ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК: 512.548

На правах рукописи

Комилов Окил Одилович

ДИАССОЦИАТИВНЫЕ КВАЗИГРУППЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,

член-корреспондент НАН Таджикистана

Табари Абдулло Хабибулло

Душанбе — 2021

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Идея изучения неассоциативных структур развивалась уже в 20-е гг. XX века и первыми обобщёнными работами на эту тему были работы А.К.Сушкевича [1, 2], Р.Муфанг [3] и Г.Бола [4], в которых появились тождества Бола и Муфанг, а также работы А.Альберта и Р.Брака [5] - [7]. Стоит отметить фундаментальные исследования В.Д.Белоусова и его учеников, где ими была достаточно хорошо разработана теория квазигрупп и луп [8]. В 1935 году немецкая учёная Р.Муфанг ввела класс неаасоциативных объектов, называемых в настоящее время лупами Муфанг, и впервые термин "квазигруппа" появился в её работах. А термин "лупа" введен Албертом и происходит от английского слова loop (петля).

За последние десятилетия теория квазигрупп получила развитие в работах различных математиков и в настоящее время она представляет собой быстроразвивающийся и самостоятельный раздел общей алгебры со своими задачами и проблемами. Достаточно полную информацию об этом можно получить из монографий В.Д.Белоусова [8, 9] и Р.Брака [10].

Алгебраический аппарат квазигрупп был построен В.Д.Белоусовым и его школой, а квазигруппы, близкие к линейным, были исследованы ранее в работах Г.Б.Белявской и А.Х.Табари [11, 12].

Напомним, что группоид $(Q, \cdot)$ называется квазигруппой, если для любых $a, b \in Q$ уравнения $ax = b, ya = b$ всегда разрешимы, причём однозначно. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ с единицей называется лупой [8]. Разрешимость в квазигруппах проверяется при помощи таблицы Кэли группоида $(Q, \cdot)$, где все элементы в каждой строке и в каждом столбце различны. В левом углу таблицы указывают знак операции (табл.1).

Таблица 1. Таблица Кэли группоида $(Q, \cdot)$

$\cdot$	x_1	...	x_n
x_1	a_{11}	...	a_{1n}
.			
.	...	...	...
.			
x_n	a_{n1}	...	a_{nn}

Элементами квазигруппы Q являются $x_1, .., x_n$, каждая запись a_{ij} обозначает произведение $x_i x_j$ в квазигруппе Q.

По этой таблице можно определить бинарные операции в алгебраических структурах, также целесообразно использовать её для идентификации групп и квазигрупп малого порядка по тождествам. Так как внутренняя часть таблицы Кэли является латинским квадратом, то важно охарактеризовать требуемые алгебраические свойства квазигрупп из их латинских квадратов [13] - [15].

Латинские квадраты в математике известны, как основной предмет исследования в комбинаторике. Они способствовали развитию алгебры, а многие подходы к изучению латинских квадратов восходят к Леонарду Эйлеру. В настоящее время в качестве множества Q обычно берётся множество натуральных чисел от 1 до n, однако Эйлер (1707-1783) использовал буквы латинского алфавита, откуда латинские квадраты и получили своё название [16], также известна его задача с латинскими квадратами о 36 офицерах. В настоящее время широко известны японские числовые головоломки с латинскими квадратами 9 -го порядка - “Судоку”, где в квадрате 9×9 клеток нужно расставить числа от 1 до 9 особым образом. Как уже отмечалось, алгебраическим аналогом латинского квадрата является таблица умножения конечной квазигруппы. В сравнении с другими алгебраическими структурами (группы, кольца, поля) для данного $n(n \in N)$ квазигрупп "очень много". Например, для $n = 6$ количество квазигрупп 812 851 200. Число I_5 впервые вычислено Эйлером. Однако потом с помощью ЭВМ было найдено количество латинских квадратов от 7 - го до 11 - го порядка (1990-2005) $[17, 18]$.

Квазигруппы и латинские квадраты имеют богатую историю применений в криптографии. Одним из первых классических шифров, созданный на основе алгебраических структур, является шифр Иогана Тритемия, в котором был применён латинский квадрат 26 - го порядка (соответствующую таблице Кэли квазигруппы $(Z_{26}, +)$) в качестве таблицы для шифрации [19]. Позднее этот шифр усовершенствовал Дж. Белазо [20].

На сегодняшний день для криптосистем именно неассоциативные алгебраические структуры очень хорошо подходят, и одной из наиболее подходящих из них являются конечные простые квазигруппы. Идентификация подходящих квазигрупп для криптографических целей всё еще остаётся проблемой исследования.

Среди важных работ по приложению квазигрупп в криптографии также стоит отметить работы М.М.Глухова [21], В.А.Шербакова [22] и В.А.Артамонова $[13, 14]$, что свидетельствует о растущем внимании к теме работы.

Методы, разработанные вышеуказанными авторами, дают возможность исследовать конечные квазигруппы и их структуры, а также изучить вопросы приложения квазигрупп с точки зрения построения различных алгебраических криптосистем над неассоциативными объектами.

В.А.Артамоновым [13, 14] изучаются полиномиально полные квазигруппы без подквазигрупп, проблемы их распознавания по латинскому квадрату и построения таких классов квазигрупп, также рассмотрена их конструкция, где эти результаты работы применяются для защиты информации.

А.Х.Табаровым в работе [23], в связи с исследованием порядка элемента и обобщения идемпотентного элемента в линейных квазигрупп введён новый класс квазигрупп - диассоциативные квазигруппы.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ *называется диассоциативной степени k(l), если в ней выполняются одновременно тождества (1) и (2):*

$$[x, y^k] = ((...(x \cdot \underbrace{y) \cdot y)...) \cdot y}_{k-раз} = x, \tag{1}$$

$$[y^l, x] = \underbrace{y \cdot (...(y \cdot (y}_{l-раз} \cdot x)...)) = x. \tag{2}$$

В данной диссертационной работе при исследовании диассоциативных квазигрупп рассмотрены следующие аспекты: классификация по тождествам, допустимость, простота, изотопия и автотопия.

Первая глава диссертации имеет вспомогательный характер и в ней приводятся общие сведения и основные определения из теории квазигрупп и луп. Также приведены классификации квазигрупп малого порядка по тождествам и на предмет простоты.

Во второй главе исследуются диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков. Доказано, что диассоциативные квазигруппы являются квазигруппами без подквазигрупп и также допустимыми. Найдены все изотопи и автотопии диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков. Кроме того, в данной главе приведено решение задачи В.Д.Белоусова об изотопии квазигруппы Стейна для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го пордяка.

Разработан пакет программ на языке программирования $C{++}$ и $C\#$, для классификации и идентификации квазигрупп малого порядка по основным тождествам, и на предмет её простоты с учётом отсутствия нетривиальных собственных подквазигрупп, и для нахождения изотопии и автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l)$. Текст программы и её графическая иллюстрация приводятся в главе 3 и вынесены в Приложении.

Все рассуждения, приведённые выше, можно отнести к обоснованию и актуальности выбранной темы диссертации.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана проекта НИР НИИ Таджикского национального университета за 2013 – 2017гг. по теме “Квазигруппы и их приложения в криптографии”.

Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование диассоциативных квазигрупп. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

1. классификация квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам;

2. классификация диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;

3. нахождение простых диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;

4. нахождение всех гланоизотопных луп и автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l) = 2$;

5. решение задачи В.Д.Белоусова для некоторых классов диассоциативных квазигрупп.

Объекты исследования. В диссертации рассматривается класс диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков.

Методы исследования. В работе применялись алгебраические и комбинаторные методы исследования, методы компьютерной алгебры, методы профессора В.А.Артамонова по идентификации простых квазигрупп, методы, разработанные на семинарах института математики под руководством академика НАНТ З.Х.Рахмонова, а также, разработанные А.Х.Табаровым методы исследования квазигрупп по тождествам.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

1. классифицированы квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков по основным тождествам и на предмет простоты;

2. найдены все диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$;

3. охарактеризованы диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 2$ и степени $k(l) = 4$;

4. найдены диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с дополнительным тождеством дистрибутивности;

5. найдены диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с дополнительным тождеством Стейна;

6. найдены все лупы, к которым главноизотопна каждая диассоциативная квазигруппа 5-го порядка степени $k(l) = 2$ и 4;

7. доказано, что диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков являются квазигруппамы безподквазигрупп;

8. решена задача В.Д.Белоусова об изотопии квазигруппы Стейна для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го пордяка;

9. на языке программирования разработана программа для построения латинских квадратов любого порядка $n = p - 1$, где p простое число;

10. на языке программирования разработана программа для классификации квазигрупп 5 - го порядка и для классификации диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков;

11. на языке программирования разработана программа для нахождения главноизотопных луп диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2 и 4 и для нахождения автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2.

Положения, выносимые на защиту:

1. классификация квазигрупп порядка 4 и 5 по основным тождествам и классификация диассоциативных квазигрупп порядка 4 и 5;

2. теорема о существовании идемпотентных диассоциативных квазигрупп 4-го и 5-го порядков;

3. предложение о выявлении диассоциативных квазигрупп 5 - го пордяка степени $k(l) = 2$, где выполняется тождества TS квазигруппы.

4. теорема о простоте диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков;

5. предложение об автотопии диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков.

Личный вклад автора. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы, который оказывал консультативное содействие. Результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ автором также получены основные результаты компьютерного анализа. Основные результаты диссертационной работы, отраженные в разделе "Научная новизна", получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический и практический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных разделах общей теории групп, теории квазигрупп, неассоциативных алгебраических систем и также в криптографиии. Эти результаты несут также практическую ценность, поскольку неассоциативные алгебраические структуры и конечные простые квазигруппы широко применимы и хорошо подходят в криптосистемах для защиты информации.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими и комбинаторными доказательствами всех предложений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов. Также для получения результатов разработаны программы на языке программирования C++ и Visual Studio C#.

Апробация работы. Включенные в данную диссертационную работу результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- IX международная конференция по компьютерному анализу проблем науки и технологии, посвященная 65 - летию ТНУ, Душанбе, 28 - 30 декабря 2013 г.;
- международная научная конференция, посвящённая 80 - летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича, Душанбе, 27 - 28 апреля 2015г.;
- международная научно-практическая конференция "Роль ИКТ в инновационном развитии экономики Республики Таджикиста". ТУТ, Душанбе, 17 - 18 ноября 2017 г.;
- международная конференция. Мальцевские чтения. Новосибирский государственный университет. 19 - 22 ноябрь 2018 г.;
- международная алгебраическая конференция, посвящñная 110 - летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша, МГУ, 2018 г.
- XXVI международная конференция. МКО - 2019. Математика. Компьютер. Образование, г.Пущино, 28-января-2 февраля 2019 г.;
- XXVI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов - 2019", МГУ, Москва, 8 - 12 апреля 2019 г.;
- международная конференция, посвящённая 90 - летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, Москва, 2019 г.;
- международная конференция, посвящённая 60 - летию академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических

наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусейновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича. Душанбе, 13 - 14 декабря 2019 г.;

- международная конференция “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, посвящённая 70 - летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича, Душанбе, 25 - 26 декабря 2020 г;

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2021 г.) и общеинститутские семинары (2021 г.) в Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана;

- семинар кафедры информационных и коммуникационных технологий Таджикского национального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-А] - [14-А], список которых приведён в конце диссертации. Работы [1-А] - [3-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте РТ. В работах, опубликованных в соавторстве с научным руководителем, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка цитированной литературы из 58 наименований. Полный объём диссертации 93 страниц машинописного текста и набрана на редакторе LaTeX.

Глава 1

Простые квазигруппы

1.1. Основные понятия и необходимые сведения

В данной главе приводим некоторые определения и сведения, которые известны и будут использованы в диссертации. Разрабатывается алгоритм классификации квазигруппы малого порядка на предмет простоты. Вычисляем квазигруппы, у которых нет собственных нетривиальных подквазигрупп. В заключении главы также рассматривается классификация квазигрупп малого порядка по основным тождествам.

Определение 1.1.1. [8] *Группоид* $(Q, \cdot)$, *то есть множество* Q *с бинарной операцией* $(\cdot)$ *называется квазигруппой, если для любых* $a, b \in Q$ *уравнения*

$$a \cdot x = b, \quad y \cdot a = b, \tag{1.1.1}$$

всегда разрешимы, причём однозначно.

В теории квазигрупп, в отличие от теории групп важную роль играют так называемые локальные единицы f_a и e_a произвольного элемента a.

Определение 1.1.2. [24] *Элемент* e_a *квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *называется правой локальной единицей элемента* $a \in Q$, *если* $a \cdot e_a = a$.

Определение 1.1.3. [24] *Элемент* f_a *квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *называется левой локальной единицей элемента* $a \in Q$, *если* $f_a \cdot a = a$.

Если в квазигруппе $(Q, \cdot)$ существуют правая и левая единицы, и если они совпадают, то есть $f = e$, тогда квазигруппа называется лупой.

Если принять закон ассоциативности $(ab)c = a(bc)$, то в результате квазигруппа образует группу. Следовательно, в некотором смысле верно, что квазигруппа представляет собой группу без ассоциативного закона, причём группа представляет собой особый тип квазигрупп.

Однако, в квазигруппах возможны различные варианты, которые невозможны в группах и их важно перечислить:

1. Единичные элементы f и e могут быть не равны;
2. Квазигруппа может иметь более одного идемпотентного элемента или даже совсем не иметь;
3. Порядок подквазигруппы может не разделять порядок квазигруппы;
4. Квазигруппы простого порядка могут иметь собственные подквазигруппы;
5. Каждая группа это квазигруппа, но не наоборот. Любая ассоциативная квазигруппа это группа.

