ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 512.548

На правах рукописи

Комилов Окил Одилович

ДИАССОЦИАТИВНЫЕ КВАЗИГРУППЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Душанбе – 2021

Работа выполнена в Таджикском национальном университете

Научный руководитель: **Табари Абдулло Хабибулло,**
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент Национальной академии наук Таджикистана,
депутат Маджлиси намояндагон Маджлиси Оли Республики Таджикистан

Официальные оппоненты: **Аллаков Исмаил,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры и геометрии Термезского государственного университета

Аминов Асламбек Собирович,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник отдела алгебры, теории чисел и топологии Института математики им.А.Джураева НАН Таджикистана

Оппонирующая организация: Таджикский государственный педагогический университет имени С.Айни

Защита состоится 15 октября 2021 г. в 10:00 часов на заседании Диссертационного совета 6D.КОА-037 при Институте математики имени А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2021 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 6D. КОА-037,
доктор физико-математических наук,
доцент **Каримов О.Х.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. За последние десятилетия теория квазигрупп получила развитие в работах различных математиков и в настоящее время она представляет собой быстроразвивающийся и самостоятельный раздел общей алгебры со своими задачами и проблемами. Достаточно полную информацию об этом можно получить из монографий В.Д.Белоусова[1] и Р.Брака[2].

Алгебраический аппарат квазигрупп был построен В.Д.Белоусовым и его школой, а квазигруппы, близкие к линейным, были исследованы ранее в работах Г.Б.Белявской и А.Х.Табарова[3].

Напомним, что что группоид $(Q,\cdot)$ называется квазигруппой, если для любых $a, b \in Q$ уравнения $ax = b, ya = b$ всегда разрешимы, причём однозначно. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ с единицей называется лупой. Разрешимость в квазигруппах проверяется при помощи таблицы Кэли группоида $(Q,\cdot)$, где все элементы в каждой строке и в каждом столбце различны. В левом верхнем углу таблицы указывают знак операции (табл.1). Элементами квазигруппы Q являются $x_1, .., x_n$, а каждая запись a_{ij} обозначает произведение $x_i x_j$ в квазигруппе Q.

Таблица 1. Таблица Кэли группоида $(Q,\cdot)$

$\cdot$	x_1	...	x_n
x_1	a_{11}	...	a_{1n}
. . .	...	...	...
x_n	a_{n1}	...	a_{nn}

По этой таблице можно определить бинарные операции в алгебраических структурах, также целесообразно использовать её для идентификации групп и квазигрупп малого порядка по тождествам.Так как внутренняя часть таблицы Кэли является латинским квадратом, то важно охарактеризовать требуемые алгебраические свойства квазигрупп из их латинских квадратов, и эти методы ранее были использованы в работах В.А.Артамонова[4].

Латинские квадраты в математике известны, как основной предмет исследования в комбинаторике. Они способствовали развитию алгебры, а многие

[1] Белоусов В.Д. Элементы теории квазигрупп // Кишинев. :КГУ, 1981, 115 с

[2] Bruck R. H. A Survey of binary systems // Berlin: Springer Verlag. 1958. P. 185.

[3] Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп // Дискретная математика. РАН, 2009, Т.21, Вып.1, С. 39 – 54.

[4] Artamonov V.A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polynomially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // Discrete Applied Mathematics, V. 200 (2016), P. 5 – 17.

подходы к изучению латинских квадратов восходят к Леонарду Эйлеру. В настоящее время в качестве множества Q обычно берётся множество натуральных чисел от 1 до n, однако Эйлер[5] (1707-1783) использовал буквы латинского алфавита, откуда латинские квадраты и получили своё название, также известна его задача с латинскими квадратами о 36 офицерах. В настоящее время широко известны японские числовые головоломки с латинскими квадратами 9 - го порядка - "Судоку", где в квадрате 9×9 клеток нужно расставить числа от 1 до 9 особым образом. Как уже отмечалось, алгебраическим аналогом латинского квадрата является таблица умножения конечной квазигруппы. В сравнении с другими алгебраическими структурами (группы, кольца, поля) для данного $n (n \in N)$ квазигрупп "очень много". Например, для $n = 6$ количество квазигрупп 812 851 200. Число I_5 впервые вычислено Эйлером. Однако потом с помощью ЭВМ было найдено количество латинских квадратов от 7 - го до 11 - го порядка (1990-2005).

Квазигруппы и латинские квадраты имеют богатую историю применений в криптографии. Один из первых классических шифров, созданный на основе алгебраических структур, является шифр Иогана Тритемия[6], в котором был применён латинский квадрат 26 - го порядка (соответствующую таблице Кэли квазигруппы $(Z_{26}, +)$) в качестве таблицы для шифрации. Позднее этот шифр усовершенствовал Дж.Беллазо[7].

На сегодняшний день для криптосистем именно неассоциативные алгебраические структуры очень хорошо подходят, и одной из наиболее подходящих из них являются конечные простые квазигруппы. Идентификация таких подходящих квазигрупп для криптографических целей всё ещё остается проблемой исследования.

Среди важных работ по приложению квазигрупп в криптографии также стоит отметить работы М.М.Глухова[8], В.А.Шербакова[9] и В.А.Артамонова[10], что свидетельствует о растущем внимании к теме работы.

Методы, разработанные вышеуказанными авторами, дают возможность

---

[5] Euler L. Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques // Middelburg, 1782.

[6] Тужилин М. Э. Латинские квадраты и их применение в криптографии // Прикладная дискретная математика, 2012, є 3, С. 47 – 52.

[7] Bellaso G.B. Il vero modo di scrivere in cifra con facilita, prestezza et securezza di Misser Giovan Battista Bellaso // Stampato in Breffa per Iacobo Britannico, Bressa, 1564.

[8] Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008, є 2, С.28 – 32.

[9] Shcherbacov V.A. Quasigroups in cryptology // Shcherbacov // Comput. Sci. J. Moldova. 2009, V.17, No.2, P. 193 – 228.

[10] Артамонов В.А. Квазигруппы и их приложения // Чебышевский сборник, 2018, Т. 19., Вып. 2., С. 111 – 122.

исследовать конечные квазигруппы и их структуры, а также изучить вопросы приложения квазигрупп с точки зрения построения различных алгебраических криптосистем над неассоциативными объектами.

А.Х.Табаровым[11], в связи с исследованием порядка элемента и обобщением идемпотентного элемента в линейных квазигрупп введён новый класс квазигрупп - диассоциативные квазигруппы.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ *называется диассоциативной степени k(l), если в ней выполняются одновременно тождества (1) и (2):*

$$[x, y^k] = ((...(x \cdot \underbrace{y) \cdot y)...) \cdot y}_{k-раз} = x, \tag{1}$$

$$[y^l, x] = \underbrace{y \cdot (...(y \cdot (y}_{l-раз} \cdot x)...)) = x. \tag{2}$$

Тождество (1) и (2) называют соответственно тождеством леводиассоциативным и праводиассоциативным.

В данной диссертационной работе при исследовании диассоциативных квазигрупп рассмотрены следующие аспекты: классификация по тождествам, допустимость, простота, изотопия и автотопия. Все рассуждения, приведённые выше, можно отнести к обоснованию и актуальности выбранной темы диссертации.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана проекта НИР НИИ Таджикского национального университета за 2013 – 2017гг. по теме “Квазигруппы и их приложения в криптографии”.

Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование диассоциативных квазигрупп. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- классификация квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам;
- классификация диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;
- нахождение простых диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;

[11] Табаров А.Х., Каримов Ф. Линейные квазигруппы с дополнительными тождествами // Вестник Таджикского национального университета, Серия естественных наук, 2011, № 2, С. 3 – 7.

- нахождение всех гланоизотопных луп и автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l) = 2$;

- решение задачи В.Д.Белоусова для некоторых классов диассоциативных квазигрупп.

Объекты исследования. В диссертации рассматривается класс диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков.

Методы исследования. В работе применялись алгебраические и комбинаторные методы исследования, методы компьютерной алгебры, методы профессора В.А.Артамонова по идентификации простых квазигрупп, методы, разработанные на семинарах института математики под руководством академика НАНТ З.Х.Рахмонова, а также, разработанные А.Х.Табаровым методы исследования квазигрупп по тождествам.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- классифицированы квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам;

- найдены все квазигруппы безподквазигрупп 4 - го и 5 - го порядков;

- найдены все диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;

- охарактеризованы диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 2$ и степени $k(l) = 4$;

- найдены диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с дополнительным тождеством дистрибутивности;

- найдены диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с дополнительным тождеством Стейна;

- найдены все лупы, к которым главноизотопна каждая диассоциативная квазигруппа 5-го порядка степени $k(l) = 2$ и 4;

- доказано, что диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков являются квазигруппамы безподквазигрупп;

- решена задача В.Д.Белоусова об изотопии квазигруппы Стейна для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го пордяка;

- на языке программирования разработана программа для построения латинских квадратов любого порядка $n = p - 1$, где p простое число;
- на языке программирования разработана программа для классификации квазигрупп 5 - го порядка и для классификации диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков;
- на языке программирования разработана программа для нахождения главноизотопных луп диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2 и 4 и для нахождения автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2.

Положения, выносимые на защиту:

- классификация квазигрупп порядка 4 и 5 по основным тождествам и классификация диассоциативных квазигрупп порядка 4 и 5;
- теорема о существовании идемпотентных диассоциативных квазигрупп 4-го и 5-го порядков;
- предложение о выявлении диассоциативных квазигрупп 5 - го пордяка степени $k(l) = 2$, где выполняется тождества TS квазигруппы.
- теорема о простоте диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков;
- предложение об автотопии диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков.

Личный вклад автора. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ автором также получены основные результаты компьютерного анализа. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе “Научная новизна”, получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический и практический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных разделах общей теории групп, теории квазигрупп, неассоциативных алгебраических систем и также в криптографиии.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими и комбинаторными доказательствами всех предложений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов. Также для получения результатов разработаны программы на языке программирования C++ и Visual Studio C#.

Апробация работы. Включённые в данную диссертационную работу результаты докладывались на следующих конференциях и научных семинарах:

- международная научная конференция “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, посвященная 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича, Душанбе, 27 - 28 апреля 2015г.;

- международная научно-практическая конференция “Роль ИКТ в инновационном развитии экономики Республики Таджикиста”, ТУТ, Душанбе, 17 – 18 ноября 2017г.;

- международная алгебраическая конференция посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша, МГУ, Москва, 2018 г.

- XXVI международная конференция. МКО - 2019. Математика. Компьютер. Образование, г.Пущино, 28-января-2 февраля 2019 г.;

- XXVI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. “Ломоносов - 2019”, МГУ, Москва, 8 - 12 апреля 2019 г.;

- международная конференция посвящённая 90 - летию кафедры высщей алгебры механико-математического факультета МГУ, Москва, 2019 г.;

- международная конференция “Современные проблемы и приложения алгебры, теория чисел и математического анализа”, посвящённая 60 - летию академика Академия наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусейновича и члена-корреспондента Академия наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича. Душанбе, 13 - 14 декабря 2019 г.;

- международная конференция “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, посвящённая 70 - летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича, Душанбе, 25 - 26 декабря 2020 г;

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2021 г.) и общеинститутские семинары (2021 г.) в Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана;

- семинар кафедры информационной и телекоммуникационной технологии Таджикского национального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах, список которых приведён в конце диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка цитированной литературы из 58 наименований. Полный объём диссертации составляет 93 страницы машинописного текста и набрана на редакторе LaTeX.

Краткое содержание диссертационной работы

Диссертация начинается с введения. В нём освещается актуальность выбранной темы диссертации, цель работы, апробация и краткое изложение полученных результатов.

Первая глава диссертации состоит из трёх параграфов и имеет вспомогательный характер.

В первом параграфе первой главы приведены общее сведения и основные определения из теории квазигрупп и луп.

Во втором параграфе данной главы рассматривается понятия простоты квазигруппы. Разрабатывается алгоритм классификации квазигруппы малого порядка на предмет простоты, то есть вычисляются квазигруппы, у которых нет собственных нетривиальных подквазигрупп.

