Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

ХОКИЕВ ДОНИЁР ДЖАЛИЛОВИЧ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ ПО СОСТАВНОМУ МОДУЛЮ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
академик АН РТ, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2018

Оглавление

Обозначения

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$;

$c, c_1, c_2, \cdots$, — положительные постоянные числа, не всегда одни и те же;

ε, δ — положительные, сколь угодно малые постоянные;

x — достаточно большое положительное число;

χ_q — примитивный характер по модулю q;

$\varphi(q)$ — функция Эйлера;

$\omega(q)$ — число различных простых делителей числа q, для оценки которого воспользуемся известным неравенством

$$\omega(q) \leq \frac{c_\omega \mathscr{L}_q}{\ln \mathscr{L}_q},$$

$\mu(n)$ — функция Мёбиуса;

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта;

$\tau(n)$ — число делителей числа n;

$\tau_r(n)$ — число решений уравнения $x_1 x_2 \ldots x_r = n$ в натуральных числах: $x_1, x_2, \ldots, x_r$;

$\mathscr{L} = \ln xq$.

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он [1] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T_1(\chi)=\sum_{p\le x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{\sqrt[3]{x}}}.$$

В 1943 г. И.М. Виноградов [2, 3] уточнил эту оценку, доказав, что

$$|T_1(\chi)|\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \tag{1}$$

При $x\gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p\le x$.

Гольдбаховым числом называют число, представимое в виде суммы двух нечётных простых чисел. Задача о распределении таких чисел в «коротких» арифметических прогрессиях возникла при попытке решить бинарную проблему Гольдбаха. Первый результат условного характера здесь принадлежит

Ю.В. Linnику [4]. В предположении расширенной гипотезы Римана он показал, что имеет место неравенство

$$G(D,l) \le D\ln^6 D,$$

где $G(D,l)$ – наименьшее Гольдбахово число в арифметической прогрессии

$$Dk+l, \qquad k=0,1,2,\dots$$

Этот результат был уточнен К. Прахаром [5, 6] и Ю. Вангом [7]. Они при тех же предположениях доказали, что

$$G(D,l) \le D(\ln D)^{3+\varepsilon}.$$

М. Ютила [8] в 1968 г. доказал безусловную теорему. Он, воспользовавшись оценкой (1), показал, что если D – нечётное простое число, то

$$G(D,l) \ll D^{\frac{11}{8}+\varepsilon}.$$

Затем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T_1(\chi)$ при $x \ge q^{0{,}75+\varepsilon}$, где q — простое число [9, 10, 11]. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T_1(\chi)$ можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T_1(\chi)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \ge q^{1+\varepsilon}$.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник [12] в 1971 г. писал по этому поводу: *«Весьма важны исследования И.М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел $T_1(\chi)$, которая давала степенное понижение по сравнению с x уже при $x > q^{0{,}75+\varepsilon}$. Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А.А. Карацубе.»*

А.А. Карацуба в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени [13, 14, 15]. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он доказал следующее утверждение [13, 16, 17]: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

А.А. Карацуба применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества произведений сдвинутых простых чисел вида $p(p'+k)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью [18], (см. также [13, 19, 20, 21, 22, 23]).

З.Х. Рахмонов обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал следующее утверждение [24, 25, 26]: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих число q, тогда*

$$T_1(\chi) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}\tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1) \right) \tau(q).$$

Применяя эту оценку, он [24, 27] также доказал, что для достаточно большого нечётного натурального числа D имеет место оценка

$$G(D, I) \ll D^{c+\varepsilon},$$

где ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, c — нижняя грань чисел a таких, что для некоторой постоянной $A > 2$,

$$\sum_{\chi \, mod \, D} N(\alpha, T, \chi) \ll (DT)^{2a(1-\alpha)} (\ln DT)^A.$$

Из «плотностной» теоремы Хаксли[28] следует, что при $A = 14$ в последней формуле

$$c \leq \frac{6}{5}.$$

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T_1(\chi_q)$ существует, когда x – длина суммы – по порядку меньше q [29]. Они доказали следующее: *для примитивного характера* χ_q *и всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$*,такое что для всех* $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ *имеет место оценка*

$$T_1(\chi_q) \ll xq^{-\delta}. \tag{2}$$

З.Х. Рахмонов [30, 31, 32] в 2013 году доказал, что *если* q *– достаточно большое натуральное число,* χ_q *– примитивный характер по модулю* q*,* $(l, q) = 1$*,* ε *– положительное, сколь угодно малое постоянное число,* $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$*, тогда*

$$T_1(\chi_q) \ll x \exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$

В 2017 г. Bryce Kerr в [33] доказал оценку (3.6), то есть для $T_1(\chi_q)$ получил оценку с степенным понижением уже при $x \geq q^{\frac{5}{6}+o(1)}$.

В 2017 году З.Х. Рахмонов [34, 35] доказал теорему: *пусть* D *– достаточно большое натуральное число,* χ *— неглавный характер по модулю* D*,* χ_q *– примитивный характер по модулю* q*, порожденный характером* χ*,* q *– свободное от кубов,* $(l, D) = 1$*,* ε *– положительное, сколь угодно малое постоянное число, тогда при* $x \geq D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$*, имеем*

$$T_1(\chi) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right).$$

Как уже выше было отмечено, нетривиальные оценки суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавный характер по модулю D, D – простое число, были приложены в задачах о наименьшем гольдбаховых числах и о распределении произведений сдвинутых простых чисел в коротких арифметических прогрессиях. При решении этих задач для составного модуля D, наряду с нетривиальными оценками суммы $T_1(\chi)$, для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для производных характеров. Поэтому, естественно рассматривать задачу о нетривиальной оценке суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавний характер по составному модулю D.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней доказана нетривиальная оценка коротких сумм значений произвольного неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел.

Цель работы.

Целью работы является получение нетривиальной оценки суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю, в последовательности сдвинутых простых чисел, для возможно короткой суммы.

Методы исследования

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно:

- метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова;
- метода А.А. Карацубы оценки суммы $T(\chi_q)$ для простого q;
- методами З.Х. Рахмонова оценки суммы $T(\chi_q)$, где χ_q — примитивный характер по модулю q , (q — составное).

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- при $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ найдена нетривиальная оценка коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях вида
$$S_y(u,\eta,\nu) = \sum_{\substack{u-y<n\leq u \\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta\nu,q)=1.$$

- при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ получены нетривиальные оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида
$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n\chi_q(mn-l) \quad (l\nu,q)=1;$$

- доказана нетривиальная оценка коротких сумм значений неглавного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конфиренциях и семинарах

- международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвящённая 75-летию со дня рождения Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015 г.

- XIV международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г.И. Архипова и С.М. Воронина, г. Саратов. 12 – 15 сентября 2016 г.

- международная научная конференция «Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел», посвящённая 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан, Курган-тюбе, 27-28 октября 2017 г.

- международная научная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения Л.Г. Михайлова, Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.

- международная научная конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Душанбе, 20-21 июня 2018 г.

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2015 – 2018 гг.) и общеинститутский семинаре (2015 – 2018 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- семинар кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 71 страницы. Список цитированной литературы включает 53 наименований.

Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Введение к диссертации содержит обзор результатов, относящихся к теме диссертации, и формулировки основных полученных результатов.

Первая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях. В первом параграфе приведены постановка задачи и формулировка результатов первой главы.

Берджесс [36, 37, 38] *для неглавного характера* $\chi(n)$ *по модулю* q *и для короткой суммы*

$$S_y(u)=\sum_{u-y<n\le u}\chi(n),$$

где r *– фиксированное целое положительное число получил оценку вида*

$$|S_y(u)|\ll y^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{r+1}{4r^2}+\varepsilon},$$

где q *— число свободное от кубов, или* $r=2$*, или* $r=3$*.*

Отметим, что для всех составных модулей q за исключением модулей свободных от кубов оценка Берджесса будет нетривиальной при при $y\ge q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Для модулей свободных от кубов она будет нетривиальной при $y\ge q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

При изучении закона распределения значений примитивного характера χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки суммы вида

$$S_y(u,\eta)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\(n,q)=1}}\chi_q(n-\eta),\qquad (\eta,q)=1,$$

которые называются *суммой значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел.* Если q — простое число, то изучение суммы $S_y(u,\eta)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta)=\sum_{u-y<n\le u}\chi_q(n-\eta)-\chi_q(-\eta)\sum_{x-y<nq\le x}1=$$
$$=S_y(u-\eta)-\chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q}-\left\{\frac{x}{q}\right\}+\left\{\frac{x-y}{q}\right\}\right)$$

сводится к суммам $S_y(u-\eta)$. В случае составного q нетривиальные оценки для суммы $S_y(u,\eta)$ впервые были получены в 1985 г. [25, 26]. Затем нетривиальные оценки для более коротких сумм $S_y(u,\eta)$ при $y\ge q^{\frac13+\varepsilon}$ были получены в работах [29, 30, 31, 32].

А при изучении закона распределения значений неглавного характера χ по составному модулю D не являющиеся примитивным на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки сумм более общего вида

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta \pmod \nu}}\chi_q(n-\eta),\qquad (\eta\nu,q)=1,$$

которые называются *суммами значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел лежащих в арифметических прогрессиях.*

Если q — простое число, то изучение сумм $S_y(u,\eta,\nu)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta,\nu)=\chi_q(\nu)S_{\frac{y}{\nu}}(u-\eta)+\chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q\nu}+\left\{\frac{u}{q\nu}-\frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right\}-\left\{\frac{u-y}{q\nu}-\frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right\}\right).$$

также сводится к суммам $S_{\frac{y}{\nu}}(u-\eta)$.

В случае составных модулей для сумм $S_y(u,\eta,\nu)$, как и для сумм $S_y(u,\eta)$ при $y\ge q^{\frac12+\varepsilon}$ первые нетривиальные оценки получил З.Х. Рахмонов [25, 26], а в 2017 г. он [39, 40] для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку при

$$y\ge q^{\frac14+\varepsilon}.$$

Основным результатом первой главы является следующая теорема о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях $S_y(u,\eta,\nu)$ для произвольного модуля q.

Теорема 1.1. *Пусть* $(\eta\nu,q)=1$, $y\ge q^{\frac13+\frac85\delta}$, $y\le q$, $D^{\frac12}\le q\le D$ *и* $\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, *тогда*

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(n-\eta)\ll\frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержатся в лемме 1.10.

Лемма 1.10 *Пусть* M, N, d, k *и* η *целые числа, удовлетворяющие условиям* $(\eta,q)=(d,k)=1$, *и*

$$S=\sum_{M-N<n\le M}\chi_q(nd+\eta k).$$

Тогда для $N<q^{\frac{7}{12}}d^{-\frac12}$, $D^{\frac12}\le q\le D$ *и* $d\le\exp(\sqrt{2\mathscr{L}})$ *справедливая оценка*

$$|S|\le N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}. \qquad (3)$$

Доказательство леммы 1.10 проводится методом А.А. Карацубы [13, 14], позволившим ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. Основным моментами в доказательстве леммы 1.10 является сведение оценки модуля суммы S к числу решений сравнения от четырёх неизвестных и применение леммы 1.9 об оценке числа решений этого сравнения.

При изучении закона распределения значений производного характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида $S_y(u,\eta,\nu)$, то есть *сумм значений примитивного характера*

Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, исследованных в первой главе, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм $W = W_q(x, M, N, l, \nu)$ вида

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$ и $|b_n| \leq \tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма $W_q(x, M, N, l, \nu)$ называется *двойной суммой значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях.*

В сумме $W_q(x, M, N, l, \nu)$, не ограничивая общности можно считать, что $N \leq M$. Отметим, что если в рассматриваемой задаче (*закон распределения значений производных характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l, D) = 1$*) характер χ является примитивным, то есть если $\chi = \chi_q$, то вместо суммы $W_q(x, M, N, l, \nu)$ возникает более простая сумма $W_q(x, M, N, l, 1) = W_q(x, M, N, l)$ вида

$$W_q(x, M, N, l) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (l, q) = 1,$$

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму $W_q(x, M, N, l)$ для простого q получил её нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$, а затем нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x, M, N, l)$ при $x \geq q^{0{,}75+\varepsilon}$ [3, 41]. Наилучшая нетривиальная оценка $W_q(x, M, N, l)$ для простого q при $x \geq q^{0{,}5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [16].

З.Х. Рахмонов изучил сумму $W_q(x, M, N, l, \nu)$ для составного q и получил нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$ [24, 25, 26]. Нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x, M, N, l)$ для составного q при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [29]. З.Х. Рахмонов для составного q доказал нетривиальную оценку $W_q(x,M,N,l)$ при $x\geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ [30, 31, 32], а в 2017 г. он [39, 40] для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $y\geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Основными результатами второй главы являются теоремы 2.1 и 2.2 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида $W_q(x,M,N,l,\nu)$.

Теорема 2.1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N\leq U<2N$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ (m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\leq\min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\nu)}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\leq 2M}|a_m|^\alpha\ll M\mathscr{L}^{c_\alpha},\quad \alpha=1,2;\qquad |b_n|\ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)|\ll B\left(M^{\frac{3}{4}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}}+M^{\frac{3}{4}}Nq^{\frac{1}{8}+\frac{\delta}{4}}\right)\mathscr{L}^{\frac{2c_1+c_2}{4}+1}.$$

Доказательство теорем 2.1 проводится развитием метода доказательства леммы 14 работы З.Х. Рахмонова [32], которая в свою очередь опирается на методы работ А.А. Карацубы [13, 14, 15, 16] и оценки Берджесса [37].