Определение 1.1.4. [8] *Пусть* $(Q, \cdot)$ *- квазигруппа (лупа). Если подмножество* $Q^{'} \subseteq Q$ *является квазигруппой (лупой) относительно той же операции* $(\cdot)$, *то* $(Q^{'} \subseteq Q)$ *называется подквазигруппой (подлупой) квазигруппы (лупы).*

Таблица умножения конечной квазигруппы, то есть её таблица Кэли, которая описывает структуру конечных алгебраических систем путём расположения результатов операции в таблице известна в комбинаторике, как латинский квадрат.

Определение 1.1.5. [19] *Латинским квадратом n-го порядка называется таблица размера $n \times n$, заполненная n символами упорядоченного множество Q таким образом, что в каждой её строке и в каждом столбце каждый символ из множества Q встречается только один раз.*

Определение 1.1.6. [19] *Латинский квадрат называется нормализованным, если первая строка и первый столбец квадрата заполнены в соответствии с порядком, заданным на Q .*

В данной работе автором для определения операции над множествами при доказательстве некоторых свойств и тождеств в квазигруппах малых порядков используются таблица Кэли и латинский квадрат.

Каждая запись находится ровно в одной строке или столбце латинского квадрата, соответствует уникальным решениям для уравнения вида:

$$\begin{cases} a \cdot x = b \\ y \cdot a = b \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Когда бинарная операция даёт уникальное решение вышеуказанных уравнений, независимо от значений a и b можно получить квазигруппу $(Q, \cdot)$. И наоборот, таблица Кэли любой квазигруппы $(Q, \cdot)$ представляет собой латинский квадрат (табл.1.1.1):

Таблица 1.1.1. Латинский квадрат 4 - го порядка

b	a	c	d
a	b	d	c
d	c	a	b
c	d	b	a

Определим операцию $(\cdot)$ на $Q = \{a, b, c, d\}$, поместив эту матрицу в таблицу Кэли (табл.1.1.2):

Таблица 1.1.2. Таблица Кэли квазигруппы $(Q, \cdot)$

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	d	c
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a

По табл.1.1.2 выполняем операцию $(\cdot)$. Результат операции, применяемой, например, к элементам a и b, нужно найти на пересечении строки с меткой a и столбца с меткой b (табл.1.1.2).

Таким образом, можно непосредственно проверить, что в данной таблице Кэли выполняются условия уравнения (1.1.1), то есть $(Q, \cdot)$ является квазигруппой.

Можно рассматривать квазигруппы не только на одном и том же фиксированном множестве, но и на различных множествах. Пусть даны две квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q^{'}, \circ)$. Однозначное соответствие $\varphi : Q \to Q^{'}$ называется гомоморфизмом квазигруппы $(Q, \cdot)$ в квазигруппе $(Q^{'}, \circ)$, если выполняется равенство

$$\varphi xy = \varphi x \circ \varphi y \tag{1.1.3}$$

для любых $x, y \in Q$ (если $x \in Q$, то $\varphi x \in Q^{'}$).

С понятием гомоморфизма тесно связано понятие конгруэнции. Отношение эквивалентности θ множества Q называется конгруэнцией в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если из $a\theta b$ следует $ac\theta bc$ и $ca\theta cb$ для любых $a, b, c \in Q$. Конгруэнция θ называется нормальной, если из $ac\theta bc$ как и из $ca\theta cb$ следует $a\theta b$ [9].

Задача изучения (нормальных) конгруэнций или вообще подалгебр, структура решётки конгруэнций является важной и трудной для различных алгебраических структур. В группе каждая конгруэнция нормальна.

В.А.Щербаковым в [25] найдены необходимые и достаточное условия нормальности конгруэнции квазигруппы в терминах подгруппы мультипликативной группы $(M(Q,\cdot)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$. А.Х.Табаров [26] доказал, что в линейных квазигруппах $(Q,\cdot): x\cdot y = \phi x + c + \varphi y$, где автоморфизмы ϕ и φ имеют конечные порядки, всякая конгруэнция является нормальной. Также в работе [27] доказано, что всякая конгруэнция в BG-квазигруппах (если $(Q,\cdot)$ линейная и в $(Q,\cdot)$ выполняются тождества Бола) является нормальной конгруэнцией. В группе совокупность всех элементов, конгруэнтных с единицей, является нормальным делителем группы. А в квазигруппах аналогом понятия нормального делителя будет нормальная подквазигруппа.

Определение 1.1.7. [8] *Подквазигруппа $(H,\cdot)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$ называется нормальной, если существует такая нормальная конгруэнция θ в $(Q,\cdot)$, что H совпадает с одним из классов конгруэнции по θ. Другими словами, H должна иметь вид $H = K_h$, где h - некоторый элемент из H.*

В.Д.Белоусов [8] доказал, что если квазигруппа $(Q,\cdot)$ конечная, то порядок нормальной подквазигруппы $(H,\cdot)$ является делителем порядка квазигруппы. И если $(H,\cdot)$ подквазигруппа, но не нормальная подквазигруппа, то её порядок может не быть делителем порядка квазигруппы. Для этого можно непосредственно привести пример (табл.1.1.3):

Таблица 1.1.3. Лупа с подквазигруппой 2 - го порядка

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	4	1	5	2
4	4	5	2	1	3
5	5	3	4	2	1

Очевидно, что здесь $(Q, \cdot)$ - неассоциативная лупа 5 - го порядка и $H = \{1, a\}$, где a - любой элемент из Q, $a \neq 1$, а $(H, \cdot)$ - подлупа порядка два. Внутренняя часть таблицы 1.1.3 является нормализованным латинским квадратом.

1.2. Квазигруппы без подквазигрупп

Одной из наиболее подходящих алгебраических структур для создания криптосистем являются конечные простые квазигруппы, и также квазигруппы, у которых нет собственных нетривиальных подквазигрупп. Так как, если аргументы операции окажутся элементами подквазигруппы, тогда исходный результат не выйдет за пределы подквазигруппы и сокращается пространство перебора. Этим упрощается процесс взлома. Нахождение и классификация таких подходящих квазигрупп всё ещё остаётся проблемой исследования.

Известно, что квазигруппа проста, если у неё нет собственных гомоморфизмов [28]. Также квазигруппы, не имеющие нетривиальных подквазигрупп, очевидно, являются простыми. Это определение простоты квазигруппы эквивалентно обычному определению в случае групп, также определению, которое использовал для конечных квазигрупп Г.Н.Гаррисон [29], и к тому, которое было использовано А.Альбертом [5, 6] для луп.

Гипотеза А.Альберта о существовании простых луп любого пордяка, за исключением 4 - го порядка доказана [5,6]. В работе [28] Р.Браком построены простые лупы, в частности, лупы порядка $2n+1$ с подлупами n-го порядка. Также им исследованы взаимосвязи непростых квазигрупп (конечного или бесконечного порядка) и изотопные им лупы.

В отличие от групп в квазигруппах порядок подквазигруппы не делит порядок квазигруппы, то есть, теорема Лагранжа в квазигруппах не верна [7, 29]. Это легко можно проверить из следующей табл.1.2.1:

Таблица 1.2.1. Квазигруппа с подквазигруппой 2 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	c	d	b
b	d	b	f	a	c
c	c	d	a	b	f
d	b	c	d	f	a
f	f	a	b	c	d

По табл.1.2.1 легко видеть, что $(Q,\cdot)$ квазигруппа 5 - порядка, а $(H,\cdot)$ подквазигруппа порядка два, где $H=\{a,c\}$.

Также известно, что квазигруппы порядка p, где p простое число, могут иметь собственные подквазигруппы, и порядок подквазигруппы равен или меньше, чем половина порядка квазигруппы (табл.1.2.1). Это доказывается в следующей теореме Драри Уола:

Теорема 1.2.1. [30] *Если $(Q,\cdot)$ квазигруппа порядка n, и $(S,\cdot)$ подквазигруппа порядка s, тогда $2s \leq n$.*

Ниже приводим доказательство теоремы из [30].

Свойства 1.2.1. Если $X \subset Q$ и $a \in Q$, тогда X, aX и Xa имеют одинаковый порядок.

Пусть $x \in Q \backslash S$. Если $y \in S$, тогда $xy \in Q \backslash S$. Таким образом $xS \subset Q \backslash S$. Но, согласно свойствам 1.2.1, xS имеет порядок s и поскольку $Q \setminus S$ имеет порядок $n-s$, то это означает, что $s \leq n-s$ или $2s \leq n$.

В.А.Артамоновом [13, 14] в связы с исследованием полиномиальных полных квазигрупп на основе латинского квадрата для криптографических преобразований найдены некоторые условия простоты квазигруппы. Доказано, что, если Q квазигруппа 4 - го порядка, латинский квадрат, который содержит перестановки идентификаторов, то есть содержит тождественные перестановки столбцов и строк, тогда она не проста. И если Q содержит единичную перестановку строк (столбцов) и не тождественную перестановку столбца, тогда Q содержит 3 цикла в виде перестановоки столбца (строк) и поэтому проста. Примеры таких квазигрупп приведены в таблицах 1.2.2 и 1.2.3:

Таблица 1.2.2. Непростая квазигруппа порядка 4

$\cdot$	x_1	.	x_3	x_4
x_1	.	.	x_1	.
.	.	.	.	.
x_3	x_1	.	x_3	x_4
x_4	.	.	x_4	.

Таблица 1.2.3. Простая квазигруппа порядка 4

$\cdot$	x_1	.	x_3	x_4
x_1	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	.	.	.	.

Нами разработаны алгоритм и программа, которые проверяют квазигруппу на предмет её простоты, то есть, находят все квазигруппы с подквазигруппами 2 - го порядка (табл.1.2.4, 1.2.5), то есть вычисляются квазигруппы, у которых нет собственных нетривиальных подквазигрупп. Для этой цели использованы методы идентификации простоты квазигрупп Р.Брака, Д.Уола и В.Артамонова [28], [30], [13].

Ниже рассмотрим описание разработанного алгоритма проверки наличия подквазигруппы в квазигруппе.

1) Пусть $(Q, \cdot)$ квазигруппа порядка 5.

2) Рассмотрим всевозможные неупорядоченные пары $x, y \in Q$.

3) Вычисляем результат операции $(\cdot)$ для каждой пары, пока не получим замкнутое подмножество, то есть, нетривиальную подквазигруппу.

Так как порядок квазигруппы 5, то порядок подквазигруппы равен или меньше, чем половина порядка квазигруппы. В этом случае порядок подквазигруппы должен быть 2. Если проверить существование собственных одноэлементных подмножеств в множестве Q, то можно заметить, что каждое одноэлементное подмножество является подквазигруппой. Для этого в алгоритме мы начинаем проверять с двухэлементных подмножеств множества Q. В качестве входных данных генерировался набор всех квазигрупп 5-го порядка (все 161280 квазигруппы). Набор квазигрупп сохранен в файле формата txt, как двумерный массив. Этот файл считается входным файлом для алгоритма. Алгоритм запускается на каждую квазигруппу из набора, который принимается, как двумерный массив. Программы написаны автором на языках программирования C++ и Visual Studio C#. Текст программ и их иллюстрации приведены в главе 3.

Таблица 1.2.4. Классификация квазигрупп малого порядка

Порядок квазигруппы	Количество	Простые квазигруппы (без подквазигрупп)	Квазигруппы с подквазигруппамы
5	161280	155730	5550
4	576	488(20)	88
3	12	12	0

В табл. 1.2.4 показаны количественные результаты для квазигрупп малого порядка. Эйлер показал, что количество квазигрупп 3 - го, 4 - го и 5 - го порядков соответственно равно 12, 576 и 161280. Здесь, среди 488 квазигрупп безподквазигрупп 4 - го порядка 20 квазигрупп соответствуют признакам простоты [13, 14] по табл.1.2.3.

Таблица 1.2.5. Квазигруппа без подквазигрупп 5 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	b	c	f	d	a
b	c	a	d	b	f
c	d	f	c	a	b
d	a	d	b	f	c
f	f	b	a	c	d

Как уже было отмечено ранее, для криптографических преобразований наиболее подходящими алгебраическими структурами являются конечные простые квазигруппы. И такие квазигруппы изучены сравнительно мало. Известные результаты в этом направлении относятся, в основном, к ассоциативным квазигруппам. Неассоциативные квазигруппы ведут себя специфически, что приводит к большим трудностям при исследовании.

В отличие от неассоциативных квазигрупп и лупп для простых подстановочных шифров впервые были предложены классы ассоциативных квазигрупп, то есть группы [19]. Такой подход впервые был применён в шифре Тритемиуса в 1508г. В данном шифре используется таблица в виде нормализованного латинского квадрата (соответствующая таблице Кэли лупы - группы $(Z_{26}, +)$) (табл.1.2.6). Шифр был разработан немецким ученым Иоганном Тритемием и представляет собой шифр подстановки. По алгоритму шифрования, каждый символ сообщения смещается на символ, отстающий от данного на некоторый шаг, но по особенному правилу. При шифровании первая буква сообщения заменяется буквой, стоящей под ней в первой строке, вторая буква - буквой, стоящей во второй строке таблицы.

Таблица 1.2.6. Таблица Тритемия для шифрования

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Уравнения шифрования и дешифрования в шифре Тритемия, имеют вид:

$$L = (m + k)\ mod\ N, \tag{1.2.1}$$

$$m = (L - k)\ mod\ N, \tag{1.2.2}$$

где L- номер зашифрованной буквы в алфавите; m- номер позиции буквы шифруемого текста в алфавите; k - шаг смещения; N - число букв алфавита.