Конечные простые квазигруппы, и также квазигруппы, у которых нет собственных нетривиальных подквазигрупп являются, одной из наиболее подходящих алгебраических структур для создания криптосистем. Так как, если аргументы операции окажутся элементами подквазигруппы, тогда исходный результат не выйдет за пределами подквазигруппы и сокращается пространство перебора. Этим упрощается процесс взлома. Нахождения и классификация таких подходящих квазигрупп всё ещё остаётся проблемой исследования.

Известно, что квазигруппа проста, если у нее нет собственных гомоморфизмов. Также квазигруппы, не имеющие нетривиальных подквазигрупп, очевидно, являются простыми. Это определение простоты квазигруппы эквивалентно обычному определению в случае групп, также определению, которое использовал для конечных квазигрупп Г.Н.Гаррисон[12], и к тому, которое было использовано А.Альбертом[13] для луп.

В отличие от групп в квазигруппах порядок подквазигруппы не делит порядок квазигруппы, то есть, теорема Лагранжа в квазигруппах не верна[14].

Это легко можно проверить из следующей табл.1.2.1:

Таблица 1.2.1. Квазигруппа с подквазигруппой 2 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	c	d	b
b	d	b	f	a	c
c	c	d	a	b	f
d	b	c	d	f	a
f	f	a	b	c	d

По табл.1.2.1 легко видеть, что $(Q, \cdot)$ квазигруппа 5 - порядка, а $(H, \cdot)$ подквазигруппа порядка два, где $H = \{a, c\}$.

Драри Уолом[15] доказана, что квазигруппы порядка p, где p простое число, могут иметь собственные подквазигруппы, и порядок подквазигруппы равен или меньше, чем половина порядка квазигруппы (табл.1.2.1).

Ниже разработан алгоритм, который проверяет квазигруппу на предмет её простоты. Вычисляются квазигруппы, у которых нет собственных нетривиальных подквазигрупп (табл.1.2.2, 1.2.3). Для этой цели использованы методы идентификации простоты квазигрупп Р.Брака, Д.Уола и В.Артамонова.

Алгоритм проверки наличия подквазигруппы в квазигруппе:

1. Пусть $(Q, \cdot)$ квазигруппа порядка 5.
2. Рассмотрим всевозможные неупорядоченные пары $x, y \in Q$.
3. Вычисляем результат операции $(\cdot)$ для каждой пары, пока не получим замкнутое подмножество, то есть, нетривиальную подквазигруппу.

Так как порядок квазигруппы 5, то порядок подквазигруппы равен или меньше, чем половина порядка квазигруппы. В этом случае порядок подквазигруппы должен быть 2. Если проверить существование собственных одноэлементных подмножеств в множестве Q, например, в идемпотентных квазигруппах, то можно заметить, что каждое одноэлементное подмножество является подквазигруппой. Для этого в алгоритме мы начинаем проверять с двухэлементных подмножеств множества Q. В качестве входных данных

[12] Garrison G. N. Quasigroups // Ann. of Math. 1940, Vol. 41, P. 474 – 484.
[13] Albert A. A. Quasigroups, I. // Trans. Amer. Math. Soc. 1943, Vol. 54(3) P. 507 – 519.
[14] R.H. Bruck Some results in the theory of quasigroups // Trans. Amer. Math. Soc., 1944, V. 55, P. 19 – 52.
[15] Drury W.W. Subquasigroups of finite quasigroups // Pacific J. Math., 1957, No. 4, P. 1711 – 1714.

генерировался набор всех квазигрупп 5-го порядка. Набор квазигрупп сохранен в файле формата txt. Алгоритм запускается на каждую квазигруппу из набора, которая принимается как двумерный массив. Текст программы и ее иллюстрация приведены в главе 3.

Таблица 1.2.2. Классификация квазигрупп малого порядка

Порядок квазигруппы	Количество	Простые квазигруппы (без подквазигрупп)	Квазигруппы с подквазигруппамы
5	161280	155730	5550
4	576	488(20)	88
3	12	12	0

В табл. 1.2.2 показано количественные результаты для квазигрупп малого порядка. Эйлер показал, что количество квазигрупп 3 - го, 4 - го и 5 - го порядков соответственно равно 12, 576 и 161280. Здесь, среди 488 квазигрупп безподквазигрупп 4 - го порядка 20 квазигрупп соответствуют признаком простоты вычисленной Артамоновым[10].

Таблица 1.2.3. Квазигруппа без подквазигрупп 5 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	b	c	f	d	a
b	c	a	d	b	f
c	d	f	c	a	b
d	a	d	b	f	c
f	f	b	a	c	d

В третьем параграфе первой главы приведены основные тождества, которые встречаются часто в алгебраических системах, в качестве примера групп и квазигрупп. Эти тождества определены В.Д.Белоусовым[16] в системах $Q(\Sigma)$, где Σ состоит из бинарных операций, определенных на множестве Q.

В этом параграфе, также разработан алгоритм классификации квазигруппы порядка 4 и 5 по основным тождествам. Алгоритм классификации квазигруппы малого порядка по основным тождествам из соответствующих ей латинских квадратов разработан на основе основных тождеств В.Д.Белоусова. Он реализован и приводятся эксперименты по классификации квазигруппы порядка 4 и 5 по всем категориям основных тождеств, которые были изложены. Примеры тождеств, которые приведены в алгоритме, характерны тем, что в них участвует всего одна операция, которая обозначено как обычное умножение.

[16] Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами // УМН, 1965, Т. 20, Вып. 1(121), С. 75 – 146.

Ниже рассмотрим описание алгоритма на примере тождества Стейна.

Описание алгоритма

1. Пусть $(Q, \cdot)$ квазигруппа порядка 5 с элементами a, b, c, d, f в виде латинского квадрата.
2. Рассмотрим всевозможные неупорядоченные пары $x, y \in Q$.
3. Вычисляем результат операции $(\cdot)$ для каждой пары $x, y \in Q$ по заданному тождеству $x \cdot xy = yx$.
4. Если операция для всех пар $x, y \in Q$ удовлетворяет тождеству $x \cdot xy = yx$, тогда квазигруппа сохраняется на выходном файле.

Операция $(\cdot)$ для каждой пары $x, y \in Q$ выполняется по таблице Кэли латинского квадрата. Результат операции, применяемой к элементам x и y, находим на пересечении строки с меткой x и столбца с меткой y. В качестве входных данных генерировался набор всех квазигрупп 5-го порядка (все 161280 квазигруппы). Набор квазигрупп сохранен в файле формата txt. Этот файл считается входным файлом для алгоритма. Алгоритм запускается на каждую квазигруппу из набора.

На основе этого алгоритма разработана программа, которая классифицирует и идентифицирует все квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам. Текст программы и иллюстрация программы приведены в главе 3. Полученные результаты приведены в следующей табл.1.3.1:

Таблица 1.3.1. Классификация квазигрупп порядка 4 и 5

Основные тождества			Количество квазигрупп 4-го порядка	Количество квазигрупп 5-го порядка
1	$xy \cdot z = x \cdot yz$	Ассоциативность	16	30
2	$yx \cdot zx = yz$	Транзитивность	16	30
3	$x \cdot yz = xy \cdot xz$	Левая дистрибутивность	2	18
4	$x \cdot xy = xx \cdot y$	Левая альтернативность	16	30
5	$xy \cdot x = x \cdot yx$	Элластичность	98	862
6	$(x \cdot yz)x = xy \cdot zx$	Тождество Муфанг	16	30
7	$xx = x$	Идемпотентность	2	48
8	$xx = yy$	Унипотентность	96	6720
9	$x \cdot xy = yx$	Тождество Стейна	2	6
10	$x \cdot xy = y$	Левый закон ключей Сада	96	720

Вторая глава состоит из пяти параграфов и посвящена исследованию диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков.

В первом параграфе второй главы на основе алгоритма классификации квазигрупп по основным тождествам из главы 1, на языке программирования C++ и C# составлена программа и получены все праводиассоциативные (леводиассоциативные) квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков (табл.2.1.1, табл.2.1.2). Текст программы и её иллюстрация приведены в главе 3.

Таблица 2.1.1. Классификация диассоциативных квазигрупп

Класс квазигрупп порядка 4	Обозначение	Количество
Праводиассоциативные квазигруппы степени 3	$R_y^3 = \varepsilon$	48
Леводиассоциативные квазигруппы степени 3	$L_y^3 = \varepsilon$	48
Диассоциативные квазигруппы степени 3	$L_y^3 = R_y^3 = \varepsilon$	16

Таблица 2.1.2. Классификация диассоциативных квазигрупп

Класс квазигрупп порядка 5	Обозначение	Количество
Праводиассоциативные квазигруппы степени 4	$R_y^4 = \varepsilon$	5040
Леводиассоциативные квазигруппы степени 4	$L_y^4 = \varepsilon$	5040
Диассоциативные квазигруппы степени 4	$L_y^4 = R_y^4 = \varepsilon$	210
Праводиассоциативные квазигруппы степени 2	$R_y^2 = \varepsilon$	720
Леводиассоциативные квазигруппы степени 2	$L_y^2 = \varepsilon$	720
Диассоциативные квазигруппы степени 2	$L_y^2 = R_y^2 = \varepsilon$	30

Во втором параграфе второй главы охарактеризованы диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$. Найдены классы идемпотентных, унипотентных и почти идемпотентных диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков. Также доказано, что диассоциативные квазигруппы 5 - го пордяка степени $k(l) = 2$, являются TS - квазигруппами.

Напомним, что подстановка θ множества Q называется полной для $(Q, \cdot)$, если отображение θ'

$$\theta' x = x \cdot \theta x, \forall x \in Q, \tag{3}$$

также является подстановкой множества Q. Квазигруппа, обладающая хотя бы одной полной подстановкой, называется допустимой.

Известно, что любая идемпотентная квазигруппа $(Q, \cdot)$ допустима, именно $\theta' = \theta = 1$.

Пример 2.2.1. Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа 5 - го порядка со следующей таблицей умножения:

Таблица 2.2.1. Квазигруппа 5 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	b	c
b	c	b	f	a	d
c	d	a	c	f	b
d	f	c	b	d	a
f	b	d	a	c	f

Тогда $(Q,\cdot)$ диассоциативная степени $k(l) = 4$, дистрибутивная, также идемпотентная, то есть в $(Q,\cdot)$ выполняются тождества:

1. $(((xy)y)y)y = x = y(y(y(yx)))$;
2. $x(yz) = (xy)(xz)$;
3. $xx = x$.

Эти тождества легко проверяются по заданной таблице Кэли квазигруппы $(Q,\cdot)$, где $Q = a, b, c, d, f$. Так как любая идемпотентная квазигруппа допустима, тогда класс идемпотентных диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени $k, l = 4$ допустимый.

Теорема 2.2.1. Существуют идемпотентные диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$.

Определение 2.2.3. Квазигруппу $(Q,\cdot)$ назавём почти идемпотентной, если $\forall x, y \in Q \;\; x^2 \neq y^2$ и все элементы главной диагонали не расположены в соответствии с порядком.

В этом параграфе, с помощью разработанного алгоритма классификации квазигрупп порядка 4 и 5 по основным тождествам из главы 1, найдены все идемпотентные и унипотентные и почти идемпотентные диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k, l = 4$ (табл.2.2.2).

Таблица 2.2.2. Классы диассоциативных квазигрупп порядка 5

Классы	Обозначение	Количество	Пример
Идемпотентные	x^2	36	$a\ c\ d\ f\ b$ $d\ b\ f\ a\ c$ $f\ a\ c\ b\ d$ $c\ f\ b\ d\ a$ $b\ d\ a\ c\ f$
Унипотентные	$x^2 = y^2$	90	$c\ b\ d\ f\ a$ $a\ c\ f\ b\ d$ $f\ d\ c\ a\ b$ $d\ a\ b\ c\ f$ $b\ f\ a\ d\ c$
Почти идемпотентные	$x^2 \neq y^2$	84	$d\ c\ a\ b\ f$ $c\ a\ f\ d\ b$ $a\ f\ b\ c\ d$ $b\ d\ c\ f\ a$ $f\ b\ d\ a\ c$

Следствие 2.2.1. Существуют дистрибутивные, идемпотентные, унипотентные диассоциативные и почти идемпотентные квазигруппы 5 - го порядка степени k, l =4.

