно взять $\tau_3 = 2\tau/\mu$. Поэтому

$$L'(x, s) \in B\left(\frac{2\tau}{\mu}, \overrightarrow{g}, \Omega \right).$$

Из неравенства (1.3.13), в частности, следует, что

$$\sum_{|k|\leq 2r}\left|\widetilde{b}_k(x)s^k\right| \leq \tau c^*_{r,\,n}|L(x,\,s)|.$$

Поэтому (см. (1.3.11))

$$|L'(x,\,s)| \geq |L(x,\,s)| - |A_2(x,\,s)| \geq \frac{1}{4}|L(x,\,s)|.$$

Теперь, используя полученные неравенства, имеем

$$\sum_{|k|\leq 2r}\left|a'_k(x)s^k\right| \leq \sum_{|k|\leq 2r}\left|a_k(x)s^k\right| + \sum_{|k|\leq 2r}\left|\widetilde{b}_k(x)s^k\right| \leq$$

$$\leq K\,|L(x,\,s)| + \frac{3}{4}|L(x,\,s)| \leq (4K+3)|L'(x,\,s)|.$$

Неравенство (1.3.10) доказано, что и завершает доказательство леммы 1.3.2.

Далее докажем, что в условиях теоремы 1.3.1 имеет место равенство

$$\ker\left(L'_{(q)}\right)^* = 0. \tag{1.3.14}$$

Сначала рассмотрим случай, когда выполняется условие (IVa). В этом случае $L(x,\,D_x)$ – симметричное дифференциальное выражение, то есть $L'(x,\,D_x) = L(x,\,D_x)$. Поэтому к оператору $L' = L'(x,\,D_x)$, $\quad D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, можно применить теорему 1.1.1. Тогда (см. (1.1.64), (1.1.68))

$$\ker\left(L'_{(q)}\right) = 0, \quad R\left(L'_{(q)}\right) = L_q(\Omega).$$

Так как $R\left(L'_{(q)}\right) \oplus \ker\left(L'_{(q)}\right)^* = L_q(\Omega)$, то отсюда следует (1.3.14).

Теперь рассмотрим случай, когда выполняется условие (IVб). В этом случае подбираем число $t_0 = t_0(r,\,n,\,p,\,K) > 0$ следующим образом

$$t_0 = \frac{\mu}{8}\,\min\left\{t_4^*(r,\,n,\,p,\,K),\,\tau_0(r,\,n,\,p,\,K)\right\},$$

где число $\mu > 0$ – такое же как в лемме 1.3.2, $t_4^* = t_4^*(r,\,n,\,p,\,K)$ – положительное число, определенное в лемме 1.1.10, $\tau_0(r,\,n,\,p,\,K)$ – положительное число, определенное в теореме 1.2.1. Тогда при $\tau \in (0,\,t_0)$

$L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$ и в силу леммы 1.3.2 имеем $L'(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$. Поэтому к оператору $L' = L'(x, D_x), \quad D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, заданному в пространстве $L_q(\Omega)$, можно применить теорему 1.1.1. Поэтому (см. (1.1.68)) $R\left(L'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)$ и следовательно $\ker\left(L'_{(q)}\right)^* = 0$. Равенство (1.3.14) доказано в случае выполнения условии (IVб).

Так как $\tau < t_4^*(r, n, p, K)$, то к оператору $L = L(x, D_x), \quad D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, заданному в пространстве $L_p(\Omega)$, можно применить теорему 1.1.1. Поэтому (см. (1.1.68)) $R\left(L_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Отсюда и из (1.3.14) в силу пункта (в) леммы 1.1.4 следует равенство

$$\left(L'_{(q)}\right)^* = L_{(p)}. \tag{1.3.15}$$

Теперь из утверждения пункта (г) леммы 1.1.4 следует, что $u(x) \in D\left(\left(L'_{(q)}\right)^*\right) = D\left(L_{(p)}\right)$ тогда и только тогда, когда $u(x) \in L_p(\Omega)$ и обобщенная функция

$$\left(L(x,\, D_x)u\right)(x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k u(x)$$

принадлежит пространству $L_p(\Omega)$, то есть

$$D\left(L_{(p)}\right) = \left\{u(x);\, u \in L_p(\Omega),\ L(x,\, D_x)u \in L_p(\Omega)\right\}.$$

Следовательно,

$$D\left(L_{(p)}\right) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega). \tag{1.3.16}$$

Далее, применяя теоремы 1.2.1 и 1.2.2, имеем

$$D\left(L_{(p)}\right) = W_{p,\,L}(\Omega) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega). \tag{1.3.17}$$

Следовательно

$$D\left(L_{(p)}\right) = W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega). \tag{1.3.18}$$

Равенство (1.3.1) теоремы 1.3.1 следует из (1.3.16), (1.3.17).

Далее покажем, что из (1.3.18) следует разделимость дифференциального выражения $L(x,\, D_x)$ (см. определение 1.3.1). Пусть функция $u(x) \in$

$L_p(\Omega)$ такая, что $L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Тогда из определения функционального пространства (см. (1.2.5)) $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ следует, что $u(x) \in \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. Так как $W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$, то $u(x) \in W_{p,\,L}(\Omega)$, то есть

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx + \sum_{|k|\le 2r} \int\limits_{\Omega} \left| a_k(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Следовательно,

$$a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$$

для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Разделимость дифференциального выражения $L(x,\, D_x)$ доказана, что и завершает доказательство теоремы 1.3.1

Глава 2

О разделимости с весом одного класса дифференциальных операторов

2.1 Формулировка основных результатов

В этой главе исследуется L_p-разделимость с весом $\omega(x)$ одного класса дифференциальных операторов высокого порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области Ω в n - мерном евклидовом пространстве R_n. Также как в первой главе диссертационной работы предполагается, что область Ω и положительные функции $g_j(x)$ $(j = \overline{1,n}$, $x \in \Omega)$, с помощью которых определяются вырождения коэффициентов дифференциального выражения по независимым переменным x_j $(j = \overline{1,n})$, связаны следующим условием погружения:

(**A**). существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и всех $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω.

Напомним, что

$$\Pi(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n : |x_j| < \frac{1}{2}, j = \overline{1,n} \right\}$$

– единичный куб с центром в начале системы координат,

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \left\{ x \in R_n : \left(\frac{x_1 - \xi_1}{t_1}, \frac{x_2 - \xi_2}{t_2}, \ldots, \frac{x_n - \xi_n}{t_n} \right) \in \Pi(0) \right\}$$

и

$$\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)=\Pi_{\varepsilon\overrightarrow{g}(\xi)}(\xi),$$

где $\varepsilon>0$ и $\overrightarrow{g}(\xi)=(g_1(\xi),g_2(\xi),\dots,g_n(\xi))$.

Также как в первой главе символом $B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, где τ – положительное число, обозначим класс символов

$$L(x,s)=\sum_{|k|\le 2r}a_k(x)s^k\quad (x\in\Omega, s\in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x\in\Omega,s\in R_n}|L(x,s)|=\delta\ne 0;$

(II) $|a_k(x)s^{k'}|\le\tau g_1^{-k''_1}(x)g_2^{-k''_2}(x)\dots g_n^{-k''_n}(x)|L(x,s)|$

для всех $x\in\Omega,\ s\in R_n,\ k=k'+k'',\ k''\ne 0,\ |k|\le 2r;$

(III) $\sum\limits_{|k|\le 2r}\left|(a_k(x)-a_k(y))\,s^k\right|\le\tau|L(x,s)|$

для всех $s\in R_n$ и всех $x,y\in\Omega$ таких, что $|x_j-y_j|<\varepsilon^2 g_j(x)$, $j=1,2\dots,n,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Далее будем писать $L(x,s)\in\mathbb{B}(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, если $L(x,s)\in B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$,

$$D_x^l a_k(x)\in L_{\infty,loc}(\Omega)\ (|l|\le|k|\le 2r),\qquad (2.1.1)$$

и выполняется одно из следующих условий:

(IVa) $L(x,\,D_x)$ – симметрическое дифференциальное выражение;

(IVб) $\sum\limits_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\ne 0,\,|k|\le 2r}}\left|\left(D_x^l a_k(x)\right)g_1^{k''_1}(x)g_2^{k''_2}(x)\dots g_n^{k''_n}(x)s^{k'}\right|\le\tau|L(x,\,s)|$

для всех $x\in\Omega,\ s\in R_n$.

Так же как в §1.2 символом $\mathscr{K}$ обозначим множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x)\not\equiv 0$, а через $O_{\mathscr{K}}$ обозначим множество всех функций $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л.Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$.