В работе [31] авторами приведён пример нахождения ключа и открытия таких подстановочных шифров. Показано, что с помощью алгоритма частотного символьного анализа для любого алфавита легко можно разработать программу для открытия скрытого текста.

1.3. Классификация квазигрупп малого порядка по тождествам

В.Д.Белоусовым [32] в системах $Q(\Sigma)$, где Σ состоит из бинарных операций, определённых на множестве Q, определены общие тождества. Ниже приводим основные из них, которые встречаются часто в алгебраических системах в примере групп и квазигрупп. Примеры тождеств,которые приведены ниже, характерны тем, что в них участвует всего одна операция, которая обозначена как обычное умножение.

1. $xy \cdot z = x \cdot yz$ - ассоциативность;
2. $yx \cdot zx = yz$ - транзитивность;
3. $x \cdot yz = xy \cdot xz$ - левая дистрибутивность;
4. $x \cdot xy = xx \cdot y$ - левая альтернативность;
5. $xy \cdot x = x \cdot yx$ - элластичность;
6. $(x \cdot yz)x = xy \cdot zx$ - тождество Муфанг;
7. $xx = x$ - идемпотентность;
8. $xx = yy$ - унипотентность;
9. $x \cdot xy = yx$ - тождество Стейна;
10. $x \cdot xy = y$ - левый закон ключей Сада.

Большой список всевозможных тождеств, которые встречаются в различных областях математики, приведён в работе Сада [33], там перечислено более 50 тождеств и указано, где они встречаются. Тождества, которые приведены выше, характерны тем, что в них участвует всего одна операция, и которая обозначена как обычное умножение.

Алгоритм классификации квазигруппы порядка 4 и 5 по основным тождествам

Алгоритм классификации квазигруппы малого порядка по основным тождествам из соответствующих ей латинских квадратов разработан нами на основе вышерассмотренных тождеств. Он реализован и приводятся эксперименты по классификации квазигруппы порядка 4 и 5 по всем категориям тождеств, которые были изложены.

Ниже рассмотрим описание алгоритма на примере тождества Стейна.

Описание алгоритма

1) Пусть $(Q,\cdot)$ квазигруппа порядка 5 в виде латинского квадрата.

2) Рассмотрим всевозможные неупорядоченные пары $x, y \in Q$.

3) Вычисляем результат операции $(\cdot)$ для каждой пары $x, y \in Q$ по заданному тождеству $x \cdot xy = yx$.

4) Если операция для всех пар $x, y \in Q$ удовлетворяет тождеству $x \cdot xy = yx$, тогда квазигруппа сохраняется на выходном файле.

Операция $(\cdot)$ для каждой пары $x, y \in Q$ выполняется по таблице Кэли латинского квадрата. Результат операции, применяемой к элементам x и y, находим на пересечении строки с меткой x и столбца с меткой y. В качестве входных данных генерировался набор всех квазигрупп 5-го порядка (все 161280 квазигруппы). Набор квазигрупп сохранён в файле формата txt. Этот файл считается входным файлом для алгоритма. Алгоритм запускается на каждую квазигруппу из набора.

Результат алгебраической классификации квазигрупп показывает количество квазигрупп соответственно по категориям тождеств (табл.1.3.1).

Нами на основе этого алгоритма на языках программирования C++ и Visual Studio C# разработаны программы, которые классифицируют и идентифицируют все квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков по основным перечисленным тождествам. Текст программ и их иллюстрации приведены в главе 3. Полученные результаты приведены в следующей табл.1.3.1:

Таблица 1.3.1. Классификация квазигрупп порядка 4 и 5

Основные тождества			Количество квазигрупп 4-го порядка	Количество квазигрупп 5-го порядка
1	$xy \cdot z = x \cdot yz$	Ассоциативность	16	30
2	$yx \cdot zx = yz$	Транзитивность	16	30
3	$x \cdot yz = xy \cdot xz$	Левая дистрибутивность	2	18
4	$x \cdot xy = xx \cdot y$	Левая альтернативность	16	30
5	$xy \cdot x = x \cdot yx$	Элластичность	98	862
6	$(x \cdot yz)x = xy \cdot zx$	Тождество Муфанг	16	30
7	$xx = x$	Идемпотентность	2	48
8	$xx = yy$	Унипотентность	96	6720
9	$x \cdot xy = yx$	Тождество Стейна	2	6
10	$x \cdot xy = y$	Левый закон ключей Сада	96	720

В следующих таблицах приведены примеры найденных квазигрупп порядков 4 и 5 по заданным тождествам из табл.1.3.1.

Таблица 1.3.2 и таблица 1.3.3. Ассоциативные квазигруппы

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	c	d	f	a
c	c	d	f	a	b
d	d	f	a	b	c
f	f	a	b	c	d

Таблица 1.3.4 и таблица 1.3.5. Квазигруппы с тождеством транзитивности

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	b	a	d	c	f
c	c	f	a	d	b
d	d	b	f	a	c
f	a	d	c	b	a

Таблица 1.3.6 и таблица 1.3.7. Квазигруппы с тождеством левой дистрибутивности

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	d	b	a	c
c	b	d	c	a
d	c	a	b	d

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	d	b	f	a	c
c	f	d	c	b	a
d	c	f	a	d	b
f	b	a	d	c	f

Таблица 1.3.8 и таблица 1.3.9. Квазигруппы с тождеством левой альтернативности

$\cdot$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	c	d	f	a
c	c	d	f	a	b
d	d	f	a	b	c
f	f	a	b	c	d

Таблица 1.3.10 и таблица 1.3.11. Квазигруппы с тождеством элластичности

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	c	d	b	a
c	d	b	a	c
d	b	a	c	d

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	a	d	f	c
c	c	f	a	b	d
d	d	c	f	a	b
f	f	d	b	c	a

Таблица 1.3.12 и таблица 1.3.13. Квазигруппы с тождеством Муфанг

$\cdot$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	c	d	f	a
c	c	d	f	a	b
d	d	f	a	b	c
f	f	a	b	c	d

Таблица 1.3.14 и таблица 1.3.15. Квазигруппы с тождеством идемпотентности

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	d	b	c
b	c	b	d	a
c	d	a	c	b
d	b	c	a	d

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	d	b	f	c	a
c	f	d	c	a	b
d	b	f	a	d	c
f	c	a	d	b	f

Таблица 1.3.16 и таблица 1.3.17. Квазигруппы с тождеством унипотентности

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	c	a	d	b
c	d	b	a	c
d	b	d	c	a

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	a	d	f	c
c	d	f	a	c	b
d	f	c	b	a	d
f	c	d	f	b	a

Таблица 1.3.18 и таблица 1.3.19. Квазигруппы с тождеством Стейна

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	d	b	c
b	c	b	d	a
c	d	a	c	b
d	b	c	a	d

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	f	b	d
b	f	b	d	a	c
c	d	a	c	f	b
d	c	f	b	d	a
f	b	d	a	c	f

Таблица 1.3.20 и таблица 1.3.21. Квазигруппы с тождеством левым законом Сады

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	s
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	b	a	d	c	f
c	c	f	a	d	b
d	f	d	c	b	a
f	d	b	f	a	c

Глава 2

Диассоциативные квазигруппы

2.1. Диассоциативные квазигруппы и их классификация

А.Х.Табаровым [23], в связи с исследованием порядка элементов и обобщением идемпотентных элементов в линейных квазигруппах, введён новый класс квазигрупп - диассоциативные квазигруппы.

В этой главе исследуются диассоциативные квазигруппы малого порядка, найдены главноизотопные лупы и автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка, также приведено решение проблемы Белоусова для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка.

Понятие порядка элемента для произвольных неассоциативных алгебраических структур разными авторами определено поразному, но общая идея, общий подход единые. Например, В.А.Шербаковым [34] введено понятие (m, n) - элемента квазигруппы, где m, n - произвольные конечные натуральные числа. Более того, введены классы (m, n) - линейных и (m, n) Т - квазигрупп. Ввиду отсутствия единичного элемента и закона ассоциативности в квазигруппах имеются различные подходы к определению порядка элемента в квазигруппах.

Определение 2.1.1. [8] *Порядком элемента x степенно ассоциативной лупы $(Q, \cdot)$ называется порядок циклической группы $< x >$, которая порождается этим элементом.*

Определение 2.1.2. [34] *Элемент x квазигруппы $(Q, \cdot)$ имеет порядок (m, n), если существуют натуральные числа m и n, такие, что $L_x^m = R_x^n = \varepsilon$. Для произвольных m_1, n_1, где $1 \leq m_1 < m$, $1 \leq n_1 < n$, элемент*

x не является (m_1, n_1) - элементом, где L_x и R_x элементы мультипликативной группы $M(Q,\cdot)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$, то есть группы, порождённой всеми левыми и правыми трансляциями квазигруппы $(Q,\cdot)$.

Замечание 2.1.1. *Из определения 2.1.2 следует, что элемент L_x группы $M(Q,\cdot)$ имеет порядок m и элемент R_x имеет порядок n. Поэтому название (m,n) порядок элемента можно интерпретировать как (L,R) порядок.*

По индукции определяется правый (левый) идемпотентный элемент степени $n(m)$, где $n, m \in N$.

Определение 2.1.3. [23] *Элемент x называется правым идемпотентным степени n, если*

$$((...(x\underbrace{x)x)...)x}_{n-раз} = x. \tag{2.1.1}$$

Симметрично определяется левый идемпотентный элемент степени m

$$\underbrace{x(...(x(x}_{m-раз}x)...)) = x. \tag{2.1.2}$$

Для краткости тождество 2.1.1 обозначим следующим образом:

$$x^{[n]} = ((...(x\underbrace{x)x)...)x}_{n-раз} = x. \tag{2.1.3}$$

Аналогично для (2.1.2)

$$^{[m]}x = \underbrace{x(...(x(x}_{m-раз}x)...)) = x. \tag{2.1.4}$$

Если для элемента x выполняются одновременно тождества (2.1.1) и (2.1.2), тогда элемент x называется идемпотентным степени (n,m).

При $n = m = 2$ получим $x^2 = x$ обычное понятие идемпотентного элемента в полугруппах и в квазигруппах.

Частными случаями тождеств (2.1.1) и (2.1.2) являются тождества диассоциативности.

Определение 2.1.4. [23] *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *называется диассоциативной степени* $k(l)$*, если в ней выполняются одновременно тождества (2.1.5) и (2.1.6):*

$$[x,y^k]=((...(x\underbrace{y)y)...)y}_{k-\text{раз}}=x, \tag{2.1.5}$$

$$\{y^l,x\}=\underbrace{y(...(y(y}_{l-\text{раз}}x)...))=x, \tag{2.1.6}$$

то есть $[x,y^k]=x$ и $\{y^l,x\}=x$.

Тождество (2.1.5) и (2.1.6) называют соответственно тождеством леводиассоциативным и праводиассоциативным.

Ниже в таблицах приведены все квазигруппы 3 - го порядка и найдены все диассоциативные квазигрупп 3-го порядка в виде латинского квадрата.

Таблица 2.1.1. Все квазигруппы 3-го порядка

$a\ b\ c$ $b\ c\ a$ $c\ a\ b$	$a\ b\ c$ $c\ a\ b$ $b\ c\ a$	$a\ c\ b$ $b\ a\ c$ $c\ b\ a$	$a\ c\ b$ $c\ b\ a$ $b\ a\ c$	$b\ a\ c$ $c\ b\ a$ $a\ c\ b$	$b\ a\ c$ $a\ c\ b$ $c\ b\ a$
$b\ c\ a$ $a\ b\ c$ $c\ a\ b$	$b\ c\ a$ $c\ a\ b$ $a\ b\ c$	$c\ a\ b$ $b\ c\ a$ $a\ b\ c$	$c\ a\ b$ $a\ b\ c$ $b\ c\ a$	$c\ b\ a$ $a\ c\ b$ $b\ a\ c$	$c\ b\ a$ $b\ a\ c$ $a\ c\ b$

Таблица 2.1.2. Праводиассоциативные квазигруппы R_y^3

$a\ b\ c$ $b\ c\ a$ $c\ a\ b$		$a\ c\ b$ $b\ a\ c$ $c\ b\ a$		$b\ a\ c$ $c\ b\ a$ $a\ c\ b$	
	$b\ c\ a$ $c\ a\ b$ $a\ b\ c$		$c\ a\ b$ $a\ b\ c$ $b\ c\ a$	$c\ b\ a$ $a\ c\ b$ $b\ a\ c$	

Таблица 2.1.3. Леводиассоциативные квазигруппы $L_y^3 = \varepsilon$

$\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix}$				
$\begin{matrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{matrix}$		

Таблица 2.1.4. Диассоциативные квазигруппы $L_y^3 = R_y^3 = \varepsilon$

$\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{matrix}$

Простая проверка показывает, что существуют всего 6 праводиассоциативных (леводиассоциативных) квазигрупп 3 - го порядка степени 3 (табл.2.1.2, 2.1.3). Из них 3 квазигруппы совпадают с условием диассоциативности степени 3 (табл.2.1.4).

Ниже (табл.2.1.5) построен пример диассоциативной квазигруппы 5 - го порядка (степени $k(l) = 4$) в виде латинского квадрата:

Таблица 2.1.5. Диассоциативная квазигруппа $L_y^4 = R_y^4 = \varepsilon$

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	b	c	f	d	a
b	c	a	d	b	f
c	d	f	c	a	b
d	a	d	b	f	c
f	f	b	a	c	d

Ниже рассмотрим алгоритм классификации диассоциативных квазигрупп 4-го и 5-го порядков из их соответствующих латинских квадратов. Этот алгоритм разработан на основе алгоритма классификации квазигрупп по основным тождествам из главы 1 диссертации.