Следствие 2.2.2. Диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков допустимые.

Следствие 2.2.3. Главноизотоп $(Q, \circ)$ допустимой диассоциативной квазигруппы $(Q, \cdot)$ 5 - порядка также является допустимой диассоциативной квазигруппой.

Предложение 2.2.1. Пусть $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа 5 - го пордяка степени $k(l) = 2$. Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества TS - квазигруппы, то есть является TS - квазигруппой.

Предложение 2.2.2. Пусть $(Q, \cdot)$ конечная леводиассоциативная квазигруппа степени $k(l) = 2$. Если в $(Q, \cdot)$ также выполняется тождество $xy = yx$, тогда $(Q, \cdot)$ является TS - квазигруппой.

В третьем параграфе второй главы доказывается простота диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$. Для этой целы проверяются наличие собственных нетривиальных подквазигрупп в диассоциативых квазигруппах.

Теорема 2.3.1. Пусть $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа 4 - го порядка степени 3 или 5 - го порядка степени 4. Тогда $(Q, \cdot)$ простая.

Следствие 2.3.1. Если $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа порядка 4 степени 3, тогда она не имеет подквазигруппу 2 - го порядка.

Следствие 2.3.2. Так как диассоциативная квазигруппа $(Q, \cdot)$ 5 - го порядка степени 4 не имеет нетривиальных собственных подквазигрупп, поэтому $(Q, \cdot)$ простая.

В четвёртом параграфе данной главы рассматривается классификация некоторых изотопических соотношений диассоциативных квазирупп 5 - го порядка степени 2 и 4. Найдены все изотопии диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени $k(l) = 4$ соответствующими подстановками. Также найдены автотопии диассоциативных квазирупп 5 - го порядка степени $k(l) = 2$ и диассоциативные квазируппы 5 - го порядка классифицированы по признаку автотопии 1 -го и 2 - го рода.

Вычисления, проделанные с помощью несложной разработанной компьютерной программой, показала, что с точностью до изотопии существуют ровно 5 главноизотопных луп для каждой диассоциативной квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 2$. Также найдены все лупы, к которым диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k, l = 2$ и 4 изотопны (табл.2.4.1).

В табл.2.4.2 приведён пример изотопии диассоциативной квазигруппы с найденными соответствующими подстановками α, β и γ. Код программы и её иллюстрация приведены в главе 3.

Таблица 2.4.1. Количество изотопии диассоциативных квазигрупп порядка 5

Количество диассоциативных квазигрупп		Количсетво луп, к которым диассоциативные квазигруппы главноизотопны
Степени $k, l = 4$		
210	90	25
	120	5
Степени $k, l = 2$		
30	30	5

Таблица 2.4.2. Изотопия диассоциативной квазигруппы

Диассоциативная квазигруппа	Подстановки	Лупа (главноизотоп)
Степени 2		
$\begin{array}{c\|ccccc} \cdot & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & c & b & f & d \\ b & d & f & c & b & a \\ c & f & b & d & a & c \\ d & b & d & a & c & f \\ f & c & a & f & d & b \end{array}$	$\alpha = \binom{abcdf}{adfbc}$ $\beta = \binom{abcdf}{acbfd}$ $\gamma = \binom{abcdf}{abcdf}$	$\begin{array}{c\|ccccc} \cdot & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & a & d & f & c \\ c & c & f & a & b & d \\ d & d & c & f & a & b \\ f & f & d & b & c & a \end{array}$
Степени 4		
$\begin{array}{c\|ccccc} \cdot & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & c & b & f & d \\ b & c & d & a & b & f \\ c & b & a & f & d & c \\ d & f & b & d & c & a \\ f & d & f & c & a & b \end{array}$	$\alpha = \binom{abcdf}{acbfd}$ $\beta = \binom{abcdf}{acbfd}$ $\gamma = \binom{abcdf}{abcdf}$	$\begin{array}{c\|ccccc} \cdot & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & f & a & c & d \\ c & c & a & d & f & b \\ d & d & c & f & b & a \\ f & f & d & b & a & c \end{array}$

Предложение 2.4.1. Каждой диассоциативной квазигруппе 5 - го порядка степени 2 соответствуют 5 автотопий вида $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$.

Следствие 2.4.1. Диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени 2 имеют 100 автотопий, из них 18 автотопий 1 - го рода.

Следствие 2.4.2. Каждой диассоциативной квазигруппе 5 - го порядка степени 2 соответствуют 5 автотопий вида $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$ и 100 автотопий вида α, β, γ.

Пятый параграф второй главы посвящен решению проблемы В.Д.Белоусова об изотопии квазигруппы Стейна для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го пордяка.

Квазигруппы Стейна[17] хорошо известны и составляют важный класс квазигрупп. Также отметим работы Сада[18], где рассматриваются квазигруппы с тождеством $x(xy) = yx$.

В 2014 году И. Флоря и Н. Дидурик[19] изучали изотопы квазигруппы Стейна. В поле действительных чисел $R(+, \cdot)$ находили левую квазигруппу Стейна и также доказывали, что, если она изотопна группе $(Q, \cdot)$, тогда группа $(Q, \cdot)$ абелева.

В данном параграфе диссертации также построены примеры и найдены все главноизотопные лупы квазигруппы Стейна 5 - го порядка. С помощью разработанного алгоритма классификации квазигрупп по тождествам из главы 1 найдены все квазигруппы Стейна 5 - го порядка (табл.2.5.2, 2.5.3), также все главноизотопные лупы с соответствующими подстановками для этих квазигрупп. Это обобщает результаты вышеуказанных авторов .

Таблица 2.5.2. Классификация квазигруппы Стейна и изотопных луп

Количество квазигруппы Стейна	Количество главноизотопных луп	Количество подстановок для каждой главноизотопной лупы
6	5	5

Таблица 2.5.3. Все квазигруппы Стейна 5-го поярдка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	f	b	d	a	c
c	d	a	c	f	b
d	c	f	b	d	a
f	b	d	a	c	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	b	f	c
b	f	b	a	c	d
c	d	f	c	b	a
d	c	a	f	d	b
f	b	c	d	a	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	f	c	b
b	c	b	d	f	a
c	b	f	c	a	d
d	f	a	b	d	c
f	d	c	a	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	c	c	d
b	d	b	a	f	c
c	f	d	c	a	b
d	b	c	f	d	a
f	c	a	d	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	b	c
b	c	b	f	a	d
c	b	d	c	f	a
d	f	c	a	d	b
f	d	a	b	c	f

Далее в таблице 2.5.4 приведём пример изотопий вида $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$ для квазигруппы Стейна:

[17] Stein S. K. On a construction of Hosszu. // Publ. Math. Debrecen, 1959, No 1-2, P. 10 – 14.

[18] Sade A. Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et antiadeliens // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1960, ser. I, 74, No 2, P. 91 – 99.

[19] Флоря И.А., Дидурик Н.Н. О некоторых изотопах квазигруппы Стейна. // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико-математические и технические науки. Экономика и управление. 2014, № 3, С. 61 – 67.

Таблица 2.5.4. Изотопии квазигруппы Стейна

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	b	f	a	d	c
c	c	d	b	a	f
d	d	b	f	c	a
f	f	a	c	b	d

$\circ$	a	b	c	d	f
a	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{f}$
b	$\boldsymbol{b}$	c	f	a	d
c	$\boldsymbol{c}$	f	d	b	a
d	$\boldsymbol{d}$	a	b	f	c
f	$\boldsymbol{f}$	d	a	c	b

$$\alpha = \binom{abcdf}{adfbc} \qquad \beta = \binom{abcdf}{afbcd}$$

Следствие 2.5.1. Каждая квазигруппа Стейна порядка 5 главноизотопна 5 абелевым группам.

Следствие 2.5.2. Класс праводиассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени k = 2 с левым тождеством Стейна главноизотопен абеливым группам.

В третьей главе приведены текст и интерфейс программ для построения квазигруппы в виде латинского квадрата чётного порядка, классификации квазигрупп 4 - го и 5 - го пордяков по основным тождествам, нахождение и классификация диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков, нахождение всех главноизотопных луп и автотопий для классов диассоциативных квазирупп рассматриваемых в этой работе.

Эти исследования проведены на основе разработанного алгоритма, компьютерного анализа и результатов, полученных в первой и во второй главах диссертации. Программы написаны автором на языках программирования Delphi, C++ и Visual Studio C#.

Пакет программ зарегистрирован авторам в Министерстве культуры Республики Таджикистан и имеет сертификат, в соответствие с номером 107 от 20-го января 2021г.

Основные научные результаты и выводы

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. разработана классификация квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам и найден класс квазигрупп безподквазигрупп 4 - го и 5 - го порядка, [4-А, 5-А, 6-А, 7-А, 8-А, 9-А, 12-А];

2. исследованы диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$, [2-А, 10-А, 11-А, 13-А];

3. для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l)$ найдены все главноизотопные лупы и все автотопии, [2-А, 3-А, 14-А];

4. решена проблема В.Д. Белоусова об изотопии квазигруппы Стейна, [3-А, 14-А];

5. на языке программирования разработана программа для построения латинских квадратов порядка $n = p - 1$, где p простое число, [1-А];

6. на языке программирования разработана программа для классификации квазигрупп 5 - го порядка по основным тождествам и для классификации диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков, [7-А, 8-А, 9-А]

7. на языке программирования разработана программа для нахождения главноизотопных луп диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2 и 4 и автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2, [3-А, 14-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический и практический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы в различных разделах общей теории групп, теории квазигрупп и неассоциативных алгебраических систем, и в криптографии. Материалы диссертации могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов и магистров в высших учебных заведениях, обучающихся по специальности "Математика".

Публикации автора по теме диссертации

В рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Минобрнауки РФ:

[1-А]. Комилов О.О. Латинские квадраты [Текст] / О.О. Комилов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2014, № 1/2(130), С. 64 – 67.

[2-А]. Комилов О.О. Диассоциативные квазигруппы малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Доклады НАН Таджикистана. 2020, Том 63, № 11-12, С. 663 – 669.

[3-A]. Табари А.Х., Комилов О.О. Изотопия и автотопия диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка [Текст] / А.Х. Табари, О.О. Комилов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2021, № 1, С. 89 – 101.

В других изданиях:

[4-A]. Табаров А.Х., Комилов О.О. Изоморфные латинские квадраты малых порядков [Текст] / А.Х. Табаров, О.О. Комилов// Материалы международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений", посвящённой 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича, Душанбе, 27 – 28 апреля, 2015г., С. 39 – 40.

[5-A]. Комилов О.О. Изоморфизм и автоморфизм в квазигруппах [Текст] / О.О. Комилов // Материалы международной научно-практической конференции "Роль ИКТ в инновационном развитии экономики Республики Таджикиста",ТУТ, Душанбе, 17 – 18 ноября, 2017г., С. 74 – 76.

[6-A]. Комилов О.О. Лево-дистрибутивные квазигруппы 5 - го порядка [Текст] /О.О. Комилов // Сборник научных статей Республиканской научно-практической конференции на тему: "Инновационное обеспечение устойчивого развития сельского хозяйства", Душанбе, 2018г., С. 195 – 198.

[7-A]. Комилов О.О. Алгоритм классификации квазигрупп малых порядков по тождествам [Текст] /О.О. Комилов // Материалы XI-международной научно – теоретической конференции, посвящённой 70 – летию образования ТНУ и 70 – летию д.ф.-м.н., проф. М.К. Юнуси, Душанбе, 27 – 28 декабря, 2018г., С. 137 – 143.

[8-A]. Комилов О.О. Классификация квазигрупп малых порядков по тождествам [Текст] / О.О. Комилов // Тезисы докладов. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110–летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша, Москва, МГУ, 2018г., С. 105 – 106.

[9-A]. Комилов О.О. Компьютерный анализ леводистрибутивных квазигрупп 5-го порядка [Текст] / О.О. Комилов // Двадцать шестая международная конференция, МКО-2019, Математика. Компьютер. Образование, г.Пущино, 28-января–2-февраля, 2019г., С. 156.

