На правах рукописи

Хокиев Дониёр Джалилович

О распределении значений характеров Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе – 2018

Работа выполнена в Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, академик АН Республики Таджикистан, профессор Рахмонов Зарулло Хусенович
Официальные оппоненты:	Табаров Абдулло Хабибуллоевич, доктор физико-математических наук, Кулябский государственный университет им. А. Рудаки, ректор
	Мирзорахимов Шерали Хусенбоевич, кандидат физико–математических наук, Кургантюбинский государственный университет им. Н. Хусрава, доцент кафедры математического анализа
Ведущая организация:	Таджикский национальный университет

Защита состоится 28 декабря 2018 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 6D КОА-037 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 6D КОА-037 Каримов О.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. И.М. Виноградов [1] доказал: *если* q *— простое нечётное,* $(l,q)=1$, $\chi(a)$ *– неглавный характер по модулю* q, *тогда*

$$T_1(\chi)=\sum_{p\le x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{\sqrt[3]{x}}}.$$

В 1943 г. И.М. Виноградов[2,3] уточнил эту оценку, доказав, что

$$|T_1(\chi)|\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \qquad (1)$$

При $x\gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\bmod q$ *вида* $p-l$, $p\le x$.

Гольдбаховым числом называют число, представимое в виде суммы двух нечётных простых чисел. Задача о распределении таких чисел в “коротких” арифметических прогрессиях возникла при попытке решить бинарную проблему Гольдбаха. Первый результат условного характера здесь принадлежит Ю.В. Linnику[4]. В предположении расширенной гипотезы Римана он показал, что имеет место неравенство

$$G(D,l)\le D\ln^6 D,$$

где $G(D,l)$ – наименьшее Гольдбахово число в арифметической прогрессии

$$Dk+l,\qquad k=0,1,2,\ldots$$

[1]Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю // Математический сборник. 1938. Т. 3. №45. С. 311 – 320.

[2]Виноградов И.М. Избранные труды // М.: Изд-во АН СССР. 1952.

[3]Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.

[4]Линник Ю.В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. № 6. С. 503 – 520.

Этот результат был уточнен К. Прахаром[5,6] и Ю. Вангом[7]. Они при тех же предложениях доказали, что

$$G(D,l) \le D(\ln D)^{3+\varepsilon}.$$

М. Ютила[8] в 1968 г. доказал безусловную теорему. Он, воспользовавшись оценкой (1), показал, что если D – нечётное простое число, то

$$G(D,l) \ll D^{\frac{11}{8}+\varepsilon}.$$

Затем И.М. Виноградов[9,10] получил нетривиальную оценку $T_1(\chi)$ при $x \ge q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число . Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T_1(\chi)$ можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T_1(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x \ge q^{1+\varepsilon}$.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник[11] в 1971 г. писал по этому поводу: *Весьма важны исследования И.М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел* $T_1(\chi)$, *которая давала степенное понижение по сравнению с* x *уже при* $x > q^{0,75+\varepsilon}$. *Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А.А. Карацубе.*

А.А. Карацуба[12] в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях

[5] Prachar K. Uber die Anwendung einer Methode von Linnik // Acta Arith. 29(1976), 367 – 376.,

[6] Prachar K. Bemerkungen uber Primzahlen in kurzen Reihen. [Remarks on primes in short sequences] // Acta Arith. 44(1984), 175 – 180.

[7] Wang Yan On Linnik's method concerning the Goldbach number // Sci. Sinica, 20 (1977), 16 – 30

[8] Jutila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference // Ann. Univ. Turku; Ser. A., I, 118 (1968).

[9] Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.

[10] Виноградов И.М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. С. 481 – 496

[11] Линник Ю.В. Новейшие работы И.М. Виноградова // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.

[12] Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

фиксированной степени. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он доказал следующее утверждение [13]: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

А.А. Карацуба[14] применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества произведений сдвинутых простых чисел вида $p(p'+k)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью

З.Х. Рахмонов[15,16,17] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал следующее утверждение: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих число q, тогда*

$$T_1(\chi) \leq x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right)\tau(q).$$

Применяя эту оценку, З.Х. Рахмонов[18] также доказал, что для достаточно большого нечётного натурального числа D имеет место оценка

$$G(D,I) \ll D^{c+\varepsilon},$$

где ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, c — нижняя грань чисел a таких, что для некоторой постоянной $A>2$,

$$\sum_{\chi\, mod\, D} N(\alpha,T,\chi) \ll (DT)^{2a(1-\alpha)}(\ln DT)^A.$$

Из “плотностной” теоремы М.Н. Хаксли[19] следует, что при $A=14$ в последней формуле

$$c \leq \frac{6}{5}.$$

[13] Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

[14] Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. №3,

[15] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41. № 1. С. 201 – 202.