Представим общую схему алгоритма (рис.2.2.1). Здесь для краткости квазигруппу указываем как Q, диассоциативную квазигрупп как DQ, а леводиассоциативную и праводиассоциативную квазигруппу соответственно как LDQ и RDQ.

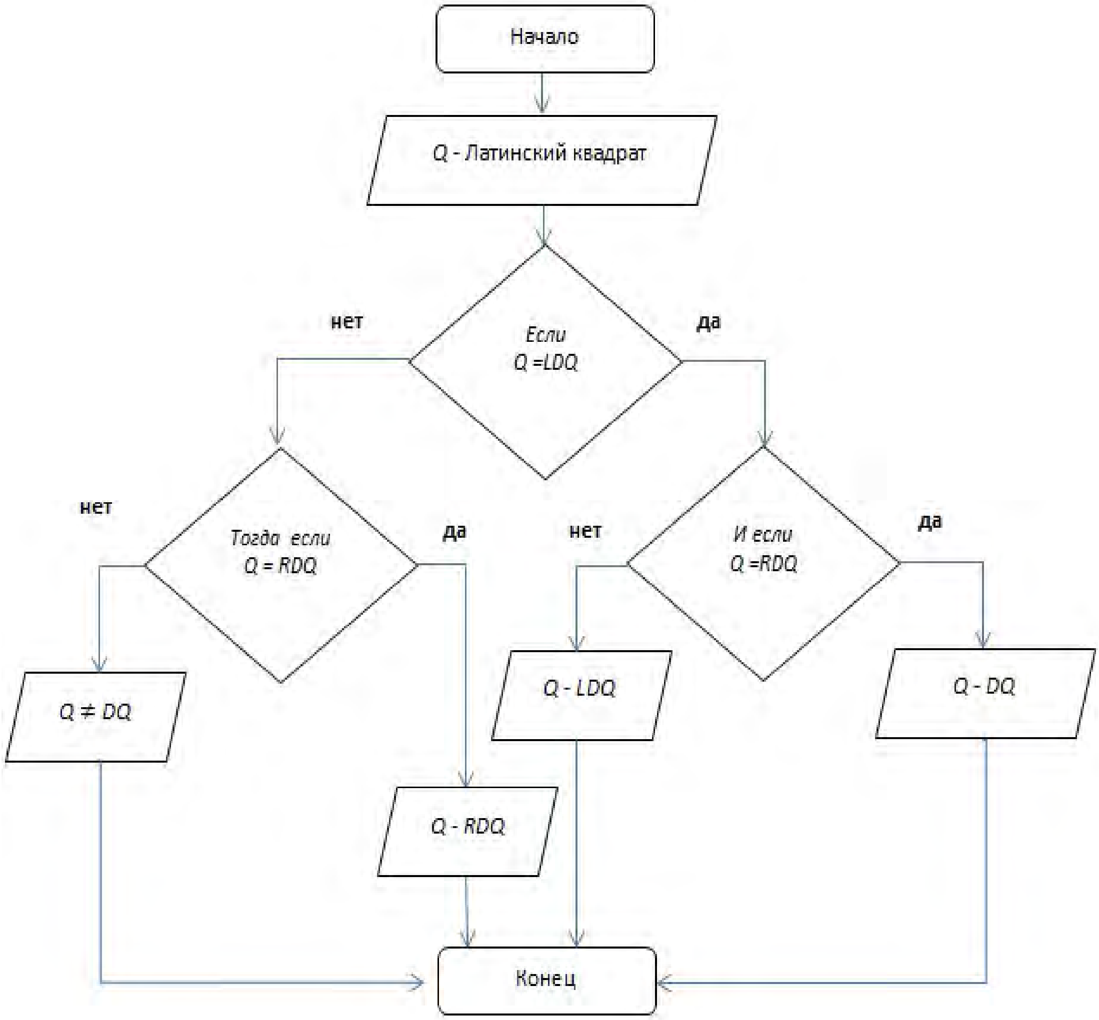


Рис. 2.1.1. Схема алгоритма классификации диассоциативных квазигрупп

С помощью этого алгоритма на языке программирования C++ и C# составлена программа и получены все праводиассоциативные (леводиассоциативные) квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков (табл.2.1.6). Все квазигруппы данного класса сохранены в виде латинского квадрата, как двумерный массив в файле формата txt. Текст программы и иллюстрация программы приведены в главе 3.

Таблица 2.1.6. Классификация диассоциативных квазигрупп

Класс квазигрупп порядка 4	Обозначение	Количество
Праводиассоциативные квазигруппы степени 3	$R_y^3 = \varepsilon$	48
Леводиассоциативные квазигруппы степени 3	$L_y^3 = \varepsilon$	48
Диассоциативные квазигруппы степени 3	$L_y^3 = R_y^3 = \varepsilon$	16

Таблица 2.1.7. Классификация диассоциативных квазигрупп

Класс квазигрупп порядка 5	Обозначение	Количество
Праводиассоциативные квазигруппы степени 4	$R_y^4 = \varepsilon$	5040
Леводиассоциативные квазигруппы степени 4	$L_y^4 = \varepsilon$	5040
Диассоциативные квазигруппы степени 4	$L_y^4 = R_y^4 = \varepsilon$	210
Праводиассоциативные квазигруппы степени 2	$R_y^2 = \varepsilon$	720
Леводиассоциативные квазигруппы степени 2	$L_y^2 = \varepsilon$	720
Диассоциативные квазигруппы степени 2	$L_y^2 = R_y^2 = \varepsilon$	30

В следующих таблицах 2.1.8 и 2.1.9 приведём примеры найденных диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков из табл.2.1.7 в виде латинского квадрата.

Таблица 2.1.8. Примеры диассоциативных квазигрупп порядка 4

Обозначение	Квазигруппа
$R_y^3 = \varepsilon$	$\begin{matrix} a & c & d & b \\ b & d & c & a \\ c & a & d & b \\ d & b & a & c \end{matrix}$
$L_y^3 = \varepsilon$	$\begin{matrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \end{matrix}$
$R_y^3 = L_y^3 = \varepsilon$	$\begin{matrix} a & c & d & b \\ c & a & b & d \\ d & b & a & c \\ b & d & c & a \end{matrix}$

Таблица 2.1.9. Примеры диассоциативных квазигрупп порядка 5

Обозначение	Квазигруппа	Обозначение	Квазигруппа
$R_y^4=\varepsilon$	$\begin{matrix} a & b & c & d & f \\ c & a & d & f & b \\ b & f & a & c & d \\ f & d & b & a & c \\ d & c & f & b & a \end{matrix}$	$R_y^2=\varepsilon$	$\begin{matrix} a & b & c & d & f \\ c & a & d & f & b \\ b & f & a & c & d \\ f & d & b & a & c \\ d & c & f & b & a \end{matrix}$
$L_y^4=\varepsilon$	$\begin{matrix} a & c & b & f & d \\ b & a & d & c & f \\ c & f & a & d & b \\ d & b & f & a & c \\ f & d & c & b & a \end{matrix}$	$L_y^2=\varepsilon$	$\begin{matrix} a & c & b & f & d \\ b & a & d & c & f \\ c & f & a & d & b \\ d & b & f & a & c \\ f & d & c & b & a \end{matrix}$
$R_y^4=L_y^4=\varepsilon$	$\begin{matrix} a & c & b & f & d \\ c & a & d & b & f \\ b & f & a & d & c \\ f & d & c & a & b \\ d & b & f & c & a \end{matrix}$	$R_y^2=L_y^2=\varepsilon$	$\begin{matrix} f & d & c & b & a \\ d & b & f & a & c \\ c & f & a & d & b \\ b & a & d & c & f \\ a & c & b & f & d \end{matrix}$

2.2. Характеристика диассоциативных квазигрупп

Определение 2.2.1. [8] *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа. Подстановка* θ *множества* Q *называется полной для* $(Q,\cdot)$*, если отображение* θ'

$$\theta' x = x\cdot\theta x, \forall x\in Q \tag{2.2.1}$$

также является подстановкой множества Q. Квазигруппа, обладающая хотя бы одной полной подстановкой, называется допустимой.

Из [8] известно, что любая идемпотентная квазигруппа $(Q,\cdot)$ допустима, именно $\theta'=\theta=1$.

Алгебраический эквивалент полной подстановки это трансверсаль латинского квадрата.

Пример 2.2.1. Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа 5 - го порядка со следующей таблицей умножения:

Таблица 2.2.1. Квазигруппа 5 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	b	c
b	c	b	f	a	d
c	d	a	c	f	b
d	f	c	b	d	a
f	b	d	a	c	f

Тогда $(Q, \cdot)$ диассоциативная степени $k(l) = 4$, дистрибутивная, также идемпотентная, то есть в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества:

1. $(((xy)y)y)y = x = y(y(y(yx)))$;
2. $x(yz) = (xy)(xz)$;
3. $xx = x$.

Эти тождества легко проверяются по заданной таблице Кэли квазигруппы $(Q, \cdot)$, где $Q = a, b, c, d, f$ (табл.2.2.1). Так как любая идемпотентная квазигруппа допустима, тогда класс идемпотентных диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени $k, l = 4$ допустимый.

Для диассоциативной квазигруппы $(Q, \cdot)$ из табл.2.2.1 тождественная подстановка

$$\theta = \begin{pmatrix} abcdf \\ abcdf \end{pmatrix}$$

будет полной. Здесь

$$\theta' = \begin{pmatrix} abcdf \\ abcdf \end{pmatrix}.$$

Ниже приведём таблицу 2.2.2 со всеми найденными полными подстановками для данной диассоциативной квазигруппы из табл.2.2.1:

Таблица 2.2.2. Полные подстановки

θ	θ'
$\binom{abcdf}{abcdf}$	$\binom{abcdf}{abcdf}$
$\binom{abcdf}{bafdc}$	$\binom{abcdf}{fcbda}$
$\binom{abcdf}{fcbda}$	$\binom{abcdf}{cfadb}$

Пример 2.2.2. Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа 5 - го порядка и пусть таблица Кэли для этой квазигруппы имеет следующий вид (табл.2.2.3):

Таблица 2.2.3. Квазигруппа 5 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	c	b
b	f	a	b	d	c
c	d	c	a	b	f
d	c	b	f	a	d
f	b	d	c	f	a

Очевидно, что квазигруппа $(Q, \cdot)$ диассоциативная степени 4, унипотентная и допустимая квазигруппа. То есть, в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества:

1. $(((xy)y)y)y = x = y(y(y(yx)))$;

2. $x^2 = y^2 \; \forall x, y \in Q$;

3. $\eta : \eta x = x \cdot \theta(x), x \in Q$.

Также можно для этой квазигруппы $(Q, \cdot)$ определить полную подстановку, где

$$\theta = \begin{pmatrix} abcdf \\ acbfd \end{pmatrix}$$

и

$$\theta' = \begin{pmatrix} abcdf \\ abcdf \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2.1. *Существуют идемпотентные диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$.*

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ диассоциативная квазигруппа 4 - го порядка степени 3 идемпотентная, где $Q = \{a,b,c,d\}$. То есть, $((xy)y)y = x$, $((xx)x)x = x$ и $xx = x$.Тогда $ab \neq b$. Очевидно, что, если $ab = b$, тогда $((xy)y)y \neq x$.

По условию идемпотентности $xx = x$, $\forall x \in Q$, следовательно, получаем следующую таблицу Кэли для $(Q,\cdot)$ (табл.2.2.4):

Таблица 2.2.4. Таблица с условием идемпотентности

$\cdot$	a	b	c	d
a	a			
b		b		
c			c	
d				d

Так как $((xy)y)y = x$ можно получить следующее (табл.2.2.5):

Таблица 2.2.5. Заполнение таблицы Кэли для $(Q,\cdot)$

$((ab)b)b = a;$	$((ad)d)d = a;$	$((ac)c)c = a$
$ab = c;$	$ad = b;$	$ac = d;$
$cb = d;$	$bd = c;$	$dc = b;$
$db = a;$	$cd = a;$	$bc = a;$
$bb = b.$	$dd = d.$	$cc = c.$

Следовательно, $ba = d, ca = b, da = c$.

Теперь по табл.2.2.6 легко проверить, что диассоциативная квазигруппа $(Q,\cdot)$ идемпотентная.

Таблица 2.2.6. Идемпотентная квазигруппа $(Q, \cdot)$

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	d	b	a	c
c	b	d	c	a
d	c	a	d	b

Определение 2.2.2. [8] *Операция B называется изотопной операции A, или изотопом A, если существует тройка подстановок α, β, γ множества Q таких, что*

$$B(x, y) = \gamma^{-1} A(\alpha x, \beta y) \tag{2.2.2}$$

для любых $x, y \in Q$. Подстановки α, β, γ - соответственно называются левой, правой и главной компонентами изотопии. Изотопия вида $T = (\alpha,$ $\beta,$ 1), $(\circ) = A^T$, то есть, если главная компонента равна 1, называется главной.

Известно, что каждая квазигруппа изотопна некоторой лупе [8]. Также известно, что, если операция B изотопна операции A, то B изоморфна некоторому главному изотопу A, это даёт возможность определить ряд свойств квазигрупп с помощью главных изотопов, а не изотопов. Если все компоненты равны, тогда изотопия является изоморфизмом.