[10-А]. Комилов О.О. Диассоциативные квазигруппы малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Сборник тезисов XXVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. “Ломоносов – 2019”, Москва, МГУ, 8–12 апреля 2019г., Секция “Вычислительная математика и кибернетика”, Издательство: "МАКС Пресс". С. 36 – 37.

[11-А]. Табаров А.Х., Давлатбеков А.А., Комилов О.О. Порядок элемента и обобщение идемпотентного элемента в квазигруппах [Текст] / А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высщей алгебры механико-математического факультета МГУ, Москва, 2019г., С. 60 – 61.

[12-А]. Комилов О.О. Квазигруппы без подквазигрупп малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа. Материалы международной конференции, посвящённой 60-летию академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусеновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича. Институт математики им. А.Джураева. Академия наук Республики Таджикистан. Таджикский национальный университет Душанбе, 13–14 декабря, 2019г., С. 279 – 280.

[13-А]. Табари А.Х., Комилов О.О. О допустимости диассоциативной квазигруппы [Текст] / А.Х. Табари, О.О. Комилов // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Материалы международной конференции, посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича, Душанбе, 25–26 декабря, 2020г., С.321 – 322.

[14-А]. Комилов О.О. Решение задачи В.Д. Белоусова для некоторых классов диассоциативных квазигрупп [Текст] / О.О. Комилов // Вестник Филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г.Душанбе. Серия естественных наук. 2020г.,Т.1, С.4 – 10.

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК 512.548

Бо ҳуқуқи дастхат

Комилов Оқил Одилович

КВАЗИГУРӮҲҲОИ ДИАССОТСИАТИВӢ ВА ТАСНИФИ ОНҲО

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
номзади илмҳои физика-математика аз рӯи ихтисоси
01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Душанбе – 2021

Кор дар Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст.

Роҳбари илмӣ: **Табарӣ Абдулло Ҳабибулло,**
узви вобастаи Академияи миллии
илмҳои Тоҷикистон, доктори
илмҳои физика ва математика,
вакили Маҷлиси намояндагони
Маҷлиси Олии Ҷумҳурии Тоҷикистон

Муқарризони расмӣ: **Аллаков Исмаил,**
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи алгебра ва геометрияи
Донишгоҳи давлатии Термез

Аминов Асламбек Собирович,
номзади илмҳои физикаю математика,
ходими калони илмии шуъбаи
алгебра, назарияи ададҳо ва топологияи
Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон
ба номи С.Айнӣ

Ҳимояи диссертатсия санаи 15-уми октябри соли 2021 соати 10:00 дар ҷаласаи Шӯрои диссертатсионии 6D. КОА-037 дар назди Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734063, ш. Душанбе, кӯчаи Айнӣ 299/4, баргузор мегардад.

Бо матни пурраи диссертатсия метавон дар китобхонаи марказию илмии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон ва сомонаи http://www.mitas.tj шинос шуд.

Автореферат санаи “___” _______ соли 2021 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии
Шӯрои диссертатсионии 6D. КОА-037,
доктори илмҳои физика ва математика,
дотсент **Каримов О.Х.**

Тавсифи умумии кор

Муҳиммияти мавзӯъ. Тӯли даҳсолаи охир назарияи квазигурӯҳҳо дар корҳои математикон мавқеи хоса пайдо намуда, айни замон бо масъалаҳои худ ҳамчун яке аз қисматҳои тезташаккулёбандаву мустақили алгебраи умумӣ ба ҳисоб меравад. Маълумоти муфассалро оид ба назарияи квазигурӯҳҳо аз монографияи В.Д.Белоусов[1] ва Р.Брак[3] ба даст овардан мумкин аст.

Дастгоҳи алгебравии квазигурӯҳҳо аз ҷониби В.Д.Белоусов ва шогирдони ӯ сохта шуда, квазигурӯҳҳои ба хаттӣ наздик бошанд, дар корҳои Г.Б.Белявская ва А.Х.Табаров[2] тадқиқ карда шудаанд.

Аён аст, ки группоиди $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳ номида мешавад, агар барои дилхоҳ $a, b \in Q$ баробариҳои $ax = b, ya = b$ ҳалли ягона дошта бошад. Квазигурӯҳи $(Q, \cdot)$-и дорои воҳид лупа ном дорад.

Ҳалшавандагӣ дар квазигурӯҳҳо бо воситаи ҷадвали Кэлии группоиди $(Q, \cdot)$, ки дар он ҳар як элементи сатру сутун гуногун мебошанд, санҷида мешавад. Дар кунҷи чапи болоии ҷадвал аломати амали бинарӣ оварда мешавад (Ҷадвали 1).

Ҷадвали 1. Ҷадвали Кэлии группоиди $(Q, \cdot)$

$\cdot$	x_1	...	x_n
x_1	a_{11}	...	a_{1n}
. . .	...	...	...
x_n	a_{n1}	...	a_{nn}

Дар ин ҷадвал $x_1, .., x_n$ элементҳои квазигурӯҳи Q мебошанд. Ҳар як сабти a_{ij} бошад, зарби $x_i x_j$ -ро дар квазигурӯҳи Q ифода мекунад.

Аз рӯи ин ҷадвал амалҳои бинариро дар сохторҳои алгебравӣ муайян намудан мумкин аст. Инчунин, истифодаи он барои тафтиши гурӯҳҳо ва квазигурӯҳҳои тартибашон хурд аз рӯи айниятҳо мувофиқи мақсад мебошад. Азбаски қисми дохилии ҷадвали Кэлӣ квадрати лотинӣ мебошад, пас хосиятҳои алгебравии квазигурӯҳҳо бояд аз рӯи квадратҳои лотинии онҳо муайян карда шаванд. Усулҳои мазкур дар корҳои В.А. Артамонов[4] истифода шудаанд.

[1] Белоусов В.Д. Элементы теории квазигрупп // Кишинев. :КГУ, 1981, 115 с

[3] Bruck R. H. A Survey of binary systems // Berlin: Springer Verlag. 1958. P. 185.

[2] Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп // Дискретная математика. РАН, 2009, Т.21, Вып.1, С. 39 – 54.

[4] Artamonov V.A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polynomially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // Discrete Applied Mathematics, V. 200(2016), P. 5 – 17.

Квадратҳои лотинӣ дар математика ҳамчун предмети асосии тадқиқоти комбинаторика машҳуранд. Онҳо барои ташаккули алгебра мусоидат намудаанд ва яке аз аввалинҳо шуда Леонард Эйлер ба омӯзиши ин обектҳо машғул гашта буд.

Ҳоло ба сифати маҷмӯи Q одатан маҷмӯи ададҳои натуралии аз 1 то n гирифта мешавад, аммо Эйлер[5] (1707-1783) ба ҳайси он ҳарфҳои алифбои лотиниро истифода мекард. Аз ҳамон давра то ҳол ин объектҳо ба худ номи квадратҳои лотиниро гирифтаанд. Инчунин, масъалаи Эйлер вобаста ба квадратҳои лотинӣ оид ба 36 афсар низ маълум аст. Муаммоҳои ададии ҷопонӣ бо квадратҳои лотинии тартиби 9 - "Судоку" низ ҳоло хеле машҳур мебошанд, ки дар онҳо квадрати аз 9×9 катакчаҳо иборатбуда, бо рақамҳои аз 1 то 9 ба таври махсус ҷойгир карда мешаванд. Тавре ки қайд кардем, шабеҳи алгебравии квадрати лотинӣ, ҷадвали зарби квазигурӯҳи охирнок мебошад. Дар муқоиса бо сохторҳои дигари алгебравӣ (гурӯҳ, ҳалқа, майдон) барои $n(n \in N)$-и додашуда, квазигурӯҳҳо хеле зиёданд, масалан ҳангоми $n = 6$ миқдори квазигурӯҳҳо ба 812 851 200 баробар аст. Қимати I_5 аввалин маротиба аз ҷониби Эйлер ҳисоб карда шудааст. Баъдан (дар солҳои 1990-2005) бо ёрии МЭҲ миқдори квадратҳои лотинии тартиби аз 7 то 11 ёфта шудаанд.

Истифодаи квазигурӯҳҳо ва квадратҳои лотинӣ дар криптография таърихи қадим доранд. Яке аз рамзҳои классикие, ки дар асоси сохторҳои алгебравӣ таҳия шудааст, ин рамзи Иоган Тритемий[6] мебошад. Дар он квадрати лотинии тартиби 26 (мувофиқ ба ҷадвали Кэлии квазигурӯҳи $(Z_{26}, +)$) истифода шудааст. Баъдан ин рамз аз ҷониби Ҷ.Беллазо[7] такмил дода шуд.

Ҳоло барои криптосистемаҳо маҳз сохторҳои ғайриассотсиативӣ хеле мувофиқ буда, яке аз муносибтарини онҳо квазигурӯҳҳои содаи охирнок мебошанд. Муайянкунии ин гуна квазигурӯҳҳои мувофиқ дар криптография татбиқшаванда, ҳанӯз ҳам мавриди таҳқиқот қарор доранд.

Дар самти татбиқи квазигурӯҳҳо дар криптография, инчунин, корҳои назарраси М.М.Глухов[8], В.А.Шербаков[9] ва В.А.Артамоновро[10] қайд кардан бамаврид аст, ки ин аз густариши таваҷҷӯҳ ба мавзӯи кор шаҳодат медиҳад.

Усулҳои истифоданамудаи муаллифони дар боло қайдшуда, имкон ме-

[5] Euler L. Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques // Middelburg, 1782.

[6] Тужилин М. Э. Латинские квадраты и их применение в криптографии // Прикладная дискретная математика, 2012, є 3, С. 47 – 52.

[7] Bellaso G.B. II vero modo di scrivere in cifra con facilita, prestezza et securezza di Misser Giovan Battista Bellaso // Stampato in Breffa per Iacobo Britannico, Bressa, 1564.

[8] Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008, є 2, С.28 – 32.

[9] Shcherbacov V.A. Quasigroups in cryptology // Shcherbacov // Comput. Sci. J. Moldova. 2009, V.17, No.2, P. 193 – 228.

[10] Артамонов В.А. Квазигруппы и их приложения // Чебышевский сборник, 2018, Т. 19., Вып. 2., С. 111 – 122.

диҳанд, ки квазигурӯҳҳои охирнок ва сохтори онҳо таҳқиқ карда шаванд, инчунин, татбиқи квазигурӯҳҳо аз нуқтаи назари сохтани криптосистемаҳои гуногуни алгебравӣ аз рӯи объектҳои ғайриассотсиативӣ омӯхта шаванд.

А.Х.Табаров[11] ҳангоми таҳқиқи тартиби элемент ва умумигардонии элементи идемпотентӣ дар квазигурӯҳҳои хаттӣ синфи нави квазигурӯҳҳоро бо номи казигурӯҳҳои диассотсиативӣ ҷорӣ намуд.

Квазигурӯҳ $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи диассотсиативии дараҷаи $k(l)$ ном дорад, агар дар он айниятҳои (1) ва (2) иҷро шаванд:

$$[x, y^k] = ((...(x \cdot \underbrace{y) \cdot y)...) \cdot y}_{k-\text{маротиба}} = x, \tag{1}$$

$$[y^l, x] = \underbrace{y \cdot (...(y \cdot (y}_{l-\text{ маротиба}} \cdot x)...)) = x. \tag{2}$$

Айниятҳои (1) ва (2) айниятҳои аз рост диассотсиативӣ ва аз чап диассотсиативӣ ном доранд.

Дар кори мазкур ҳангоми таҳқиқи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ чунин ҷабҳаҳо ба назар гирифта шудаанд: тасниф аз рӯи айниятҳо, қобили қабул будан, содагӣ, изотопия ва автотопия.

Ҳамаи мулоҳизаҳои дар боло овардашударо ба асоснокӣ ва актуалӣ будани мавзӯи интихобкардаи диссертатсия нисбат додан мумкин аст.

Алоқаи кор бо барномаҳои илмӣ (лоиҳаҳо), мавзӯъҳо. Диссертатсияи мазкур дар доираи амаликунии нақшаи кории дурнамои лоиҳаи корҳои илмӣ таҳқиқотии ИИТ-и Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2013 – 2017 дар мавзӯи "Квазигурӯҳҳо ва татбиқи онҳо дар криптография" иҷро карда шудааст.