Определение 2.1.1. Пусть $\omega(x)$ – положительная измеримая в Ω функция, $1 < p < +\infty$. Дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.2}$$

называется *L_p-разделимым с весом* $\omega(x)$, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что

$$\omega(x)u(x) \in L_p(\Omega),\ \ \omega(x)L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$$

имеет место включение

$$\omega(x)a_k(x)D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$$

для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Теорема 2.1.1. *Пусть существуют числа $\lambda > 1$, $\nu > 1$ такие, что*

$$\nu^{-1} \le \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \le \nu, \quad \lambda^{-1} \le \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \le \lambda,\ \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1.3}$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\le 2r} |a_k(x)s^k| \le \varkappa |L(x,s)| \tag{2.1.4}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. Тогда найдется число $\tau_* = \tau_*(r,\, n,\, p,\, \varkappa,\, \lambda,\, \nu) > 0$ такое, что если

$$L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega),\ \tau \in (0,\, \tau_*),$$

то дифференциальное выражение $L(x,\, D_x)$ L_p-разделимо с весом $\omega(x)$.

Доказательство теоремы 2.1.1 основано на применении сформулированной ниже теоремы 2.1.2 об относительной ограниченности дифференциальных операторов, которая имеет также и самостоятельный интерес.

Наряду с дифференциальным выражением (2.1.2) рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathbb{L}(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} b_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega)$$

с непрерывными коэффициентами $b_k(x)(x \in \Omega,\ |k| \le 2r)$, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\le 2r}} \left| b_k(x) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \le \mathbb{N} |L(x,\ s)| \tag{2.1.5}$$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n$; $\mathbb{N}$ - некоторая положительная постоянная.

Теорема 2.1.2. *Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что*

$$\lambda^{-1} \le \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \le \lambda,\ j = 1, 2, \dots, n, \tag{2.1.6}$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa > 0$ выполняется неравенство (2.1.4) Пусть также выполняется неравенство (2.1.5). Тогда найдется число $t_* = t_*(r,\ n,\ p,\ \varkappa,\ \delta) > 0$, $1 < p < +\infty$, такое, что если $L(x,\ s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < \tau_0^*$, то для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k| \le 2r} \left\| b_k(x) D_x^k u(x);\ L_p(\Omega) \right\| \le \mathbb{M} \left\| L(x,\ D_x) u(x);\ L_p(\Omega) \right\|, \tag{2.1.7}$$

где $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r,\ n,\ p,\ \varkappa,\ \mathbb{N})$ – некоторая положительная постоянная. Если же $L(x,\ s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < \tau_0^*$, то неравенство (2.1.7) имеет место также для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x,\ D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$.

Доказательство этой теоремы приведено в §2.2. В §2.3 доказываются некоторые вспомогательные леммы, а в §2.4 приведено доказательство теоремы 2.1.1.

2.2 Доказательство теоремы 2.1.2

Пусть $L(x,\, s) \in B(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega)$ и $0 < \tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(n,\, r,\, p,\, \varkappa)$ – такое же положительное число, как в теореме 1.1.1. Тогда согласно этой теореме замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^{\infty}(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет место равенство (см. (1.1.66))

$$L_{(p)} F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}, \tag{2.2.1}$$

где $\Gamma_{(p)}$ – замыкание в $L_p(\Omega)$ некоторого оператора $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ такого, что $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$, и при этом $D(\Gamma_{(p)}) = L_p(\Omega)$. Напомним, что (см. (1.1.8)) $F_{(p)}$ – замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m,\ D(F) = C_0^{\infty}(\Omega),$$

где Φ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$ и

$$L_m(s) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x^{(m,k)}) s^k \ \ (s \in R_n),$$

$\{x^{(m,k)}, |k| \leq 2r\}$ – некоторые фиксированные точки из $\operatorname{supp} \psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Далее, поступая также как в доказательстве теоремы 1.2.1, докажем неравенство

$$\left\| b_k D^k F \right\|_p \leq C_{1,p} < +\infty,\ |k| \leq 2r. \tag{2.2.2}$$

Используя равенство

$$b_k D^k F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k D^k \Phi_m \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[b_k D^k,\, \psi_m \right] \Phi_m \psi_m,$$

где символ $[\cdot,\, \cdot]$ обозначает коммутатор $[T_1,\, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$, представим оператор $b_k D^k F$ в виде

$$b_k D^k F = \mathbb{F}_*^{(k)} + \mathbb{F}_{**}^{(k)}, \tag{2.2.3}$$

где

$$\mathbb{F}_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k \Phi_m^{(k)} \psi_m, \ \mathbb{F}_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[b_k D^k, \, \psi_m \right] \Phi_m \psi_m,$$

$\Phi_m^{(k)}$ - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L_m^{-1}(s)$.

Далее оценим норму оператора $\mathbb{F}_*^{(k)}$. Для этого представим оператор $\mathbb{F}_*^{(k)}$ в виде

$$\mathbb{F}_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \left(b_k(x) - b_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m.$$

Применяя лемму 1.1.2, получаем

$$\left\| \mathbb{F}_*^{(k)} \right\|_p \le M_1 \left(\mathbb{C}_{1,\,k} + \mathbb{C}_{2,\,k} \right), \tag{2.2.4}$$

где

$$\mathbb{C}_{1,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \left\| \psi_m \left(b_k(x) - b_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p,$$

$$\mathbb{C}_{2,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \left\| \psi_m b_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p.$$

Применяя лемму 1.1.2, имеем

$$\left\| \psi_m \left(b_k(x) - b_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p \le M_{11} \sup \left| \left(b_k(x) - b_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \right) s^k L_m^{-1}(s) \right|.$$

В этих неравенствах верхняя грань берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, $s \in R_n$. Отсюда в силу непрерывности коэффициентов $b_k(x)$, $|k| \le 2r$, и условие (2.1.5) следует, что

$$\left\| \psi_m \left(b_k(x) - b_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p \le \mathbb{M}_1, \tag{2.2.5}$$

где $\mathbb{M}_1$ – некоторое конечное положительное число.

Из условие (2.1.5), в частности, следует, что

$$\left| b_k(x) s^k \right| \le \mathbb{N} |L(x,\, s)|, \ |k| \le 2r,$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. Следовательно

$$\left| b_k(x^{(m,k)}) s^k \right| \le \mathbb{N} |L(x^{(m,k)},\, s)|, \ |k| \le 2r, \ m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,$$

для всех $s \in R_n$. Так как (см. (1.2.13))

$$\left|L\left(x^{(m,\,k)},s\right)\right| \le 2|L_m(s)| \le 3\left|L\left(x^{(m,\,k)},s\right)\right|, \quad s \in R_n,\, m=1,2,3,\ldots,$$

то

$$\left|b_k(x^{(m,k)})s^k L_m^{-1}(s)\right| \le 2\mathbb{N},\ |k| \le 2r,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2.2.6}$$

для всех $s \in R_n$.

Далее отметим, что в силу леммы 1.1.3 для нормы псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k)}$ имеет место следующее неравенство

$$\left\|\Phi_m^{(k)}\right\|_p \le M_p \sup_{s\in R_n}\left|s^k L_m^{-1}(s)\right|.$$

Отсюда и из (2.2.6) следует, что

$$\left\|\psi_m b_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\Phi_m^{(k)}\psi_m\right\|_p \le 2\mathbb{N} \tag{2.2.7}$$

для всех $|k| \le 2r$, $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

В силу полученных неравенств (2.2.5), (2.2.7) из (2.2.4) получим следующее неравенство для нормы оператора $\mathbb{F}_*^{(k)}$

$$\left\|\mathbb{F}_*^{(k)}\right\|_p \le M_{1,\,p}\left(\mathbb{M}_1 + 2\mathbb{N}\right). \tag{2.2.8}$$

Теперь переходим к оценке нормы оператора

$$\mathbb{F}_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty}\left[b_k D^k,\ \psi_m\right]\Phi_m\psi_m.$$

Так как

$$\left[b_k D^k,\ \psi_m\right] = b_k(x)D^k\left(\psi_m(x)\right) - \psi_m(x)b_k(x)D^k,$$

то имеет место представление

$$\mathbb{F}_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k'\ne 0}} C(k',\ k'')b_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m,$$

где $C(k',\ k'')$ – постоянные числа, $\psi_m^{(k')}(x) = D_x^{k'}\psi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k'')}$ - псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''}L_m^{-1}(s)$. Отсюда, в силу леммы 1.1.2, следует, что

$$\left\|\mathbb{F}_{**}^{(k)}\right\|_p \le \Lambda^{1/p}(n,\,\lambda) \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k'\neq 0}} \mathbb{C}_{(k',\,k'')}^{(k)}, \tag{2.2.9}$$