Необходимые условия допустимости групп и квазигрупп найдены Холлом и Пэйджем [35], также В.Д.Белоусовым [8]. Если квазигруппа $(Q, \cdot)$ допустима, тогда она изотопна некоторой идемпотентной квазигруппе. Также известно, что квазигруппа $(Q, \cdot)$, изотопная допустимой квазигруппе $(Q, \cdot)$, также допустима [8].

Пример 2.2.3. Пусть $T = (\alpha, \beta, 1)$, где $\alpha = \binom{abcdf}{dbcaf}$, $\beta = \binom{abcdf}{dabfc}$ и $\gamma = \binom{abcdf}{abcdf} = \varepsilon$. И пусть $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа, заданная табл.2.2.7.

Таблица 2.2.7. Допустимая квазигруппа

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	d	f
b	d	f	a	c	b
c	b	d	c	f	a
d	c	a	f	b	d
f	f	b	d	a	c

Сделаем в этой таблице перемещение строк и столбцов с помощью соответствующей подстановки, а перемещение элементов внутри самой таблицы остаётся без изменений.

Если применить к этой квазигруппе изотопию $\alpha = \binom{abcdf}{dbcaf}, \beta = \varepsilon, \gamma = \varepsilon$, тогда получим следующую таблицу Кэли (табл.2.2.8):

Таблица 2.2.8. Изотопия $\alpha = \binom{abcdf}{dbcaf}, \beta = \varepsilon, \gamma = \varepsilon$

	a	b	c	d	f
a	c	a	f	b	d
b	d	f	a	c	b
c	b	d	c	f	a
d	a	c	b	d	f
f	f	b	d	a	c

Далее, если присоединить к этой квазигруппе изотопию $\alpha = \varepsilon, \beta = \binom{abcdf}{dabfc}, \gamma = \varepsilon$, то мы получаем такую квазигруппу (табл.2.2.9):

Таблица 2.2.9. Изотопия $\alpha = \varepsilon, \beta = \binom{abcdf}{dabfc}, \gamma = \varepsilon$

$\circ$	a	b	c	d	f
a	b	c	a	d	f
b	c	d	f	b	a
c	f	b	d	a	c
d	d	a	c	f	b
f	a	f	b	c	d

Таким образом, мы получили главноизотоп $(Q, \circ)$ допустимой диассоциативной квазигруппы $(Q, \cdot)$. Очевидно, что изотоп $(Q, \circ)$ тоже допустим. Здесь подстановка

$$\theta = \begin{pmatrix} abcdf \\ cdfab \end{pmatrix}$$

будет полной для $(Q, \circ)$, а

$$\theta' = \begin{pmatrix} abcdf \\ abcdf \end{pmatrix}.$$

Определение 2.2.3. *Квазигруппу $(Q, \cdot)$ назавём почти идемпотентной, если $\forall x, y \in Q \quad x^2 \neq y^2$ и все элементы главной диагонали не расположены в соответствии с порядком.*

Далее с помощью разработанного алгоритма классификации квазигрупп порядка 4 и 5 по основным тождествам из главы 1 найдены все идемпотентные, унипотентные и почти идемпотентные диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k, l = 4$ (табл.2.2.10).

Таблица 2.2.10. Классы диассоциативных квазигрупп порядка 5

Классы	Обозначение	Количество	Пример
Идемпотентные	x^2	36	$a\ c\ d\ f\ b$ $d\ b\ f\ a\ c$ $f\ a\ c\ b\ d$ $c\ f\ b\ d\ a$ $b\ d\ a\ c\ f$
Унипотентные	$x^2 = y^2$	90	$c\ b\ d\ f\ a$ $a\ c\ f\ b\ d$ $f\ d\ c\ a\ b$ $d\ a\ b\ c\ f$ $b\ f\ a\ d\ c$
Почти идемпотентные	$x^2 \neq y^2$	84	$d\ c\ a\ b\ f$ $c\ a\ f\ d\ b$ $a\ f\ b\ c\ d$ $b\ d\ c\ f\ a$ $f\ b\ d\ a\ c$

Следствие 2.2.1. *Существуют дистрибутивные, идемпотентные, унипотентные и почти идемпотентные диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k, l = 4$.*

Следствие 2.2.2. *Диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков допустимые.*

Следствие 2.2.3. *Главноизотоп $(Q, \circ)$ допустимой диассоциативной квазигруппы $(Q, \cdot)$ 5 - порядка, также является допустимой диассоциативной квазигруппой.*

Определение 2.2.4. [8] *Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется тотально симметричной квазигруппой, то есть TS - квазигруппой, если в $(Q, \cdot)$ выполняются два тождества.*

$$xy = yx, \ x(xy) = y. \tag{2.2.3}$$

Заметим, что тотально симметричная квазигруппа - это в точности коммутативная квазигруппа, в которой каждый элемент является своей двусторонней инверсией. Существуют унипотентные и идемпотентные тотально симметричные квазигруппы [7]. Можно привести самый простой пример для этой квазигруппы в виде квазигруппы 3 - го порядка (табл.2.2.11):

Таблица 2.2.11. Идемпотентная TS - квазигруппа

$\cdot$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Стоит также отметить, что не всякая идемпотентная и унипотентная квазигруппа полностью симметричная. Далее в следующих таблицах 2.2.12 и 2.2.13 приводим примеры идемпотентных и унипотентных диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени $k(l) = 4$, которые не являются тотально симметричными квазигруппамы, то есть в них тождества (2.2.3) невыполнимы:

Таблица 2.2.12. Идемпотентная квазигруппа

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	f	b	d	a	c
c	d	f	c	b	a
d	c	a	f	d	b
f	b	d	a	c	f

Таблица 2.2.13. Унипотентная квазигруппа

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	c	a	d	b	f
c	b	f	a	d	c
d	f	d	c	a	b
f	d	b	f	c	a

Пример 2.2.4. Пусть таблица Кэли TS - квазигруппы $(Q, \cdot)$, где $Q = \{a, b, c, d, f\}$ имеет следующий вид:

Таблица 2.2.14. TS - квазигруппа

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	c	d	a	b	f
c	b	a	f	d	c
d	f	b	d	c	a
f	d	f	c	a	b

Легко проверить, что данная TS - квазигруппа также является диассоциативной квазигруппой степени $k(l) = 2$. Отметим также, что для всех найденных диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l) = 2$ тождества TS - квазигруппы выполняются.

Предложение 2.2.1. *Пусть $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа 5 - го пордяка степени $k(l) = 2$. Тогда в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества TS - квазигруппы, то есть является TS - квазигруппой.*

Доказательство. Можно непосредственно проверить, что, когда $(Q,\cdot)$ диассоциативная квазигруппа 5 - го порядка степени $k(l)=2$, то есть, когда в $(Q,\cdot)$ выполняются тождества $(xy)y=x,\ x=y(yx)$, тогда и выполняются тождества TS - квазигруппы.

Предложение 2.2.2. *Пусть $(Q,\cdot)$ конечная леводиассоциативная квазигруппа степени $k(l)=2$. Если в $(Q,\cdot)$ также выполняется тождество $xy=yx$, тогда $(Q,\cdot)$ является TS - квазигруппой.*

Доказательство очевидно. Действительно, что, если $(Q,\cdot)$ леводиассоциативная квазигруппа конечного порядка n степени $k(l)=2$, тогда достаточно, чтобы она была коммутативной.

2.3. О простоте диассоциативных квазигрупп

Ниже приведём пример диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$:

Таблица 2.3.1. Диассоциативная квазирупа 4 - го порядка степени 3

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	c	a	b	d
c	d	b	a	c
d	b	d	c	a

Таблица 2.3.2. Диассоциативная квазирупа 5 - го порядка степени 4

$\cdot$	a	b	c	d	d
a	b	c	f	d	a
b	c	a	d	b	f
c	d	f	c	a	b
d	a	d	b	f	c
d	f	b	a	c	d

Теорема 2.3.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *диассоциативная квазигруппа 4 - го порядка степени 3 или 5 - го порядка степени 4. Тогда* $(Q,\cdot)$ *простая.*

Доказательство. Предположим обратное: предположим, что $(Q,\cdot)$ квазигруппа 4 - го порядка и имеет подквазигруппу 2 - го порядка $H < Q$, то есть $|Q|$=4 и $|H| = 2$. Известно, что порядок подквазигруппы равен или меньше половины порядка квазигруппы, но не больше [28]. Далее, мы должны показать, что это ведёт к противоречию, и означает, что наше изначальное предположение (что $(Q,\cdot)$ диассоциативная квазигруппа и имеет подквазигруппу 2 - го порядка) было неверным.

Итак, если $H = \{a, b\}$, тогда имеем таблицы 2.3.3 и 2.3.4:

Таблица 2.3.3. Квазигруппа с подквазигруппой $H = \{a, b\}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	$\cdot$	$\cdot$
b	b	a	$\cdot$	$\cdot$
c	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

По таблице 2.3.3 выполняем операцию $(\cdot)$. Результат операции, применяемой, например, к элементам a и b, нужно найти на пересечении строки с меткой a и столбца с меткой b (табл.2.3.3). Отсюда мы получим, что $a \cdot a = a$, $a \cdot b = b$, $b \cdot a = b$, $b \cdot b = a$. Далее, если для проверки выполнения тождества праводиассоциативности степени 3 вставить соответственно a и b, тогда по этой таблице получим: $(((a \cdot \underbrace{b) \cdot b)) \cdot b}_{k=3} \neq a$. По таблице 2.3.3 видно, что тождество праводиассоциативности степени 3 для $(Q,\cdot)$ невыполнимо, то есть, если в $(Q,\cdot)$ имеется такая $H = \{a, b\}$ - подквазигруппа 2 - го порядка, тогда она не может бить праводиассоциативной квазигруппой степени 3.

Таблица 2.3.4. Квазигруппа с подквазигруппой $H = \{a, b\}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	a	$\cdot$	$\cdot$
b	a	b	$\cdot$	$\cdot$
c	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Соответственно, проверяем и табл.2.3.4. Здесь $a \cdot a = b$, $a \cdot b = a$, $b \cdot a = a$, $b \cdot b = b$. В этом случае, если в тождество праводиассоциативности вставить соответственно a и b, тогда по табл. 2.3.4 получим: $(((a \underbrace{\cdot b) \cdot b)) \cdot b}_{k=3} = a$. Для a и b видно, что тождество выполнимо. Тогда получим следующую табл.2.3.5:

Таблица 2.3.5. Квазигруппа с подквазигруппой $H = \{a, b\}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Теперь проверяем умножения a и c, выполняется ли для них тождество $((a \cdot c) \cdot c) \cdot c = a$. Отсюда последовательно мы должны получить $(d \cdot c) \cdot c = a$. Но здесь видно, что результат операции $(d \cdot c) = a$ либо $(d \cdot c) = b$. Так как $a \cdot c \neq a$ и $b \cdot c \neq a$, тогда для a и c также тождество праводиассоциативности не выполнимо. Аналогично проверяется следующая табл.2.3.6:

Таблица 2.3.6. Квазигруппа с подквазигруппой $H = \{a, b\}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	d	c
c	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Очевидно, что если данная квазигруппа $(Q, \cdot)$ квазигруппа имеет подквазигруппу порядка 2, тогда в ней тождество праводиассоциативности степени 3 не выполняется.

Можно также непосредственно проверять доказательство теоремы для квазигруппы простого порядка $n = 5$. Здесь для доказательства простоты достаточно проверить, что диассоциативная квазигруппа 5 - го порядка степени 4 не имеет нетривиальных собственных подквазигрупп.

Пусть $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа 5 - го порядка, заданная табл. 2.3.2.

Для случая подквазигруппы порядка 2, то есть для $H < Q$, $|Q| = 5$ и $|H| = 2$ проверяем:

$H_1 = \{a, b\}$, $H_2 = \{a, c\}$, $H_3 = \{a, d\}$, $H_4 = \{a, f\}$, $H_5 = \{b, c\}$,

$H_6 = \{b, d\}$, $H_7 = \{b, f\}$, $H_8 = \{c, d\}$, $H_9 = \{c, f\}$, $H_10 = \{d, f\}$,

где всего 10 вариантов всевозможных пар для подквазигруппы, то есть $C_5^2 = 10$.

По табл. 2.3.2 выполняем операцию $(\cdot)$. Результат операции, применяемой, например, к элементам a и b, нужно найти на пересечении строки с меткой a и столбца с меткой b.

Таблица 2.3.7. Поиск подквазигрупп 2 - го порядка

$H_1 = \{a, b\}$ $\left.\begin{matrix} a \cdot b = c \\ b \cdot a = c \\ a \cdot a = b \\ b \cdot b = a \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_2 = \{a, c\}$ $\left.\begin{matrix} a \cdot c = f \\ c \cdot a = d \\ a \cdot a = b \\ c \cdot c = c \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_3 = \{a, d\}$ $\left.\begin{matrix} a \cdot d = d \\ d \cdot a = a \\ a \cdot a = b \\ d \cdot d = f \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_4 = \{a, f\}$ $\left.\begin{matrix} a \cdot f = a \\ f \cdot a = f \\ a \cdot a = b \\ f \cdot f = d \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_5 = \{b, c\}$ $\left.\begin{matrix} b \cdot c = d \\ c \cdot b = f \\ b \cdot b = a \\ c \cdot c = c \end{matrix}\right\} \notin H$
$H_6 = \{b, d\}$ $\left.\begin{matrix} b \cdot d = b \\ d \cdot b = d \\ b \cdot b = a \\ d \cdot d = f \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_7 = \{b, f\}$ $\left.\begin{matrix} b \cdot f = f \\ f \cdot b = b \\ b \cdot b = a \\ f \cdot f = d \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_8 = \{c, d\}$ $\left.\begin{matrix} c \cdot d = a \\ d \cdot c = b \\ c \cdot c = c \\ d \cdot d = f \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_9 = \{c, f\}$ $\left.\begin{matrix} c \cdot f = b \\ f \cdot c = a \\ c \cdot c = c \\ f \cdot f = d \end{matrix}\right\} \notin H$	$H_{10} = \{d, f\}$ $\left.\begin{matrix} d \cdot f = c \\ f \cdot d = c \\ d \cdot d = f \\ f \cdot f = d \end{matrix}\right\} \notin H$

По операциям приведённым выше, можно определить, что для диассоциативной квазигруппы 5 - го порядка из табл. 2.3.2 не существуют подквазигруппы порядка 2.