Мақсад ва вазифаҳои кор. Мақсади диссертатсия аз тадқиқи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ иборат аст. Дар асоси мақсади гузошташуда, масъалаҳои зерин ҷудо карда шудаанд:

- таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5 аз рӯи айниятҳои асосӣ;
- таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5-и дараҷаи $k(l)$;
- дарёфти квазигурӯҳҳои диассотсиативии содаи тартиби 4 ва 5-и дараҷаи $k(l)$;
- дарёфти ҳамаи лупаҳои изотопии асосӣ ва автотопияи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-и дараҷаи $k(l) = 2$;

[11] Табаров А.Х., Каримов Ф. Линейные квазигруппы с дополнительными тождествами // Вестник Таджикского национального университета, Серия естественных наук, 2011, № 2, С. 3 – 7.

- ҳалли масъалаи В.Д.Белоусов барои баъзе синфҳои квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ.

Объектҳои тадқиқот. Дар диссертатсия синфи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 дида шудааст.

Усулҳои тадқиқот. Асоси тадқиқотро усулҳои алгебравӣ ва комбинаторӣ, усулҳои алгебраи компютерӣ, усулҳои профессор В.А.Артамонов барои муайяннамоии квазигурӯҳҳои сода, усулҳои дар семинарҳои Институти математика зери роҳбарии академики АМИ Тоҷикистон З.Ҳ.Раҳмонов истифода ва коркардшуда, инчунин, усулҳои таҳқиқотии А.Ҳ.Табаров барои айниятҳои квазигурӯҳҳо истифода шудаанд.

Навоварии илмӣ. Ҳамаи натиҷаҳои бадастовардашуда нав буда, онҳо бо исботҳои муфассал асоснок карда шудаанд ва қисматҳои зеринро дарбар мегиранд:

- квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 аз рӯи айниятҳои асосӣ тасниф карда шудаанд;
- ҳамаи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5-уме, ки зерквазигурӯҳ надоранд ёфта шудаанд;
- ҳамаи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5-и дараҷаи $k(l)$ ёфта шудаанд;
- ҳамаи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k(l) = 2$ ва $k(l) = 4$ ёфта шудаанд;
- ҳамаи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k(l) = 4$ бо айнияти дистрибутивӣ ёфта шудаанд;
- ҳамаи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k(l) = 4$ бо айнияти Стейн ёфта шудаанд;
- ҳамаи лупаҳое, ки ба онҳо ҳар як квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k(l) = 2$ ва $k(l) = 4$ изотопи асосӣ мебошад, ёфта шудаанд;
- исбот карда шудааст, ки квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 квазигурӯҳҳоеанд, ки зерквазигурӯҳ надоранд;
- масъалаи В.Д.Белоусов оид ба изотопи квазигурӯҳи Стейн барои баъзе синфҳои квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5 ҳал карда шудааст;
- дар забони барномасозӣ барномаи сохтани квадрати лотинии тартиби дилхоҳи $n = p - 1$, ки p адади сода мебошад, таҳия гаштааст;

- дар забони барномасозӣ барномаҳо барои таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5 аз рӯи айниятҳои асосӣ, барои таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5, инчунин, барои ёфтани лупаҳои изотопи асосӣ ва автотопияи ин синфи квазигурӯҳҳо таҳия гаштаанд.

Муҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5 аз рӯи айниятҳои асосӣ ва таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5-и дараҷаи $k(l)$;

- теорема оид ба мавҷудияти квазигурӯҳҳои диассотсиативии идемпотентии тартиби 4 ва 5;

- тасдиқот оид ба муайян намудани квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-и дараҷаи $k(l) = 2$, ки дар онҳо айниятҳои квазигурӯҳи TS иҷро мегарданд;

- теорема оид ба сода будани квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5;

- тасдиқот оид ба автотопияи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5.

Саҳми шахсии муаллиф. Масъалаҳои тадқиқот аз ҷониби роҳбари илмӣ, ки кӯмаки машваратӣ расонидааст, гузошта шудааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар қисмати “Навгонии илмӣ” дарҷ гардидаанд, ба муаллиф тааллуқ доранд.

Арзиши назариявӣ ва амалии кор. Кори диссертатсионӣ характери назариявӣ ва амалӣ дорад. Натиҷа ва усулҳои таҳқиқотро дар шохаҳои гуногуни назарияи гурӯҳҳо, назарияи квазигурӯҳҳо ва дар системаҳои алгебравии ғайриассотсиативӣ истифода бурдан мумикн аст.

Эътимоднокӣ ва асоснокии натиҷаҳои илмии тадқиқот. Эътимоднокии натиҷаҳои кори диссертатсионӣ бо исботҳои қатъии математикиву комбинатории тасдиқотҳо, ки дар диссертатсия оварда шудааст, таъмин карда шуда, аз тарафи муаллифони дигар асоснок карда мешавад. Инчунин, барои гирифтани баъзе натиҷаҳо бо истифода аз забони барномасозии C++ ва Visual Studio C# барномаҳо таҳия шудаанд.

Тасвиби кор. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар чунин конфронсҳо ва семинарҳо маърӯза карда шудаанд:

- конференсияи байналмилалии “Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ” бахшида ба 80 - солагии узви вобастаи АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физика ва математика, профессор Стетсенко Владислав Яковлевич, Душанбе, 27 - 28-уми декабри соли 2015с;

- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалии “Нақши технологияҳои иттилоотию коммуникатсионӣ дар рушди инноватсионии Ҷумҳурии Тоҷикистон”. ДТТ, Душанбе, 17 - 18-уми ноябри соли 2017.;
- конференсияи байналмилалии алгебравӣ бахшида ба 110 - солагиия профессор А.Г.Курош, ДДМ, Москва, соли 2018;
- конференсияи байналмилалии XXVI-ум. МКМ - 2019. Математика. Компютер. Маориф, ш.Пушино. 28-уми январи соли 2019;
- конференсияи байналмилалии XXVI-уми донишҷӯён, аспирантон ва олимони ҷавон, “Ломоносов - 2019”, ДДМ, Москва, 8 - 12-уми апрели соли 2019;
- конференсияи байналмилалӣ бахшида ба 90 - солагии кафедраи алгебраи олии факултети механикаю математикаи ДДМ, Москва, соли 2019;
- конференсияи байналмилалии “Проблемаҳои муосир ва татбиқи алгебра, назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ” бахшида ба 60 - солагии академики Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физика ва математика, профессор Раҳмонов Зарулло Ҳусейнович ва узви вобастаи Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори илмҳои физика ва математика, профессор Исхоков Сулаймон Абунасрович. Душанбе, 13 - 14-уми декабри соли 2019.;
- конференсияи байналмилалии “Проблемаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ”, бахшида ба 70 - солагии академики АМИТ, доктори илмҳои физика ва математика, профессор Бойматов Камолиддин Ҳамроевич, Душанбе, 25 - 26-уми декабри соли 2020;
- семинарҳои шуъбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топология (2021 с.) ва семинарҳои умумиинститутӣ (2021 с.) дар Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон;
- семинари кафедраи технологияҳои иттилоотӣ ва иртиботии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.

Интишорот. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар чордаҳ мақолаҳои илмие, ки номгӯи онҳо дар охири автореферат овардашудаанд, нашр шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, хулоса ва феҳристи адабиёти истифодашуда, ки 58 номгӯйро дарбар мегирад, иборат аст. Ҳаҷми умумии диссертатсия 93 саҳифаи чопи компютериро ташкил дода, дар барномаи LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст.

Мӯҳтавои асосии диссертатсия

Диссертатсия аз сарсухан оғоз мегардад. Дар он оид ба шарҳи мубрамияти мавзӯи интихобшуда, мақсад, тасвиб ва шарҳи мухтасари натиҷаҳои гирифташуда, сухан меравад.

Боби якуми диссертатсия аз се фасл иборат буда, дар он мавзӯи таснифи квазигурӯҳҳо баррасӣ гаштааст.

Дар фасли якуми боби якум маълумоти умумӣ ва муайянкуниҳои асосӣ аз назарияи квазигурӯҳҳо ва лупаҳо оварда шудаанд.

Дар фасли дуюми ин боб мафҳуми содагӣ дар квазигурӯҳҳо дида шудааст. Алгоритми таснифи квазигурӯҳҳо аз рӯи хосияти сода будани квазигурӯҳҳо тартиб дода шудааст. Яъне квазигурӯҳҳое ёфта мешаванд, ки зерквазигурӯҳи ғайрихусусӣ надоранд.

Квазигурӯҳи содаи охирнок ва инчунин, квазигурӯҳе, ки зерквазигурӯҳи ғайрихусусӣ надорад ҳамчун сохторҳои алгебравии муносиб дар криптосистемаҳо шинохта шудаанд.

Маълум аст, ки квазигурӯҳ сода аст, агар гомоморфизм нисбат ба худ надошта бошад. Инчунин, квазигурӯҳҳое, ки худ зерквазигурӯҳ надоранд, низ содаанд. Ин муайянкуниҳо ба муайянкуниҳои одии гурӯҳҳо, инчунин, ба муайянкуниҳои Г.Н.Гаррисон[12] барои квазигурӯҳҳои охирнок ва ба муайянкуниҳое, ки А.Алберт[13] барои лупаҳо истифода мекард, эквивалентанд.

Баръакси гурӯҳҳо дар квазигурӯҳҳо тартиби квазигурӯҳ ба тартиби зерквазигурӯҳ тақсим намешавад, яъне теоремаи Лагранж дар квазигурӯҳҳо ҷой надорад[14].

Ин гуфтаҳоро дар ҷадвали 1.2.1 мушоҳида намудан мумкин аст:

Ҷадвали 1.2.1. Квазигурӯҳ бо зерквазигурӯҳи тартиби 2

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	c	d	b
b	d	b	f	a	c
c	c	d	a	b	f
d	b	c	d	f	a
f	f	a	b	c	d

[12] Garrison G. N. Quasigroups // Ann. of Math. 1940, Vol. 41, P. 474 – 484.
[13] Albert A. A. Quasigroups, I. // Trans. Amer. Math. Soc. 1943, Vol. 54(3) P. 507 – 519.
[14] R.H. Bruck Some results in the theory of quasigroups // Trans. Amer. Math. Soc., 1944, V. 55, P. 19 – 52.

Аз ҷадвали 1.2.1 дидан мумкин аст, ки $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи тартиби 5-ум ва $(H, \cdot)$ зерквазигурӯҳи тартиби 2-юм мебошад, ки дар ин ҷо $H = \{a, c\}$.

Драри Уол[15] исбот намудааст, ки квазигурӯҳи тартиби содаи p метавонад, ки зерквазигурӯҳ дошта бошад ва тартиби онҳо метавонад ба нисфи тартиби квазигурӯҳ баробар ва ё камтар аз нисфи он бошад.

Дар ин фасл алгоритме тартиб дода шудааст, ки квазигурӯҳро аз рӯи хосияти содагӣ месанҷад. Квазигурӯҳҳоеро меёбад, ки онҳо зерквазигурӯҳи ғайримуқаррарӣ надоранд (ҷадвали 1.2.2 ва 1.2.3). Бо ин мақсад усули муайянкунии содагии квазигурӯҳҳои Р.Брак, Д.Уол ва В.Артамонов истифода мешавад.

Алгоритми тафтиши мавҷудияти зерквазигурӯҳ дар квазигурӯҳ:

1. Бигзор $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи тартиби 5 бошад.
2. Ҳамаи ҷуфти имконпазири $x, y \in Q$ дида мебароем.
3. Натиҷаи амалро нисбати $(\cdot)$ дар ҳама ҷуфти $x, y \in Q$ месанҷем (то он даме, ки зермаҷмӯи маҳдуд пайдо нагардад).
4. Дар ҳолати баръакс ҳангоми пайдо нагаштани зермаҷмӯи маҳдуд квазигурӯҳ ҳамчун квазигурӯҳи сода қайд (сабт ё хориҷ) мегардад.