Теорема 2.2. *Пусть M, N, U — целые числа, $N\leq U<2N\leq q^{\frac{1}{6}}$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ (m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\leq\min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\nu)}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\leq 2M}|a_m|^\alpha\ll M\mathscr{L}^{c_\alpha},\quad \alpha=1,2;\qquad |b_n|\ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)|\ll BM^{\frac{5}{6}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta}\mathscr{L}^{\frac{4c_1+c_2+1}{6}}.$$

Доказательство теорем 2.2 проводится развитием метода доказательства леммы 15 работы З.Х. Рахмонова [32], которая в свою очередь также опирается на методы работ А.А. Карацубы [13, 14, 15, 16] и оценки Берджесса [38].

Следствиями теорем 2.1 и 2.2, в частности являются нетривиальные оценки двойных сумм $W_q(x, M, N, l, \nu)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеющих соответственно

- сумму для длины N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{6}} \leq N \leq q^{\frac{1}{3}}$ (следствие 2.1.1);
- сумму для длины N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{12}} \leq N \leq q^{\frac{1}{6}}$ (следствие 2.2.1).

Следствие 2.1.1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N$, $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leq N \leq q^{\frac{1}{4}+\theta}$, $D^{\frac{1}{2}} \leq q \leq D$, $\nu \leq \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,*

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau_5(m)$, $|b_n| \leq 1$. Тогда при $x \geq q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu} \exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Следствие 2.2.1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N$, $q^{\theta} \leq N \leq q^{\frac{1}{6}}$, $D^{\frac{1}{2}} \leq q \leq D$, $\nu \leq \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,*

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau_5(m)$, $|b_n| \leq 1$. Тогда при $x \geq q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu} \exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

В третьей главе, используя результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях;

- следствия 2.1.1 и 2.2.1 теорем 2.1 и 2.2 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях,

доказываем теорему 3.1 о нетривиальной оценке суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, $(l, D) = 1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при $x \geq D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n-l) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

Доказательство теоремы 3.1 проводится методом оценок суммы с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами А.А. Карацубы [16] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для простого q, методом З.Х. Рахмонова [32] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для составного q. Его основу, как уже отмечали, составляют теорема 1.1 первой главы и теоремы 2.1 и 2.2 второй главы.

Глава 1

Короткие суммы значений неглавного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях

1.1 . Постановка задачи и формулировка результатов

Берджесс [36, 37, 38] *для неглавного характера* $\chi(n)$ *по модулю* q *и для короткой суммы*

$$S_y(u)=\sum_{u-y<n\le u}\chi_q(n),$$

где r *– фиксированное целое положительное число получил оценку вида*

$$|S_y(u)|\ll y^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{r+1}{4r^2}+\varepsilon},$$

где q *— число свободное от кубов, или* $r=2$*, или* $r=3$*.*

Отметим, что для всех составных модулей q за исключением модулей свободных от кубов оценка Берджесса будет нетривиальной при при $y\ge q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Для модулей свободных от кубов она будет нетривиальной при $y\ge q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

При изучении закона распределения значений примитивного характера χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки суммы вида

$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta, q) = 1,$$

которую называют *суммой значений характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел.* Если q — простое число, то изучение суммы $S_y(u,\eta)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta) = \sum_{u-y<n\le u} \chi_q(n-\eta) - \chi_q(-\eta) \sum_{x-y<nq\le x} 1 = \\ = S_y(u-\eta) - \chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q} - \left\{\frac{x}{q}\right\} + \left\{\frac{x-y}{q}\right\}\right)$$

сводится к суммам $S_y(u-\eta)$. В случае составного q нетривиальные оценки для суммы $S_y(u,\eta)$ впервые были получены в 1985 г. [25, 26]. Затем нетривиальные оценки для более коротких сумм $S_y(u,\eta)$ при $y \ge q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ были получены в работах [29, 30, 31, 32].

А при изучении закона распределения значений неглавного характера χ по составному модулю D не являющиеся примитивным на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки сумм более общего вида

$$S_y(u,\eta,\nu) = \sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta \pmod{\nu}}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta\nu, q) = 1,$$

которые называются *суммами значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях.*

Если q — простое число, то изучение сумм $S_y(u,\eta,\nu)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta,\nu) = \sum_{\substack{u-y<n\le u\\ n\equiv\eta \pmod{\nu}}} \chi_q(n-\eta) + \chi_q(-\eta) \sum_{\substack{u-y<nq\le u\\ nq\equiv\eta \pmod{\nu}}} 1 =$$

$$= \sum_{u-y<n\nu+\eta\le u} \chi_q((n\nu+\eta)-\eta) + \chi_q(-\eta) \sum_{\frac{u-y}{q}<n\nu+\eta q_\nu^{-1}\le\frac{u}{q}} 1 =$$

$$=\chi_q(\nu) \sum_{\frac{u-y-\eta}{\nu}<n\le\frac{u-\eta}{\nu}} \chi_q(n) + \chi_q(-\eta)\left(\left[\frac{u}{q\nu} - \frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right] - \left[\frac{u-y}{q\nu} - \frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right]\right) =$$

$$=$$

$$=\chi_q(\nu) S_{\frac{y}{\nu}}(u-\eta) + \chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q\nu} + \left\{\frac{u}{q\nu} - \frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right\} - \left\{\frac{u-y}{q\nu} - \frac{\eta q_\nu^{-1}}{\nu}\right\}\right).$$

также сводится к суммам $S_{\frac{y}{\nu}}(u-\eta)$.

В случае составных модулей для сумм $S_y(u,\eta,\nu)$, как и для сумм $S_y(u,\eta)$ при $y \ge q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ первые нетривиальные оценки получил З.Х. Рахмонов [25, 26], а в 2017 г. он [39, 40] для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку при

$$y \ge q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

Основным результатом первой главы является следующая теорема о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях $S_y(u,\eta,\nu)$ для произвольного составного модуля q.

Теорема 1.1. *Пусть* $(\eta\nu, q) = 1$, $y \ge q^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\delta}$, $y \le q$, $D^{\frac{1}{2}} \le q \le D$ *и* $\nu \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, *тогда*

$$S_y(u,\eta,\nu) = \sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta \pmod{\nu}}} \chi_q(n-\eta) \ll \frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержатся в леммах 1.9 и 1.10. Доказательство леммы 1.10 проводится методом А.А. Карацубы [13, 14], позволившим ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени.

1.2. Известные леммы

Лемма 1.1. *Пусть* $r \ge 1$, $M \ge 1$ — *целые числа,* $a_\nu, b_\nu \ge 0$ *при* $\nu = 1, 2, \ldots,$. *Тогда имеют место следующие соотношения:*

а) *(неравенство Гёльдера)*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{M} a_\nu b_\nu\right)^r \le \left(\sum_{\nu=1}^{M} a_\nu\right)^{r-1} \sum_{\nu=1}^{M} a_\nu b_\nu^r;$$

б) *(неравенство Коши)*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{M} a_\nu b_\nu\right)^2 \le \sum_{\nu=1}^{M} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{M} b_\nu^2.$$

Лемма 1.2. *Пусть* $F(x,z,q)$ *количество чисел* $\le x$ *взаимно простых с* q, $q \le x$, *и имеющих только простые делители меньше* z, $\ln x \le z \le x^{\frac{1}{e}}$, $\alpha = \ln z / \ln x$; *тогда*

$$F(x,z,q) \ll x \prod_{p \backslash q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1}{\alpha} + \ln\ln\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}}\right); \quad |\theta| \le 1.$$

Доказательство см. [42].

Лемма 1.3. *При* $u \ge 2$ *имеем*

$$\sum_{n \le u} \tau_r^k(n) \ll u \left(\ln x\right)^{r^k - 1}, \qquad k = 1, 2.$$

Доказательство см. [43].

Лемма 1.4. *Пусть* r — *произвольное фиксированное натуральное число,* Z — *натуральное число,* q *число свободное от квадратов или* $r = 2$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{\lambda=0}^{q-1} \left|\sum_{z=1}^{Z} \chi_q(\lambda + z)\right|^{2r} \ll Z^r q + Z^{2r} q^{\frac{1}{2}+\delta},$$

где постоянная под знаком $\ll$ *зависит только от* r *и* δ.

Доказательство см. [37].

Лемма 1.5. *Для произвольного натурального $Z \le q^{\frac{1}{6}}$ справедливо соотношение*

$$\sum_{z_1,\ldots,z_6=1}^{Z}\left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi_q\left(\frac{(\lambda+z_1)(\lambda+z_2)(\lambda+z_3)}{(\lambda+z_4)(\lambda+z_5)(\lambda+z_6)}\right)\right| \ll Z^3q^{1+\delta}.$$

Доказательство см. [38].

Лемма 1.6. *Пусть χ_q — примитивный характер по модулю q. Тогда*

$$\tau(\bar{\chi}_q)\chi_q(n) = \sum_{m=1}^{q}\bar{\chi}_q(m)e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

где

$$\tau(\chi_q) = \sum_{m=1}^{q}\chi_q(m)e\left(\frac{m}{q}\right), \qquad |\tau(\chi_q)| = \sqrt{q}.$$

Доказательство см. [44]

Лемма 1.7. *Для любых натуральных чисел u, q имеет место асимптотическая формула*

$$\left|\sum_{\substack{t=1\\(t,q)=1}}^{u} 1 - \frac{\varphi(q)}{q}u\right| \le 2^{\omega(q)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,q)=1}}^{U} 1 = \sum_{u=1}^{U}\sum_{d|(u,q)}\mu(d) = \sum_{d|q}\mu(d)\sum_{\substack{u=1\\u\equiv 0 \pmod d}}^{U} 1 =$$
$$= \sum_{d|q}\mu(d)\left[\frac{U}{d}\right] = U\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d\backslash q}\mu(d)\left\{\frac{U}{d}\right\}.$$

Отсюда, воспользовавшись формулой

$$\varphi(q) = q\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d},$$

найдем

$$\left|\sum_{\substack{u=1\\(u,q)=1}}^{U} 1-\frac{\varphi(q)}{q}U\right| = \left|\sum_{d\backslash q}\mu(d)\left\{\frac{U}{d}\right\}\right| \le \sum_{d|q}\mu^2(d) = \prod_{p|q}(1+\mu^2(p)) = 2^{\omega(q)}.$$

Лемма доказана.

1.3. Вспомогательные леммы

Лемма 1.8. *Пусть* $q\backslash D$, *тогда*

$$\sum_{\substack{d\backslash q\\ d>\exp\sqrt{2\mathscr{L}}}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство. Разобьем интервал суммирования на интервалы вида $M < d \le 2M$. Получим не более $\mathscr{L}_q$ сумм $S(M)$ вида

$$S(M) = \sum_{\substack{d|q\\ M<d\le 2M}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll M^{-1}\sum_{\substack{d|q\\ d\le 2M}} 1.$$

Пусть $q = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$ каноническое разложение числа q на простые сомножители и q_i i — тое простое число. Очевидно существует k такое, что

$$q' = r_1r_2\dots r_k \le q < r_1r_2\dots r_kr_{k+1}, \qquad k\ge t.$$

Согласно закону распределения простых чисел

$$\ln q' = \sum_{i\le k}\ln r_i = \sum_{p\le r_k}\ln p > \frac{r_k}{2},$$

так, что

$$r_k < 2\ln q' \le 2\mathscr{L}_q.$$

Пусть $q'' = r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\dots r_t^{\alpha_t}$. очевидно $q''\le q$ and $r_t\le r_k$, тогда

$$S(M) \ll M^{-1}\sum_{\substack{d|q\\ d\le 2M}} 1 \le M^{-1}\sum_{\substack{d|q''\\ d\le 2M}} 1.$$

Числа d, $d|q''$ состоят из простых делителей $r_j \le r_t$. Так как $r_t < 2\mathscr{L}_q$, то последняя сумма не превосходит количество чисел $\le 2M$, имеющих только простые делители меньше $2\mathscr{L}_q$, то есть

$$S(M) \ll M^{-1} \sum_{\substack{d|q'' \\ d\le 2M}} 1 \le M^{-1} F(2M, 2\mathscr{L}_q, 1) \le M^{-1} F(2M, 2\mathscr{L}, 1).$$

Воспользовавшись леммой 1.2 при

$$x = 2M, \qquad b = 1, \qquad z = 2\mathscr{L}, \qquad \alpha = \frac{\ln z}{\ln x} = \frac{\ln 2\mathscr{L}}{\ln 2M},$$

имеем

$$S(M) \ll \exp\left(-\frac{\ln 2M}{\ln 2\mathscr{L}}\left(\ln\ln 2M - \mathscr{B}\right)\right),$$
$$\mathscr{B} = \ln\ln 2\mathscr{L} - \ln\ln\frac{\ln 2M}{\ln 2\mathscr{L}} + 1 + 2\theta\left(\ln\frac{\ln 2M}{\ln 2\mathscr{L}}\right)^{-1}.$$