Следствие 2.3.1. *Если $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа порядка 4 степени 3, тогда она не имеет подквазигруппу 2 - го порядка.*

Следствие 2.3.2. *Так как диассоциативная квазигруппа $(Q, \cdot)$ 5 - го порядка степени 4 не имеет нетривиальных собственных подквазигрупп, поэтому $(Q, \cdot)$ простая.*

2.4. Изотопия и автотопия диассоциативных квазигрупп

Понятие изотопии является важным понятием в теории квазигрупп и луп, она является отношением эквивалентности для квазигрупп и луп и играет главную роль в разработке криптоалгоритмов на основе латинского квадрата. Поэтому важно,чтобы изотоп исследуемой квазигруппы принадлежал подходящему, с алгебраической точки зрения, классу. Вопросы изотопических соотношений рассматривались многими авторами в работах [6], [8], [36], [37], а сама изотопия была введена Альбертом [6].

В данном параграфе рассматривается классификация некоторых изотопических соотношений диассоциативных квазирупп 5 - го порядка степени 2 и 4. Найдены все изотопии диассоциативных квазигрупп 5 -го порядка степени $k(l) = 4$ соответствующими подстановками. Также найдены автотопии диассоциативных квазирупп 5 - го порядка степени $k(l) = 2$ и классифицированы по признаку автотопии 1 - го и 2 - го рода.

Изотопия имеет основную характеристику. И обоснована она тем, что тройка подстановок изотопии квазигруппу переводит снова в квазигруппу.

То есть, каждый изотоп квазигруппы, также является квазигруппой.

Напомним, что отображение $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если для любых $a, b \in G_1$ имеет место равенство $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$. Автоморфизм алгебраической системы - изоморфизм, отображающий алгебраическую систему на себя.

Если в изоморфизмах все вопросы идентичности квазигрупп одинаково решаются, то в изотопиях не сохраняются тождества. Так как главноизотоп и изотоп изоморфны между собой, достаточно определить ряд свойств квазигрупп с помощью главных изотопов.

Вычисления, проделанные с помощью несложной разработанной компьютерной программой, показала, что с точностью до изотопии существуют ровно 5 главноизотопных луп для каждой диассоциативной квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 2$. Также найдены все лупы, к которым диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k, l = 2$ и 4 изотопны (табл.2.4.1). В табл.2.4.2 приведён пример изотопии диассоциативной квазигруппы с найденными соответствующими подстановками α, β и γ. Код программы и её иллюстрация приведены в главе 3.

Таблица 2.4.1. Количество изотопии диассоциативных квазигрупп

<table>
<tr><th colspan="2">Количество диассоциативных квазигрупп порядка 5</th><th>Количсетво луп, к которым диассоциативные квазигруппы главноизотопны</th></tr>
<tr><td colspan="2">Степени $k, l = 4$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">210</td><td>90</td><td>25</td></tr>
<tr><td>120</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Степени $k, l = 2$</td><td></td></tr>
<tr><td>30</td><td>30</td><td>5</td></tr>
</table>

Таблица 2.4.2. Изотопия диассоциативной квазигруппы

Диассоциативная квазигруппа	Подстановки	Лупа (главноизотоп)

Степени 2

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	d	f	c	b	a
c	f	b	d	a	c
d	b	d	a	c	f
f	c	a	f	d	b

$$\alpha = \begin{pmatrix} abcdf \\ adfbc \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} abcdf \\ acbfd \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} abcdf \\ abcdf \end{pmatrix}$$

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	a	d	f	c
c	c	f	a	b	d
d	d	c	f	a	b
f	f	d	b	c	a

Рассмотрим вид изотопии некоторого класса диассоциативных квазигрупп в примере диассоциативных квазигрупп с тождеством дистрибутивности. Количественные результаты классификации квазигрупп по тождествам левой дистрибутивности показаны в таблице 1.3.1. параграфа 1.3 диссертации.

Как уже отмечалось в параграфе 2.2 частным случаем диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 4 являются дистрибутивные квазигруппы, то есть квазигруппы, в которых выполняются дистрибутивные законы: $x(yz) = (xy)(xz), (yz)x = (yx)(zx)$.

Дистрибутивные квазигруппы тесно связанны с лупами Муфанг, то есть квазигруппами, в которых выполняется одно из следующих тождеств:

$$x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z, \tag{2.4.1}$$

$$(zx \cdot y)x = z(x \cdot yx). \tag{2.4.2}$$

Впервые понятие дистрибутивных квазигрупп введено Бурстинон и Мейером [38]. Шерманом Стейном [39]- [41] отмечается об ортогональных парах дистрибутивных квазигрупп. Паказано, что леводистрибутивных квазигрупп порядка $4k+2$ не существует. Также стоит отметить, что основным важным свойством дистрибутивных квазигрупп является идемпотентность.

Так как дистрибутивность для диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка является частным случаем, тогда для определения изотопии классов дистрибутивных диассоциативных квазигрупп можно использовать следующую теорему:

Теорема 2.4.1. [8] *Каждая дистрибутивная квазигруппа изотопна некоторой коммутативной лупе Муфанг.*

Доказательство теоремы приводится в [8].

С помощью разработанного алгоритма классификации квазигрупп по тождествам из главы 1 нами найдены диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с тождеством дистрибутивности, найдены все лупы, которые изотопны этим классом диассоциативных квазигрупп, а также проверено, что для каждой из этих луп тождества Муфанг выполняются.

Ниже в табл.2.4.3 построен пример диассоциативной квазигруппы $(Q, \cdot)$ 5 - го порядка степени $k(l) = 4$ с тождеством дистрибутивности

$$x(yz) = (xy)(xz). \tag{2.4.3}$$

Таблица 2.4.3. Квазигруппа с тождеством дистрибутивности

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	c	b	f	a	d
c	d	f	c	b	a
d	f	a	b	d	c
f	b	d	a	c	f

Также найдена главноизотопная лупа $(Q, \circ)$ с подстановками $\alpha = \binom{abcdf}{bcfda}$, $\beta = \binom{abcdf}{dbafc}$, $\gamma = \varepsilon$, заданная в табл.2.4.4:

Таблица 2.4.4. Лупа 5-го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f
b	b	f	d	a	c
c	c	d	b	f	a
d	d	a	f	c	b
f	f	c	a	b	d

В класс диассоциативных квазигрупп с тождеством дистрибутивности входят всего 6 диассоциативных квазигрупп (табл.2.4.5).

Таблица 2.4.5. Диассоциативные квазигруппы с тождеством дистрибутивности

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	c	b	f	a	d
c	d	f	c	b	a
d	f	a	b	d	c
f	b	d	a	c	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	f	b	d
b	c	b	d	f	a
c	f	d	c	a	b
d	b	f	a	d	c
f	d	a	b	c	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	b	f	c
b	d	b	f	c	a
c	b	f	c	a	d
d	f	c	a	d	b
f	c	a	d	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	f	c	b
b	d	b	a	f	c
c	f	a	c	b	d
d	c	f	b	d	a
f	b	c	d	a	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	b	c	d
b	f	b	d	a	c
c	b	d	c	f	a
d	c	a	f	d	b
f	d	c	a	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	b	c
b	f	b	a	c	d
c	d	a	c	f	b
d	b	c	f	d	a
f	c	d	b	a	f

Следствие 2.4.1. *Каждая диассоциативная квазигруппа 5 - го порядка степены 4 с тождеством дистрибуивности главноизотопна лупе Муфанг.*

Рассмотрим теперь понятия изотопии и автотопии в квазигруппах, которые аналогично можно определить, как понятия изоморфизма и автоморфизма. Если в изотопии $B(x,y) = \gamma^{-1}A(\alpha x, \beta y)$ операции A и B совпадают, то изотопия превращается в автотопию [8]. Тогда, автотопию можно описать так

$$\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = (x \cdot y). \tag{2.4.4}$$

Понятие автотопии является частным случаем изотопии. Достаточно положить $A = B$ [8]. Когда тройка подстановки равны, то есть, $\alpha = \beta = \gamma^{-1}$ автотопия является автоморфизмом. В автотопиях, если подстановки α и β совпадают, тогда их называют автотопией 1 - рода, а остальные автотопии называются автотопией 2 - го рода. Понятия автотопии 1 - го рода и 2 - го рода введены М.Е.Елисеевым [42], в связи с рассматривания действия автотопии на элементы квазигрупп.

Пример 2.4.1. Пусть $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа 5 - го порядка степени $k(l) = 2$, определенная следующей таблицей 2.4.6:

Таблица 2.4.6. Диассоциативная квазигруппа

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	c	d	a	b	f
c	b	a	f	d	c
d	f	b	d	c	a
f	d	f	c	a	b

И пусть $\alpha = \binom{abcdf}{fdbac}$, $\beta = \binom{abcdf}{fdbac}$, $\gamma^{-1} = \binom{abcdf}{cadfb}$. Тогда легко проверить (табл.2.4.6), что тройка подстановок $\alpha, \beta, \gamma^{-1}$ автотопия для $(Q, \cdot)$:

Таблица 2.4.7. Автотопия 1-го рода

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	d	f	c	a	b
b	f	b	d	c	a
c	c	d	a	b	f
d	a	c	b	f	d
f	b	a	f	d	c

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	b	a	f	d	c
b	a	c	b	f	d
c	f	b	d	c	a
d	d	f	c	a	b
f	c	d	a	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	c	d	a	b	f
c	b	a	f	d	c
d	f	b	d	c	a
f	d	f	c	a	b

$\alpha = \binom{abcdf}{fdbac}$ $\qquad$ $\beta = \binom{abcdf}{fdbac}$ $\qquad$ $\gamma^{-1} = \binom{abcdf}{cadfb}$

Также нами найдены другие виды автотопии для данной диассоциативной квазигруппы из таблицы 2.4.6. В следующей таблице приводим все подстановки, приводящие к этим автотопиям:

Таблица 2.4.8. Автотопия $\alpha, \beta, \gamma^{-1} = \varepsilon$

1	$\alpha = \beta = \gamma^{-1} = \varepsilon$
2	$\alpha = \binom{abcdf}{bfacd}$, $\beta = \binom{abcdf}{cadfb}$, $\gamma^{-1} = \varepsilon$
3	$\alpha = \binom{abcdf}{cadfb}$, $\beta = \binom{abcdf}{bfacd}$, $\gamma^{-1} = \varepsilon$
4	$\alpha = \binom{abcdf}{dcfba}$, $\beta = \binom{abcdf}{fdbac}$, $\gamma^{-1} = \varepsilon$
5	$\alpha = \binom{abcdf}{fdbac}$, $\beta = \binom{abcdf}{dcfba}$, $\gamma^{-1} = \varepsilon$

В следующей таблице 2.4.9 приводим классификацию автотопии вида $\alpha, \beta, \gamma^{-1} = \varepsilon$ для всех диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени 2. Данная классификация получена с помощью несложной разработанной нами программы на языке программирования C++. Код программы приведён в главе 3 (код программы 7) данной работы.

Таблица 2.4.9.Классификация автотопии $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$

<table>
<tr><td>Количество диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени 2</td><td colspan="2">Количество автотопии $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">30</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td>1-го рода</td><td>2-го рода</td></tr>
<tr><td>-</td><td>5</td></tr>
</table>

Пользуясь найденными результатами разработанной программы можно сформулировать следующее предложение.

Предложение 2.4.1. *Каждой диассоциативной квазигруппе 5 - го порядка степени 2 соответствуют 5 автотопий вида* $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство проверяется непосредственно.

Также найдены общее количество автотопии для диассоциативных квазирупп 5 - го порядка степени 2 с соответствующими всеми подстановками α, β, γ (табл.2.4.10):

Таблица 2.4.10.Классификация автотопии α, β, γ

<table>
<tr><td>Количество диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени 2</td><td colspan="2">Количество автотопии α, β, γ</td></tr>
<tr><td rowspan="3">30</td><td colspan="2">100</td></tr>
<tr><td>1-го рода</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td></td></tr>
</table>

Следствие 2.4.2. *Диассоциативные квазигруппы 5 - го порядка степени 2 имеют 100 автотопий, из них 18 автотопий 1 - го рода.*

Следствие 2.4.3. *Каждой диассоциативной квазигруппе 5 - го порядка степени 2 соответствуют 5 автотопий вида* $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$ *и 100 автотопий вида* α, β, γ.

2.5. Решение проблемы В.Д.Белоусова

В этом параграфе рассматривается задача В.Д.Белоусова об изотопии для некоторого класса диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка.

Теория квазигрупп и луп являются активными областями исследований со многими открытыми своими проблемами. В монографии В.Д.Белоусова [8] сформулированы задачи по теории квазигрупп и луп, решение которых до сих пор представляет интерес. Одна из этих задач относится к исследованию изотопных луп для квазигруппы Стейна. Постановка задачи следующая: "Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется квазигруппой Стейна, если в $(Q,\cdot)$ выполняется тождество $x\cdot xy = yx$. Каким лупам они изотопны?". (Задача 3, с.216 из [8]).