[16] Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами // ДАН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

[17] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

[18] Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии // Изв. АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.

[19] Huxley N.N. On the difference between consecutive primes // Inventiones mathematical, June 1971, Volume 15, Issue 2, pp 164–170.

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский[20] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T_1(\chi_q)$ существует, когда x – длина суммы – по порядку меньше q. Они доказали следующее: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T_1(\chi_q) \ll xq^{-\delta}. \qquad (2)$$

З.Х. Рахмонов[21,22] в 2013 году доказал, что *если q – достаточно большое натуральное число, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi_q) \ll x \exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$

В 2017 г. Bryce Kerr[23] доказал оценку (2), то есть для $T_1(\chi_q)$ получил оценку с степенным понижением уже при $x \geq q^{\frac{5}{6}+o(1)}$.

В 2017 г. З.Х. Рахмонов[24] доказал теорему: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер по модулю q, порожденный характером χ, q – свободное от кубов, $(l,D)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x \geq D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, имеем*

$$T_1(\chi) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right).$$

Как уже выше было отмечено, нетривиальные оценки суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавный характер по модулю D, D – простое число, были приложены в задачах о наименьших гольдбаховых числах и о распределении произведений сдвинутых простых чисел в коротких арифметических прогрессиях. При решении этих задач для составного модуля D, наряду с нетривиальными оценками суммы $T_1(\chi)$, для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для

[20] Фридландер Дж.Б., Гонг К, Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Мат. зам. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

[21] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // ДАН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. №1. С. 5 – 9.

[22] Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15 . В. 2(50). С. 73 – 100.

[23] Bryce Kerr On certain exponential and character sums, PhD Thesis, UNSW, 2017

[24] Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // ДАН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. №9. С. 378-382.

производных характеров. Поэтому, естественно рассматривать задачу о нетривиальной оценке суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавний характер по составному модулю D.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней доказана нетривиальная оценка коротких сумм значений произвольного неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел.

Цель работы.

Целью работы является получение нетривиальной оценки суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю, в последовательности сдвинутых простых чисел, для возможно короткой суммы.

Методы исследования.

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно:

- метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова;
- метода А.А. Карацубы оценки суммы $T(\chi_q)$ для простого q;
- методами З.Х. Рахмонова оценки суммы $T(\chi_q)$, где χ_q — примитивный характер по модулю q , (q — составное).

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- при $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ найдена нетривиальная оценка коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях вида

$$S_y(u,\eta,\nu) = \sum_{\substack{u-y<n\leq u \\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta \pmod{\nu}}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta\nu,q)=1.$$

- при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ получены нетривиальные оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида
$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}} b_n\chi_q(mn-l) \quad (l\nu,q)=1;$$

- доказана нетривиальная оценка коротких сумм значений неглавного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах

- международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвящённая 75-летию со дня рождения Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015 г.

- XIV международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина, г. Саратов. 12 – 15 сентября 2016 г.

- международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- международная научная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения Л.Г. Михайлова, Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.

- международная научная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Душанбе, 20-21 июня 2018 г.

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2015 – 2018 гг.) и общеинститутский семинаре (2015 – 2018 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;
- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 71 страницы. Список цитированной литературы включает 53 наименований.

Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Введение к диссертации содержит обзор результатов, относящихся к теме диссертации, и формулировки основных полученных результатов.

Первая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях. В первом параграфе приведены постановка задачи и формулировка результатов первой главы.

Д.А. Берджесс[25,26] *для неглавного характера* $\chi(n)$ *по модулю* q *и для короткой суммы*

$$S_y(u) = \sum_{u-y<n\leq u} \chi(n),$$

[25] Burgess D.A. On character sums and L – series // Proc. London Math. Soc. 1962, v. 12, № 3, pp. 193 – 206.
[26] Burgess D.A. The character sum estimate with $r = 3$ // Proc. London Math. Soc. 1986, v. 2, № 33, pp. 219 – 226

где r – фиксированное целое положительное число получил оценку вида

$$|S_y(u)| \ll y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{r+1}{4r^2}+\varepsilon},$$

где q — число свободное от кубов, или $r=2$, или $r=3$.