где

$$\mathbb{C}_{(k',\,k'')}^{(k)} = \sup_{1,2,\dots} \left\| b_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m \right\|_p. \tag{2.2.10}$$

В силу леммы 1.1.3 имеем

$$\left\| b_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m \right\|_p \le \sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left| \psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s) \right|.$$

Далее отметим, что (см. (1.1.15))

$$|L(x,s)| \le 2|L_m(s)| \le 3|L(x,s)| \quad (s\in R_n,\ x\in \operatorname{supp}\,\psi_m,\ m=1,2,3,\dots)$$

и определенные в лемме 1.1.1 неотрицательные функции $\psi_m(x)$ бесконечно дифференцируемы и для их производных выполняется неравенство

$$\left|\psi_m^{(k')}(x)\right| \le M_{k'} g_1^{-k'_1}(x) g_2^{-k'_2}(x)\dots g_n^{-k'_n}(x)$$

для всех $x\in\Omega$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left| \psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s) \right| \le \\
&\quad \le M_{21} \sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left| b_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x)\dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L_m^{-1}(s) \right| \le \\
&\qquad \le M_{22} \sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left| b_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x)\dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L^{-1}(x,\,s) \right|.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу условии (2.1.5) следует, что

$$\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left| \psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s) \right| \le M_{22}\mathbb{N} < +\infty.$$

Таким образом (см. (2.2.9), (2.2.10)), существует конечное положительное число $\mathbb{M}_{2,\,p}$, $1<p<+\infty$ такое, что

$$\left\|\mathbb{F}_{**}^{(k)}\right\|_p \le \mathbb{M}_{2,\,p} \tag{2.2.11}$$

для всех мультииндексов $k: |k| \leq 2r$.

В силу представления (2.2.3) из (2.2.8), (2.2.11) следует неравенство (2.2.2).

Пусть $u(x)$ – произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда существует функция $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $Fv = u$. Используя равенство (2.2.1) имеем

$$Lu = LFv = (E + \Gamma)v.$$

Так как $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$, то отсюда следует, что

$$v = (E + \Gamma)^{-1} Lu.$$

Отсюда и из неравенства (2.2.2) имеем

$$\begin{aligned} \left\|b_k D^k u;\, L_p(\Omega)\right\| = \left\|b_k D^k Fv;\, L_p(\Omega)\right\| \leq C_{1,\,p} \left\|v;\, L_p(\Omega)\right\| = \\ = C_{1,\,p} \left\|(E+\Gamma)^{-1} Lu;\, L_p(\Omega)\right\| \leq C_{1,\,p} \left\|(E+\Gamma)^{-1}\right\|_p \left\|Lu;\, L_p(\Omega)\right\|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу ограниченности оператора $(E + \Gamma)^{-1}$ следует, что

$$\left\|b_k D^k u;\, L_p(\Omega)\right\| \leq C_{2,\,p} \left\|Lu;\, L_p(\Omega)\right\| \quad \left(u \in C_0^\infty(\Omega)\right),$$

где $C_{2,\,p}$ – положительная постоянная. Следовательно,

$$\sum_{|k| \leq 2r} \left\|b_k(x) D_x^k u(x);\, L_p(\Omega)\right\| \leq \mathbb{M} \left\|L(x,\, D_x) u(x);\, L_p(\Omega)\right\| \tag{2.2.12}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$, то есть неравенство (2.1.7) в случае $u \in C_0^\infty(\Omega)$ доказано.

Таким образом, первая часть утверждения теоремы 2.1.1 доказана.

Если $L(x,\, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$ и , $\quad 0 < \tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(n,\, r,\, p,\, \varkappa) > 0$ – такое же положительное число, как в теореме 1.1.1, то согласно этой теореме замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует. Пусть $u \in D(L_{(p)})$. Тогда существует последовательность функций $u_1(x),\, u_2(x),\, \ldots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$u_j \underset{p}{\longrightarrow} u, \quad Lu_j \underset{p}{\longrightarrow} L_{(p)} u.$$

Из (2.2.12) следует, что

$$\left\| b_k D^k \left(u_i - u_j\right); \, L_p(\Omega) \right\| \leq C_{2,\, p} \left\| L \left(u_i - u_j\right); \, L_p(\Omega) \right\| . \tag{2.2.13}$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left\| D^k \left(u_i - u_j\right); \, L_p(\Omega_\varepsilon) \right\| \longrightarrow 0 \ (i, j \longrightarrow +\infty), \tag{2.2.14}$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega : \, |b_k(x)| > \varepsilon \right\} .$$

Так как $u_j \underset{p}{\longrightarrow} u$, то из (2.2.14) следует, что в Ω_ε существует обобщенная производная $D_x^k u(x)$ в смысле С.Л. Соболева. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и непрерывности коэффициентов $b_k(x)$, $|k| \leq 2r$, следует, что обобщенная производная $D_x^k u(x)$ в смысле С.Л. Соболева существует в множестве $\Omega_0 = \left\{ x \in \Omega : \, b_k(x) \neq 0 \right\}$. Учитывая это и переходя к пределу $j \longrightarrow +\infty$ в неравенстве (2.2.13) получим

$$\left\| b_k D^k u - b_k D^k u_i ; \, L_p(\Omega_\varepsilon) \right\| \leq C_{2,\, p} \, \left\| L \left(u - u_i\right); \, L_p(\Omega) \right\|$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left\| b_k D^k u - b_k D^k u_i ; \, L_p(\Omega) \right\| \leq C_{2,\, p} \, \left\| L \left(u - u_i\right); \, L_p(\Omega) \right\| .$$

Следовательно, если переходит к пределу $j \longrightarrow +\infty$ в неравенстве

$$\sum_{|k| \leq 2r} \left\| b_k(x) D_x^k u_i(x) ; \, L_p(\Omega) \right\| \leq \mathbb{M} \, \left\| L(x, \, D_x) u_i(x) ; \, L_p(\Omega) \right\| ,$$

то получим неравенство (2.1.7) для всех $u \in D(L_{(p)})$.

Теперь предположим, что $L(x, \, s) \in \mathbb{B}(\tau, \, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < t_0$, где $t_0 = t(r, \, n, \, p \, \varkappa)$ – такое же положительное число, как в теореме 1.3.1. Тогда согласно этой теореме имеет место следующее равенство

$$D(L_{(p)}) = \mathcal{W}_{p,\, L}(\Omega), \tag{2.2.15}$$

где $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ – функциональное пространство, определенное в §1.2, то есть $u(x) \in \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$, если $u(x) \in L_p(\Omega)$ и $L(x,\,D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Норма в пространстве $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ определяется равенством (см. (1.2.5))

$$\|u;\,\mathcal{W}_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} |L(x,\,D_x)u(x)|^p\,dx \right\}^{1/p}.$$

Так как неравенство (2.1.7) доказано для всех $u \in D(L_{(p)})$, то из равенство (2.2.15) следует, что неравенство (2.1.7) имеет место для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x,\,D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$.

Теорема 2.1.2 доказана полностью.

2.3 Вспомогательные леммы

Нетрудно заметить, что если $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ – положительные измеримые в Ω функции и $\omega_1(x) \asymp \omega_2(x)$, то есть $\omega_1(x) \le M\omega_2(x) \le 2M\omega_1(x)$ для всех $x \in \Omega$ (M – положительная постоянная), то L_p-разделимость с весом $\omega_1(x)$ эквивалентна L_p-разделимости с весом $\omega_2(x)$. В условиях теоремы 2.1.1 не требуется дифференцируемость весовой функции $\omega(x)$. Поэтому мы сначала построим достаточно гладкую функцию $h(x)$ эквивалентную с $\omega(x)$ и для доказательства теоремы 2.1.1 докажем L_p-разделимость с весом $h(x)$ дифференциального выражения $L(x,\,D_x)$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\omega(x)$ – измеримая положительная в Ω функция и пусть существует число $\nu > 1$ такое, что (см. (2.1.3))*

$$\nu^{-1} \le \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \le \nu \tag{2.3.1}$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$. Тогда существует положительная функция $h(x) \in C^\infty(\Omega)$ такая, что для всех $x \in \Omega$ и для любого мультииндекса k выполняются неравенства

$$h(x) \le \nu\,\omega(x) \le \nu^2\,h(x), \tag{2.3.2}$$

$$\left|D_x^k h(x)\right| \le M_k \nu^{|k|} h(x) g_1^{k_1}(x) g_2^{k_2}(x) \cdots g_n^{k_n}(x). \tag{2.3.3}$$

Доказательство. Пусть $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ – система функций, построенная в лемме 1.1.1. Положим

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2(x)\omega(x^{(m)}), \tag{2.3.4}$$

где $x^{(m)}$ – некоторая фиксированная точка из $\operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$.