Квазигруппы Стейна хорошо известны и составляют важный класс квазигрупп [39, 41]. Также отметим работы Сада [43], где рассматриваются квазигруппы с тождеством $x(xy) = yx$.

Пример 2.5.1. Пусть $(Q,\cdot)$ праводиассоциативная квазигруппа 5 - го порядка степени $k = 2$, заданная табл.2.5.1.

Таблица 2.5.1. Праводиассоциативная квазигруппа

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

По табл.2.5.1 легко можно определить, что данная квазигруппа является квазигруппой Стейна. То есть, выполняется тождество $x(xy) = yx$ для $\forall x, y \in Q$.

В [44] И. Флоря и Н. Дидурик изучают изотопы квазигруппы Стейна. В поле действительных чисел $R(+,\cdot)$ находят левую квазигруппу Стейна и также доказывают, что, если она изотопна группе $(Q, \cdot)$, тогда группа $(Q, \cdot)$ абелева. Ими построены различные интересные примеры.

В данной работе нами также построены примеры и найдены все главноизотопные лупы квазигруппы Стейна 5 - го порядка. С помощью разработанного алгоритма классификации квазигрупп по тождествам из главы 1 нами найдены все квазигруппы Стейна 5 - го порядка (табл.2.5.2, 2.5.3), также все главноизотопные лупы с соответствующими подстановками для этих квазигрупп. Это обобщает результаты вышеуказанных авторов из [44] (2014г.).

Таблица 2.5.2. Классификация квазигруппы Стейна и изотопных луп

Количество квазигруппы Стейна	Количество главноизотопных луп	Количество подстановок для каждой главноизотопной лупы
6	5	5

Таблица 2.5.3. Все квазигруппы Стейна 5-го поярдка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	b	f	d
b	f	b	d	a	c
c	d	a	c	f	b
d	c	f	b	d	a
f	b	d	a	c	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	b	f	c
b	f	b	a	c	d
c	d	f	c	b	a
d	c	a	f	d	b
f	b	c	d	a	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	f	c	b
b	c	b	d	f	a
c	b	f	c	a	d
d	f	a	b	d	c
f	d	c	a	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	c	c	d
b	d	b	a	f	c
c	f	d	c	a	b
d	b	c	f	d	a
f	c	a	d	b	f

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	f	d	b	c
b	c	b	f	a	d
c	b	d	c	f	a
d	f	c	a	d	b
f	d	a	b	c	f

Далее в таблицах 2.5.4 - 2.5.8 приведём все изотопии вида $\alpha, \beta, \gamma = \varepsilon$ для квазигруппы Стейна (из табл.2.5.1):

Таблица 2.5.4. Изотопии квазигруппы Стейна (1)

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	b	f	a	d	c
c	c	d	b	a	f
d	d	b	f	c	a
f	f	a	c	b	d

$\circ$	a	b	c	d	f
a	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{f}$
b	$\boldsymbol{b}$	c	f	a	d
c	$\boldsymbol{c}$	f	d	b	a
d	$\boldsymbol{d}$	a	b	f	c
f	$\boldsymbol{f}$	d	a	c	b

$\alpha = \binom{abcdf}{adfbc}$ $\quad \beta = \binom{abcdf}{afbcd}$

Таблица 2.5.5. Изотопии квазигруппы Стейна (2)

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

	a	b	c	d	f
a	d	b	f	c	a
b	a	c	d	f	b
c	b	f	a	d	c
d	f	a	c	b	d
f	c	d	b	a	f

$\circ$	a	b	c	d	f
a	b	c	f	a	d
b	c	f	d	b	a
c	f	d	a	c	b
d	a	b	c	d	f
f	d	a	b	f	c

$\alpha = \binom{abcdf}{badcf}$ $\quad \beta = \binom{abcdf}{bdcfa}$

Таблица 2.5.6. Изотопии квазигруппы Стейна (3)

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

	a	b	c	d	f
a	f	a	c	b	d
b	d	b	f	c	a
c	a	c	d	f	b
d	c	d	b	a	f
f	b	f	a	d	c

$\circ$	a	b	c	d	f
a	c	f	d	b	a
b	f	d	a	c	b
c	d	a	b	f	c
d	b	c	f	a	d
f	a	b	c	d	f

$\alpha = \binom{abcdf}{cbadf}$ $\quad \beta = \binom{abcdf}{cafdb}$

Таблица 2.5.7. Изотопии квазигруппы Стейна (4)

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

	a	b	c	d	f
a	b	f	a	d	c
b	c	d	b	a	f
c	f	a	c	b	d
d	a	c	d	f	b
f	d	b	f	c	a

$\circ$	a	b	c	d	f
a	d	a	b	f	c
b	a	b	c	d	f
c	b	c	f	a	d
d	f	d	a	c	b
f	c	f	d	b	a

$\alpha = \binom{abcdf}{dfcab}$ $\qquad$ $\beta = \binom{abcdf}{dcabf}$

Таблица 2.5.8. Изотопии квазигруппы Стейна (5)

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

	a	b	c	d	f
a	c	d	b	a	f
b	f	a	c	b	d
c	d	b	f	c	a
d	b	f	a	d	c
f	a	c	d	f	b

$\circ$	a	b	c	d	f
a	f	d	a	c	b
b	d	a	b	f	c
c	a	b	c	d	f
d	c	f	d	b	a
f	b	c	f	a	d

$\alpha = \binom{abcdf}{fcbda}$ $\qquad$ $\beta = \binom{abcdf}{fbdac}$

Из табл.2.5.3 (1) видно, что $(Q,\cdot)$ квазигруппа Стейна, а $(Q,\circ)$ главно-изотопная лупа со следующими подстановками:

$$\alpha = \binom{abcdf}{adfbc},$$
$$\beta = \binom{abcdf}{afbcd},$$
$$\gamma = \varepsilon,$$

где ε - тождественная подстановка. И для для любых $x, y \in Q$ выполнено равенство $B(x,y) = A(\alpha x, \beta y)$. Также для $(Q,\cdot)$ тождество ассоциативности $(xy)z = x(yz)$ выполняется. Очевидно, что $(Q,\circ)$ абелева группа.

Следствие 2.5.1. *Каждая квазигруппа Стейна порядка 5 главноизотопна 5 абелевым группам.*

Следствие 2.5.2. *Класс праводиассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k = 2$ с левым тождеством Стейна главноизотопен абеливым группам.*

Заметим, что квазигруппы Стейна являются частным случаем праводиассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k = 2$. Все 6 квазигрупп Стейна порядка 5 встречаются в классе праводиассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k = 2$.

Глава 3

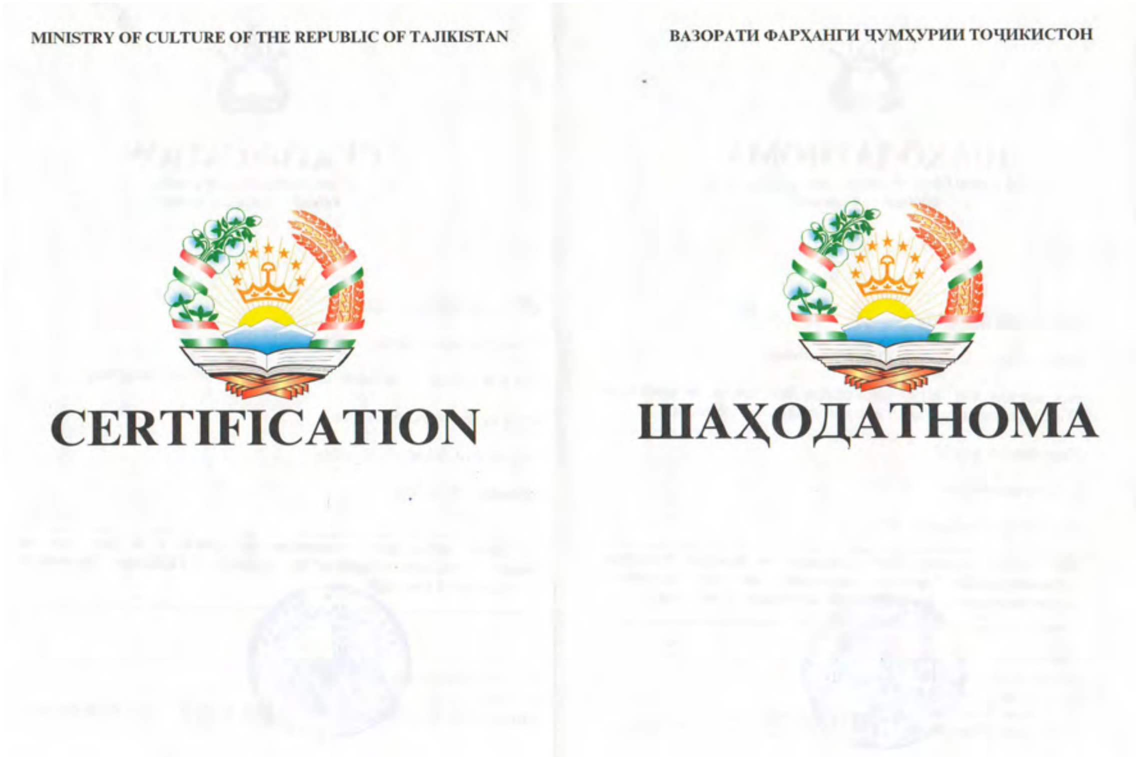
Приложения

3.1. Пакет и коды программ

В этой главе приведены текст и интерфейс программ для построения квазигруппы в виде латинского квадрата чётного порядока $n = p - 1$, где p - простое число, нахождение квазигрупп 5 - го порядка с подквазигруппой 2-го порядка, нахождение квазигрупп 5 - го порядка без подквазигрупп, классификации квазигрупп 4 - го и 5 - го пордяков по основным тождествам (в примере тождества Стейна), нахождение и классификации диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков, нахождение диассоциативных дистрибутивных квазигрупп 5-го порядка степени 4, нахождение всех главноизотопных луп и автотопий для классов диассоциативных квазирупп рассматриваемых в этой работе.

Полученные результаты позволяют проверять некоторые тождества в квазигруппах. Также могут находить изотопные соотношения для выбранных квазигрупп 5 - го порядка, то есть, найти изотопы и автотопы соответствующими подстановками. Эти исследования проведены на основе разработанного алгоритма и компьютерного анализа и результатов, полученных в первой и во второй главах диссертации. Программы написаны автором на языках программирования Delphi, C++ и Visual Studio C#.

Пакет программ зарегистрирован авторам в Министерстве культуры Республики Таджикистан и имеет сертификат, в соответствие с номером 107 от 20-го января 2021г (рис.3.1.1).



MINISTRY OF CULTURE OF THE REPUBLIC OF TAJIKISTAN

CERTIFICATION

ВАЗОРАТИ ФАРҲАНГИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

ШАҲОДАТНОМА

Рисунок 3.1.1. Сертификат на программу “Классификация диассоциативных квазигрупп” (1-ая сторона)

ШАҲОДАТНОМА

дар бораи ба қайд гирифтани асарҳои илм, адабиёт ва санъат

"20" январи 2021 № 107

Дода шуд ба: Комилов Оқил Одилович

дар хусуси он, ки ӯ муаллифи барномаи компютерии «Таснифи квазигурӯҳҳои диассотсиативӣ» мебошад.

Жанри асар: адабӣ

Забони асар: русӣ

Асар иборат аст аз: 33 Mb

Маълумоти иловагӣ: **Тибқи моддаи 6-и Қонуни Ҷумҳурии Тоҷикистон «Дар бораи ҳуқуқи муаллиф ва ҳуқуқҳои вобаста ба он» асари мазкур объекти ҳуқуқи муаллиф мебошад.**

Сардори шуъбаи ҳуқуқи ҳифзи ҳуқуқи муаллиф ва ҳуқуқҳои вобастаи Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон *Н. Набизода*

CERTIFICATION

About registration of science Literature and art works

"20" январи 2021 № 107

It's distributed to: Komilov Okil Odilovich

That it is author of: «Classification of dissociative quasigroups»

Genre of the work: literature

Language of the work: Russian

It consists of: 33 Mb

Additional information: **According to Article 6 of the Law on Copyright and related rights of the Republic of Tajikistan this work is protected by of copyright.**

Head of Department of law and copyright of Ministry of culture of the Republic of Tajikistan *N. Nabizoda*

Рисунок 3.1.2. Сертификат на программу “Классификация диассоциативных квазигрупп” (2-ая сторона)

Ниже приведены операторное описание и коды (текст) разработанных программ:

1. Построение квазигруппы чётного порядока (не всех чётных порядков, а только таких, что $n = p - 1$, где p - простое число) в виде латинского квадрата.

Метод построения: каждый элемент a_{ij} матричной таблицы латинского квадрата равен остатку от деления $i * j$ на число p.

Операторное описание:

a - двумерный массив - латинский квадрат порядка $n \leq 12$;

p - простое число;

n - порядок латинского квадрата;

i, j - спомогательные переменые для описания цикла.