Из условия $2M > \exp(\sqrt{2\mathscr{L}})$, следует, что $2\mathscr{L} < (\ln 2M)^2$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &\le \ln\ln\left(\ln 2M\right)^2 - \ln\ln\frac{\ln 2M}{\ln\left(\ln 2M\right)^2} + 1 + 2\left(\ln\frac{\ln 2M}{\ln\left(\ln 2M\right)^2}\right)^{-1} \\
&= 1 + \ln 2 - \ln\left(1 - \frac{\ln 2 + \ln\ln\ln 2M}{\ln\ln 2M}\right) + \frac{2}{\ln\ln 2M}\left(1 - \frac{\ln 2 + \ln\ln\ln 2M}{\ln\ln 2M}\right)^{-1} \\
&= 1 + \ln 2 + O\left(\frac{\ln 2 + \ln\ln\ln 2M}{\ln\ln 2M}\right) < 3 < 0.002\ln\ln 2M.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(M) \ll \exp\left(-\frac{\ln 2M}{\ln 2\mathscr{L}}\left(\ln\ln 2M - \mathscr{B}\right)\right) \ll \exp\left(-0.998\cdot\frac{\ln 2M\ln\ln 2M}{\ln 2\mathscr{L}}\right).$$

Из условия $2M > \exp(\sqrt{2\mathscr{L}})$, следует, что $\ln 2M > \sqrt{2\mathscr{L}}$, $\ln\ln 2M > 0.5\ln 2\mathscr{L}$, Поэтому

$$S(M) \ll \exp\left(-0.499\sqrt{2}\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll \mathscr{L}^{-1}\cdot\exp\left(-0.7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 1.9. *Пусть K — число решений сравнения:*

$$
\begin{aligned}
&(nd+\eta k)y \equiv (n_1d+\eta k)y_1 \pmod q,\\
&M<n,n_1\le M+N,\quad 1\le y,y_1\le Y,\quad (y,q)=1,\quad (y_1,q)=1,
\end{aligned}
$$

где $(\eta,q)=(k,d)=1$, d — делитель числа q, $2NY<q$, $d<Y$, $\rho(qd^{-1},Y)$ — число делителей β числа qd^{-1}, удовлетворяющего условиям $qY^{-1}\le\beta<qd^{-1}$ и $(\beta,d)=1$. Тогда справедливо соотношение:

$$
K\le NY+\frac{2Y^2}{d}+\frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y)+\frac{2(NY)^{1+\delta}}{d},
$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. При $y=y_1$, разделив обе части сравнения на y, $(y,q)=1$, находим

$$
nd+\eta k\equiv n_1d+\eta k \pmod q,\quad M<n,n_1\le M+N,\quad 1\le y\le Y,\quad (y,q)=1,
$$

или

$$
nd\equiv n_1d \pmod q,\quad M<n,n_1\le M+N,\quad 1\le y\le Y,\quad (y,q)=1.
$$

Разделив обе части сравнения и модуль на число d, найдем

$$
n-n_1\equiv 0 \pmod{qd^{-1}},\quad M<n,n_1\le M+N,\quad 1\le y\le Y,\quad (y,q)=1.
$$

Из условий $|n-n_1|<N$ и $2N\le qY^{-1}<qd^{-1}$ следует, что последнее сравнение превращается в уравнение

$$
n-n_1=0,\quad M<n,n_1\le M+N,\quad 1\le y\le Y,\quad (y,q)=1,
$$

то есть, если $y=y_1$, то $n=n_1$. Отсюда получаем

$$
K\le NY+2\kappa, \tag{1.1}
$$

где κ — число решений сравнения

$$
\begin{aligned}
&(nd+\eta k)y \equiv (n_1d+\eta k)y_1 \pmod q,\\
&M<n,n_1\le M+N,\quad 1\le y<y_1\le Y,\quad (y,q)=1,\quad (y_1,q)=1,
\end{aligned}
$$

или сравнения

$$(ny - n_1y_1)d \equiv \eta k(y_1 - y) \pmod q, \tag{1.2}$$
$$M < n, n_1 \le M + N, \quad 1 \le y < y_1 \le Y, \quad (y,q) = 1, \quad (y_1, q) = 1.$$

Левая часть и модуль сравнения (1.2) делятся на число d. Следовательно делится на число d, и её правая часть, то есть число $\eta k(y_1 - y)$,. Число η является взаимно простым с числом d, поэтому на d делится число $y - y_1$, то есть $y_1 - y \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; d)$, или $y_1 = y + td$. Таким образом сравнение (1.2) принимает вид

$$(ny - n_1(y + td))d \equiv \eta ktd \pmod q,$$
$$M < n, n_1 \le M + N, \quad 1 \le y < y + td \le Y, \quad (y,q) = 1, \quad (y + td, q) = 1.$$

Разделяя обе части этого сравнения и ее модуль на число d, получим

$$(n - n_1)y \equiv (n_1d + \eta k)t \pmod{qd^{-1}}, \tag{1.3}$$
$$M < n, n_1 \le M + N, \quad 1 \le y < y + td \le Y, \quad (y,q) = 1, \quad (y + td, q) = 1.$$

Разбивая множество решений сравнения (1.3), имеем

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3, \tag{1.4}$$

где κ_1, κ_2 и κ_3 число решений сравнения (1.3), обладающих соответственно свойствами:

1. $n_1d + \eta k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; qd^{-1})$;

2. $(n_1d + \eta k)t \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; qd^{-1})$ and $n_1d + \eta k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; qd^{-1})$;

3. $(n_1d + \eta k)t \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; qd^{-1})$.

Оценка κ_1. Сравнение $n_1d + \eta k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; qd^{-1})$ не имеет решения при $(d, qd^{-1}) > 1$, а при $(d, qd^{-1}) = 1$ имеет не более одного решения $n_1 = n_1^*$, $(n_1^*, qd^{-1}) = 1$, так как $2N < qd^{-1}$, то есть N — длина интервала изменения

n_1 меньше модуля сравнения. Сравнение (1.3) при $n_1 = n_1^*$, принимает вид

$$(n - n_1^*)y \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n \leq M + N,$$
$$1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1,$$

и при фиксированных y и t имеет одно решение $n = n_1^*$, следовательно

$$\kappa_1 \leq Y \left(\frac{Y}{d} + 1 \right) \leq \frac{2Y^2}{d}.$$

Оценка κ_2. Воспользовавшись условиями случая, сравнения (1.3) представим в виде системы сравнений

$$\begin{aligned} &(n_1 - n)y \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \\ &(n_1 d + \eta k)t \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

с условиями

$$n_1 d + \eta k \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n, n_1 \leq M + N,$$
$$1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = (y + td, q) = 1.$$

Из условий $(y, q) = 1$, $|n - n_1| < N$ и $2N \leq qd^{-1}$ следует, что первое сравнение системы (1.5) равносильно уравнению $n_1 = n$, поэтому количество решений системы (1.5) равно количеству решений сравнению

$$\begin{aligned} &(nd + \eta k)t \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad nd + \eta k \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \\ &M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Произведение чисел $nd + \eta k$ и t делится на qd^{-1}, но само число $nd + \eta k$ не делится на qd^{-1}, поэтому для каждого решения сравнения (1.6) существует делитель β числа qd^{-1}, что $\beta < qd^{-1}$ и

$$nd - \eta \equiv 0 \pmod{\beta}, \qquad t \equiv 0 \pmod{q(d\beta)^{-1}}.$$

Из условия $(d, \eta k) = 1$ вытекает, что сравнение $nd + \eta k \equiv 0 \pmod{\beta}$ имеет решение только при $(\beta, d) = 1$. При $(\beta, d) = 1$ символом $\kappa_2(\beta)$ обозначим число решений системы сравнений

$$
\begin{aligned}
&n \equiv \eta d_\beta^{-1} \pmod \beta, \qquad M < n \le M+N, \quad dd_\beta^{-1} \equiv 1 \pmod \beta \\
&t \equiv 0 \pmod{q(d\beta)^{-1}}, \quad 1 \le y < y+td \le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y+td,q)=1,
\end{aligned}
$$

или число решений сравнения

$$
\begin{gathered}
n \equiv \eta d_\beta^{-1} \pmod \beta, \qquad M < n \le M+N, \quad dd_\beta^{-1} \equiv 1 \pmod \beta \\
1 \le y < y+tq\beta^{-1} \le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y+tq\beta^{-1},q)=1.
\end{gathered}
$$

Границы изменения переменных y и t в этом сравнение представим в виде

$$
1 \le y < Y, \quad 1 \le t \le \frac{Y-y}{q\beta^{-1}}, \quad (y,q)=1, \quad (y+tq\beta^{-1},q)=1. \tag{1.7}
$$

При $y > Y - q\beta^{-1}$ верхняя граница изменения t меньше нижнего, поэтому область (1.7) можно представить в виде

$$
1 \le y \le Y - q\beta^{-1}, \quad 1 \le t \le \frac{Y-y}{q\beta^{-1}}, \quad (y,q)=1, \quad (y+tq\beta^{-1},q)=1.
$$

В свою очередь, если $\beta \le qY^{-1}$, то $Y - q\beta^{-1}$ — верхняя граница изменения y меньше нижней границы. Следовательно $\kappa_2(\beta) = 0$ при $\beta \le qY^{-1}$, а при $qY^{-1} < \beta < qd^{-1}$ для $\kappa_2(\beta)$ получим оценку

$$
\kappa_2(\beta) \le \left(\frac{N}{\beta}+1\right) \sum_{\substack{1 \le y < Y - q\beta^{-1} \\ (y,q)=1}} \left[\frac{Y-y}{q\beta^{-1}}\right] \le \left(\frac{NY}{q} + \frac{Y\beta}{q}\right) \sum_{\substack{1 \le y < Y - q\beta^{-1} \\ (y,q)=1}} 1.
$$

Далее, воспользовавшись соотношениями $2NY < q$, $\beta < qd^{-1}$ и $d < Y$, найдем

$$
\kappa_2(\beta) \le \left(1+\frac{Y}{d}\right) \sum_{\substack{1 \le y < Y - q\beta^{-1} \\ (y,q)=1}} 1 \le \frac{2Y}{d} \sum_{\substack{1 \le y < Y - q\beta^{-1} \\ (y,q)=1}} 1 < \frac{2Y^2}{d}.
$$

Суммируя это неравенство по всем делителям β числа qd^{-1}, удовлетворяющим условиям $qY^{-1} \le \beta < qd^{-1}$ и $(\beta,d)=1$, и обозначая количество таких делителей символом $\rho(qd^{-1},Y)$, получим

$$\kappa_2 \le \sum_{\substack{(\beta,d)=1,\ \beta|qd^{-1} \\ qY^{-1}\le\beta<qd^{-1}}} \kappa_2(\beta) \le \frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y).$$

Оценка κ_3**.** Напомним, что κ_3 — число решений сравнения

$$(n_1-n)y \equiv (n_1d+\eta k)t \pmod{qd^{-1}},$$

с условиями

$$(n_1d+\eta k)t \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad M<n,n_1\le M+N,$$
$$1\le y<y+td\le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y+td,q)=1.$$

Для фиксированной пары (n_1^*,t^*) символом $\kappa_3(\lambda)$ обозначим число решений сравнения

$$\begin{aligned}(n-n_1^*)y \equiv{}&\lambda \pmod{qd^{-1}}, \quad M<n\le M+N,\\ &1\le y<y+t^*d\le Y, \quad (y,q)=1,\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $0<|\lambda|\le q/2d$ — абсолютно наименьший вычет числа $(n_1^*d+\eta k)t^*$ по модулю qd^{-1}. Воспользовавшись границами изменения переменных n, n_1 и y, и условием $2NY<q$, найдем

$$0<|(n-n_1^*)y|<NY<\frac{q}{2}.$$

Из этого неравенства следует, что сравнение (1.8) превращается в уравнение

$$(n-n_1^*)y=\lambda, \quad M<n\le M+N, \quad 1\le y<y+t^*d\le Y, \quad (y,q)=1, \tag{1.9}$$

где для параметра λ выполняется соотношение

$$1\le|\lambda|<NY.$$

Таким образом, для фиксированной пары (n_1^*,t^*), $\kappa_3(\lambda)$ — количество решений сравнения (1.8) равно числу решений уравнения (1.9), для которого справедливо неравенство

$$\kappa_3(\lambda)\le\tau(|\lambda|)\le 0.5\,(NY)^{\delta}.$$

Количество всех возможных пар (n_1^*, t^*) не превосходит $N\left(Yd^{-1}+1\right)$. Следовательно

$$\kappa_3 \le N\left(\frac{Y}{d}+1\right)\cdot 0.5(NY)^{\delta} \le \frac{(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Подставляя найденные оценки для κ_1, κ_2 и κ_3 (1.4), а затем в (1.1), найдем

$$K \le NY + 2(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3) \le NY + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1}, Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.10. *Пусть M, N, d, k и η целые числа удовлетворяющие условиям, $(\eta, q) = (d, k) = 1$, и*

$$S = \sum_{M-N<n\le M} \chi_q(nd+\eta k).$$

Тогда для $N < q^{\frac{7}{12}} d^{-\frac{1}{2}}$, $D^{\frac{1}{2}} \le q \le D$ и $d \le \exp(\sqrt{2\mathscr{L}})$ справедливая оценка

$$|S| \le N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Оценку (1.10) для сумму S докажем методом математической индукции по N. При $N \le q^{\frac{1}{3}}$ и $d \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$ для правой части оценки (1.10) справедливо неравенство

$$N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \ge N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} > N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}} \ge N^{\frac{2}{3}}\left(N^3\right)^{\frac{1}{9}} = N,$$

то есть в этом случае оценка (1.10) является тривиальной и её возьмем в качестве базы индукции.