Согласно утверждения п. 4) леммы 1.1.1 для всех $x, y \in$ supp ψ_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется неравенство

$$|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому в силу условии (2.3.1) имеем

$$\nu^{-1} \le \frac{\omega(x)}{\omega(x^{(m)})} \le \nu \tag{2.3.5}$$

для всех $x \in \operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Так как (см. п. 1) леммы 1.1.1)

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \Omega),$$

то используя (2.3.4), (2.3.5) имеем

$$h(x) \le \nu \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2(x)\omega(x) = \nu\omega(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$\omega(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2(x)\omega(x) \le \nu \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2(x)\omega(x^{(m)}) = \nu h(x) \quad (x \in \Omega).$$

Отсюда следует (2.3.2).

Согласно утверждения п. 3) леммы 1.1.1 для любого мультииндекса k существует конечное число $M_k > 0$ такое, что

$$\left|D_x^k \psi_m(x)\right| \le M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \ldots g_n^{-k_n}(x) \quad (x \in \Omega). \tag{2.3.6}$$

Так как покрытие $\{\text{supp }\psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ области Ω имеет конечную кратность $\Lambda(n, \lambda)$, где λ - константа из условия (2.1.6), и $\psi_m(x) \le 1$ $(x \in \Omega, m = 1, 2, 3, \ldots)$, то из (2.3.4), (2.3.6) следует (2.3.3).

Лемма 2.3.1 доказана.

Поступая также как в доказательстве леммы 2.3.1 можно показать, что функция

$$h_*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2(x)\omega^{-1}(x^{(m)}), \tag{2.3.7}$$

где $x^{(m)}$ – некоторая фиксированная точка из $\operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, принадлежит классу $C^{\infty}(\Omega)$ и удовлетворяет неравенствам

$$h_*(x) \le \nu\,\omega^{-1}(x) \le \nu^2\, h_*(x),$$

$$\left|D_x^k h_*(x)\right| \le M_k \nu^{|k|} h_*(x) g_1^{k_1}(x) g_2^{k_2}(x) \cdots g_n^{k_n}(x) \tag{2.3.8}$$

для всех $x \in \Omega$ и для любого мультииндекса k.

Лемма 2.3.2. *Пусть $h(x)$, $h_*(x)$ – определенные выше достаточно гладкие положительные функции и пусть выполняется неравенство (2.1.4). Тогда существует положительное чисто τ_1 такое, что если*

$$L(x,\, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega),\ \tau \in (0,\, \tau_1),$$

то символ $L_\omega(x,\, s)$ оператора[1].

$$L_\omega(\cdot,\, D) = h\, L(\cdot,\, D)\, h_*, \quad D(L_\omega) = C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежит классу $B(\tau\mu_1, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где μ_1 – некоторое положительное число.

Доказательство. Представим оператор $L_\omega(\cdot,\, D)$ в виде

$$L_\omega(x,\, D_x) = h(x) h_*(x) L(x,\, D_x) + \mathbb{L}_\omega(x,\, D_x), \tag{2.3.9}$$

где символ $\mathbb{L}_\omega(x,\, s)$ оператора

$$\mathbb{L}_\omega(x,\, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} b_{\omega,\, k}(x) D_x^k \tag{2.3.10}$$

[1]функции $h(x)$, $h_*(x)$ в правой части этого равенства определены через $\omega(x)$.

имеет вид

$$\mathbb{L}_\omega(x,\, s) = \sum_{\substack{l'+k=l,\\ l'\neq 0,\, |k|\leq 2r}} C_{l,\,l'} a_l(x) h(x) \left(D_x^{l'} h_*(x)\right) s^k.$$

Следовательно,

$$b_{\omega,\,k}(x) = \sum_{\substack{k+l'=l,\\ l'\neq 0}} C_{l,\,l'} a_l(x) h(x) \left(D_x^{l'} h_*(x)\right). \tag{2.3.11}$$

Здесь для заданного мультииндекса k суммирование берется по всем мультииндексам $l,\, l'$ таким, что $l'+k=l,\; l'\neq 0$.

Далее докажем, что

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\leq 2r}} \left| b_{\omega,\,k}(x) s^{k'} g_1^{k''_1}(x) g_2^{k''_2}(x) \ldots g_n^{k''_n}(x) \right| \leq \tau\, \mu_2 |L(x,\, s)| \tag{2.3.12}$$

для всех $x \in \Omega,\; s \in R^n$; μ_2 – некоторая положительная константа.

Согласно (2.3.8) для всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\left| D_x^{l'} h_*(x) \right| \leq M_{l'} \nu^{|l'|} h_*(x) g_1^{l'_1}(x) g_2^{l'_2}(x) \cdots g_n^{l'_n}(x).$$

Отсюда и из (2.3.11) имеем

$$|b_{\omega,\,k}(x)| \leq M_* \sum_{\substack{k+l'=l,\\ l'\neq 0}} |a_l(x)| g_1^{l'_1}(x) g_2^{l'_2}(x) \cdots g_n^{l'_n}(x).$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\leq 2r}} \left| b_{\omega,\,k}(x) s^{k'} g_1^{k''_1}(x) g_2^{k''_2}(x) \ldots g_n^{k''_n}(x) \right| \leq$$

$$\leq M_* \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\leq 2r}} \sum_{\substack{k+l'=l,\\ l'\neq 0}} |a_l(x) s^{k'}| g_1^{l'_1+k''_1}(x) g_2^{l'_2+k''_2}(x) \cdots g_n^{l'_n+k''_n}(x).$$

Так как $k''+l'=l-k'$, то подставляя $l-k'=l''$, имеем

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\leq 2r}} \left| b_{\omega,\,k}(x) s^{k'} g_1^{k''_1}(x) g_2^{k''_2}(x) \ldots g_n^{k''_n}(x) \right| \leq$$

$$\leq M_* \sum_{\substack{k'+l''=l,\\ |l|\leq 2r}} |a_l(x) s^{k'}| g_1^{l''_1}(x) g_2^{l''_2}(x) \cdots g_n^{l''_n}(x).$$

Отсюда, в силу условии (II) из определения класса $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, следует неравенство (2.3.12).

Доказанное выше неравенство (2.3.12) позволяет нам применить лемму 1.3.1. Пусть теперь $L(x,\, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где τ – некоторое число из интервала $(0,\, 1/(2\mu_2))$. Тогда по лемме 1.3.1 из равенства (2.3.9) следует, что символ $L_\omega(x,\, s)$ принадлежит классу $B(\tau_2, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где $\tau_2 \geq 2\tau(1 + 3\mu_2)$ и μ_2 – положительное число из правой части неравенства (2.3.12). Отсюда следует утверждение леммы 2.3.2, если положим $\mu_1 = 2(\nu^2 + 3\mu_2)$. Здесь мы также воспользовались неравенством

$$\frac{1}{\nu^2} \leq h(x)h_*(x) \leq \nu^2 \quad (\forall x \in \Omega). \tag{2.3.13}$$

Лемма 2.3.3. *Пусть $h(x)$, $h_*(x)$ – положительные функции, определенные равенствами (2.3.4), (2.3.7), соответственно, и пусть выполняется неравенство (2.1.4). Тогда существует положительное чисто τ_2 такое, что если $L(x,\, D_x)$ – несимметрическое дифференциальное выражение и*

$$L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega),\ \tau \in (0,\, \tau_2),$$

то символ $L_\omega(x,\, s)$ оператора

$$L_\omega(\cdot,\, D) = h\, L(\cdot,\, D)\, h_*, \quad D(L_h) = C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежит классу $\mathbb{B}(\tau\mu_3, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где μ_3 – некоторое положительное число.

Доказательство. Согласно утверждению леммы 2.3.2 $L_\omega(x,\, s) \in B(\tau\mu_1, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где μ_1 – некоторое положительное число. Поэтому $L_\omega(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau\mu_3, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\mu_3 \geq \mu_1$, если для коэффициентов символа $L_\omega(x,\, s)$ выполняются условия гладкости вида (2.1.1) и имеет место аналог неравенства (IVб) (см. §2.1). В силу равенства (2.3.9) эти условия имеют следующий вид

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\, loc}(\Omega)\ (|l| \leq |k| \leq 2r), \tag{2.3.14}$$

$$D_x^l b_{\omega,\,k}(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l| \le |k| \le 2r), \tag{2.3.15}$$

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\,|k|\le 2r}} \left| \left(D_x^l (h(x)h_*(x)a_k(x))\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x)\dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \le$$

$$\le \tau\mu_3 |L_\omega(x,\,s)|, \tag{2.3.16}$$

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\,|k|\le 2r}} \left| \left(D_x^l b_{\omega,\,k}(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x)\dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \le \tau\mu_3 |L_\omega(x,\,s)| \tag{2.3.17}$$

для всех $x \in \Omega,\ s \in R_n$.