Азбаски тартиби квазигурӯҳ 5 мебошад, пас тартиби зерквазигурӯҳи имконпазири мавҷудбуда 2 буда метавонад. Ҳангоми тафтиши зермаҷмӯҳои якэлемента дар Q, масалан дар квазигурӯҳҳои идемпотентӣ айён аст, ки ҳар як зермаҷмӯи якэлемента зерквазигурӯҳро ташкил медиҳад. Бинобар ин дар алгоритм танҳо зермаҷмӯҳои дуэлементаи маҷмӯи Q ба назар гирифта мешаванд. Ҳамчун додаҳои дохилкунанда ҳамаи квазигурӯҳҳои тартиби 5-ум истифода мешаванд (ҳамагӣ 161280 квазигурӯҳ ба намуди квадрати лотинӣ). Дастаи квазигурӯҳҳо дар файли формати txt, ҳамчун массиви дученака сабт шудааст. Ин файл барои алгоритм файли дохилкунанда ба ҳисоб меравад. Алгоритм барои ҳар як квазигурӯҳ истифода мешавад. Матни барнома ва натиҷаи кори он дар боби сеюм оварда шудааст.

Ҷадвали 1.2.2. Таснифи квазигурӯҳҳои тартибашон хурд

Тартиби квазигурӯҳ	Миқдор	Квазигурӯҳи сода (зерквазигурӯҳнадошта)	Квазигурӯҳи зерквазигурӯҳдошта
5	161280	155730	5550
4	576	488(20)	88
3	12	12	0

Миқдори квазигурӯҳҳои тартиби 3, 4 ва 5 аз тарафи Эйлер ёфта шудаанд. Дар ҷадвали 1.2.2. аз 488 квазигурӯҳи зерквазигурӯҳнадоштаи тартиби 4, 20-то квазигурӯҳ бо сифати муайянкунии содагии квазигурӯҳи Артамонов дуруст меоянд[10].

[15] Drury W.W. Subquasigroups of finite quasigroups // Pacific J. Math., 1957, No. 4, P. 1711 – 1714.

Ҷадвали 1.2.3. Квазигурӯҳи зерквазигурӯҳнадошта

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	b	c	f	d	a
b	c	a	d	b	f
c	d	f	c	a	b
d	a	d	b	f	c
f	f	b	a	c	d

Дар фасли сеюми ин боб айниятҳои асосие, ки аксар вақт дар системаҳои алгебравӣ, дар мисоли гурӯҳҳо ва квазигурӯҳҳо дида мешаванд, оварда шудаанд. Ин айниятҳо аз тарафи В.Д.Белоусов[20] дар системаҳои $Q(\Sigma)$, ки дар ин ҷо Σ аз амалҳои бинарӣ дар маҷмӯи Q иборат аст, муайян карда шудааст. Дар ин фасл, инчунин, алгоритми таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5 аз рӯи ин айниятҳои асосӣ тартиб дода шудааст. Алгоритми мазкур барои тартиби хурди квазигурӯҳҳо аз рӯи айниятҳои асосӣ дар асоси квадрати лотинии муносиби онҳо татбиқ карда мешавад. Хусусияти хоси ин айниятҳои асосии зикршуда дар он аст, ки дар онҳо танҳо як амал истифода мешавад ва он ҳамчун зарби одӣ ифода шудааст.

Дар поён навишти алгоритмро дар мисоли айнияти Стейн дида мебароем.

Навишти алгоритм

1. Бигзор $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи тартиби 5-ум бошад, ки дар намуди квадрати лотинӣ ифода шудааст.
2. Ҳамаи ҳолати имконпазири ҷуфти $x, y \in Q$ дида мешаванд.
3. Натиҷаи амали $(\cdot)$ барои ҳамаи ҷуфтҳои $x, y \in Q$ аз рӯи айнияти $x \cdot xy = yx$ санҷида мешавад.
4. Агар амали зикршуда барои ҳамаи ҷуфтҳои $x, y \in Q$ айнияти $x \cdot xy = yx$-ро қонеъ гардонад, пас квазигурӯҳ дар файли хориҷшаванда сабт мегардад.

Амали $(\cdot)$ барои ҳамаи ҷуфти $x, y \in Q$ дар ҷадвали Кэлии квадрати лотинӣ санҷида мешавад. Натиҷаи амалро, ки нисбати x ва y санҷида мешавад, дар буриши сатри нишонаи x ва сутуни нишонаи y ёфтан мумкин аст. Ҳар як квазигурӯҳи тартиби 5-и санҷидашаванда (ҳамагӣ 161280 квазигурӯҳ) дар файли шакли txt сабт шудааст. Ин файл ҳамчун файли дохилкунӣ истифода мешавад.

Дар асоси ин алгоритм дар забони барномасозии $++$ ва C# барномае навишта шудааст, ки он ҳамаи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5-ро санҷида, аз рӯи айниятҳои асосӣ тасниф мекунад. Матни барнома ва намуди графикии он дар боби 3-юм оварда шудааст. Натиҷаи кори барномаро дар ҷадвали 1.3.1 дидан мумкин аст.

[20] Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами // УМН, 1965, Т. 20, Вып. 1(121), С. 75 – 146.

Ҷадвали 1.3.1. Таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5

Айнияти асосӣ			Миқдори квазигурӯҳи тартиби 4	Миқдори квазигурӯҳи тартиби 5
1	$xy \cdot z = x \cdot yz$	Ассотсиативӣ	16	30
2	$yx \cdot zx = yz$	Транзитивӣ	16	30
3	$x \cdot yz = xy \cdot xz$	Аз чап дистрибутивӣ	2	18
4	$x \cdot xy = xx \cdot y$	Аз чап алтернативӣ	16	30
5	$xy \cdot x = x \cdot yx$	Чандирӣ	98	862
6	$(x \cdot yz)x = xy \cdot zx$	Айнияти Муфанг	16	30
7	$xx = x$	Идемпотентӣ	2	48
8	$xx = yy$	Унипотентӣ	96	6720
9	$x \cdot xy = yx$	Айнияти Стейн	2	6
10	$x \cdot xy = y$	Қонуни калидҳои Сад	96	720

Боби дуюм аз панҷ фасл иборат буда, ба омӯзиши квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 бахшида шудааст.

Дар фасли якуми боби дуюм дар асоси алгоритми таснифи квазигурӯҳҳо аз рӯи айниятҳои асосии боби якум бо истифода аз забони барномасозии C++ ва C# барномае навишта шудааст, ки бо ёрии он ҳамаи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 ёфта шудаанд (ҷадвали 2.1.1 ва 2.1.2). Матни барнома ва намуди графикии он дар боби сеюм оварда шудааст.

Ҷадвали 2.1.1. Таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ

Синфи квазигурӯҳҳои тартиби 4	Тарзи навишт	Миқдор
Квазигурӯҳҳои аз рост диассотсиативии дараҷаи 3	$R_y^3 = \varepsilon$	48
Квазигурӯҳҳои аз чап диассотсиативии дараҷаи 3	$L_y^3 = \varepsilon$	48
Квазигурӯҳҳои диассотсиативии дараҷаи 3	$L_y^3 = R_y^3 = \varepsilon$	16

Ҷадвали 2.1.2. Таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ

Синфи квазигурӯҳҳои тартиби 4	Тарзи навишт	Миқдор
Квазигурӯҳҳои аз рост диассотсиативии дараҷаи 4	$R_y^4 = \varepsilon$	5040
Квазигурӯҳҳои аз чап диассотсиативии дараҷаи 4	$L_y^4 = \varepsilon$	5040
Квазигурӯҳҳои диассотсиативии дараҷаи 4	$L_y^4 = R_y^4 = \varepsilon$	210
Квазигурӯҳҳои аз рост диассотсиативии дараҷаи 2	$R_y^2 = \varepsilon$	720
Квазигурӯҳҳои аз чап диассотсиативии дараҷаи 2	$L_y^2 = \varepsilon$	720
Квазигурӯҳҳои диассотсиативии дараҷаи 2	$L_y^2 = R_y^2 = \varepsilon$	30

Дар фасли дуюми боби дуюм квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5-и дараҷаи $k(l)$ тавсиф карда шудаанд. Ҳамаи синфҳои идемпотентӣ, унипотентӣ ва қисман идемпотентии квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 ёфта шудаанд. Инчунин, исбот гаштааст, ки квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-и дараҷаи $k(l) = 2$ квазигурӯҳи TS мебошанд.

Гузориши θ -и маҷмӯи Q барои $(Q, \cdot)$ пурра номида мешавад, агар инъикоси θ'

$$\theta' x = x \cdot \theta x, \forall x \in Q, \qquad (3)$$

ҳамчунин гузориши маҷмӯи Q бошад. Квазигурӯҳе, ки ақаллан як гузориши пурра дорад, квазигурӯҳи қобили қабул ном дорад.

В.Д.Белоусов[6] нишон додааст, ки дилхоҳ квазигурӯҳи $(Q, \cdot)$ идемпотентӣ квазигурӯҳи қобили қабул мебошад, яъне $\theta' = \theta = 1$.

Мисоли 2.2.1. Бигзор $(Q, \cdot)$ - квазигурӯҳи тартиби 5 дар намуди чунин ҷадвал дода шуда бошад:

Ҷадвали 2.2.1. Квазигурӯҳи тартиби 5

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	b	c
b	c	b	f	a	d
c	d	a	c	f	b
d	f	c	b	d	a
f	b	d	a	c	f

Пас $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби $k(l) = 4$, дистрибутивӣ, инчунин, идемпотентӣ мебошад, яъне дар $(Q, \cdot)$ айниятҳои зерин иҷро мегарданд:

1. $(((xy)y)y)y = x = y(y(y(yx)))$;
2. $x(yz) = (xy)(xz)$;
3. $xx = x$.

Ин айниятҳо аз рӯи ҷадвали Кэлии квазигурӯҳи додашудаи $(Q, \cdot)$, ки дар ин ҷо $Q = a, b, c, d, f$ мебошад, санҷида мешаванд. Азбаски дилхоҳ квазигурӯҳи идемпотентӣ қобили қабул аст, пас синфи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k, l = 4$-и идемпотентӣ қобили қабул мебошад.

Теоремаи 2.2.1. Квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4-ум ва 5-уми дараҷаи $k(l)$-и идемпотентӣ мавҷуданд.

Таърифи 2.2.3. Квазигурӯҳи $(Q, \cdot)$-ро квазигурӯҳи қисман идемпотентӣ меномем, агар $\forall x, y \in Q \quad x^2 \neq y^2$ бошад ва элементҳои он дар диогонали асосӣ ба намуди тартиби муайян наоварда шуда бошанд.

Дар ин фасл, инчунин, дар асоси алгоритми таснифи квазигурӯҳҳо аз рӯйи айниятҳои асосӣ ҳамаи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k, l = 4$-и идемпотентӣ, унипотентӣ ва қисман идемпотентӣ ёфт шудаанд (ҷадвали 2.2.2).

Ҷадвали 2.2.2. Синфи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5

Синф	Тарзи навишт	Миқдор	Мисол
Идемпотентӣ	x^2	36	$a\ c\ d\ f\ b$ $d\ b\ f\ a\ c$ $f\ a\ c\ b\ d$ $c\ f\ b\ d\ a$ $b\ d\ a\ c\ f$
Унипотентӣ	$x^2 = y^2$	90	$c\ b\ d\ f\ a$ $a\ c\ f\ b\ d$ $f\ d\ c\ a\ b$ $d\ a\ b\ c\ f$ $b\ f\ a\ d\ c$
Қисман идемпотентӣ	$x^2 \neq y^2$	84	$d\ c\ a\ b\ f$ $c\ a\ f\ d\ b$ $a\ f\ b\ c\ d$ $b\ d\ c\ f\ a$ $f\ b\ d\ a\ c$

Натиҷаи 2.2.1. Квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи k, l =4-и идемпотентӣ, унипотентӣ ва қисман идемпотентӣ мавҷуданд.

Натиҷаи 2.2.2. Квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 қобили қабуланд.

Натиҷаи 2.2.3. Изотопи асосии квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 5 низ квазигурӯҳи диассотсиативӣ мебошад.

