Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу Хокиева Дониёра Джалиловича «О распределении значений характеров Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теории чисел

Основным предметом исследования диссертационной работы Д. Дж. Хокиева является вывод новой нетривиальной оценки суммы значений примитивного характера Дирихле по произвольному составному модулю q, в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида

$$T(\chi) = \sum_{p \le x} \chi(p - l), \qquad (l, q) = 1.$$

где χ — неглавный характер по модулю q. При доказательстве теоремы о бесконечности множества простых чисел, лежащих в арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с разностью прогрессии, Л. Дирихле ввел функцию целочисленного аргумента, которая позднее стала называться характером Дирихле и которая нашла многочисленные применения в математике. Многие арифметические проблемы аналитической теории чисел связаны с распределением значений характеров Дирихле в последовательностях, имеющих определенную арифметическую природу.

В 1938 г. И.М.Виноградов с помощью созданного им метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами начал рассматривать суммы $T(\chi)$ по модулю q, q — простое число. Совершенно ясно, что чем меньше x, тем труднее становится проблема. Первые нетривиальные оценки суммы $T(\chi)$ И.М. Виноградов получил в 1938 г. при $x \gg q^{3+\varepsilon}$, а в 1943 г. при $x \gg q^{1+\varepsilon}$. Затем в 1952 г. И.М.Виноградов получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \ge q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \ge q^{1+\varepsilon}$. Наилучший результат в случае, когда модуль характера q — простое число, принадлежит А.А.Карацубе, который в 1970 г. получил нетривиальную оценку суммы $T(\chi)$ при $x \ge q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, q — простое. Полученные оценки были приложены при решении следующих арифметических задач:

- о распределениях степенных вычетов, невычетов, первообразных корней по простому модулю и символов Лежандра в последовательности сдвинутых простых чисел (И.М.Виноградов 1938 г., 1943 г., 1953 г. и А.А.Карацуба 1970 г.);
- о распределениях гольдбаховых чисел в коротких арифметических прогрессиях, разностью которых является простое число (М. Ютила 1968 г.);

Следует заметить, что при выводе оценок суммы $T(\chi)$ по модулю q, q — простое число одним из центральных моментов является то, что все неглавные характеры являются также и примитивными. При решении вышеуказанных задач по составному модулю D, наряду с нетривиальными оценками суммы $T_1(\chi)$ для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для производных характеров.

Для неглавного характера χ по составному модулю q, нетривиальную оценку суммы $T(\chi)$ получил З.Х.Рахмонов (1985 г.) при $x \geq q^{1+\varepsilon}$. Для коротких сумм $T(\chi)$ нетривиальные оценки при $x \gg q^{8/9+\varepsilon}$ получили Дж.Б.Фридландер, К.Гонг, И.Е.Шпарлинский (2010 г.), позднее при $x > q^{5/6+\varepsilon}$ З.Х.Рахмонов (2013 г.), но только при условии, что неглавный характер χ является примитивным. При $x \geq D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ З.Х.Рахмонов (2017 г.) для неглавного χ доказал нетривиальную оценку суммы $T(\chi)$, при условии если q – модуль примитивного характера порожденного характером χ — число свободное от кубов.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней доказана нетривиальная оценка короткой суммы значений произвольного неглавного характера Дирихле χ по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел.

Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и оценки, полностью обоснованы и доказаны в результате применения следующих современных методов теории чисел:

- метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова;
- метод А.А. Карацубы для оценки суммы $T(\chi_q)$ для простого q;
- метод работы З.Х. Рахмонова для оценки суммы $T(\chi_q)$, χ_q — примитивный характер по модулю q , (q — составное).

Полученные в диссертации результаты являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами, дополняют исследования выше указанных ученных и заключаются в следующем:

1. при $y \geq q^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\delta}$ найдена нетривиальная оценка коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях вида
$$S_y(u,\eta,\nu) = \sum_{\substack{u-y<n\leq u \\ (n,q)=1,\, n\equiv\eta (\mathrm{mod}\ \nu)}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta\nu, q) = 1;$$
2. при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ получены нетривиальные оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида
$$W_q(x;M,N,l,\nu) = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l (\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n\chi_q(mn-l) \quad (l\nu, q) = 1;$$
3. при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ доказана нетривиальная оценка коротких сумм значений неглавного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида $T(\chi)$.

Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся тригонометрическими функциями, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. А. Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете и в других учебных заведениях.

Диссертация Д. Дж. Хокиева состоит из введения, списка обозначений, трёх глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Основным результатом первой главы является теорема 1.1 о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях $S_y(u,\eta,\nu)$ для произвольного модуля q, которые возникают при изучении закона распределения значений неглавного характера, не являющегося примитивным на последовательностях сдвинутых простых чисел. Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержится в лемме 1.10, в которой при $N < q^{\frac{7}{12}}d^{-\frac{1}{2}}$, $D^{\frac{1}{2}} \le q \le D$ и $d \le \exp(\sqrt{2\mathscr{L}})$, $(\eta,q)=(d,k)=1$ показано, что

$$\left|\sum_{M-N<n\le M}\chi_q(nd+\eta k)\right| \le N^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\delta}{2}}d^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство леммы 1.10 проводится методом А. А. Карацубы, позволившим ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. Следует также заметить, что основным моментом в доказательстве леммы 1.10 является сведение оценки модуля суммы к числу решений сравнения от четырёх неизвестных и применение леммы 1.9 об оценке числа решений этого сравнения.

Основными результатами второй главы являются теоремы 2.1 и 2.2 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида $W_q(x,M,N,l,\nu)$, которые наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида $S_y(u,\eta,\nu)$ возникают при изучении закона распределения значений производного характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$. Следствиями теорем 2.1 и 2.2, в частности, являются нетривиальные оценки двойных сумм $W_q(x,M,N,l,\nu)$ при $x \ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеющих соответственно

- сумму, для длины N которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{6}} \le N \le q^{\frac{1}{3}}$ (следствие 2.1.1);
- сумму, для длины N которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{12}} \le N \le q^{\frac{1}{6}}$ (следствие 2.2.1).

В третьей главе, используя результаты предыдущих глав, а именно теорему 1.1 о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, следствия 2.1.1 и 2.2.1 теорем 2.1 и 2.2 об оценках коротких двойных сумм значений примитивного характера

Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, Д.Дж.Хокиев доказал теорему 3.1 о нетривиальной оценке суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел.

Безусловными достоинствами диссертационной работы Хокиева Д. Дж. является тщательность проведенного анализа поставленных задач, строгое математическое доказательство приведённых утверждений, логичная последовательность изложения материалов и её основные результаты. К недостаткам диссертации можно отнести несколько незначительных отпечаток и грамматических ошибок, не влияющих на научную значимость полученных результатов. В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо.

Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты для тригонометрических сумм, которые могут быть использованы при решении ряда задач аналитической теории чисел. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, 3 из которых опубликованы в изданиях из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Диссертационная работа Хокиева Дониёра Джалиловича «О распределении значений характеров Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно – квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для коротких тригонометрических сумм, и полностью удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней» ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Официальный оппонент: Табари Абдулло Хабибулло,
доктор физико–математических наук по специальности
01.01.06–Математическая логика, алгебра и теория чисел,
член-корреспондент Академии наук Республики Таджикистан,
ректор Кулябского государственного университета им. А.Рудаки.

Контактная информация: Кулябский государственный
университет им. А.Рудаки, ул. Сафарова 16, 735360 Куляб,
тел: (+992 3022) 23506, e-mail: rector@kgu.tj, веб-сайт: www.kgu.tj

10.12.2018