Условие (2.3.14) имеет место, так как по условиям леммы $L(x,\,s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$. Так как $h(x),\, h_*(x)$ – достаточно гладкие функции, то из условие (2.3.14) и равенство (2.3.11) следует (2.3.15).

Заметим, что из доказанного выше неравенства (2.3.12), в частности, следует, что

$$|\mathbb{L}_\omega(x,\,s)| \le \sum_{|k|\le 2r} \left| b_{\omega,\,k}(x) s^k \right| \le \tau\,\mu_2 |L(x,\,s)| \tag{2.3.18}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R^n$; μ_2 – некоторая положительная константа.

Так как (см. (2.3.9))

$$L_\omega(x,\,s) = h(x)h_*(x)L(x,\,s) + \mathbb{L}_\omega(x,\,s),$$

то из неравенство (2.3.18) учитывая (2.3.13), имеем

$$\left(\frac{1}{\nu^2} - \tau\mu_2\right) |L(x,\,s)| \le |L_\omega(x,\,s)| \le \left(\nu^2 + \tau\mu_2\right) |L(x,\,s)|$$

Следовательно, если берем $\tau_2 = 1/(2\nu^2\mu_2)$, то при $\tau \in (0, \tau_2)$ выполняется неравенство

$$|L(x,\,s)| \le 2\nu^2 |L_\omega(x,\,s)| \quad (x \in \Omega,\ s \in R_n). \tag{2.3.19}$$

Согласно определении класса $\mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$ в рассматриваемом случае выполняется условие (IVб), то есть

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\,|k|\le 2r}} \left| \left(D_x^l a_k(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x)\dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \le \tau |L(x,\,s)|. \tag{2.3.20}$$

Так как (см. (2.3.3), (2.3.8))

$$\left|D_x^k h(x)\right| \leq M_k \nu^{|k|} h(x) g_1^{k_1}(x) g_2^{k_2}(x) \cdots g_n^{k_n}(x).$$

$$\left|D_x^k h_*(x)\right| \leq M_k \nu^{|k|} h_*(x) g_1^{k_1}(x) g_2^{k_2}(x) \cdots g_n^{k_n}(x)$$

для всех $x \in \Omega$ и для любого мультииндекса k, то

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\, |k|\leq 2r}} \left|\left(D_x^l(h(x)h_*(x)a_k(x))\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'}\right| \leq$$

$$\leq M_*' \sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\, |k|\leq 2r}} \left|\left(D_x^l(a_k(x))\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'}\right|,$$

где M_*' - некоторая положительная постоянная. Отсюда в силу неравенств (2.3.19), (2.3.20) следует (2.3.16).

Докажем неравенство (2.3.17). Так как (см. (2.3.11))

$$b_{\omega,\,k}(x) = \sum_{\substack{k=\alpha-\beta,\\ \beta\neq 0}} C_{\alpha,\,\beta} a_\alpha(x) h(x) \left(D_x^\beta h_*(x)\right),$$

то

$$\left|D_x^l b_{\omega,\,k}(x)\right| \leq M_1 \sum_{\gamma+\sigma+\rho=l} \sum_{\substack{k=\alpha-\beta,\\ \beta\neq 0}} \left|D_x^\gamma a_\alpha(x)\right| \left|D_x^\sigma h(x)\right| \left|D_x^{\beta+\rho} h_*(x)\right|.$$

Далее, используя неравенства (2.3.3), (2.3.8), имеем

$$\left|D_x^l b_{\omega,\,k}(x)\right| \leq M_1 \sum_{\gamma+\sigma+\rho=l} \sum_{\substack{k=\alpha-\beta,\\ \beta\neq 0}} h(x) h_*(x) \left|D_x^\gamma a_\alpha(x)\right| \times$$

$$\times g_1^{\sigma_1+\beta_1+\rho_1}(x) g_2^{\sigma_2+\beta_2+\rho_2}(x) \ldots g_n^{\sigma_n+\beta_n+\rho_n}(x)$$

Так как $h(x)h_*(x) \asymp const$, то используя это неравенство имеем

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\, |k|\leq 2r}} \left|\left(D_x^l b_{\omega,\,k}(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'}\right| \leq$$

$$\leq M_2 \sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\, |k|\leq 2r}} \sum_{\gamma+\sigma+\rho=l} \sum_{\substack{k=\alpha-\beta,\\ \beta\neq 0}} \left|D_x^\gamma a_\alpha(x) s^{k'}\right| \times$$

$$\times g_1^{\sigma_1+\beta_1+\rho_1+k_1''}(x) g_2^{\sigma_2+\beta_2+\rho_2+k_2''}(x) \ldots g_n^{\sigma_n+\beta_n+\rho_n+k_n''}(x).$$

Вводим обозначение $\alpha' = \sigma + \beta + \rho + k''$. Тогда $\alpha' + k' + \gamma = \alpha$ и последнее неравенство примет вид

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\,|k|\leq 2r}} \left| \left(D_x^l b_{\omega,\,k}(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \leq$$

$$\leq M_3 \sum_{\substack{\gamma+k'+\alpha'=\alpha,\\ \alpha'\neq 0,\,|\alpha|\leq 2r}} \left| \left(D_x^\gamma a_\alpha(x)\right) g_1^{\alpha_1'}(x) g_2^{\alpha_2'}(x) \ldots g_n^{\alpha_n'}(x) s^{k'} \right|.$$

Далее применяя (2.3.20) имеем

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\,|k|\leq 2r}} \left| \left(D_x^l b_{\omega,\,k}(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \leq \tau \mu_3' |L(x,\,s)|.$$

Отсюда в силу (2.3.19) следует (2.3.17).

Лемма 2.3.3 доказана.

2.4 Доказательство теоремы 2.1.1

Для мультииндекса k такой, что $|k| \leq 2r$, рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathbb{L}_{\omega,k}\,(x,\,D_x) = h(x)\left(a_k(x) D_x^k\right) h_*(x) = \sum_{l\leq k} b_{\omega,\,k,\,l}(x) D_x^l. \tag{2.4.1}$$

Докажем, что если $L(x,\,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau \in (0,\,\tau_2)$, где τ_2 – такое же число, как в лемме 2.3.3, то выполняется неравенство

$$\sum_{\substack{l'+l''=l,\\ l\leq k}} \left| b_{\omega,\,k,\,l}(x) g_1^{l_1''}(x) g_2^{l_2''}(x) \ldots g_n^{l_n''}(x) s^{l'} \right| \leq \mu_4 |L_\omega(x,\,s)| \tag{2.4.2}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R^n$; μ_4 – некоторая положительная константа.

Для коэффициентов дифференциального выражения (2.4.1) имеем

$$b_{\omega,\,k,\,l}(x) = h(x) a_k(x) \left(D_x^{k-l} h_*(x)\right).$$

Поэтому, применяя неравенство (2.3.8), находим

$$\sum_{\substack{l'+l''=l,\\ l\le k}} \left| b_{\omega,\,k,\,l}(x) g_1^{l_1''}(x) g_2^{l_2''}(x)\dots g_n^{l_n''}(x) s^{l'} \right| \le$$
$$\le M_1^* \sum_{\substack{l'+l''=l,\\ l\le k}} h(x)h_*(x) \left| a_k(x) g_1^{l_1''+k_1-l_1}(x) g_2^{l_2''+k_2-l_2}(x)\dots g_n^{l_n''+k_n-l_n}(x) s^{l'} \right|.$$

Так как (см. (2.3.13)) $h(x)h_*(x)\le \nu^2$ и $l''-l=-l'$, то вводя обозначения $k'=l'$, $k''=k-l'$, имеем

$$\sum_{\substack{l'+l''=l,\\ l\le k}} \left| b_{\omega,\,k,\,l}(x) g_1^{l_1''}(x) g_2^{l_2''}(x)\dots g_n^{l_n''}(x) s^{l'} \right| \le$$
$$\le M_1^*\nu^2 \sum_{k'+k''=k} \left| a_k(x) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x)\dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right|.$$

Отсюда в силу условии (II) из определения класса $B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$ (см. §2.1) следует, что

$$\sum_{\substack{l'+l''=l,\\ l\le k}} \left| b_{\omega,\,k,\,l}(x) g_1^{l_1''}(x) g_2^{l_2''}(x)\dots g_n^{l_n''}(x) s^{l'} \right| \le M_1^*\nu^2\tau |L(x,\,s)|.$$

Далее применяя неравенство (2.3.19), получим (2.4.2).