Далее будем считать, что

$$N > q^{\frac{1}{3}}, \qquad d \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}.$$

Производя в сумме S сдвиг интервала суммирования на h, $1 \le h \le H < N$, получим

$$S = \sum_{M-N<n\le M} \chi_q((n+h)d+\eta k) + \sum_{M-N<n\le M-N+h} \chi_q(nd+\eta k) - \sum_{M<n\le M+h} \chi_q(nd+\eta k).$$

Оценивая две последние суммы, воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$S \leq \left| \sum_{M-N<n\leq M} \chi_q((n+h)d+\eta k) \right| + 2H^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}},$$

Полагая в этом неравенстве $h = yz$, и суммируя её по y и z в пределах

$$1 \leq y \leq Y, \quad (y,q)=1, \quad 1 \leq z \leq Z, \quad Y = \left[0,5Nq^{-\frac{1}{6}}d\right], \quad Z = \left[0,5q^{\frac{1}{6}}d^{-1}\right],$$

приходим к неравенству:

$$|S| \leq (Y_q Z)^{-1} \left| \sum_{\substack{1\leq y\leq Y\\ (y,q)=1}} \sum_{1\leq z\leq Z} \sum_{M-N<n\leq M} \chi_q((n+yz)d+\eta k) \right| + 2(YZ)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}},$$

где Y_q количество чисел $y \in [1,Y]$ взаимно простых с числом q. Определяя число y^{-1} из сравнения $yy^{-1} \equiv 1 \pmod q$, имеем

$$|S| \leq (Y_q Z)^{-1} \left| \sum_{M-N<n\leq M} \sum_{1\leq y\leq Y} \chi_q(y) \sum_{1\leq z\leq Z} \chi_q((nd+\eta k)y^{-1}+zd) \right| + 2(YZ)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \leq$$

$$\leq (Y_q Z)^{-1} \sum_{M-N<n\leq M} \sum_{\substack{1\leq y\leq Y\\ (y,q)=1}} \left| \sum_{1\leq z\leq Z} \chi_q((nd+\eta k)y^{-1}+zd) \right| + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}.$$

Обозначая в этом неравенстве символом $I(\lambda)$ — число решений сравнения

$$(nd+\eta k)y^{-1} \equiv \lambda \pmod q, \qquad M-N<n\leq M, \qquad 1\leq y\leq Y, \quad (y,q)=1,$$

получим

$$|S| \leq (Y_q Z)^{-1} W + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}, \tag{1.11}$$

$$W = \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left| \sum_{1\leq z\leq Z} \chi_q(\lambda+zd) \right|.$$

Возведём обе части этого равенства в куб и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1.1), полагая в нем

$$\nu=\lambda, \quad a_\nu = I(\lambda), \quad b_\nu = \left| \sum_{1\leq z\leq Z} \chi_q(\lambda+zd) \right|,$$

и тем, что

$$\sum_{\lambda=1}^{q} I(\lambda) \le NY_q,$$

будем иметь:

$$W^3 \le \left(\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\right)^2 \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left|\sum_{1\le z\le Z} \chi_q(\lambda+zd)\right|^3 \le$$
$$\le (NY_q)^2 \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left|\sum_{1\le z\le Z} \chi_q(\lambda+zd)\right|^3.$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат и воспользуемся неравенством Коши (лемма 1.1), полагая в нем

$$\nu=\lambda, \quad a_\nu = I(\lambda), \quad b_\nu = \left|\sum_{1\le z\le Z} \chi_q(\lambda+zd)\right|^3.$$

Будем иметь

$$W^6 \le (NY_q)^4 KV, \qquad K=\sum_{\lambda=0}^{q-1} I^2(\lambda), \qquad V=\sum_{\lambda=0}^{q-1} \left|\sum_{1\le z\le Z} \chi_q(\lambda+zd)\right|^6.$$

Пользуясь леммой 1.5, получим

$$V=\sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{z_1,\ldots,z_6=1}^{Z} \chi\left(\frac{(\lambda+z_1d)(\lambda+z_2d)(\lambda+z_3d)}{(\lambda+z_4d)(\lambda+z_5d)(\lambda+z_6d)}\right) \le$$
$$\le \sum_{z_1,\ldots,z_6=1}^{Z} \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+z_1d)(\lambda+z_2d)(\lambda+z_3d)}{(\lambda+z_4d)(\lambda+z_5d)(\lambda+z_6d)}\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{z_1,\ldots,z_6=1}^{Zd} \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+z_1)(\lambda+z_2)(\lambda+z_3)}{(\lambda+z_4)(\lambda+z_5)(\lambda+z_6)}\right)\right| \le Z^3d^3q^{1+\delta}.$$

Следовательно

$$W^6 \le (NY_q)^4 Z^3d^3q^{1+\delta}\cdot K. \tag{1.12}$$

Сумма K равна числу решений сравнения

$$(nd+\eta k)y^{-1} \equiv (n_1d+\eta k)y_1^{-1} \pmod q,$$
$$M<n,n_1\le M+N, \quad 1\le y,y_1\le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y_1,q)=1,$$

или сравнения

$$\begin{aligned}
&(nd+\eta k)y \equiv (n_1 d+\eta k)y_1 \pmod q,\\
&M < n, n_1 \le M+N, \quad 1 \le y, y_1 \le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y_1,q)=1.
\end{aligned}$$

Для этого сравнения все условия леммы 1.9 выполняются:

$$\begin{aligned}
&2NY = 2N\left[0,5Nq^{-\frac{1}{6}}d\right] \le N^2q^{-\frac{1}{6}}d < \left(q^{\frac{7}{12}}d^{-\frac{1}{2}}\right)^2 q^{-\frac{1}{6}}d = q,\\
&\frac{Y}{d} = \frac{\left[0,5Nq^{-\frac{1}{6}}d\right]}{d} > \frac{\left[0,5q^{\frac{1}{6}}d\right]}{d} > 0,3q^{\frac{1}{6}} > 1.
\end{aligned}$$

Согласно этой лемме имеем

$$\begin{aligned}
K &\le NY + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d} =\\
&= \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1 + \frac{d}{2(NY)^{\delta}} + \frac{Y}{N(NY)^{\delta}}\left(\rho(qd^{-1},Y)+1\right)\right).
\end{aligned}$$

Отсюда с учётом соотношений

$$\begin{aligned}
&d \le \exp(\ln q^2)^{\sigma} \le q^{\frac{\delta}{4}}, \quad \rho(qd^{-1},Y)+1 \le \tau(q) \le q^{\delta},\\
&Y \le 0,5Nq^{-\frac{1}{6}}d, \qquad (NY)^{\delta} \ge (0,1\,N^2q^{-\frac{1}{6}}d)^{\delta}
\end{aligned}$$

находим

$$K \le \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1 + \frac{5\,q^{\frac{\delta}{4}}}{q^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{10\,q^{\delta}}{q^{\frac{1}{6}+\frac{\delta}{2}}}\right) \le \frac{3(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Подставляя эту оценку в (1.12), а затем правую часть полученной формулы в (1.11), последовательно получим

$$\begin{aligned}
&W^6 \le (NY_q)^4 Z^3 d^3 q^{1+\delta}\cdot K \le 3qN^5YY_q^4Z^3d^2\,(qNY)^{\delta},\\
&|S| \le (Y_qZ)^{-1}W + 2^{-\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}}d^{-\frac{1}{6}} \le \qquad (1.13)\\
&\quad \le \frac{3^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{6}}N^{\frac{5}{6}}Y^{\frac{1}{6}}d^{\frac{1}{3}}\,(qNY)^{\frac{\delta}{6}}}{Y_q^{\frac{1}{3}}Z^{\frac{1}{2}}} + 2^{-\frac{1}{3}}N^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}}d^{\frac{2}{3}}. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись леммой 1.7 и известными неравенствами

$$\omega(q) \le \frac{c_\omega \ln q}{\ln\ln q}, \qquad \frac{\varphi(q)}{2q} \le \frac{c_\varphi}{\ln\ln q},$$

где c_ω и c_φ — абсолютные постоянные, найдем

$$\left|Y_q-\frac{\varphi(q)}{q}Y\right|\le 2^{\omega(q)}\le 2^{\frac{c_\omega\ln q}{\ln\ln q}}=q^{\frac{c_\omega\ln 2}{\ln\ln q}}<\frac{\varphi(q)}{2q}q^{\frac17}<\frac{\varphi(q)}{2q}\left[0,5Nq^{-\frac16}\right]=\frac{\varphi(q)}{2q}Y,$$

то есть

$$Y_q>\frac{\varphi(q)}{2q}Y\ge\frac{c_\varphi Y}{\ln\ln q}.$$

Пользуясь этим неравенством в (1.14), параметр Y_q выразим через Y. Имеем

$$|S|\le\frac{3^{\frac16}}{c_\varphi^{\frac16}}\cdot\frac{q^{\frac16}N^{\frac56}d^{\frac13}\left(qNY\right)^{\frac{\delta}{6}}(\ln\mathscr{L}_q)^{\frac16}}{Y^{\frac16}Z^{\frac12}}+2^{-\frac13}N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}.$$

Далее, имея виду, что $Y=\left[0,5Nq^{-\frac16}d\right]$, $Z=\left[0,5q^{\frac16}d^{-1}\right]$ и $N<q^{\frac{7}{12}}d^{-\frac12}$, найдем $(0,5^{-2/3+\delta/6}=2^{2/3-\delta/6}<2)$

$$\begin{aligned}|S|&\le\frac{3^{\frac16}}{c_\varphi^{\frac16}}\cdot\frac{q^{\frac16}N^{\frac56}d^{\frac13}\left(0.5q^{\frac56}N^2d\right)^{\frac{\delta}{6}}(\ln\mathscr{L}_q)^{\frac16}}{(0.25Nq^{-\frac16}d)^{\frac16}\ (0.25q^{\frac16}d^{-1})^{\frac12}}+2^{-\frac13}N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}\\
&=\frac{2^{\frac23-\frac{\delta}{6}}\,3^{\frac16}}{c_\varphi^{\frac16}}\cdot q^{\frac19}N^{\frac23}d^{\frac23}\left(q^{\frac56}N^2d\right)^{\frac{\delta}{6}}(\ln\mathscr{L}_q)^{\frac16}+2^{-\frac13}N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}\\
&\le\frac{2^{\frac23-\frac{\delta}{6}}\,3^{\frac16}}{c_\varphi^{\frac16}}\cdot N^{\frac23}q^{\frac19}d^{\frac23}q^{\frac{\delta}{3}}(\ln\mathscr{L}_q)^{\frac16}+2^{-\frac13}N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}\\
&=\left(2^{\frac23-\frac{\delta}{6}}\,3^{\frac16}c_\varphi^{-\frac16}q^{-\frac{\delta}{6}}(\ln\mathscr{L}_q)^{\frac16}+2^{-\frac13}\right)N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}\le N^{\frac23}q^{\frac19+\frac{\delta}{2}}d^{\frac23}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

1.4. Теорема о нетривиальной оценке коротких сумм значений характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях

Теорема 1.1. *Пусть* $(\eta\nu,q)=1$, $y\ge q^{\frac13+\frac85\delta}$, $y\le q$, $D^{\frac12}\le q\le D$ *и* $\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, *тогда*

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\(n,q)=1,\,n\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(n-\eta)\ll\frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство. Имеем равенство:

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{d\backslash q}\mu(d)\sum_{\substack{u-y<nd\le u\\ nd\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(nd-\eta).$$

Определяя число d_ν^{-1} из сравнения $dd_\nu^{-1}\equiv 1(mod\,\nu)$, напишем сравнение $nd\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\ \nu)$ в виде $n\equiv\eta d_\nu^{-1}(mod\,\nu)$, и представляя переменную суммирования n в виде $n=\eta d_\nu^{-1}+m\nu$, имеем

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{d\backslash q}\mu(d)\sum_{u-y<(\eta d_\nu^{-1}+m\nu)d\le u}\chi_q((\eta d_\nu^{-1}+m\nu)d-\eta)=$$

$$=\sum_{d\backslash q}\mu(d)\sum_{\frac{u-y-\eta dd_\nu^{-1}}{d\nu}<m\le\frac{u-\eta dd_\nu^{-1}}{d\nu}}\chi_q(m\nu d+\eta(dd_\nu^{-1}-1)).$$

Представляя сравнение $dd_\nu^{-1}\equiv 1(mod\,\nu)$ в виде $dd_\nu^{-1}-1=\nu k$, где $k=k(d,\nu)$, однозначно находится для каждой пары d и ν, получим

$$S_y(u,\eta,\nu)=\chi_q(\nu)\sum_{d\backslash q}\mu(d)S_y(u,\eta,\nu,d)\le\sum_{d\backslash q}\mu^2(d)|S_y(u,\eta,\nu,d)|, \qquad (1.15)$$

$$S_y(u,\eta,\nu,d)=\sum_{u_1-y_1<m\le u_1}\chi_q(md+\eta k),\quad u_1=\frac{u-\eta}{d\nu}-\frac{\eta k}{d},\quad y_1=\frac{y}{d\nu}.$$

Часть суммы в правой части (1.15), соответствующая слагаемым с условием $d\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, обозначим через $S_y'(u,\eta,\nu)$, а оставшую часть оценим, воспользовавшись тривиальной оценкой суммы $S_y(u,\eta,\nu,d)$ и леммой 1.8:

$$\sum_{\substack{d|q\\ d>\exp(\sqrt{2\mathscr{L}})}}\mu^2(d)|S_y(u,\eta,\nu,d)|\le\sum_{\substack{d|q\\ \exp(\sqrt{2\mathscr{L}})<d}}\mu^2(d)\left(\frac{y}{\nu d}+1\right)$$

$$\le\frac{y}{\nu}\sum_{\substack{d|q\\ \exp(\sqrt{2\mathscr{L}})<d}}\frac{\mu^2(d)}{d}+\tau(q)\ll\frac{y}{\nu}\exp\left(-0.7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Поэтому

$$|S_y(u,\eta,\nu)\ll\left|S_y'(u,\eta,\nu)\right|+\frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right). \qquad (1.16)$$

Для оценки $|S_y'(u,\eta,\nu)|$ рассмотрим отдельно следующие случаи:

1. $y > \sqrt{q}\,\exp\left(\frac{c_\omega \mathscr{L}_q}{\ln \mathscr{L}_q}\right)$;

2. $q^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\delta} \le y \le \sqrt{q}\,\exp\left(\frac{c_\omega \mathscr{L}_q}{\ln \mathscr{L}_q}\right)$.