Отметим, что для всех составных модулей q, за исключением модулей свободных от кубов, оценка Берджесса будет нетривиальной при $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Для модулей свободных от кубов она будет нетривиальной при $y \geq q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

При изучении закона распределения значений примитивного характера χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки суммы вида

$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\leq u\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta, q)=1,$$

которые называются *суммой значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел.* Если q — простое число, то изучение суммы $S_y(u,\eta)$ с помощью тождества

$$\begin{aligned} S_y(u,\eta) &= \sum_{u-y<n\leq u} \chi_q(n-\eta) - \chi_q(-\eta) \sum_{x-y<nq\leq x} 1 = \\ &= S_y(u-\eta) - \chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q} - \left\{\frac{x}{q}\right\} + \left\{\frac{x-y}{q}\right\}\right) \end{aligned}$$

сводится к суммам $S_y(u-\eta)$. В случае составного q нетривиальные оценки для суммы $S_y(u,\eta)$ впервые были получены в 1985 г. З.Х. Рахмоновым[18]. Затем нетривиальные оценки для более коротких сумм $S_y(u,\eta)$ при $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ были получены в работах [19,20].

А при изучении закона распределения значений неглавного характера χ по составному модулю D, не являющимся примитивным на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки сумм более общего вида

$$S_y(u,\eta,\nu) = \sum_{\substack{u-y<n\leq u\\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta \pmod{\nu}}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta\nu, q)=1,$$

которые называются *суммами значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях.*

Если q — простое число, то изучение сумм $S_y(u,\eta,\nu)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta,\nu)=\chi_q(\nu)S_{\frac{y}{\nu}}(u-\eta)+\chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q\nu}+\left\{\frac{u}{q\nu}-\frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right\}-\left\{\frac{u-y}{q\nu}-\frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right\}\right)$$

также сводится к суммам $S_{\frac{y}{\nu}}(u-\eta)$.

В случае составных модулей для сумм $S_y(u,\eta,\nu)$, как и для сумм $S_y(u,\eta)$ при $y\ge q^{\frac12+\varepsilon}$ первые нетривиальные оценки получил З.Х. Рахмонов[18], а в 2017 г. он[27] для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку при

$$y\ge q^{\frac14+\varepsilon}.$$

Основным результатом первой главы является следующая теорема о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях $S_y(u,\eta,\nu)$ для произвольного модуля q.

Теорема 1.1. *Пусть* $(\eta\nu,q)=1$, $y\ge q^{\frac13+\frac85\delta}$, $y\le q$, $D^{\frac12}\le q\le D$ *и* $\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, *тогда*

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta \,(\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(n-\eta)\ll\frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержится в лемме 1.10.

лемма 1.10. *Пусть* M, N, d, k *и* η *целые числа, удовлетворяющие условиям,* $(\eta,q)=(d,k)=1$, *и*

$$S=\sum_{M-N<n\le M}\chi_q(nd+\eta k).$$

Тогда для $N<q^{\frac{7}{12}}d^{-\frac12}$, $D^{\frac12}\le q\le D$ *и* $d\le\exp(\sqrt{2\mathscr{L}})$ *справедливая оценка*

$$|S|\le N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}. \tag{3}$$

Доказательство леммы 1.10 проводится методом А.А. Карацубы[12], позволившим ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. Основными моментами в доказательстве

[27] Рахмонов З.Х Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2017. Т. 299. С. 234 — 260.

леммы 1.10 является сведение оценки модуля суммы S к числу решений сравнения от четырёх неизвестных и применение леммы 1.9 об оценке числа решений этого сравнения.

При изучении закона распределения значений производного характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида $S_y(u,\eta,\nu)$, то есть *сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях*, исследованных в первой главе, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм $W=W_q(x,M,N,l,\nu)$ вида

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad (\nu l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau^c(m)$ и $|b_n|\le\tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма $W_q(x,M,N,l,\nu)$ называется *двойной суммой значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях.*

В сумме $W_q(x,M,N,l,\nu)$, не ограничивая общности можно считать, что $N\le M$. Отметим, что если в рассматриваемой задаче (*закон распределения значений производных характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$*) характер χ является примитивным, то есть если $\chi=\chi_q$, то вместо суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ возникает более простая сумма $W_q(x,M,N,l,1)=W_q(x,M,N,l)$ вида

$$W_q(x,M,N,l)=\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad (l,q)=1,$$

И.М. Виноградов[28], впервые изучая сумму $W_q(x,M,N,l)$ для простого q, получил её нетривиальную оценку при $x\ge q^{1+\varepsilon}$, а затем нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x,M,N,l)$ при $x\ge q^{0,75+\varepsilon}$. Наилучшая нетривиальная оценка $W_q(x,M,N,l)$ для простого q при $x\ge q^{0,5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы[13].