Теперь переходим к доказательству теоремы 2.1.1 в случае несимметрических дифференциальных выражений. Пусть дифференциальное выражение (см. (2.1.2))

$$L(x,D_x)=\sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k,\quad x\in\Omega,$$

несимметричное и его символ $L(x,\,s)$ принадлежит классу $\mathbb{B}(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, $\tau\in(0,\,\tau_2)$, где τ_2 – такое же число, как в лемме 2.3.3. Тогда согласно лемме 2.3.3 символ $L_\omega(x,\,s)$ принадлежит классу $\mathbb{B}(\tau\mu_3,\overrightarrow{g},\Omega)$, где μ_3 – некоторое положительное число. Учитывая это и неравенство (2.4.2) применим теорему 2.1.2 к дифференциальным выражениям $\mathbb{L}_{\omega,k}(x,\,D_x)$ и $L_\omega(x,\,D_x)$.

В результате имеем

$$\left\|h(x)\left(a_k(x)D_x^k\right)h_*(x)v;\, L_p(\Omega)\right\| \le$$
$$\le M_0(n,\, r,\, p,\, \varkappa, \nu)\, \|L_\omega(x,\, D_x)v;\, L_p(\Omega)\| \quad (2.4.3)$$

для всех $v \in L_p(\Omega)$ таких, что $L_\omega(x,\, D_x)v \in L_p(\Omega)$. Так как $h(x) \asymp \omega(x)$ и $L_\omega(x,\, D_x) = h(x)L(x,\, D_x)h_*(x)$, то

$$\left\|\omega(x)a_k(x)\left(D_x^k h_*(x)v(x)\right);\, L_p(\Omega)\right\| \le$$
$$\le M_1(n,\, r,\, p,\, \varkappa, \nu)\, \|\omega(x)L(x,\, D_x)(h_*(x)v(x));\, L_p(\Omega)\|\,.$$

Подставляя в этом равенстве $v(x) = h_*^{-1}(x)u(x)$, получим

$$\left\|\omega(x)a_k(x)D_x^k u(x);\, L_p(\Omega)\right\| \le$$
$$\le M_2(n,\, r,\, p,\, \varkappa, \nu)\, \|\omega(x)L(x,\, D_x)u(x);\, L_p(\Omega)\| \quad (2.4.4)$$

для всех $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ таких, что обобщенная функция $\omega(x)L(x,\, D_x)u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, и при этом

$$\omega(x)u(x) \in L_p(\Omega),\ \omega(x)L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega).$$

Неравенство (2.4.4) означает L_p-разделимость с весом $\omega(x)$ дифференциального выражения $L(x,\, D_x)$.

Теорема 2.1.1 в случае несимметрических дифференциальных выражений доказана.

Теперь предположим, что $L(x,\, D_x)$ – симметричное дифференциальное выражение. Обозначим через $L'_\omega(x,\, s)$ символ дифференциального оператора

$$L'_\omega(x,\, D_x) = h_*(x)L'(x,\, D_x)(h(x)u(x)),$$

где $L'(x,\, s)$ – символ формально сопряженного к $L(x,\, D_x)$ дифференциального выражения. Если $L(x,\, s) \in B(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то $L'(x,\, s) \in B(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega)$. Поэтому, поступая также как в доказательстве леммы 2.3.2 можно доказать, что $L'_\omega(x,\, s) \in B(\tau\mu_5,\, \overrightarrow{g}, \Omega)$, если $L(x,\, s) \in B(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau \in$

$(0,\,\tau_2)$. Здесь μ_5 – некоторое положительное число, зависящее только от $n,\,r,\,p,\,\varkappa,\,\nu$.

Пусть положительные числа $\tau_0=\tau_0(r,\,n,\,q,\,\varkappa,\,\delta)$, $t_*=t_*(r,\,n,\,p,\,\varkappa,\,\delta)$ такие же, как в теореме 1.1.1. и теореме 2.1.2. Далее предположим, что число τ удовлетворяет условию

$$0<\tau<\frac{1}{\mu_*}\min\{\tau_0,t_*\},\ \mu_*=\max\{\mu_3,\,\mu_5\}.$$

Тогда, согласно доказанным выше включениям, для символа $L(x,\,s)$ из класса $B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$ существуют положительные числа $\tau_1^*,\,\tau_2^*$ такие, что

$$L_\omega(x,\,s)\in B(\tau_1^*,\overrightarrow{g},\Omega),\quad \tau_1^*<t_*(r,\,n,\,p,\,\varkappa,\,\delta), \tag{2.4.5}$$

$$L'_\omega(x,\,s)\in B(\tau_2^*,\overrightarrow{g},\Omega),\quad \tau_2^*<\tau_0(n,\,r,\,q,\,\varkappa,\,\delta).$$

Включение (2.4.5) и неравенство (2.4.2) позволяет применить теорему 2.1.2, согласно которой выполняется неравенство (2.4.3) для всех $v(x)\in C_0^\infty(\Omega)$. По непрерывности это неравенство распространяется для вех функций $v(x)\in D(L_{\omega,\,(p)})$. Также как в случае несимметричных дифференциальных выражений из неравенства (2.4.3) следует L_p-разделимость с весом $\omega(x)$ дифференциального выражения $L(x,\,D_x)$, если неравенство (2.4.3) имеет место для всех $v(x)\in \mathcal{W}_{p,\,L_\omega}(\Omega)$.

Напомним определение (см. §1.2) пространство $\mathcal{W}_{p,\,L_\omega}(\Omega)$, где дифференциальное выражение $L_\omega(x,\,D_x)$ определяется равенством (см. (2.3.9), (2.3.10))

$$L_\omega(x,\,D_x)=h(x)h_*(x)\sum_{|k|\le 2r}a_k(x)D_x^k+\sum_{|k|\le 2r}b_{\omega,\,k}(x)D_x^k.$$

В условиях теоремы 2.1.1 выполняется следующее условие гладкости (см. (2.1.1))

$$D_x^l a_k(x)\in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l|\le|k|\le 2r). \tag{2.4.6}$$

Отсюда и из (2.3.3), (2.3.8), (2.3.11) следует, что

$$D_x^l b_{\omega,\,k}(x)\in L_{\infty,\,loc}(\Omega)\ (|l|\le|k|\le 2r). \tag{2.4.7}$$

Выполнение условий гладкости (2.4.6), (2.4.7) позволяют для произвольной функции $v(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ определить обобщенные функции $h(x)h_*(x)a_k(x)D_x^k v(x) \quad (|k| \le 2r)$, $b_{\omega,k}(x)D_x^k v(x) \quad (|k| \le 2r)$ по формулам

$$\left\langle hh_*a_kD^kv,\, \varphi\right\rangle = (-1)^{|k|}\int\limits_\Omega v(x)D_x^k\left(h(x)h_*(x)a_k(x)\varphi(x)\right)dx, \qquad (2.4.8)$$

$$\left\langle b_{\omega,k}D^kv,\, \varphi\right\rangle = (-1)^{|k|}\int\limits_\Omega v(x)D_x^k\left(b_{\omega,k}(x)\varphi(x)\right)dx \qquad (2.4.9)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Для $v(x) \in L_p(\Omega)$ через $L_\omega(x,\, D_x)v(x)$ обозначим сумму всех обобщенных функций $h(x)h_*(x)a_k(x)D_x^kv(x), \quad |k| \le 2r$, $b_{\omega,k}(x)D_x^kv(x), \quad |k| \le 2r$, определенных равенством (2.4.8), (2.4.9), соответственно.

По определению пространство $\mathcal{W}_{p,\,L_\omega}(\Omega)$ состоит из всех $v(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенная функция $L_\omega(x,\, D_x)v(x)$ принадлежит пространству $L_p(\Omega)$. Норма в пространстве $\mathcal{W}_{p,\,L_\omega}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|v;\, \mathcal{W}_{p;\,L_\omega}(\Omega)\| = \left\{\int\limits_\Omega |v(x)|^p dx + \int\limits_\Omega |L_\omega(x,\, D_x)v(x)|^p\, dx\right\}^{1/p}.$$

Из определения сопряженного оператора (см. лемму 1.1.4) следует равенство $\mathcal{W}_{p;\,L_\omega}(\Omega) = D((L'_{\omega,\,(q)})^*)$ и аналогично равенству (1.3.15) доказывается, что $\left(L'_{\omega,\,(q)}\right)^* = L_{\omega,\,(p)}$. Откуда следует, что

$$D((L'_{\omega,\,(q)})^*) = D(L_{\omega,\,(p)}). \qquad (2.4.10)$$

Выше мы доказывали (2.4.3) для всех $v(x) \in D(L_{\omega,\,(p)})$. Так как

$$D(L_{\omega,\,(p)}) = D((L'_{\omega,\,(q)})^*) = \mathcal{W}_{p;\,L_\omega}(\Omega),$$

то неравенство (2.4.3) имеет место для всех $v(x) \in \mathcal{W}_{p,\,L_\omega}(\Omega)$, и это означает L_p-разделимость с весом $\omega(x)$ дифференциального выражения $L(x,\, D_x)$.