Таърифи 2.2.1. Бигзор $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 5 - уми дараҷаи $k(l) = 2$ бошад, пас дар $(Q, \cdot)$ айниятҳои квазигурӯҳи - TS иҷро мегарданд, яъне квазигурӯҳи TS мебошад.

Таърифи 2.2.2. Бигзор $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи аз чап диассотсиативии охирнок бошад. Агар дар $(Q, \cdot)$ айнияти $xy = yx$ низ иҷро гардад, пас $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи TS мебошад.

Дар фасли сеюми боби дуюм содагии квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4-ум ва 5-уми дараҷаи $k(l)$ санҷида мешавад. Бо ин мақсад мавҷудияти зерквазигурӯҳҳои ғайрихусусӣ дар квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 дида мешавад.

Теоремаи 2.3.1. Бигзор $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 4-уми дараҷаи 3 ё тартиби 5-уми дараҷаи 4 бошад. Пас $(Q, \cdot)$ сода аст.

Натиҷаи 2.3.1. Агар $(Q, \cdot)$ квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 4-уми дараҷаи 3 бошад, пас дар вай зерквазигурӯҳи тартиби 2 дида намешавад.

Натиҷаи 2.3.2. Азбаски квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 4 зерквазигурӯҳи ғайрихос надорад, бинобар ин вай сода аст.

Дар фасли чоруми боби мазкур таснифи баъзе муносибатҳои изотопии квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 ва 4 дида мешавад. Ҳамаи изотопҳои квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи

4 бо гузоришҳои мувофиқашон ёфта шудаанд. Инчунин, автотопияи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 ёфта шудаанд ва онҳо аз рӯи аломати автотопияи ҷинси 1-ум ва 2-юм тасниф шудаанд.

Ҳисобкуниҳои барномаи компютерии коркардашуда нишон доданд, ки барои ҳар як квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 аз рӯи изотопия ҳамагӣ 5 лупаи изотопи асосӣ ҷой дорад. Инчунин, ҳамаи лупаҳое, ки ба онҳо квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 ва 4 изотопанд, ёфта шудаанд (ҷадвали 2.4.1).

Дар ҷадвали 2.4.2 яке аз намудҳои изотопияи квазигурӯҳи диассотсиативӣ бо гузоришҳои ёфташудаи мувофиқи α, β ва γ оварда шудааст.

Ҷадвали 2.4.1. Миқдори изотопияи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5

Миқдори квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ		Миқдори лупаҳое, ки ба квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ изотопи асосианд
Дараҷаи $k,l=4$		
210	90	25
	120	5
Дараҷаи $k,l=2$		
30	30	5

Ҷадвали 2.4.2. Изотопияи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ

Квазигурӯҳи диассотсиативӣ	Гузориш	Лупа (изотопи асосӣ)

Дараҷаи 2

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	d	f	c	b	a
c	f	b	d	a	c
d	b	d	a	c	f
f	c	a	f	d	b

$$\alpha = \begin{pmatrix} abcdf \\ adfbc \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} abcdf \\ acbfd \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} abcdf \\ abcdf \end{pmatrix}$$

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	a	d	f	c
c	c	f	a	b	d
d	d	c	f	a	b
f	f	d	b	c	a

Дараҷаи 4

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	c	d	a	b	f
c	b	a	f	d	c
d	f	b	d	c	a
f	d	f	c	a	b

$$\alpha = \begin{pmatrix} abcdf \\ acbfd \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} abcdf \\ acbfd \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} abcdf \\ abcdf \end{pmatrix}$$

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	f	a	c	d
c	c	a	d	f	b
d	d	c	f	b	a
f	f	d	b	a	c

Таърифи 2.4.1. Ба ҳар як квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2, 5-то автотопияи намуди $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$ дуруст меояд.

Натиҷаи 2.4.1. Квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 ҳамагӣ 100-то автотопия дошта, 18-тои онҳо автотопияи ҷинси 1-ум мебошанд.

Натиҷаи 2.4.2. Ба ҳар як квазигурӯҳи диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2, 5-то автотопияи намуди $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$ ва 100-то автотопияи намуди α, β, γ дуруст меоянд.

Фасли панҷуми боби дуюм ба ҳалли масъалаи В.Д.Белоусов оид ба изотопияи квазигурӯҳи Стейн барои баъзе синфҳои квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5 бахшида шудааст.

Квазигурӯҳҳои Стейн[17] хеле машҳуранд ва синфи муҳими квазигурӯҳҳоро ташкил медиҳанд. Инчунин, аз корҳои Сад[18] ёдовар шудан низ мумкин аст, ки дар он айниятҳои намуди $x(xy) = yx$ дида шудаанд.

Соли 2014 И.Флоря ва Н.Дидурик[19] изотопияи квазигурӯҳи Стейнро омӯхта буданд. Онҳо дар майдони ададҳои ҳақиқӣ $R(+, \cdot)$ квазигурӯҳи чапи Стейнро ёфтаанд ва исбот намудаанд, ки агар вай ба гурӯҳи $(Q, \cdot)$ изотоп бошад, пас ин гурӯҳи $(Q, \cdot)$ гурӯҳи абелӣ мебошад.

Дар ин фасли диссертатсия мисолҳои гуногуни квазигурӯҳи тартиби 5-уми Стейн дар намуди ҷадвалӣ сохта шуда, ҳамаи лупаҳое, ки ба квазигурӯҳи Стейн изотопи асосианд ёфта шудаанд. Дар асоси алгоритми сохташудаи таснифи квазигурӯҳҳо аз рӯи айниятҳои асосии дар боби якум овардашуда, бо истифодаи забони барномасозии C++ ва C# барномае таҳия шудааст ва дар асоси он ҳамаи квазигурӯҳҳои Стейни тартиби 5 ёфт шудаанд (ҷадвали 2.5.2, 2.5.3), инчунин, ҳамаи лупаҳои ба ин синфи квазигурӯҳҳо изотопи асосӣ бо гузоришҳои мувофиқ ёфт шудаанд. Ин натиҷаҳо натиҷаҳои муаллифони дар боло зикршударо мукаммал менамоянд.

Ҷадвали 2.5.2. Таснифи квазигурӯҳи Стейн ва лупаҳои изотопии он

Миқдори квазигурӯҳи Стейн	Миқдори лупаҳои изотопи асосӣ	Миқдори гузоришҳо дар изотопия
6	5	5

[17] Stein S. K. On a construction of Hosszu. // Publ. Math. Debrecen, 1959, No 1-2, P. 10 – 14.
[18] Sade A. Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et antiadeliens // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1960, ser. I, 74, No 2, P. 91 – 99.
[19] Флоря И.А., Дидурик Н.Н. О некоторых изотопах квазигруппы Стейна. // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико-математические и технические науки. Экономика и управление. 2014, № 3, С. 61 – 67.

Ҷадвали 2.5.3. Ҳамаи квазигурӯҳҳои Стейни тартиби 5

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	f	b	d	a	c
c	d	a	c	f	b
d	c	f	b	d	a
f	b	d	a	c	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	b	f	c
b	f	b	a	c	d
c	d	f	c	b	a
d	c	a	f	d	b
f	b	c	d	a	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	f	c	b
b	c	b	d	f	a
c	b	f	c	a	d
d	f	a	b	d	c
f	d	c	a	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	c	c	d
b	d	b	a	f	c
c	f	d	c	a	b
d	b	c	f	d	a
f	c	a	d	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	b	c
b	c	b	f	a	d
c	b	d	c	f	a
d	f	c	a	d	b
f	d	a	b	c	f

Дар поён (ҷадвали 2.5.4) изотопияи намуди $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$-ро барои квазигурӯҳи Стейн меорем:

Ҷадвали 2.5.4. Изотопияи квазигурӯҳи Стейн

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	b	f	a	d	c
c	c	d	b	a	f
d	d	b	f	c	a
f	f	a	c	b	d

$\circ$	a	b	c	d	f
a	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{f}$
b	$\boldsymbol{b}$	c	f	a	d
c	$\boldsymbol{c}$	f	d	b	a
d	$\boldsymbol{d}$	a	b	f	c
f	$\boldsymbol{f}$	d	a	c	b

$\alpha = \binom{abcdf}{adfbc}$ $\qquad$ $\beta = \binom{abcdf}{afbcd}$

Натиҷаи 2.5.1. Ҳар як квазигурӯҳи Стейни тартиби 5 ба 5 гурӯҳи абелӣ изотопи асосӣ аст.

Натиҷаи 2.5.2. Синфи квазигурӯҳҳои аз рост диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 бо айнияти чапи Стейн ба гурӯҳи абелӣ изотопи асосӣ аст.

Дар боби сеюми кор матни навишт ва намуди графикии барномаҳои компютерие, ки барои сохтани квазигурӯҳи тартиби ҷуфт дар намуди квадрати лотинии тартиби ҷуфт, барои таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4-ум ва 5-ум аз рӯи айниятҳои асосӣ, барои ёфтан ва таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4-ум ва 5-ум, барои ёфтани лупаҳои изотопи асосӣ ва автотопия-ҳои синфи квазигурӯҳҳои диассотсиативии дар кори мазкур дидашаванда, оварда шудааст.

Ин тадқиққотҳо дар асоси алгоритми сохташуда, таҳлили компютерӣ ва натиҷаҳое, ки дар боби дуюм ва сеюм гирифта шуда буданд, гузаронида шуданд. Барномаҳо аз тарафи муаллиф дар забони барномасозии Delphi, C++ ва Visual Studio C# таҳия гаштаанд. Барномаҳои компютерӣ дар Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон ба қайд гирифта шудааст ва мувофиқи рақами 107 аз 20-уми январи соли 2021 шаҳодатнома дорад.

Натиҷаҳои асосӣ ва хулосаҳо

Ҳамаи натиҷаҳои асосии дар диссертатсия бадастомада нав буда, онҳо муфассал исбот шудаанд ва аз қисмҳои зерин иборатанд:

- таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5 аз рӯи айниятҳои асосӣ тартиб дода шудааст ва синфи квазигурӯҳҳои тартиби 4-уми ва 5-уме, ки зерквазигурӯҳ надорад, ёфта шудааст, [4-М, 5-М, 6-М, 7-М, 8-М, 9-М, 12-М];

- квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4-ум ва 5-уми дараҷаи $k(l)$ таҳқиқ шудаанд, [2-М, 10-М, 11-М, 13-М];

- барои баъзе синфи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k(l)$ ҳамаи лупаҳои изотопҳои асосӣ ва автотопияҳо ёфта шудаанд, [2-М, 3-М, 14-М];

- масъалаи В.Д.Белоусов оид ба изотопи квазигурӯҳи Стейн барои баъзе синфи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ ҳал карда шудааст, [3-М, 14-М];

- дар забони барномасозӣ барномаи сохтани квадрати лотинии тартиби дилхоҳи $n = p - 1$, ки дар ин ҷо p адади сода мебошад, таҳия шудааст, [1-М];

- барои таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4 ва 5 аз рӯи айниятҳои асосӣ, барои таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 дар забони барномасозӣ барномаҳо таҳия шудаанд, [7-М, 8-М, 9-М];

- барои ёфтани лупаҳои изотопи асосӣ ва автотопияҳои квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k(l)$ дар забони барномасозӣ барномаҳо таҳия шудаанд, [3-М, 14-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо:

Натиҷаҳои гирифташудаи диссертатсия хусусияти назариявӣ ва амалӣ доранд. Онҳо метавонанд дар қисматҳои гуногуни назарияи умумии гурӯҳҳо, назарияи квазигурӯҳҳо, системаҳои алгебравии ғайриассотсиативӣ ва криптография татбиқи худро ёбанд.

Маводи диссертатсияро метавон ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён ва магистрони муассисаҳои олӣ аз рӯи ихтисоси “Математика”, истифода бурд.

Интишороти муаллиф оид ба мавзӯи диссертатсия

Дар маҷаллаҳои тақризшаванда аз рӯйхати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва КОА-и Федератсияи Руссия:

[1-M]. Комилов О.О. Латинские квадраты [Текст] / О.О. Комилов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2014, № 1/2(130), С. 64 – 67.

[2-M]. Комилов О.О. Диассоциативные квазигруппы малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Доклады НАН Таджикистана. 2020, Том 63, № 11-12, С. 663 – 669.