1. Применяя к $S_y(u,\eta,\nu,d)$ формулу, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса (лемма 1.6), имеем

$$S_y(u,\eta,\nu,d) = \sum_{a=1}^{q} \sum_{\substack{u_1-y_1<m\le u_1,\\ a\equiv md+\eta k \pmod q}} \chi_q(md+\eta k) =$$

$$= \sum_{a=1}^{q} \chi_q(a) \sum_{u_1-y_1<m\le u_1} \frac{1}{q}\sum_{t=0}^{q-1} e\left(\frac{(a-md-\eta k)t}{q}\right) =$$

$$= \frac{\tau(\chi_q)}{q} \sum_{t=0}^{q-1} \bar{\chi}_q(t) e\left(\frac{-\eta k t}{q}\right) \sum_{u_1-y_1<m\le u_1} e\left(\frac{-mdt}{q}\right).$$

Из условий $\nu \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, $d \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$ и условия рассматриваемого случая следует, что последняя сумма по m не пустая. Воспользовавшись для целых m_1 и m_2 равенством

$$\sum_{m_1\le m\le m_2} e\left(-\frac{mdt}{q}\right) = \frac{\sin\frac{\pi t d(m_2-m_1+1)}{q}}{\sin\frac{\pi t d}{q}} e\left(-\frac{td(m_1+m_2)}{2q}\right),$$

и переходя к оценкам, и имея в виду, что $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$, найдем

$$|S_y(u,\eta,\nu,d)| \le \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{t=0\\ (t,q)=1}}^{q-1} \left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{t_1=0}^{d-1} \sum_{\substack{t_2=0\\ (q/dt_1+t_2,q)=1}}^{q/d-1} \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t_2}{q/d}\right|} \le \frac{d}{\sqrt{q}} \sum_{t=1}^{q/d-1} \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|}.$$

Если q/d — нечётное число, то

$$|S_y(u,\eta,\nu,d)| \le \frac{2d}{\sqrt{q}} \sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}} \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|} \le \frac{2d}{\sqrt{q}} \sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}} \frac{q/d}{2t} = \sqrt{q} \sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}} \frac{1}{t},$$

так как $\sin\pi\alpha \geq 2\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Далее, воспользовавшись неравенством $\frac{1}{t} \leq \ln\frac{2t+1}{2t-1}$, найдём

$$|S_y(u,\eta,\nu,d)| \leq \sqrt{q}\sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}}(\ln(2t+1)-\ln(2t-1)) = \sqrt{q}\ln q/d \leq \sqrt{q}\mathscr{L}_q.$$

Если q/d — чётное число, то

$$|S_y(u,\eta,\nu,d)| \leq \frac{2d}{\sqrt{q}}\sum_{t=1}^{\frac{q/d}{2}-1}\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|}+\frac{d}{\sqrt{q}} \leq$$

$$\leq \frac{2d}{\sqrt{q}}\sum_{t=1}^{\frac{q/d}{2}-1}\frac{q/d}{2t}+\frac{d}{\sqrt{q}} \leq \sqrt{q}\ln q+\frac{d}{\sqrt{q}} \ll \sqrt{q}\mathscr{L}_q.$$

Отсюда и из определения $S'_y(u,\eta,\nu)$, имеем

$$\left|S'_y(u,\eta,\nu)\right| \ll \sum_{\substack{d\backslash q\\ d\leq\exp\sqrt{2\mathscr{L}}}}\mu^2(d)\sqrt{q}\mathscr{L}_q \leq \sqrt{q}\mathscr{L}_q\sum_{d\backslash q}\mu^2(d) = 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\mathscr{L}_q.$$

Воспользовавшись неравенством (**??**), соотношениями $\mathscr{L} \leq 2\mathscr{L}_q$ и $\nu \leq \exp\sqrt{2\mathscr{L}} \leq \exp 2\sqrt{\mathscr{L}_q}$, имеем

$$|S'_y(u,\eta,\nu)| \ll \frac{\sqrt{q}\nu\,\exp\left(\omega(q)\ln 2+\ln\mathscr{L}_q+0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right)}{y}\cdot\frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{q}\cdot\exp\left(c_\omega\ln 2\,\frac{\mathscr{L}_q}{\ln\mathscr{L}_q}+3\sqrt{\mathscr{L}_q}+\ln\mathscr{L}_q\right)}{y}\cdot\frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}_q}{\ln\mathscr{L}_q}\right)}{y}\cdot\frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll \frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

2. Если $(d,k)>1$, то $S_y(u,\eta,\nu,d)=0$, поэтому в $S_y(u,\eta,\nu,d)$, не ограничивая общности, будем считать $(d,k)=1$, и воспользовавшись леммой 1.10, получим

$$|S_y(u,\eta,\nu,d)| \leq \left(\frac{y}{d\nu}\right)^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}}d^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}}.$$

Отсюда, а также из определения $S'_y(u,\eta,\nu)$, имеем

$$|S'_y(u,\eta,\nu)| \ll \sum_{\substack{d\backslash q\\ d\le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}}} \mu^2(d)|S_y(u,\eta,\nu,d)| \le$$

$$\le \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} \sum_{d\backslash q} \mu^2(d) \ll \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} 2^{\omega(q)}.$$

Воспользовавшись неравенством (**??**) и соотношением $\mathscr{L} \le 2\mathscr{L}_q$, имеем

$$\left|S'_y(u,\eta,\nu)\right| \ll \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}} \exp\left(c_\omega \ln 2\,\frac{\mathscr{L}_q}{\ln\mathscr{L}_q}\right) =$$

$$= \frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{3}+\frac{3\delta}{2}}\nu\cdot\exp\left(c_\omega\ln 2\,\frac{\mathscr{L}_q}{\ln\mathscr{L}_q}+2,1\sqrt{\mathscr{L}}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{3}} <$$

$$< \frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{3}+\frac{3\delta}{2}}\cdot\exp\left(c_\omega\ln 2\,\frac{\mathscr{L}_q}{\ln\mathscr{L}_q}+4\sqrt{\mathscr{L}_q}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{3}} <$$

$$< \frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{3}+\frac{8\delta}{5}}}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \ll \frac{y}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Подставляя полученную оценку для $|S'_y(u,\eta,\nu)|$ в (1.16), получим утверждение теоремы

Глава 2

Короткая двойная сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях

2.1 . Постановка задачи и формулировка результатов

В первой главе мы отметили, что при изучении закона распределения значений примитивного характеров χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки суммы вида

$$S_y(u,\eta)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1}}\chi_q(n-\eta), \qquad (\eta,q)=1,$$

которая называются *суммой значений характера примитивного Дирихле в последовательности сдвинутых чисел,* а при изучении закона распределения значений производных характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки сумм более общего вида

$$S_y(u,\eta,\nu)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(n-\eta), \qquad (\eta\nu,q)=1,$$

которые называются *суммами значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел лежащих в арифметических прогрессиях.*

При изучении закона распределения значений производного характера χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида $S_y(u,\eta,\nu)$, то есть *сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях*, исследованных в первой главе, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм $W=W_q(x,M,N,l,\nu)$ вида

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\,mn\equiv l\,(\mathrm{mod}\ \nu)}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad(\nu l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau^c(m)$ и $|b_n|\le\tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма $W_q(x,M,N,l,\nu)$ называется *двойной суммой значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях.*

В сумме $W_q(x,M,N,l,\nu)$ не ограничивая общности можно считать, что $N\le M$. Отметим, что если в рассматриваемой задаче (*закон распределения значений производных характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$*) характер χ является примитивным, то есть если $\chi=\chi_q$, то вместо суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ возникает более простая сумма $W_q(x,M,N,l,1)=W_q(x,M,N,l)$ вида

$$W_q(x,M,N,l)=\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad(l,q)=1,$$

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму $W_q(x,M,N,l)$ для простого q получил её нетривиальную оценку при $x\ge q^{1+\varepsilon}$, а затем нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x,M,N,l)$ при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$ [3, 41]. Наилучшая нетривиальная оценка $W_q(x,M,N,l)$ для простого q при $x \geq q^{0,5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [16].

З.Х. Рахмонов изучил сумму $W_q(x,M,N,l,\nu)$ для составного q и получил нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$ [24, 25, 26]. Нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x,M,N,l)$ для составного q при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [29]. З.Х. Рахмонов для составного q доказал нетривиальную оценку $W_q(x,M,N,l)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ [30, 31, 32], а в 2017 г. он [39, 40] для модулей q — число свободное от кубов получил нетривиальную оценку суммы $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $y \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Основными результатами второй главы являются теоремы 2.1 и 2.2 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях то есть сумм вида $W_q(x,M,N,l,\nu)$.

Теорема 2.1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\leq 2M} |a_m|^{\alpha} \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll B\left(M^{\frac{3}{4}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{4}}Nq^{\frac{1}{8}+\frac{\delta}{4}}\right)\mathscr{L}^{\frac{2c_1+c_2}{4}+1}.$$

Доказательство теорем 2.1 проводится развитием метода доказательства леммы 14 работы З.Х. Рахмонова [32], которая в свою очередь опирается на методы работ А.А. Карацубы [13, 14, 15, 16] и оценки Берджесса [37].

Теорема 2.2. *Пусть* M, N, U *— целые числа,* $N \le U < 2N \le q^{\frac{1}{6}}$,

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ (m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m *и* b_n *функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\le 2M}|a_m|^\alpha \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha},\quad \alpha=1,2;\qquad |b_n|\ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)|\ll BM^{\frac{5}{6}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta}\mathscr{L}^{\frac{4c_1+c_2+1}{6}}.$$

Доказательство теорем 2.2 проводится развитием метода доказательства леммы 15 работы З.Х. Рахмонова [32], которая в свою очередь также опирается на методы работ А.А. Карацубы [13, 14, 15, 16] и оценки Берджесса [38].

Следствиями теорем 2.1 и 2.2 в частности являются нетривиальные оценки двойных сумм $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $x\ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ имеющих соответственно

- сумму для длины N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{6}}\le N\le q^{\frac{1}{3}}$ (следствие 2.1.1);
- сумму для длины N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{12}}\le N\le q^{\frac{1}{6}}$ (следствие 2.2.1).