Теорема 2.1.1 доказана.

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе найдены достаточные условия L_p-разделимости и L_p-разделимости с весом $\omega(x)$ эллиптических дифференциальных операторов общего вида произвольного четного порядка в случае когда область Ω и функции $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, характеризующие вырождение коэффициентов исследуемого оператора, удовлетворяют условию погружения. Условие погружения впервые было введено в работе П.И.Лизоркина. Как было отмечено в его работе ограниченные и неограниченные области с границами удовлетворяющими условию Липщица и степенные весовые функции удовлетворяют условию погружения.

Класс исследуемых дифференциальных операторов достаточно широк. Допускается случай когда коэффициенты исследуемого оператора имеют разные вырождения нестепенного характера по разным независимым переменным.

Наряду с теоремами разделимости в работе получены результаты о непрерывной обратимости одного широкого класса вырождающихся дифференциальных операторов в пространстве $L_p(\Omega)$ и доказаны теоремы о плотности класса бесконечно дифференцируемых финитных функций в некоторых весовых пространствах, норма которых задается с помощью общего дифференциального выражения с частными производными. Эти результаты могут найти дальнейшие приложения при исследовании разрешимости краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в ограниченных или неограниченных областях, а также при изучении дифференциальных свойств решений таких задач.

Литература

[1] Абудов А.А. О разделимости одного оператора, порожденного операторно-дифференциальным выражением / А.А.Абудов // В сб: Спектральная теория операторов. Боку. – 1982. – С. 4 – 11.

[2] Аманова Т.Т. Разделимость нелинейного уравнения Штурма–Лиувилля в $L_1(-\infty,+\infty)$ / Т.Т.Аманова, М.Б.Муратбеков // Известия АН Каз. ССР. Серия физ.- мат. – 1984. – №3. С. 57 – 59.

[3] Байрамоглы М. О существенной самосопряженности оператора Штурма-Лиувилля с операторными коэффициентами / М.Байрамоглы, А.А.Абудов // В сб.: Спектральная теория операторов. Баку. "Элм" – 1982. С. 12 – 20.

[4] Бакоева М.М. О разделимости оператора Штурма–Лиувилля с несимметричным матричным потенциалом / М.М.Бакоева, С.А.Исхоков // Вест. Хорогского университета. Серия 1 – 2002. – №5. – С. 43 – 51.

[5] Биргебаев А. Разделимость одного дифференциального оператора в L_p / А.Биргебаев // Известия АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1984. – №5. – С. 26 – 29.

[6] Биргебаев А. О разделимости нелинейного дифференциального оператора третьего порядка / А.Биргебаев, М.Отелбаев // Известия АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1984. – №3. – С. 11 – 13.

[7] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости для оператора Штурма–Лиувиля / К.Х.Бойматов // Математические заметки. – 1973. – Т. 14. – №3. – С. 349 – 359.

[8] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 213. – №5. – С. 1009 – 1011.

[9] Бойматов К.Х. L_2-оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. – №3. – С. 521 – 524.

[10] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения к краевым задачам / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 247. – №3, 532 – 536.

[11] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения / К.Х.Бойматов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 37 – 76.

[12] Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 301. – №5. – С. 1033 – 1036.

[13] Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка / К.Х. Бойматов // Математические заметки. – 1989. – Т. 46. – №6. – 110 – 112.

[14] Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений / К.Х.Бойматов // Доклады АН России. – 1993. – Т. 330. – №4. – С. 409 – 414.

[15] Бойматов К.Х. О методе В.Н. Эвиритта и М. Гирца для банаховых пространств / К.Х.Бойматов // Доклады АН России. – 1997. – Т. 356. – №1. – С. 10 – 12.

[16] Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для дифференциальных операторов произвольного порядка / К.Х.Бойматов, А.Шарифов // Успехи математических наук. – 1989. – Т. 44. – №3. – С. 147 – 148.

[17] Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака / К.Х.Бойматов, А.Шарифов // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 326. – №3. – С. 393 – 498.

[18] Гадоев М.Г. Вариационная задача Дирихле для одного класса эллиптических уравнений с вырождением / М.Г.Гадоев, И.А.Якушев // Математические заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18. – №1. – С. 25 – 35.

[19] Гаибов Д.С. Обыкновенные дифференциальные операторы класса Трибеля на полуоси / Д.С.Гаибов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1993. Т. 36. – №12. – С. 571 – 574.

[20] Гриншпун Э.З. О гладкости решений нелинейного уравнения Штурма–Лиувилля в $L_1(-\infty,+\infty)$ / Э.З.Гриншпун, М.Отелбаев // Известия АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1984. – №5. – С. 26 – 29.

[21] Замонов М.З. Коэрцитивные неравенства и разделимость для несекториального эллиптического дифференциального оператора в пространстве вектор-функции / М.З.Замонов, О.Т.Муртазов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1997 – Т. 40. – №9-10. – С. 32 – 40.

[22] Исхоков С.А. О разделимости обыкновенных дифференциальных выражений / С.А.Исхоков // В сб.:Функционалний анализ и его приложения в механике и теории вероятностей. Москва. Изд-во МГУ. – 1984. С. 130 – 131.

[23] Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением / С.А.Исхоков // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – №11. – С. 536 – 542.

[24] Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением / С.А.Исхоков, М.Г.Гадоев, И.А.Якушев // Доклады АН России. – 2012. – Т. 443. – №3. – С. 286 – 289.

[25] Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением и его приложения / С.А.Исхоков, М.Г.Гадоев, И.А.Якушев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – Вып. 1. – С. 54 – 71.

[26] Исхоков С.А. Разделимость общего эллиптического дифференциального порядка с матричными коэффициентами в весовых пространствах / С.А.Исхоков, А.С.Мохамед // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1993. – Т. 36. – №10 - 11. – С. 310 – 315.

[27] Каримов О.Х. О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом в весовом пространстве / О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2005. – Т. 48. – №3-4. – С. 38 – 43.

[28] Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами / О.Х.Каримов // Известия АН Республики Таджикистан. – 2014. – №4. – С. 42 – 50.

[29] Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости оператора Гельмгольца / О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2005. – Т. 58. – №3. – С. 198 – 202.

[30] Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве / О.Х.Каримов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2005. – Т. 58. – №8. – С. 665 – 673.

[31] Каримов О.Х. Коэрцитивные неравенства и разделимость для нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка / О.Х.Каримов, Н.У.Усмонов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1997. – Т. 40. – №9 - 10. – С. 32 – 40.

[32] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

[33] Курбонов И. Разделимость оператора Штурма -Лиувилля в пространстве вектор-функции с взвешенно суммируемыми компонентами / И.Курбанов, М.Шодиев // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1995. – Т. 38. – №1-2. – С. 79 – 86.

[34] Лизоркин П. И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах / П.И.Лизоркин // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 156. – С. 130 – 142.

[35] Мохамед А.С. Разделимость оператора Шредингера с матричным потенциалом / А.С.Мохамед // Доклады АН Республики Таджикистан. – 1992. – Т. 35. – №3. – С. 510 – 515.

[36] Муратбеков М.Б. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера / М.Б.Муратбеков, М.Отелбаев // Известия вузов. Математика. – 1989. – №3. – С. 44 – 48.

[37] Ойнаров Р. О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций / Р.Ойнаров // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 285. – №5. – С. 1062 – 1064.

[38] Отелбаев М. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма–Лиувилля / М.Отелбаев // Математические заметки. – 1974. – Т. 16. – №6. – С. 969 – 980.

[39] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n / М.Отелбаев // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 195 – 217.

[40] Atia H.A. Separation of the Grushin differential operator in weighted Hilbert spaces / H.A.Atia // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2011. – V. 32. – No. 3. 180 – 188.

[41] Atia, H.A. Separation of the two-dimensional Laplace operator by disconjugacy property / H.A.Atia, R.A.Mahmoud // Pan American Mathematical Journal. – 2009. – V. 20. – No. 2. – P. 93 – 103.

[42] Atia H.A. Separation of bi-harmonic differential operators on Riemannian manifolds / H.A.Atia, R.S.Alsaedi , A.Ramady // Forum Mathematicum. – 2014 – V. 26. – P. 953 – 966.