[3-M]. Табари А.Х., Комилов О.О. Изотопия и автотопия диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка [Текст] / А.Х. Табари, О.О. Комилов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2021, № 1, С. 89 – 101.

Дар маҷаллаҳои дигар:

[4-M]. Табаров А.Х., Комилов О.О. Изоморфные латинские квадраты малых порядков [Текст] / А.Х. Табаров, О.О. Комилов// Материалы международной научной конференции “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, посвящённой 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича, Душанбе, 27 – 28 апреля, 2015г., С. 39 – 40.

[5-M]. Комилов О.О. Изоморфизм и автоморфизм в квазигруппах [Текст] / О.О. Комилов // Материалы международной научно-практической конференции “Роль ИКТ в инновационном развитии экономики Республики Таджикиста”,ТУТ, Душанбе, 17 – 18 ноября, 2017г., С. 74 – 76.

[6-M]. Комилов О.О. Лево-дистрибутивные квазигруппы 5 - го порядка [Текст] /О.О. Комилов // Сборник научных статей Республиканской научно-практической конференции на тему: “Инновационное обеспечение устойчивого развития сельского хозяйства”, Душанбе, 2018г., С. 195 – 198.

[7-М]. Комилов О.О. Алгоритм классификации квазигрупп малых порядков по тождествам [Текст] /О.О. Комилов // Материалы XI-международной научно – теоретической конференции, посвящённой 70 – летию образования ТНУ и 70 – летию д.ф.-м.н., проф. М.К. Юнуси, Душанбе, 27 – 28 декабря, 2018г., С. 137 – 143.

[8-М]. Комилов О.О. Классификация квазигрупп малых порядков по тождествам [Текст] / О.О. Комилов // Тезисы докладов. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110–летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша, Москва, МГУ, 2018г., С. 105 – 106.

[9-М]. Комилов О.О. Компьютерный анализ леводистрибутивных квазигрупп 5-го порядка [Текст] / О.О. Комилов // Двадцать шестая международная конференция, МКО-2019, Математика. Компьютер. Образование, г.Пущино, 28-января–2-февраля, 2019г., С. 156.

[10-М]. Комилов О.О. Диассоциативные квазигруппы малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Сборник тезисов XXVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. “Ломоносов – 2019”, Москва, МГУ, 8–12 апреля 2019г., Секция “Вычислительная математика и кибернетика”, Издательство: ООО "МАКС Пресс". С. 36 – 37.

[11-М]. Табаров А.Х., Давлатбеков А.А., Комилов О.О. Порядок элемента и обобщение идемпотентного элемента в квазигруппах [Текст] / А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высщей алгебры механико-математического факультета МГУ, Москва, 2019г., С. 60 – 61.

[12-М]. Комилов О.О. Квазигруппы без подквазигрупп малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа. Материалы международной конференции, посвящённой 60-летию академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусеновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича. Институт математики им. А.Джураева. Академия наук Республики Таджикистан. Таджикский национальный университет Душанбе, 13–14 декабря, 2019г., С. 279 – 280.

[13-М]. Табари А.Х., Комилов О.О. О допустимости диассоциативной квазигруппы [Текст] / А.Х. Табари, О.О. Комилов // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Материалы международной конференции, посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича, Душанбе, 25–26 декабря, 2020г., С.321 – 322.

[14-М]. Комилов О.О. Решение задачи В.Д. Белоусова для некоторых классов диассоциативных квазигрупп [Текст] / О.О. Комилов // Вестник Филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г.Душанбе. Серия естественных наук. 2020г.,Т.1, С.4 – 10.

Аннотация

диссертации Комилова Окила Одиловича на тему “Диассоциативные квазигурппы и их классификация” на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Ключевые слова: диассоциативные квазигруппы, квазигруппы безподквазигрупп, простота квазигруппы, тождества квазигрупп, изотопия, автотопия.

Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование диассоциативных квазигрупп. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- классификация квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам;
- классификация диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;
- нахождение простых диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;
- нахождение всех гланоизотопных луп и автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l) = 2$;
- решение задачи В.Д.Белоусова для некоторых классов диассоциативных квазигрупп.

Методы исследования. В работе применялись алгебраические и комбинаторные методы исследования, методы компьютерной алгебры, методы профессора В.А.Артамонова по идентификации простых квазигрупп, методы, разработанные на семинарах института математики под руководством академика НАНТ З.Х.Рахмонова, а также, разработанные А.Х.Табаровым методы исследования квазигрупп по тождествам.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- классифицированы квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам;
- найдены все квазигруппы безподквазигрупп 4 - го и 5 - го порядков;

- найдены все диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;
- охарактеризованы диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 2$ и степени $k(l) = 4$;
- найдены диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с дополнительным тождеством дистрибутивности;
- найдены диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с дополнительным тождеством Стейна;
- найдены все лупы, к которым главноизотопна каждая диассоциативная квазигруппа 5-го порядка степени $k(l) = 2$ и 4;
- доказано, что диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков являются квазигруппамы безподквазигрупп;
- решена задача В.Д.Белоусова об изотопии квазигруппы Стейна для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го пордяка;
- на языке программирования разработана программа для построения латинских квадратов любого порядка $n = p - 1$, где p простое число;
- разработаны программы для классификации квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам, для классификации диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков, и также для нахождения всех главноизотопных луп и автотопии для этих классов квазирупп.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический и практический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных разделах общей теории групп, теории квазигрупп, неассоциативных алгебраических систем и также в криптографиии.

Аннотатсия

ба диссертатсияи Комилов Оқил Одилович дар мавзӯи “Квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ ва таснифи онҳо” барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физика ва математика аз рӯи ихтисоси 01.01.06 – Мантиқи математикӣ, алгебра ва назарияи ададҳо

Вожаҳои калидӣ: квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ, квазигурӯҳҳои зерквазигурӯҳнадошта, квазигурӯҳҳои сода, айнити квазигурӯҳҳо, изотопия, автотопия.

Мақсад ва вазифаҳои кор. Мақсади диссертатсия ин таҳқиқи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ буда, вобаста ба ин мақсади гузошташуда, масъалаҳои зерин ҷудо карда шудаанд:

- таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4-ум ва 5-ум аз рӯи айниятҳои асосӣ;
- таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4-ум ва 5-уми дараҷаи $k(l)$;
- ёфтани квазигурӯҳҳои содаи диассотсиативии тартиби 4-ум ва 5-уми дараҷаи $k(l)$;
- ёфтани лупаҳои изотопии квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи $k(l) = 2$;
- ҳалли масъалаи В.Д.Белоусов оид ба изотопи квазигурӯҳи Стейн барои баъзе синфҳои квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ.

Усулҳои тадқиқот. Асоси тадқиқотро усулҳои алгебравӣ ва комбинаторӣ, усулҳои алгебраи компютерӣ, усулҳои профессор В.А.Артамонов барои муайяннамоии квазигурӯҳҳои сода, усулҳои дар семинарҳои Институти математика зери роҳбарии академики АМИ Тоҷикистон З.Ҳ.Раҳмонов истифода ва коркардшуда, инчунин, усулҳои таҳқиқотии А.Ҳ.Табаров барои айниятҳои квазигурӯҳҳо истифода шудаанд.

Навоварии илмӣ. Натиҷаҳои дар диссертатсия овардашуда нав буда, муаллиф онро мустақилона ба даст овардааст ва аз қисматҳои зерин иборатанд:

- квазигурӯҳҳои тартиби 4-ум ва 5-ум аз рӯи айниятҳои асосӣ тасниф карда шудаанд;
- ҳамаи квазигурӯҳҳои тартиби 4-ум ва 5-уме, ки зерквазигурӯҳ надоранд, ёфта шудаанд;

- ҳамаи квазигурӯҳҳои диассотсиативии 4-ум ва 5-ум дараҷаи $k(l)$ ёфта шудаанд;
- квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 ва 4 тавсиф карда шудаанд;
- квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 4, ки дорои айнияти иловагии дистрибутивӣ ёфта шудаанд;
- квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 4, ки дорои айнияти иловагии Стейн мебошанд, ёфта шудаанд;
- ҳамаи лупаҳое, ки ба онхо квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5-уми дараҷаи 2 ва 4 изотопи асосианд, ёфта шудаанд;
- исбот карда шудааст, ки квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5 квазигурӯҳҳоеанд, ки зерквазигурӯҳ надоранд;
- масъалаи В.Д.Белоусов оид ба изотопияи квазигурӯҳҳои Стейн барои баъзе синфҳои квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 5 ҳал карда шудааст;
- дар забони барномасозӣ барнома оид ба сохтани квадратҳои лотинии тартиби дилхоҳи $n = p - 1$, ки дар ин чо p адади сода аст, тартиб дода шудааст;
- барномаҳои компютерӣ оид ба таснифи квазигурӯҳҳои тартиби 4-ум ва 5-ум аз рӯи айниятҳои асосӣ, барои таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативии тартиби 4 ва 5, инчунин, барои дарёфти ҳамаи изотопҳо ва автотопҳои ин синфи квазигурӯҳҳо тартиб дода шудаанд;

Арзишҳои назариявӣ ва амалии кор. Кори диссертатсионӣ дорои аҳамияти ҳам назариявӣ ва ҳам амалӣ мебошад. Натиҷаҳои онро дар бахшҳои гуногуни назарияи умумии гурӯҳҳо, назарияи квазигурӯҳҳо, дар системаҳои алгебравии ғайриассотсиативӣ ва инчунин, дар криптография истифода намудан мумкин аст.

Summary

Ot the thesis of Komilov Okil Odilovich on the topic “Diassociative quasigroups and their classification” for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in the specialty 01.01.06 - Mathematical logic, algebra and number theory

Keywords: diassociative quasigroups, quasigroups without subquasigroups, simplicity of a quasigroup, identities of quasigroups, isotopy, autotopy.

Purpose of the study. The aim of this work is to study diassociative quasigroups. In accordance with the set goal, the following tasks are distinguished:

- classification of quasigroups of the 4th and 5th orders by basic identities;
- classification of 4th and 5th order diassociative quasigroups degree $k(l)$;
- finding simple diassociative quasigroups of the 4th and 5th orders of degree $k(l)$;
- finding all glanoisotope loops and autotopies of diassociative quasigroups of the 5th order of degree $k(l) = 2$;
- Solution of VD Belousov's problem for some classes of diassociative quasigroups.

Research methods. The work used algebraic and combinatorial research methods, methods of computer algebra, methods Professor V.A. Artamonov on the identification of simple quasigroups, methods developed at the seminars of the Institute of Mathematics under the guidance of Academician of NAST Z.Kh.Rakhmonov, as well as developed by A.Kh.Tabarov methods for studying quasigroups by identities.

Scientific novelty. All the results obtained are new, they substantiated by detailed evidence and are as follows:

- Classified the quasigroups of the 4th and 5th orders according to the main identities;
- found all quasigroups without subquasigroups of the 4th and 5th orders;
- found all diassociative quasigroups of the 4th and 5th orders of degree k(l);
- diassociative quasigroups of the 5th order of degree $k(l) = 2$ and degree k(l) = 4;

- diassociative quasigroups of the 5th order of degree $k(l) = 4$ with an additional distributivity identity;
- diassociative quasigroups of the 5th order of degree $k(l) = 4$ with the additional Stein identity;
- found all loops to which each diassociative is chiefly isotopic quasigroup of the 5th order of degree $k(l) = 2$ and 4;
- proved that the diassociative quasigroups of the 4th and 5th orders are quasigroups without subquasigroups;
- V.D.Belousov's problem on the isotopy of the Stein quasigroup was solved for some classes of diassociative quasigroups of the 5th order;
- a program has been developed in the programming language for constructing Latin squares of any order n = p 1, where p is a prime number;
- developed programs for the classification of quasigroups of the 4th and 5th orders by the basic identities, for the classification of diassociative quasigroups of the 4th and 5th orders, and also for finding all principal isotopic loops and autotopies for these classes of quasigroups.

Theoretical and practical value. The work is theoretical and practical. The results obtained in it can be used in various branches of general group theory, the theory of quasigroups, non-associative algebraic systems, and also in cryptography.