З.Х. Рахмонов[16,17] изучил сумму $W_q(x,M,N,l,\nu)$ для составного q и получил нетривиальную оценку при $x\ge q^{1+\varepsilon}$. Нетривиальную оценку короткой

[28]Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм // М.: Наука. 1976

суммы $W_q(x,M,N,l)$ для составного q при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский[20]. З.Х. Рахмонов[27] для составного q доказал нетривиальную оценку[21,22] $W_q(x,M,N,l)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, а в 2017 г. он для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $y \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Основными результатами второй главы являются теоремы 2.1 и 2.2 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида $W_q(x,M,N,l,\nu)$.

Теорема 2.1 *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\leq 2M} |a_m|^\alpha \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll B\left(M^{\frac{3}{4}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{4}}Nq^{\frac{1}{8}+\frac{\delta}{4}}\right)\mathscr{L}^{\frac{2c_1+c_2}{4}+1}.$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится развитием метода доказательства леммы 14 работы З.Х. Рахмонова[22], которая в свою очередь опирается на методы работ А.А. Карацубы[12,13] и оценки Д.А. Берджесса[25].

Теорема 2.2 *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N \leq q^{\frac{1}{6}}$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\leq 2M} |a_m|^\alpha \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll BM^{\frac{5}{6}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta}\mathscr{L}^{\frac{4c_1+c_2+1}{6}}.$$

Доказательство теоремы 2.2 проводится развитием метода доказательства леммы 15 работы З.Х. Рахмонова[24], которая в свою очередь также опирается на методы работ А.А. Карацубы[12,13] и оценки Д.А. Берджесса[26].

Следствиями теорем 2.1 и 2.2, в частности являются нетривиальные оценки двойных сумм $W_q(x, M, N, l, \nu)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеющих соответственно

- сумму для длины N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{6}} \leq N \leq q^{\frac{1}{3}}$ (следствие 2.1.1);
- сумму для длины N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{12}} \leq N \leq q^{\frac{1}{6}}$ (следствие 2.2.1).

Следствие 2.1.1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N$, $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leq N \leq q^{\frac{1}{4}+\theta}$, $D^{\frac{1}{2}} \leq q \leq D$, $\nu \leq \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,*

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau_5(m)$, $|b_n| \leq 1$. Тогда при $x \geq q^{\frac{3}{4}+\theta+1{,}1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu} \exp\left(-0{,}7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Следствие 2.2.1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N$, $q^{\theta} \leq N \leq q^{\frac{1}{6}}$, $D^{\frac{1}{2}} \leq q \leq D$, $\nu \leq \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,*

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau_5(m)$, $|b_n| \leq 1$. Тогда при $x \geq q^{1-2\theta+1{,}1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu} \exp\left(-0{,}7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

В третьей главе, используя результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях;

- следствия 2.1.1 и 2.2.1 теорем 2.1 и 2.2 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях,

доказываем теорему 3.1 о нетривиальной оценке суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теорема 3.1 *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, $(l, D) = 1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при $x \geq D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n-l) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

Доказательство теоремы 3.1 проводится методом оценок суммы с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами А.А. Карацубы[13] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для простого q, методом З.Х. Рахмонова[33] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для составного q. Его основу, как уже отмечали, составляют теорема 1.1 первой главы и теоремы 2.1 и 2.2 второй главы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору З.Х. Рахмонову за научное руководство, за постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

1. Хокиев Д.Дж. Оценка коротких сумм значений характеров от специальной последовательности натуральных чисел [Текст] /Д.Дж. Хокиев // ДАН Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. №12. С. 1065 – 1071.

2. Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характеров Дирихле по составном модулю на последовательности сдвинутых чисел [Текст] /Д.Дж. Хокиев // ДАН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. №1-2. С. 5 – 6.

3. Хокиев Д.Дж. Об оценке суммы характеров с простыми числами [Текст] /З.Х. Рахмонов, Д.Дж. Хокиев. // ДАН Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. №1. С. 5 – 11 .

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

4. Хокиев Д.Дж. Оценка коротких сумм значений характеров от специальной последовательности натуральных чисел [Текст] /Д.Дж. Хокиев // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел» посвященной 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. С. 29 – 31.

5. Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характера Дирихле по составному модулю на последовательности сдвинутых чисел [Текст] /Д.Дж. Хокиев //Международная научная конференция, «Дифференциальные уравнения, математический анализ, и теория чисел», посвященная 25-летию XVI сессии Верховного совета Республики Таджикистан, 27-28 октября 2017 года в г. Курган-Тюбе, С. 149-154

6. Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характера Дирихле по составному модулю на последовательности сдвинутых чисел [Текст] /З.Х. Рахмонов, Д.Дж. Хокиев //Материалы международной научной конференции, посященной 90-летию Л.Г. Михайлова. г. Душанбе. 27-28 февраля 2018 г. С. 138-143

7. Хокиев Д. Дж..Короткие двойные суммы значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел [Текст] /Хокиев Д. Дж. // Материалы международной научной конференции Международная научная конференция, «Современные проблемы математики и её приложений» Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Душанбе. 21-22 июня 2018 г. С. 116-120.