[43] Atkinson F.V. On some results of Everitt and Giertz / F.V.Atkinson // Proc. Royal Soc. Edinburg. – 1972/3. – V. 71A. – P. 151 – 158.

[44] Brown R.C. Separation and disconjugacy / R.C.Brown // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2003. – V. 4. – Is. 3. – Article 56. – 16 p.

[45] Brown R.C. Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators / R.C.Brown, D.B.Hinton // Mathematica Bohemica. – 1999. – V. 124. – No. 2-3. – P. 273 – 292.

[46] Chernyavskaya N. Correct solvability, embedding theorems and separability for the Sturm-Liouville equation / N.Chernyavskaya, L.Shuster // arXiv:1307.5611v1 [math.CA] 22 Jul 2013, 9 p.

[47] Chernyavskaya N. Weighted estimates for solutions of the general Sturm-Liouville equation and the Everitt-Giertz problem I / N.Chernyavskaya, L.Shuster // Proc.Edinburgh Math. Soc. – 2015. – V. 58. – Is. 01. – P. 125 – 147.

[48] Evans W.D. Dirichlet and separation results for Schrodinger-type operators / W.D.Evans, A. Zettl // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – 1978. – V. 80A. – P. 151 – 162.

[49] Everitt W.N. Some properties of the domains of certain differential operators / W.N.Everitt, M.Giertz // Proc. Lond. Math. Soc. – 1971. – V. 23. – No. 3. – P. 301 – 324.

[50] Everitt W.N. Some inequalities associated with the domains of ordinary differential operators / W.N.Everitt, M.Giertz // Math. Z. – 1972. – V. 126. – P. 308 – 328.

[51] Everitt W.N. On limit-point and separation criteria for linear differential expressions / W.N.Everitt, M.Giertz // Proceedings of the 1972 Equadiff Conference. Brno. – 1972. – P. 31 – 41.

[52] Everitt W.N. Inequalities and separation for certain ordinary differential operators / W.N.Everitt, M.Giertz // Proc. London Math.Soc. – 1974. – V. 28. – No. 3. – P. 352 – 372.

[53] Everitt W.N. Inequalities and separation for Schrodinger type operators in $L_2(R^n)$ / W.N.Everitt, M.Giertz // Proc.Royal Soc. Edinburgh. – 1977. – V. 79A. – P. 257 – 265.

[54] Everitt W.N. Some remarks on a separation and limit-point criterion of second order ordinary differential expressions / W.N.Everitt, M.Giertz, J.Weidmann // Math. Ann. – 1973. – V. 200. – P. 335 – 346.

[55] Mohamed A.S. Existence and uniqueness of the solution, separation for certain second order elliptic differential equation / A.S.Mohamed // Applicable Analysis. – 2000. – V. 76. – No. 3. – P. 179 – 184.

[56] Mohamed A. S. Separation of the Schrodinger operator with an operator potential in the Hilbert spaces / A.S.Mohamed, H.A.Atia // Applicable Analysis. – 2005. – V. 84. – No. 1. – P. 103 – 11.

[57] Mohamed A.S. Separation for ordinary differential equation with matrix coefficient / A.S.Mohamed, B.A.El-Gendi // Collect. Math. – 1997. – V. 48. – No. 3. – P. 243 – 252.

[58] Mohamed A.S. On the existence and uniqueness in weighted spaces of solutions of a higher order ordinary differential equation with positive matrix coefficient / A.S.Mohamed, B.A.El-Gendi // Bull. Fac. Sci. C. Math. Assiut Univ. – 1995. – V. 24. – No. 2. – P. 13 – 24.

[59] Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators on Riemannian manifolds / O.Milatovic // Journal of Geometry and Physics. – 2006. – V. 56. – P. 1283 – 1293.

[60] Milatovic O. A separation property for magnetic Schrodinger operators on Riemannian manifolds / O.Milatovic // Journal of Geometry and Physics. – 2011. – V. 61.– P. 1 – 7.

[61] Milatovic O. Separation property for Schrodinger operators in L_p-spaces on noncompact manifolds / O.Milatovic // Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. – 20013. – V. 58. – No. 6. – P. 853 – 864.

[62] Milatovic O. The form sum and the Friedrichs extension of Scrodinger-type operators on Riemannian manifolds / O.Milatovic // Proceedings of the American mathematical society. – 2003. – V. 132. – No. 1. – P. 147 – 156.

[63] Oer Z. Separation theorem for Sturm-Liouville equation with operator coefficient / Z.Oer // Proyecciones, Universidad Catolica del Norte Antofagasta-Chile. – 2001. – V. 20. – No. 2. – P. 177 – 191.

[64] Omran S. Separation of the Helmholtz partial differential equation in Hilbert space / S.Omran, K.A.Gepreel // Adv. Studies Theor. Phys. – 2012. – V. 6. – No. 9. – P. 399 – 410.

[65] Omran S. Separation of the general Tricomi differential operator in Hilbert space and its application / S.Omran, K.A.Gepreel, S.Khalil // International Journal of mathematical archive. – 2012. – V. 3. – No. 1. – P. 64 – 71.

[66] Omran S. Separation of the general differential wave equation in Hilbert space / / S.Omran, K.A.Gepreel, E.T.A.Nofal // International Journal of Nonlinear Science. – 2011. – V. 11. – No. 3. – P. 358 – 365.

[67] Ospanov K.N. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space / K.N.Ospanov, R.D.Akhmetkaliyeva // CRM Preprint Series. – 2011. – No. 1080. – 12 p.

[68] Ospanov K.N. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation / K.N.Ospanov, R.D.Akhmetkaliyeva // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2012. – No. 66. – P. 1 – 12; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[69] Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in Hilbert space associated with the existence and uniqueness theorem / E.M.E.Zayed // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – V. 337. – P. 659 – 666.

[70] Zayed E.M.E. Separation for Schrodinger-type operators with operator potentials in Banach spaces / E.M.E.Zayed, A.S.Mohamed, H.A.Atia // Applicable Analysis. – 2005. – V. 84. – No. 2. – P. 211 – 220.

[71] Zayed E.M.E. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces / E.M.E.Zayed, A.S.Mohamed, H.A.Atia // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – V. 336. – P. 81 – 92.

[72] Zayed E.M.E. Separation of the Tricomi differential operator in Hilbert space with application to the existence and uniqueness theorem / E.M.E.Zayed, S.A.Omran // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2011. – V. 6. – No. 8. – P. 353 – 364.

[73] Zayed E.M.E. Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space / E.M.E.Zayed, S.A.Omran // International Journal of Mathematical Combinatorics. – 2010. – V. 4. – P. 13 – 23.

[74] Zettl A. Separation for differential expressions and the L^p spaces /A.Zettl // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 55. – No. 1. – P. 44 – 46.

Публикации автора по теме диссертации

[75] Исхоков Ф.С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. – №7. – С. 558 – 563.

[76] Исхоков Ф.С. О разделимости одного класса эллиптических операторов в лебеговом пространстве / Ф.С.Исхоков // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложений". – Душанбе: Филиал МГУ им. М.В. Ломоносов. – 2016. – С. 76 – 78.

[77] Исхоков Ф.С. О некоторых функциональных пространствах, норма которых задается с помощью дифференциального оператора / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. – Душанбе. – 2016. – С. 82 – 84.

[78] Исхоков Ф.С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Математические заметки СВФУ – 2016. – Т. 23. – №3(91). – С. 3 – 26.

[79] Исхоков Ф.С. О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве / М.Г.Гадоев,

Ф.С.Исхоков // VIII Международная конференция по математическому моделированию. Якутск, Россия. 4-8 июля, 2017. Тезисы докладов. – С. 35.

[80] Iskhokov F.S. Separation of a class of degenerate differential operators in L_p-spaces / M.G.Gadoev, F.S.Iskhokov //Proceedings of the 8th international conference on mathematical modeling (ICMM-2017). AIP Conference Proceedings, vol. 1907, 030003 (2017), p. 1–5. https://doi.org/10.1063/1.5012625.

[81] Исхоков, Ф.С. О разделимости одного класса вырождающихся эллиптических операторов / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // "Математика в современном мире". Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С.Л.Соболева. Новосибирск, Россия. 14-18 августа, 2017. Тезисы докладов. – С. 201.

[82] Исхоков Ф.С. К теории разделимости эллиптических дифференциальных операторов / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // "Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел". Материалы международной конференции, посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан. Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017 г. – С. 32–33.

[83] Исхоков Ф.С. Об относительной ограниченности одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве / М.Г.Гадоев, Ф.С.Исхоков // Математические заметки СВФУ – 2018. – Т. 25. – №1(97). – С. 3 – 14.