

«Утверждаю»
Ректор Таджикского
национального университета
академик АН РТ, профессор
Имомзода М.С.
12 декабря 2018 г.



Отзыв ведущей организации
на диссертацию Хокиева Дониёра Джалиловича
«О распределении значений характеров Дирихле по
составному модулю в последовательности сдвинутых
простых чисел», представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Распределение значений характеров Дирихле по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида

$$T(\chi) = \sum_{p \leq x} \chi(p-l), \quad (l, q) = 1.$$

первым начал изучать И.М. Виноградов. Воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, он доказал: *если q – простое нечётное, $(l, q) = 1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q , тогда*

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}} \right). \quad (1)$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невыветов) mod q вида $p-l$, $p \leq x$. Затем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$, где q – простое число. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L – функции Дирихле. Тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \geq q^{1+\varepsilon}$. Наилучший результат в случае, когда модуль характера q – простое число, принадлежит А.А. Карацубе. Он в 1970 г. с*

помощью развития своего ранее разработанного метода, позволившего ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени и в соединении с методом И.М. Виноградова, получил нетривиальную оценку суммы $T(\chi)$ при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, q — простое.

Сумму $T(\chi)$ для составных модулей q первым начал изучать З.Х. Рахмонов и получил её нетривиальную оценку для всех неглавных характеров при $x \geq q^{1+\varepsilon}$. Для неглавных характеров χ , совпадающими со своими порождающими примитивными характерами, нетривиальные оценки получили

- Дж. Б. Фридландер, К.Гонг, И.Е.Шпарлинский при $x \gg q^{8/9+\varepsilon}$;
- З.Х.Рахмонов при $x > q^{5/6+\varepsilon}$;
- З.Х.Рахмонов и Ш.Х.Мирзорахимов при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ и q число свободное от кубов.

Основным результатом диссертационной работы является обобщение вышесказанной теоремы З.Х.Рахмонова о нетривиальной оценке суммы $T(\chi)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, для всех неглавных характеров.

Все утверждения теорем и научные положения сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и оценки полностью обоснованы. Полученные в диссертации результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. при $y \geq q^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\delta}$ найдена нетривиальная оценка коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях вида

$$S_y(u, \eta, \nu) = \sum_{\substack{u-y < n \leq u \\ (n, q) = 1, n \equiv \eta \pmod{\nu}}} \chi_q(n - \eta), \quad (\eta\nu, q) = 1;$$

2. при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ получены нетривиальные оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида

$$W_q(x; M, N, l, \nu) = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l) \quad (l\nu, q) = 1;$$

3. при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ доказана нетривиальная оценка коротких сумм значений неглавного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида $T(\chi)$.

Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся тригонометрическими суммами и суммы характеров, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. А.Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В.Ломоносова, в Таджикском национальном университете и в других учебных заведениях.

Диссертация Д.Дж.Хокиева состоит из введения, списка обозначений, трёх глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Основным содержанием первой главы является теорема 1.1 о нетривиальной оценке при $y \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$ суммы значений примитивных характеров Дирихле по произвольному составному модулю q в последовательности сдвинутых чисел лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида $S_y(u, \eta, \nu)$.

Во второй главе доказаны теоремы 2.1 и 2.2 в которых при $x \geq q^{\frac{5}{6} + \varepsilon}$, получены нетривиальные оценки короткой двойной суммы значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел лежащих в арифметических прогрессиях вида $W_q(x, M, N, l, \nu)$.

Результаты, полученные в первой и во второй главах, приложены в третьей главе к доказательству теоремы 3.1 — получение нетривиальной оценки суммы значений неглавного характера Дирихле по составному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел.

Диссертация оформлена аккуратно, за исключением отдельных опечаток редакционного характера, например:

1. с небольшими отличиями истории исследования сумм $S_y(u, \eta, \nu)$, двойных сумм $W_q(x, M, N, l, \nu)$ и суммы $T(\chi)$ приводится автором дважды — во введении (стр. 12-13, стр. 14-16, стр. 5-8), затем соответственно в главах 1, 2 и 3 (стр. 19-21, стр. 40-42, стр. 52-55). Вполне достаточно было приведение истории во введении;
2. стр. 4, последнюю строку следовало бы написать: $\mathcal{L} = \ln D$ вместо $\mathcal{L} = \ln xq$.

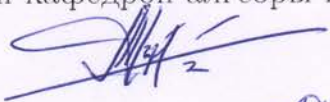
Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в теории характеров Дирихле и тригонометрических суммах. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении некоторых задач в аналитической теории


чисел. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.


Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, три из которых входят в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Диссертационная работа Хокиева Дониёра Джалиловича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для коротких тригонометрических сумм, и полностью соответствует требованиям «Порядка присвоения учёных степеней и присуждения учёных званий» утвержденного Постановлением Правительства Республики Таджикистан от 26.11.2016 г., №505 предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Отзыв составила кандидат физико-математических наук, доцент Р.Бобоева. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, механико-математического факультета Таджикского национального университета, протокол №4, пункт 1 от 10 декабря 2018 года.

Председатель заседания, заведующий кафедрой алгебры и теории чисел,
кандидат физ.-мат. наук  Азамов А.З.

Секретарь заседания, кандидат физ.-мат. наук  Исматов С.Н.

Эксперт, кандидат физ.-мат. наук, доцент  Бобоева Р.

Контактная информация ведущей организации Таджикский национальный университет. Адрес: 734025, г.Душанбе, проспект Рудаки, 17, тел.:(992-372) 21-77-11, сайт: <http://www.tnu.tj/index.php/ru>, E-mail: tgnu@mail.tj

Подписи Азамова А.З., Исматова С.Н. и Бобоевой Р. заверяю.

Начальник управления кадров
и специальной части ТНУ




Тавкиев Э.Ш.