Аннотация

диссертации Хокиева Дониёра Джалиловича на тему «О распределении значений характеров Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

Объект исседования: Целью работы является получение нетривиальной оценки суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю , в последовательности сдвинутых простых чисел, для возможно короткой суммы.

Методы исследования: Степень обоснованности научных результатов диссертации подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел.

Научная новизна: Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- при $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ найдена нетривиальная оценка коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях;
- при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ получены нетривиальные оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях;
- доказана нетривиальная оценка коротких сумм значений неглавного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Шарҳи мухтасар ба рисолаи диссертатсионии Хокиев Дониёр Ҷалилович дар мавзӯи «Оиди тақсимшавии қиматҳои характери Дирихле дар пайдарпайиҳои лағжонидашудаи ададҳои содда» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика-математика аз рӯйи ихтисоси 01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Калимаҳои калидӣ: характери Дирихле, ададҳои соддаи лағжонидашуда, суммаи кӯтоҳи характерҳо, суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содда.

Мақсади кор: Гирифтани баҳои ғайритривиалӣ барои суммаҳои кӯтоҳи қиматҳои характерҳои ғайриасосии Дирихле аз рӯи модули адади таркибӣ дар пайдарпайиҳои ададҳои соддаи лағжонидашуда.

Методҳои тадқиқот: Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои илмӣ дар рисолаи номзадӣ бо далелҳои қатъии математикӣ исбот карда шудааст, натиҷаҳои гирифташуда бо истифодаи усулҳои муосири назарияи аналитикии ададҳо исбот карда шудааст.

Навовариҳои илмӣ: Натиҷаҳои асосии диссертатсия нав буда, онҳо бо исботҳои муфассал асоснок карда шуда, бо чунин нишондодҳо арзёбӣ карда мешаванд:

- ҳангоми $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ баҳои гайритривиалии суммаҳои кутоҳи қиматҳои характерҳои примитивии Дирихле аз рӯӣ модули адади таркибии q дар пайдарпайиҳои ададҳои лагжонидашудаи дар прогресияи арифметикӣ хобанда, гирифта шудааст;
- ҳангоми $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ баҳои ғайритривиалии сумаҳои кӯтоҳи дукаратаи қиматҳои характерҳои примитивии Дирихле аз рӯи модули таркибӣ аз ҳосили зарбҳои ададҳои лағжонидашудаи дар прогресияхои араифметикӣ хобанда гирифта шудааст;
- баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи қиматҳои характери ғайриасосии Дирихле дар пайдарпайиҳои ададҳои соддаи лағжонидашуда исбот карда шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва амалӣ. Кори илмӣ моҳияти назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳои таҳқиқотро мутахассисони назарияи аналитикии ададҳо истифода бурда метавонанд.

Annotftion

Of the dissertation of Khokiev Doniyor Jalilovich on the theme "On the distribution of the values of Dirichlet characters with respect to the composite modulus, in the sequence of shifted primes" for sobtaining the degree of candidate of physical and mathematical sciences,specialty н 01.01.06 – Mathematical logic, algebra and numbers theory

Keywords: Dirichlet character, shifted prime number, short sums of characters, trigonometric sums over primes.

Object of study: The aim of the paper is to obtain a nontrivial estimate of the sum of the values of the nonprincipal Dirichlet character for a composite module, in a sequence of shifted primes, for a possibly short sum.

Methods of research: The of validity in the thesis of scientific results is confirmed by rigorous mathematical proofs obtained as a strict of applying modern methods of analytic theory numbers.

Scientific novelty: The main results of the thesis are new, they are based on detailed evidence and are as follows:

- at $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ a nontrivial estimate of the short sums of the values of the primitive Dirichlet character with respect to the composite modulus q in a sequence of shifted numbers lying in arithmetic progressions, is found;
- at $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ a nontrivial estimates of the short double sums of the values of the primitive Dirichlet character with respect to the composite modulus q from the shifted products of two numbers lying in arithmetic progressions are obtainned;

- We prove a nontrivial estimate of the short sums of the values of the primitive Dirichlet character in the sequence of shifted primes, is provet.

Theoretical and practical value: The work is of a theoretical nature. Its results and the methodology for obtaining them can be used by specialists in the field of analytic numbers theory.