Следствие 2.1.1. *Пусть* M, N, U *— целые числа,* $N\le U<2N$, $q^{\frac{1}{4}-\theta}\le N\le q^{\frac{1}{4}+\theta}$, $D^{\frac{1}{2}}\le q\le D$, $\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,

$$W_q(x,M,N,l,\nu)=\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ (m,q)=1}}a_m\sum_{\substack{U<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}}b_n\chi_q(mn-l),\qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m *и* b_n *– функции натурального аргумента такие, что* $|a_m|\le\tau_5(m)$, $|b_n|\le 1$. *Тогда при* $x\ge q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta}$ *справедлива оценка*

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)|\ll\frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Следствие 2.2.1. *Пусть* M, N, U — *целые числа,* $N \le U < 2N$, $q^{\theta} \le N \le q^{\frac{1}{6}}$, $D^{\frac{1}{2}} \le q \le D$, $\nu \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\le \min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\, mn\equiv l\,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m *и* b_n – *функции натурального аргумента такие, что* $|a_m| \le \tau_5(m)$, $|b_n| \le 1$. *Тогда при* $x \ge q^{1-2\theta+1,1\delta}$ *справедлива оценка*

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

2.2 . Первая теорема об оценке двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях

Теорема 2.1. *Пусть* M, N, U — *целые числа,* $N \le U < 2N$,

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\le \min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\, mn\equiv l\,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m *и* b_n *функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\le 2M} |a_m|^{\alpha} \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll B\left(M^{\frac{3}{4}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{4}}Nq^{\frac{1}{8}+\frac{\delta}{4}}\right)\mathscr{L}^{\frac{2c_1+c_2}{4}+1}.$$

Доказательство. Из условия $(l, \nu) = 1$ следует, что выполняется соотношение $(mn, \nu) = 1$. Обозначая в $W_q(x, M, N, l, \nu)$ внутреннюю сумму через $\mathscr{B}(m)$, и представляя сравнение $mn \equiv l\,(\mathrm{mod}\ \nu)$ в виде $n \equiv lm_{\nu}^{-1}\,(\mathrm{mod}\ \nu)$, преобразуем другую сумму так, чтобы интервал суммирования не зависел от m. Имеем равенство

$$\mathscr{B}(m) = \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(mn-l) \sum_{U<r\le\min(xm^{-1},2N)}$$
$$\times \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{k(n-r)}{q}\right)\frac{1}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} e\left(\frac{j(n-lm_\nu^{-1})}{\nu}\right) =$$
$$= \frac{1}{q\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} e\left(-\frac{lm_\nu^{-1}j}{\nu}\right)\sum_{k=0}^{q-1} B(k\nu+jq,m) \sum_{U<r\le\min(xm^{-1},2N)} e\left(-\frac{kr}{q}\right),$$
$$B(k\nu+jq,m) = \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(mn-l)e\left(\frac{(k\nu+jq)n}{q\nu}\right).$$

Далее, обозначая $N' = \min([xm^{-1}],2N)$, выделяя слагаемое с $k=0$, и суммируя затем по r, получаем:

$$\mathscr{B}(m) = \frac{1}{q\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} e\left(-\frac{lm_\nu^{-1}j}{\nu}\right)\Bigg((N'-U)\mathscr{B}(jq,m)+$$
$$+\sum_{k=1}^{q-1} B(k\nu+jq,m)\frac{\sin\frac{\pi k(N'-U)}{q}}{\sin\frac{\pi k}{q}} e\left(-\frac{k(N'+1+U)}{2q}\right)\Bigg).$$

Переходя к неравенствам, имеем:

$$|\mathscr{B}(m)| \le \frac{1}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1}\Bigg(\frac{N'-N}{q}|\mathscr{B}(jq,m)| + \frac{1}{q}\sum_{k\le[q/2]}\frac{|\mathscr{B}(k\nu+jq,m)|}{\left|\sin\frac{\pi k}{q}\right|}+$$
$$\frac{1}{q}\sum_{q/2<k\le q-1}\frac{|\mathscr{B}(k\nu+jq,m)|}{\left|\sin\frac{\pi(q-k)}{q}\right|}\Bigg).$$

Далее, воспользовавшись условием $N'-N<q$, неравенствами $\sin\pi\alpha\ge\alpha$,

$0\le\alpha\le 0,5$ и $\frac{1}{k}\le\frac{2}{k+1}$, $k\ge 1$ — целое, получаем

$$\begin{aligned}
|\mathscr{B}(m)| &\le \frac{1}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\mathscr{B}(jq,m)|+\sum_{k\le[q/2]}\frac{|\mathscr{B}(k\nu+jq,m)|}{k}+\sum_{q/2<k\le q-1}\frac{|\mathscr{B}(k\nu+jq,m)|}{q-k}\right)\\
&\le \frac{2}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{q-k}\right)|\mathscr{B}(k\nu+jq,m)|\\
&\ll \mathscr{L}\max_{0\le j<\nu}\max_{0\le k<q}|\mathscr{B}(k\nu+jq,m)|.
\end{aligned}$$

Отсюда и из определения $W=W_q(x,M,N,l,\nu)$, имеем

$$\begin{gathered}
|W|\ll\mathscr{L}\max_{0\le j<\nu}\max_{0\le k<q}W(j,k), \qquad (2.1)\\
W(j,k)=\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}|a_m||\mathscr{B}(k\nu+jq,m)|.
\end{gathered}$$

Оценим $W(j,k)$. Возведём обе части этого равенства в квадрат и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1.1), полагая в нем

$$\nu=m,\qquad a_\nu=|a_m|,\qquad b_\nu=\left|B(kd+jq,m)\right|.$$

Будем иметь:

$$\begin{aligned}
W^2(j,k) &\le \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}|a_m|\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}|a_m||\mathscr{B}(kd+jq,m)|^2\\
&\ll M\mathscr{L}^{c_1}\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}}|a_m||\mathscr{B}(kd+jq,m)|^2.
\end{aligned}$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат, и применяя неравенство Коши, найдём

$$W^4(j,k) \ll M^2\mathscr{L}^{2c_1} \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |a_m|^2 \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |\mathscr{B}(kd+jq,m)|^4 \ll$$

$$\ll M^3\mathscr{L}^{2c_1+c_2} \sum_{\substack{m=0\\(m,q)=1}}^{q-1} \left| \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(n-lm_d^{-1})e\left(\frac{(kd+jq)n}{qd}\right)\right|^4 =$$

$$= M^3\mathscr{L}^{2c_1+c_2} \sum_{\substack{\lambda=0\\(\lambda,q)=1}}^{q-1} \left| \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(n+\lambda)e\left(\frac{(kd+jq)n}{qd}\right)\right|^4 \ll$$

$$\ll M^3\mathscr{L}^{2c_1+c_2} \sum_{\substack{N'<n_{1,2},n_3,n_4\le 2N\\(n_{1,2},n_3,n_4),q)=1}} |b_{n_1}b_{n_2}b_{n_3}b_{n_4}| \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+n_1)(\lambda+n_2)}{(\lambda+n_3)(\lambda+n_4)}\right)\right|.$$

Далее, воспользовавшись неравенством $|b_n|\ll B$, затем леммой 1.10, найдем

$$W^4(j,k) \ll M^3\mathscr{L}^{2c_1+c_2}B^4 \sum_{1\le n_1,\dots n_4\le 2N} \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+n_1)(\lambda+n_2)}{(\lambda+n_3)(\lambda+n_4)}\right)\right| \ll$$
$$\ll M^3\mathscr{L}^{2c_1+c_2}B^4\left(N^2q+N^4q^{\frac12+\delta}\right) \ll$$
$$\ll B^4\left(M^3N^2q+M^3N^4q^{\frac12+\delta}\right)\mathscr{L}^{2c_1+c_2}.$$

Отсюда и из (2.1) следует утверждение теоремы.

Следствие 2.1.1. . *Пусть M, N, U — целые числа, $N\le U<2N$, $q^{\frac14-\theta}\le N\le q^{\frac14+\theta}$, $D^{\frac12}\le q\le D$, $\nu\le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\le \min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\, mn\equiv l\ (\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau_5(m)$, $|b_n|\le 1$. Тогда при $x\ge q^{\frac34+\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство. Согласно лемме 1.3, имея в виду, что $\ln M \ll \mathscr{L}$, найдём

$$\sum_{M<m\le 2M} \tau_5(m) \ll M\mathscr{L}^4, \qquad \sum_{M<m\le 2M} \tau_5^2(m) \ll M\mathscr{L}^{24}.$$

Из теоремы 2.1 при $c_1 = 4$, $c_2 = 24$, воспользовавшись условиями $MN \le x$, $q^{\frac14-\theta} \le N \le q^{\frac14+\theta}$ и $x \ge q^{\frac34+\theta+1{,}1\delta}$, найдём

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \left(M^{\frac34}N^{\frac12}q^{\frac14} + M^{\frac34}Nq^{\frac18}\right)\mathscr{L}^9\delta^{\frac{\delta}{4}} \le x^{\frac34}\left(N^{-\frac14}q^{\frac14} + N^{\frac14}q^{\frac18}\right)\mathscr{L}^9 q^{\frac{\delta}{4}} \ll$$

$$\ll x\left(\frac{qN^{-1}}{x} + \frac{Nq^{\frac12}}{x}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^9 q^{\frac{\delta}{4}} \ll x\left(\frac{q^{\frac34+\theta}}{x}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^9 q^{\frac{\delta}{4}} \ll x\mathscr{L}^9 q^{-\frac{\delta}{40}}.$$

Воспользовавшись соотношениями $D^{\frac12} \le q \le D$ и $\nu \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, имеем

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \frac{x}{\nu}\mathscr{L}^9 \exp\sqrt{2\mathscr{L}}\, D^{-\frac{\delta}{80}} \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0{,}7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

2.3. Вторая теорема об оценке двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух, чисел лежащих в арифметических прогрессиях

Теорема 2.2. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \le U < 2N \le q^{\frac16}$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ (m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M<m\le 2M} |a_m|^\alpha \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll BM^{\frac56}N^{\frac12}q^{\frac16+\frac16\delta}\mathscr{L}^{\frac{4c_1+c_2+1}{6}}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что выполняется условие $MN < x$. Поступая аналогично предыдущей лемме, находим

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \mathscr{L} \max_{0 \le j < \nu} \max_{0 \le k < q} W(j, k), \tag{2.2}$$

$$W(j, k) = \sum_{\substack{M < m \le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m||B(k\nu + jq, m)|,$$

$$B(k\nu + jq, m) = \sum_{\substack{N < n \le 2N \\ (n,q)=1}} b_n \chi_q(mn - l) e\left(\frac{(k\nu + jq)n}{q\nu}\right).$$

Оценим $W(j, k)$. Возведём обе части этого равенства в куб и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1.1), полагая в нем $\nu = m$, $a_\nu = |a_m|$, $b_\nu = |B(kd + jq, m)|$. Будем иметь:

$$W^3(j, k) \le \left(\sum_{\substack{M < m \le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m| \right)^2 \sum_{\substack{M < m \le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m||B(kd + jq, m)|^3 \ll$$
$$\ll M^2 \mathscr{L}^{2c_1} \sum_{\substack{M < m \le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m||B(kd + jq, m)|^3.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, применяя неравенство Коши, лемму 1.3 и условие $M < q$, найдем

$$W^6(j, k) \ll M^4 \mathscr{L}^{4c_1} \sum_{\substack{M < m \le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m|^2 \sum_{\substack{M < m \le 2M \\ (m,q)=1}} |B(kd + jq, m)|^6 \ll$$
$$\ll M^5 \mathscr{L}^{4c_1 + c_2} \sum_{\substack{m=0 \\ (m,q)=1}}^{q-1} |B(kd + jq, m)|^6.$$

Отсюда, воспользовавшись явным видом $B(kd+jq,m)$, получим

$$W^6(j,k) \ll M^5\mathscr{L}^{4c_1+c_2} \sum_{\substack{\lambda=0\\(\lambda,q)=1}}^{q-1} \left| \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(n+\lambda)e\left(\frac{(kd+jq)n}{qd}\right)\right|^6 \ll$$

$$\ll M^5\mathscr{L}^{4c_1+c_2} \sum_{\substack{N'<n_1,\dots,n_6\le 2N\\((n_1,\dots,n_6),q)=1}} |b_{n_1}\dots b_{n_6}| \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+n_1)(\lambda+n_2)(\lambda+n_3)}{(\lambda+n_4)(\lambda+n_5)(\lambda+n_6)}\right)\right|.$$

Далее, воспользовавшись неравенством $|b_n|\ll B$, затем леммой 1.5, найдем

$$W^6(j,k) \le B^6M^5\mathscr{L}^{4c_1+c_2} \sum_{1\le n_1,\dots,n_6\le 2N} \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+n_1)(\lambda+n_2)(\lambda+n_3)}{(\lambda+n_4)(\lambda+n_5)(\lambda+n_6)}\right)\right| \ll$$

$$\ll B^6M^5N^3q^{1+\delta}\mathscr{L}^{4c_1+c_2}.$$

Отсюда и из (2.2) следует утверждение леммы.

Следствие 2.2.1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N\le U<2N$, $q^\theta\le N\le q^{\frac{1}{6}}$, $D^{\frac{1}{2}}\le q\le D$, $\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$,*

$$W_q(x,M,N,l,\nu) = \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} a_m \sum_{\substack{U<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(n,q)=1,\, mn\equiv l \pmod{\nu}}} b_n\chi_q(mn-l), \qquad (\nu l,q)=1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau_5(m)$, $|b_n|\le 1$. Тогда при $x\ge q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство. Согласно лемме 1.3, имея в виду, что $\ln M\ll\mathscr{L}$, найдём

$$\sum_{M<m\le 2M}\tau_5(m)\ll M\mathscr{L}^4, \qquad \sum_{M<m\le 2M}\tau_5^2(m)\ll M\mathscr{L}^{24}.$$

Из теоремы 2.2 при $c_1 = 4$, $c_2 = 24$, воспользовавшись условием $MN \le x$, $N \ge q^\theta$ и $x \ \ge \ q^{1-2\theta+1,1\delta}$, найдём

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll (MN)^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta} \mathscr{L}^{\frac{20}{3}} \le x^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta} \mathscr{L}^{\frac{20}{3}} =$$

$$= x \left(\frac{N^{-2} q^{1+\delta}}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \mathscr{L}^{\frac{20}{3}} \le x \left(\frac{q^{1-2\theta+\delta}}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \mathscr{L}^{\frac{20}{3}} \ll x q^{-\frac{\delta}{60}} \mathscr{L}^{\frac{20}{3}}.$$

Воспользовавшись соотношениями $D^{\dfrac{1}{2}} \le q \le D$ и $\nu \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, имеем

$$|W_q(x,M,N,l,\nu)| \ll \frac{x}{\nu} \mathscr{L}^{\frac{20}{3}} \exp\sqrt{2\mathscr{L}}\, D^{-\frac{\delta}{120}} \ll \frac{x}{\nu} \exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Теорема доказана.

Глава 3

Распределение значений неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел

3.1 . Постановка задачи и формулировка результатов

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он [1] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi)=\sum_{p\le x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{\sqrt[3]{x}}}. \tag{3.1}$$

Оценка (3.1) будет нетривиальной, если $x\ge q^{3+\varepsilon'}$, $\varepsilon'>0$ – любое фиксированное число, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p\le x$.

В 1943 г. И.М. Виноградов [3] уточнил оценку (3.1) и оценил нелинейную сумму характеров с простыми числами, доказав, что

$$|T(\chi)| = \left|\sum_{p\le x}\chi(p-l)\right| \ll x^{1+\varepsilon}G, \tag{3.2}$$

$$|T_1(\chi)| = \left|\sum_{p\le x}\chi(p(p-l))\right| \ll x^{1+\varepsilon}G, \tag{3.3}$$

где

$$G = \sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}}.$$

Последние оценки будут нетривиальными, если $x \ge q^{1+\varepsilon'}$. Отметим, что оценки (3.1), (3.2), (3.3) представляют исключительный интерес, так как мало что известно даже о распределении простых чисел p в коротких арифметических прогрессиях, то есть в прогрессиях вида

$$p \equiv l\,(modq), \qquad (l,q)=1, \qquad p \le q^A,$$

здесь A — фиксированное положительное число.

В 1952 г. И.М. Виноградов [9] доказал, что

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(q^{\frac{3}{4}}x^{-1}\right). \tag{3.4}$$

Из этой оценки видно, что она становится нетривиальной, если $x \ge q^{0.75+\varepsilon'}$. Это совершенно удивительный результат. Если к указанной проблеме применять аналитический метод Римана, то естественно ожидать нетривиальной оценки $|T(\chi)|$ в том случае, когда в распределении простых чисел p в арифметических прогрессиях с разностью q наступит "порядок", а это будет, самое лучшее, при $x \ge q^{2+\varepsilon'}$, так как из расширенной гипотезы Римана следует, что

$$\pi(x;q,l) = \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} + O\left(x^{0.5+\varepsilon}\right),$$

то есть

$$\pi(x;q,l) \sim \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \qquad \text{при} \qquad x \ge q^{2+\varepsilon'}.$$

Правда, если $T(\chi)$ представить в виде суммы по нулям соответствующих L – функций Дирихле и только потом воспользоваться расширенной гипотезой

Римана, то тогда получится оценка $|T(\chi)|$, нетривиальная уже при $x \geq q^{1+\varepsilon'}$, то есть упомянутый выше результат Виноградова 1943 г. Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник в 1971 г. писал по этому поводу: *"Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширенной гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна)"* (см. [12]; с. 29).

В 1953 г. И.М. Виноградов [10] уточнил (3.4), доказав, что

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\left(q^{\frac{3}{4}}x^{-1}\right)\frac{1}{3} + x^{-0.1}\right).$$

Работы Виноградова по оценкам сумм характеров с простыми числами были продолжены Г.И. Перельмутером [45], который нетривиально оценил нелинейные суммы самого общего вида при числе слагаемых x большем, чем $q^{1+\varepsilon}$.

В 1968 г. А.А. Карацуба [13, 14, 15] разработал новый метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В работе [16] он с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова доказал: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

и применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества чисел вида $p(p'+k)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью[18].

В 1986 г. З.Х. Рахмонов [24, 25, 26] обобщил оценку (3.2) на случай составного модуля и доказал: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, по-*

рожденный характером χ, *тогда*

$$T(\chi)\le x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right),\qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\not\backslash q}}p. \tag{3.5}$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (3.5) принимает вид

$$T(\chi_q)\le x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right),$$

и она нетривиальна при $x>q(\ln q)^{13}$.

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T_1(\chi_q)$ существует, когда x – длина суммы – по порядку меньше q [29]. Они доказали следующее: *для примитивного характера* χ_q *и всякого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *что для всех* $x\ge q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ *имеет место оценка*

$$T_1(\chi_q)\ll xq^{-\delta}. \tag{3.6}$$

З.Х. Рахмонов [30, 31, 32] в 2013 году доказал, что *если* q *– достаточно большое натуральное число,* χ_q *– примитивный характер по модулю* q, $(l,q)=1$, ε *– положительное, сколь угодно малое постоянное число,* $x\ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, *тогда*

$$T_1(\chi_q)\ll x\exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$

В 2017 г. Bryce Kerr в [33] доказал оценку (3.6), то есть для $T_1(\chi_q)$ получил оценку с степенным понижением уже при $x\ge q^{\frac{5}{6}+o(1)}$.

В 2017 году З.Х. Рахмонов [34, 35] доказал теорему: *пусть* D *– достаточно большое натуральное число,* χ *— неглавный характер по модулю* D, χ_q *– примитивный характер по модулю* q, *порожденный характером* χ, q *– свободное от кубов,* $(l,D)=1$, ε *– положительное, сколь угодно малое постоянное число, тогда при* $x\ge D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, *имеем*

$$T_1(\chi)\ll x\exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right).$$

В третьей главе, используя результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о нетривиальной оценке сумм значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях $S_y(u,\eta,\nu)$ для произвольного составного модуля q;

- следствие 2.1.1 теоремы 2.1 и следствие 2.2.1 теоремы 2.2 об нетривиальных оценках двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях,

доказываем теорему 3.1 о нетривиальной оценке суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю, в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теорема 3.1. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, $(l,D)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при $x\ge D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n-l)\ll x\exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

Доказательство теоремы 3.1 проводится методом оценок суммы с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами А.А. Карацубы [16] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для простого q, и З.Х. Рахмонова [32] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для составного q. Его основу, как уже отмечали, составляют теорема 1.1 первой главы и теоремы 2.1 и 2.2 второй главы.

При доказательстве теоремы 3.1 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1. *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u\le\ x$, $r\ge 1$,*

$$C_r^k=\frac{r!}{k!(r-k)!},\quad \lambda(n)=\sum_{d\backslash n,\, d\le u}\mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)f(n)=(-1)^r\sum_{n_1\ge u}\lambda(n_1)\cdots\sum_{\substack{n_r\ge u\\ n_1\cdots n_k m\le x}}\lambda(n_r)\sum_{m}\Lambda(m)f(n_1\cdots n_r m)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\le u\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\le x}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\ln n_1 f(m_1n_1\cdots m_kn_k).$$

Доказательство см. [46].

3.2 . Распределение значений неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел

Теорема 3.1. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, $(l,D)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при $x\ge D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n-l)\ll x\exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$x=D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}.$$

Имея в виду, что в сумме $T(\chi)$ вклад слагаемых с условием $(n,q)>1$ составляет величину, модуль которой не превосходит $\ll\mathscr{L}^2$, и воспользовавшись тем, что χ_q – примитивный характер порожденный неглавным характером χ и q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих числа q,

найдем

$$T(\chi)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\chi(n-l)+O(\mathscr{L}^2)=\sum_{\substack{n\le x,\ (n,q)=1\\(n-l,q_1)=1}}\Lambda(n)\chi_q(n-l)+O(\mathscr{L}^2)=$$

$$=\sum_{\nu\backslash q_1}\mu(\nu)T(\chi_q,\nu)+O(\mathscr{L}^2),\qquad T(\chi_q,\nu)=\sum_{\substack{n\le x,\ (n,q)=1\\n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\nu)}}\Lambda(n)\chi_q(n-l).$$

Часть суммы $T(\chi)$, соответствующая слагаемым с условием $\exp\sqrt{2\mathscr{L}}<\nu\le x$, обозначим через $T_1(\chi)$ и оценим, воспользовавшись тривиальной оценкой суммы $T(\chi_q,\nu)$ и леммой 1.8:

$$|T_1(\chi)|\ll\mathscr{L}\sum_{\substack{\nu\backslash q_1\\\nu>\exp\sqrt{2\mathscr{L}}}}\mu^2(\nu)\left(\frac{x}{\nu}+1\right)\ll x\mathscr{L}\sum_{\substack{\nu\backslash q_1\\\nu>\exp\sqrt{2\mathscr{L}}}}\frac{\mu^2(\nu)}{\nu}\ll x\mathscr{L}\exp\left(-0.7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Поэтому

$$T(\chi)=\sum_{\substack{\nu\backslash q_1\\\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}}}\mu(\nu)T(\chi_q,\nu)+O\left(x\mathscr{L}\exp\left(-0.7\sqrt{\mathscr{L}}\right)\right).\qquad(3.7)$$

Теперь оценим сумму $T(\chi_q,\nu)$ при $\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$ и $(\nu,l)=(q,l)=(\nu,q)=1$. Сумма $T(\chi_q,\nu)$ ранее была изучена в лемме 5 работы [26] и получена оценка вида

$$|T(\chi_q,\nu)|\le 10x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q\nu^2}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\nu^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{6}}\nu^{-\frac{1}{3}}\right)\tau(q).$$

Из этой оценки, в частности при $x>q^{1+1,2\varepsilon}$ и $\nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}$ следует нетривиальная оценка вида

$$|T(\chi_q,\nu)|\ll\frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Поэтому всюду дальше будем считать, что $x\le q^{1+1,2\varepsilon}$, то есть

$$D^{\frac{5}{6}}\le q\le D.\qquad(3.8)$$

Полагая в лемме 3.1, $u=x^{\frac{1}{3}}$, $r=3$ и

$$f(n)=\begin{cases}\chi_q(n-l), & \text{при } (n,q)=1 \text{ и } n\equiv l\pmod{\nu};\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

найдем

$$T(\chi_q,\nu)=\sum_{k=1}^{3}(-1)^k C_3^k \tilde{T}_k(\chi_q,\nu), \tag{3.9}$$

$$\tilde{T}_k(\chi_q,\nu)=\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\le u\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\le x,\ (m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k,q)=1,\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\equiv l\ (\mathrm{mod}\ \nu)}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\ldots\sum_{n_k}\ln n_1\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l).$$

Разобьём в $T_k(\chi_q,\nu)$ области изменения каждого $m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_k$ на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j<m_j\le 2M_j$, $N_j<n_j\le 2N_j$, $j=1,2,\cdots,k$. Получим не более $\mathscr{L}^{2k}$ сумм вида

$$\hat{T}_k(\chi_q,\nu)=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{\substack{N_k<n_k\le 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\le x,\ (m_1n_1\cdots m_kn_k,q)=1,\ m_1n_1\cdots m_kn_k\equiv l\ (\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l)\ln n_1$$

$$=\int_1^{2N_1}\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{\max(u,N_1)<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{\substack{N_k<n_k\le 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\le x,\ (m_1n_1\cdots m_kn_k,q)=1,\ m_1n_1\cdots m_kn_k\equiv l\ (\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l)d\ln u.$$

Через $U_1=\max(u,N_1)$ обозначим такое число u, при котором модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение, тогда

$$|\hat{T}_k(\chi_q,\nu)|\ll\mathscr{L}\,|T_k(\chi_q,\nu)|\,,$$

где

$$T_k(\chi_q,\nu)=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\le 2M_k}\mu(m_k)\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\cdots\sum_{\substack{U_k<n_k\le 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\le x,\ (m_1n_1\cdots m_kn_k,q)=1,\ m_1n_1\cdots m_kn_k\equiv l\ (\mathrm{mod}\ \nu)}}\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l),$$

$$x^{\frac{1}{3}}>M_1\ge M_2\ge\cdots\ge M_k,\qquad N_1\ge N_2\ge\cdots\ge N_k,\ \ N_j\le U_j<2N_j. \tag{3.10}$$

Отсюда, из (3.9) и (3.7), получим

$$|T(\chi)|\ll\sum_{\substack{\nu\backslash q_1\\ \nu\le\exp\sqrt{2\mathscr{L}}}}\mu^2(\nu)\sum_{k=1}^{3}\mathscr{L}^6\max|T_k(\chi_q,\nu)|+x\exp\left(-0,6\sqrt{\mathscr{L}}\right). \tag{3.11}$$

Вводим следующие обозначения:

$$\prod_{j=1}^{k}M_jN_j=Y,\qquad\prod_{j=1}^{k}M_jU_j=X,\qquad Y<X\le x,$$

и будем предполагать далее, что

$$Y \geq x \exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right), \tag{3.12}$$

так как в противном случае, оценивая $T_k(\chi_q, \nu)$ тривиально, будем иметь

$$\begin{aligned} T_k(\chi_q, \nu) &\ll \sum_{\substack{X<n\leq 2^kY \\ n\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} \tau_{2k}(n) \ll \frac{2^kY}{\nu}\mathscr{L}^{2k-1} \\ &\leq \frac{x}{\nu}2^k\mathscr{L}^{2k-1}\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right). \end{aligned}$$

Суммы $T_k(\chi_q, \nu)$, $k = 1, 2, 3$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $T_3(\chi_q, \nu)$ и рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > q^{\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\varepsilon}$;
2. $q^{\frac{1}{6}} < N_1 \leq q^{\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\varepsilon}$;
3. $q^{\frac{1}{12}} < N_1 \leq q^{\frac{1}{6}}$,
4. $N_1 < q^{\frac{1}{12}}$.

Для рассмотрения случаев 1, 2 и суммы $T_3(\chi_q, \nu)$ несколько преобразуем и запишем её в виде

$$T_3(\chi_q, \nu) = \sum_{XU_1^{-1}<m\leq 2^5YN_1^{-1}} a_m \sum_{\substack{U_1<n\leq 2N_1,\, mn\leq x \\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} \chi_q(mn-l), \qquad |a_m| \leq \tau_5(m),$$

и интервал суммирования $XU_1^{-1} < m \leq 2^5YN_1^{-1}$ разобьём на интервалы вида $M < m \leq 2M$. Получим не более 5 сумм вида

$$T_3(\chi_q, \nu, M) = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{U_1<n\leq \min(xm^{-1}, 2N_1) \\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} \chi_q(mn-l).$$

Случай 1. $N_1 > q^{\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\varepsilon}$. Определяя m_q^{-1} из сравнения $mm_q^{-1} \equiv 1 \pmod q$, а затем переходя к оценке, находим

$$|T_3(\chi_q,\nu,M)| \le \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ (m,q)=1}} \tau_5(m)\left|\sum_{\substack{U_1<n\le\min(xm^{-1},2N_1)\\ (n,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\,\nu)}} \chi_q(mn-l)\right|.$$

Применяя к сумме по n теорему 1.1 при

$$\delta=\frac{10}{27}\varepsilon,\quad \eta=lm_q^{-1},\quad u=\min(xm^{-1},2N_1),\quad y=\min(xm^{-1},2N_1)-U_1\le N_1,$$

и воспользовавшись условием $N_1 > q^{\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\varepsilon}$, имеем

$$|T_3(\chi_q,\nu,M)| \ll \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ (m,q)=1}} \tau_5(m)\frac{N_1}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll \frac{MN_1}{\nu}\mathscr{L}^4\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right) \le$$

$$\le \frac{2^5Y}{\nu}\mathscr{L}^4\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll \frac{x}{\nu}\mathscr{L}^4\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 2. $q^{\frac{1}{6}} < N_1 \le N_1 > q^{\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\varepsilon}$**.** Воспользуемся следствием 2.1.1 теоремы 2.1 при

$$U=U_1,\qquad N=N_1,\qquad \theta=\frac{1}{12}+\frac{16}{27}\varepsilon,\qquad \delta=\frac{10}{27}\varepsilon,\qquad b_n=1.$$

Тогда при $x \ge q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta} = q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ имеем

$$|T_3(\chi_q,\nu,M)| \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 3. $q^{\frac{1}{12}} < N_1 \le q^{\frac{1}{6}}$. Для суммы $T_3(\chi_q,\nu,M)$ при

$$U=U_1,\qquad N=N_1,\qquad \theta=\frac{1}{12},\qquad b_n=1,\qquad \delta=\frac{10}{27}\varepsilon.$$

выполняются условия следствия 2.2.1 теоремы 2.2. Согласно этому следствию, при $x \ge q^{1-2\theta+1,1\delta} = q^{\frac{5}{6}+\frac{11}{27}\varepsilon}$, получим

$$|T_3(\chi_q,\nu,M)| \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Следствие 2.2.1. *Пусть* M, N, U — *целые числа,* $N \le U < 2N$, $q^{\theta} \le N \le q^{\frac{1}{6}}$, $D^{\frac{1}{2}} \le q \le D$, $\nu \le \exp\sqrt{2\mathscr{L}}$, a_m *и* b_n – *функции натурального аргумента такие, что* $|a_m| \le \tau_5(m)$, $|b_n| \le 1$. *Тогда при* $x \ge q^{1-2\theta+1,1\delta}$ *справедлива оценка*

$$W = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\le\min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n\chi_q(mn-l) \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 4. $N_1 < q^{\frac{1}{12}}$. Сумму $T_3(\chi_q,\nu)$ несколько преобразуем и запишем её в виде

$$T_3(\chi_q,\nu) = \sum_{XM_1^{-1}<m\le 2^5YM_1^{-1}} a_m \sum_{\substack{M_1<n\le 2M_1,\, mn\le x\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} \mu(n)\chi_q(mn-l), \qquad |a_m| \le \tau_5(m),$$

и интервал суммирования $XM_1^{-1} < m \le 2^5YM_1^{-1}$ разобьём на интервалы вида $M < m \le 2M$. Получим не более 5 сумм вида

$$T_3(\chi_q,\nu,M) = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{M_1<n\le\min(xm^{-1},2M_1)\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l \,(\mathrm{mod}\ \nu)}} \mu(n)\chi_q(mn-l).$$

Воспользовавшись соотношениями (3.10), (3.12) и условиями рассматриваемого случая, затем соотношением (3.8), имеем

$$M_1 \ge (M_1M_2M_3)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{Y}{N_1N_2N_3}\right)^{\frac{1}{3}} \ge \frac{Y^{\frac{1}{3}}}{N_1} \ge \frac{\left(x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{N_1} \ge$$
$$\ge \frac{q^{\frac{5}{18}+\frac{5}{18}\varepsilon}\exp\left(-0,4\sqrt{\mathscr{L}}\right)}{q^{\frac{1}{12}}} > q^{\frac{7}{36}},$$
$$M_1 \le x^{\frac{1}{3}} = D^{\frac{5}{18}+\frac{\varepsilon}{3}} \le q^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что при

$$U = M_1, \qquad N = M_1, \qquad \theta = \frac{1}{12}+\frac{2}{5}\varepsilon, \qquad \delta = \frac{10}{27}\varepsilon, \qquad b_n = \mu(n)$$

для суммы $T_3(\chi_q,\nu,M)$ выполняются условия следствия 2.2.1 теоремы 2.2. Согласно этому следствию, при

$$x \ge q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta} = q^{\frac{5}{6}+\frac{109}{135}\varepsilon},$$

получим

$$|T_3(\chi_q, \nu, M)| \ll \frac{x}{\nu} \exp\left(-0,7\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Из полученных оценок $T_k(\chi_q, \nu),\ k = 1, 2, 3$, ввиду (3.11), получим утверждение теоремы.

Заключение

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- найдена нетривиальная оценка коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях $S_y(u,\eta,\nu)$ для произвольного составного модуля q.
- найдена нетривиальная оценка коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида $W_q(x,M,N,l,\nu)$.
- доказана нетривиальная оценка суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю, в последовательности сдвинутых простых чисел.

Результаты, полученные в диссертации носят теоретический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Литература

[1] Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю [Текст] / И.М. Виноградов // Математический сборник. 1938. Т. 3. № 45. С. 311 – 320.

[2] Виноградов И. М. Избранные труды [Текст] / И.М. Виноградов // М.: Изд-во АН СССР. 1952.

[3] Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами [Текст] / И.М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.

[4] Линник Ю.В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха [Текст] / Ю.В. Линник// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. № 6. с. 503 – 520. (Ju. V. Linnik, Some conditional theorems conceming binary problems with prime numbers, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 16 (1952), 503-520.)

[5] Prachar K. Uber die Anwendung einer Methode von Linnik [Текст] / K. Прахар // Acta Arith. 29(1976), 367 – 376.

[6] Prachar K. Bemerkungen uber Primzahlen in kurzen Reihen. [Remarks on primes in short sequences] [Текст] / K. Прахар // Acta Arith. 44(1984), 175 – 180.

[7] Wang Yuan On Linnik's method concerning the Goldbach number [Текст] / Wang Yuan// Sci. Sinica, 20 (1977), 16 – 30.

[8] Jutila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference [Текст] M. Jutila // Ann. Univ. Turku; Ser. A., I, 118 (1968).

[9] Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ [Текст] /И.М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.

[10] Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ [Текст] /И.М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1953. Т. 17, С. 285 – 290.

[11] Виноградов И.М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии [Текст] /И. М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1966. Т. 30. С. 481 – 496.

[12] Линник Ю.В. Новейшие работы И.М. Виноградова [Текст] /Ю.В. Линник // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.

[13] Карацуба А.А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле [Текст] /А.А. Карацуба // Успехи математических наук. 2008, том 63, выпуск 4(382). С. 43 — 92.DOI: http://dx.doi.org/10.4213/rm9234

[14] Карацуба А.А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях [Текст] /А.А. Карацуба // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. №6. С. 1287 – 1289.

[15] Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров [Текст] /А.А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

[16] Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами [Текст] /А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

[17] Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами [Текст] /А.А. Карацуба // Доклады АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 517 – 518.

[18] Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях [Текст] /А.А. Карацуба // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

[19] Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии [Текст] /А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1971. Т. 35. №3,

[20] Карацуба А.А. Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения [Текст] /А.А. Карацуба //Математические заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 155 – 159.

[21] Карацуба А. А. О некоторых проблемах современной аналитической теории чисел [Текст] /А.А. Карацуба // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 2. С. 341 – 349.

[22] Карацуба А.А. О распределении значений неглавных характеров [Текст] /А.А. Карацуба // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 156 – 164.

[23] Карацуба А.А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами [Текст] /А.А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1978. Т. 42. № 2. Т. 315 – 324.

[24] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле [Текст] /З.Х. Рахмонов // Успехи математических наук. 1986. Т. 41. № 1. С. 201 – 202.

[25] Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами [Текст] /З.Х. Рахмонов // Доклады АН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

[26] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения [Текст] /З.Х. Рахмонов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

[27] Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии [Текст] /З.Х. Рахмонов // Известия АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.

[28] Huxley M.N. On the difference between consecutive primes [Текст] /M.N. Huxley// Inventiones mathematicae June 1971, Volume 15, Issue 2, pp 164–170.

[29] Фридландера Дж.Б., Гонгв К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах [Текст]/Дж.Б. Фридландера, К. Гонгв, И.Е. Шпарлинский // Математические заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

[30] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] /З.Х. Рахмонов // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. №1. С. 5 – 9.

[31] Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] /З. Х. Рахмонов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. Вып. 4(2). С. 113–117.

[32] Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами [Текст] /З.Х. Рахмонов // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15 . В. 2(50). С. 73 – 100.

[33] B. Kerr, *On certain exponential and character sums*,[Текст] /B. Kerr // PhD Thesis, UNSW, 2017.

[34] Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] /З. Х. Рахмонов // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 1 – 27.

[35] Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] /З.Х. Рахмонов // Доклады АН РТ. 2017. Т. 60. №9. С. 378-382.

[36] Burgess D. A. On character sums and L – series [Текст] /D. A. Burgess // Proc. London Math. Soc. 1962, v. 12, №3, pp. 193 – 206.

[37] Burgess D. A. On character sums and L – series II [Текст] /D. A. Burgess // Proc. London Math. Soc. 1963, v. 13, №3, pp. 524 – 536.

[38] Burgess D. A.The character sum estimate with $r = 3$ [Текст] /D. A. Burgess // Proc. London Math. Soc. 1986, v. 2, №33, pp. 219 – 226.

[39] Рахмонов З. Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] /З.Х. Рахмонов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2017. Т. 299. С. 234 — 260. DOI: 10.1134/S037196851704015X.

[40] Rakhmonov Z. Kh. Sums of values of nonprincipal characters over a sequence of shifted primes [Текст] /Z. Kh. Rakhmonov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2017. V. 299. 219 — 245.

[41] Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм [Текст] /И.М. Виноградов // М.: Наука. 1976.

[42] Виноградов А.И. О числах с малыми простыми делителями [Текст] / И. М. Виноградов// ДАН СССР. 1956. Т. 109. № 4. С. 683 – 686.

[43] Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы [Текст] /К.К. Марджанишвили // ДАН СССР. 1939. Т. 22, №7. 391-393.

[44] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел [Текст] /А.А. Карацуба // 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

[45] Перельмутер Г. И. Оценка одной суммы с простыми числами [Текст] /Г.И. Перельмутер // Доклады АН СССР. 1962. Т. 144. № 1. С. 48 – 51.

[46] Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения[Текст] /З.Х. Рахмонов // Известия РАН, сер. матем. 1993. Т. 57. №4. С. 55 – 71.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

[47] Хокиев Д.Дж. Оценка коротких сумм значений характеров от специальной последовательности натуральных чисел [Текст] /Д.Дж. Хокиев // ДАН Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. №12. С. 1065 – 1071..

[48] Хокиев Д. Дж.Оценка короткой суммы значений характеров Дирихле по составном модулю на последовательности сдвинутых чисел [Текст] /Д.Дж. Хокиев // ДАН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. №1-2. С. 5 – 6.

[49] Хокиев Д. Дж. Об оценке суммы характеров с простыми числами[Текст] /З.Х. Рахмонов, Д.Дж. Хокиев. // ДАН Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 1. С. 5 – 11.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

[50] Хокиев Д.Дж. Оценка коротких сумм значений характеров от специалной последовательности натуральных чисел [Текст] /Хокиев Д.Дж. // Материалы международной научной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел” посвященной 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. С. 29 – 31.

[51] Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характера Дирихле по составному модулю на последовательности сдвинутых чисел [Текст] /Хокиев Д.Дж. //Международная научная конференция, "Дифференциальные уравнения, математический анализ, и теория чисел посвященная 25-летию XVI сессии Верховного совета Республики Таджикистан, 27-28 октября 2017 года в г. Курган-Тюбе, С. 149-154

[52] Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характера Дирихле по составному модулю на последовательности сдвинутых чисел [Текст] /З.Х. Рахмонов, Хокиев Д.Дж. //Материалы международной научной конференции, посященной 90-летию академика АН Республики Таджикистан,лаурета государственной премии имени Абуали Ибн Сино, Михайлова Леонида Григорьевича, 27-28 февраля 2018 года в г. Душанбе. С. 138-143

[53] Хокиев Д.Дж..Короткие двойные суммы значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел [Текст] /Хокиев Д.Дж. // Материалы международной научной конференции Международная научная конференция, "Современные проблемы математики и её приложений"Филиал Масковского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. 21-22 июня 2018, Душанбе, С. 116-120.