Текст программы:

```
 procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var i,j,n,p:integer;
a:array[1..12,1..12]of real;
begin
p:=strtoint(edit1.Text);
n:=p-1;
stringgrid1.RowCount:=n;
stringgrid1.ColCount:=n;
for i:=1 to n do
 for j:=1 to n do
 a[i,j]:=(i*j) mod p;
for i:=1 to n do begin
for j:=1 to n do  begin
stringgrid1.Cells[j-1,i-1]:=floattostr(a[i,j]);
end;
end;
end;
```

2. Нахождение квазигрупп 5 - го порядка с подквазигруппой 2-го порядка

Операторное описание:

m - двумерный массив - латинский квадрат порядка $n \leq 5$, который читается из файла;

arr - массив строк;

po, ko, kol, ii - счетчик, количество;

$ifstream, ofstream, fstream$ - классы для чтения, записи и модификации файлов;

i, j, x, y, q, z - вспомогательные переменные для описания цикла.

Текст программы:

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>
#include<conio.h>
using namespace std;
int main()
{
int x,q,z,y,i,j,ii,p=1,po,ko=0,kol=0;
int m[6][6];
int arr[5];
ifstream in("5.txt");
ofstream out("5550.txt");
while (!in.eof())
    {
for (int i=0; i<5; i++)
{for (int j=0; j<5; j++)
{
in>>m[i][j];
}
}
ko++;
po=0;
for (x=0;x<4;x++)
 {
```

```
      for (y=x+1;y<5;y++)
    {
        arr[0]=m[x][y];
        arr[1]=m[y][x];
        arr[2]=m[x][x];
        arr[3]=m[y][y];
            ii=0;
        for (q=0; q<4; q++)
    if ((arr[q]!=x+1) && (arr[q]!=y+1)) ii++;
    if (ii==0) { po++;
}
    }
  }
  if (po>0){
    for (q=0;q<5;q++)
    {
for (z=0;z<5;z++)
{
 out<<m[q][z]<<" "; }
out<<endl;
}
kol++;
out<<kol<<endl;
}
}
in.close();
out.close();
return 0;
}
```

3. Нахождение квазигрупп 5 - го порядка без подквазигрупп

Операторное описание:

m - двумерный массив - латинский квадрат порядка $n \leq 5$, который читается из файла;

arr - массив строк;
po, kol, ii - счётчик, количество;
$ifstream, ofstream, fstream$ - классы для чтения, записи и модификации файлов;
i, j, x, y, q, z - вспомогательные переменные для описания цикла. l - логический счётчик;
Текст программы:

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>
#include<conio.h>
using namespace std;
int main()
{
 int x,q,z,y,i,j,ii,po,kol=0;
  int m[6][6];
  bool l;
  int arr[5];
ifstream in("5.txt");
ofstream out("Q_5_No_H_2.txt");
while (!in.eof())
    {
for (int i=0; i<5; i++)
for (int j=0; j<5; j++)
in>>m[i][j];
po=0; l=false;
for (x=0;x<4;x++)
 {
       for (y=x+1;y<5;y++)
    {
        arr[0]=m[x][y];
        arr[1]=m[y][x];
        arr[2]=m[x][x];
        arr[3]=m[y][y];
```

```
            ii=0;
        for (q=0; q<4; q++)
    if ((arr[q]!=x+1) && (arr[q]!=y+1)) ii++;
    if (ii>0) { po++;
    }
    }
  }
 if (po==10)
 {
kol++;
for (q=0;q<5;q++)
{
for (z=0;z<5;z++)
{
out<<m[q][z]<<" "; }
out<<endl;
}
out<<kol<<endl; out<<endl;
}
}
in.close();
out.close();
return 0;
}
```

4. Классификация квазигрупп 5 - го порядка по тождеством Стейна

Операторное описание:

m - двумерный массив - латинский квадрат порядка $n \leq 5$, который читается из файла;

po, p - счётчик, количество;

$ifstream, ofstream, fstream$ - классы для чтения, записи и модификации файлов;

$x, q1, q, z, y, w, i, j$ - вспомогательные переменные для описания цикла.

Текст программы:

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>
#include<conio.h>
using namespace std;
int main()
{
 int x,q1,q,z,y,w,i,j,p=1,po;
 string m[10][10];
ifstream in("q5.txt");
ofstream out("is_Stein_5.txt");
for (q1=1; q1<=1; q1++){
for (int i=0; i<5; i++)
{for (int j=0; j<5; j++)
{
in>>m[i][j];
}
}
po=1;
for (x=0;x<5;x++)
 {
for (y=0;y<5;y++)
{
if (m[x][y]=="1") w=0; else
if (m[x][y]=="2") w=1; else
if (m[x][y]=="3") w=2; else
if (m[x][y]=="4") w=3; else
if (m[x][y]=="5") w=4;
if ((m[x][w])!=m[y][x]) po=0;if (po==0) {cout<<x<<" "<<y;}
        }}
if (po==1)
    {
```

```
for (q=0;q<5;q++)
    {
for (z=0;z<5;z++)
{cout<<m[q][z]<<" ";
out<<m[q][z]<<" ";
}
out<<endl;
cout<<endl;
}
out<<p<<endl;    cout<<"   "<<p<<endl; p++;
}
}
in.close();
out.close();
return 0;
}
```

5. Нахождение леводиассоциативных квазигрупп 5 -го порядка степени 2

Операторное описание:

m - двумерный массив - латинский квадрат порядка $n \leq 5$, который читается из файла;

po - счётчик;

$ifstream, ofstream, fstream$ - классы для чтения, записи и модификации файлов;

$x1$ - символ для сравнения;

i, j, x, y, q, w, z -вспомогательные переменные для описания цикла.

Текст программы:

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>
#include<conio.h>
using namespace std;
```

```
int main()
{
 int x,q,z,y,w,i,j,po;
string m[10][10], x1;
ifstream in("5.txt");
ofstream out("Diassociate_5_L2_no_N.txt");
while (!in.eof())
    {
       for (int i=0; i<5; i++)
for (int j=0; j<5; j++)
in>>m[i][j];
po=1;
for (x=0;x<5;x++)
 {
    for (y=0;y<5;y++)
        {
if (m[y][x]=="1") w=0; else
if (m[y][x]=="2") w=1; else
if (m[y][x]=="3") w=2; else
if (m[y][x]=="4") w=3; else
if (m[y][x]=="5") w=4;
 if (x==0) x1="1";
if (x==1) x1="2";
if (x==2) x1="3";
if (x==3) x1="4";
if (x==4) x1="5";
  if ((m[y][w])!=x1) po=0;
  }}
if (po==1)
    {
for (q=0;q<5;q++)
    {
for (z=0;z<5;z++)
out<<m[q][z]<<" ";
```

```
out<<endl;
}
  out<<endl;
    }
}
in.close();
out.close();
return 0;
}
```

6. Классификация квазигрупп 5 - го пордяка (по тождествoм левая дистрибутивность)

Операторное описание:

m - двумерный массив - латинский квадрат порядка $n \leq 10$, где фиксирован как $n = 5$, который читается из файла;

p, po - счётчик, количество;

$ifstream, ofstream, fstream$ - классы для чтения, записи и модификации файлов;

$i, j, x, y, q, w, w1, w2, z$ - вспомогательные переменные для описания цикла.

Текст программы:

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>
using namespace std;
int main()
{
 int w1,x,q,z,y,w,w2,i,j,p=1,po;
 string m[10][10];
ifstream in("555.txt");
ofstream out("left_distributive_5.txt");
while (!in.eof())
```

```
    {
for (int i=0; i<5; i++)
for (int j=0; j<5; j++)
in>>m[i][j];
po=1;
for (x=0;x<5;x++)
 {
for (y=0;y<5;y++)
{
for (z=0;z<5;z++)
{
if ((m[x][y])=="1") w=0; else
if (m[x][y]=="2") w=1; else
if (m[x][y]=="3") w=2; else
if (m[x][y]=="4") w=3;
if (m[x][y]=="5") w=4;
if ((m[x][z])=="1") w1=0; else
if (m[x][z]=="2") w1=1; else
if (m[x][z]=="3") w1=2; else
if (m[x][z]=="4") w1=3;
if (m[x][z]=="5") w1=4;
if ((m[y][z])=="1") w2=0; else
if (m[y][z]=="2") w2=1; else
if (m[y][z]=="3") w2=2; else
if (m[y][z]=="4") w2=3;
if (m[y][z]=="5") w2=4;
if ((m[x][w2])!=m[w][w1]) po=0;
}}}
if (po==1)
    {
for (q=0;q<5;q++)
    {
for (z=0;z<5;z++)
out<<m[q][z]<<" ";
```

```
out<<endl;
}
out<<p<<endl; p++;
    }
}
in.close();
out.close();
return 0;
}
```

7. Нахождение главноизотопных луп для диассоциативной квазигруппы 5 - го порядка степени 4

Операторное описание:

A, B - двумерные массивы - латинские квадраты порядка $n \leq 5$, которые читаются из файла;

$a, b, c, s, a1, b1$ - массивы для перестановок;

$kol, kolp, k5, k25$ - счётчик, количество;

$ifstream, ofstream, fstream$ - классы для чтения, записи и модификации файлов;

ld, l - вспомогательные логические переменные;

$i, j, i2, j2, x, y$ - вспомогательные переменные для описания цикла.

Текст программы:

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>
#include<conio.h>
using namespace std;
int main()
{
int A[5][5];
int B[5][5];
```

```
string a,b;
string a1[121];
string b1[121];
 string c="12345";
 char s[10];
int i=0;
int kol=0;
int k5=0,k25=0;
ofstream out("Izotop_for_210.txt");
 ifstream in("5.txt");
  while (!in.eof())
  {
     in.getline(s,10);
     a1[i]=s; b1[i]=s;
      i++;
  }
    in.close();
 ifstream in0("210.txt");
  while (!in0.eof())
  {
 for (int i=0; i<5; i++)
    for (int j=0; j<5; j++)
in0>>A[i][j];
kol++;
out<<"---  Квазигруппа "<<kol<<" --- "<<endl;
  for (int i=0; i<5; i++)
  {
 for (int j=0; j<5; j++)
out<<A[i][j]<<" ";
out<<endl;
  }
out<<endl;
 int kolp=0;
 ifstream in2("250.txt");
```

```
  while (!in2.eof())
  {
 for (int i=0; i<5; i++)
    for (int j=0; j<5; j++)
in2>>B[i][j];
bool ld=false;
 for (int i=0; i<120;i++)
 {
     a=a1[i];
     for(int j=0; j<120;j++)
       {
         b=b1[j];
bool  l=true;
     for (int x=0; x<5; x++)
      {
            for (int y=0; y<5;y++)
            {
     if (B[x][y]!=int(c[A[int(a[x])-48-1][int(b[y])-48-1]-1])-48) l=false;
              }
      }
     if (l) {
 out<<"                  Лупа изотопная             "<<endl;
            out<<"a="<<a<<"    b="<<b<<"   "<<p<<endl;
ld=true;
         for (int i2=0; i2<5; i2++){
    for (int j2=0; j2<5; j2++)
out<<B[i2][j2]<<" ";
out<<endl;    }
out<<endl;
     }
 }
 }
if (ld==true) kolp++;
}
```

```
out<<kolp<<endl;
out<<endl;
if (kolp==5) k5++; else if (kolp==25) k25++;
in2.close();
  }
  in0.close();
  out<<"kol 25 = "<<k25<<"kol5 = "<<k5<<endl;
out.close();
return 0;
}
```

8. Классификация автотопии вида $\alpha, \beta, \gamma^{-1} = \varepsilon$ диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени 2

Операторное описание:

A, B - двумерные массивы - латинские квадраты порядка $n \leq 5$, которые читаются из файла;

$a, b, c, s, a1, b1$ - массивы для перестановок;

$p, kol, k5, k25$ - счётчик, количество;

$ifstream, ofstream, fstream$ - классы для чтения, записи и модификации файлов;

ld, l - вспомогательные логические переменные;

$i, j, i2, j2, x, y$ - вспомогательные переменные для описания цикла.

Текст программы:

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>
#include<conio.h>
using namespace std;
int main()
{
int A[5][5];
```

```
int B[5][5];
string a,b;
string a1[121];
string b1[121];
 string c="12345";
 char s[10];
int i=0;
int kol=0;
int k5=0,k25=0;
ofstream out("avtotop.txt");
 ifstream in("be5.txt");
  while (!in.eof())
  {
     in.getline(s,10);
     a1[i]=s; b1[i]=s;
      i++;
  }
    in.close();
 ifstream in0("30.txt");
  while (!in0.eof())
  {
 for (int i=0; i<5; i++)
    for (int j=0; j<5; j++)
in0>>A[i][j];
kol++;
out<<"----------- Квазигруппа "<<kol<<"  -------"<<endl;
  for (int i=0; i<5; i++)
  {
 for (int j=0; j<5; j++)
{
    out<<A[i][j]<<" ";
}
 out<<endl;
  }
```

```
out<<endl;
int p=0;
 int kolp=0;
bool ld=false;
 for (int i=0; i<120;i++)
 {
     a=a1[i];
     for(int j=0; j<120;j++)
       {
         b=b1[j];
bool  l=true;
     for (int x=0; x<5; x++)
      {
             for (int y=0; y<5;y++)
             {
     if (B[x][y]!=int(c[A[int(a[x])-48-1][int(b[y])-48-1]-1])-48) l=false;
             }
      }
     if (l) {
 out<<"   Лупа изотопная  є"<<p<<"    "<<"Подстановки  "<<" a="<<a<<"    b="<<b<<endl;
             out<<endl;
ld=true;
         for (int i2=0; i2<5; i2++){
    for (int j2=0; j2<5; j2++)
out<<B[i2][j2]<<" ";
out<<endl;    }
out<<endl;
 } } }
p++;
if (ld==true) kolp++;
out<<kolp<<" Изотопов"<<endl;
out<<endl;
if (kolp==5) k5++; else if ((kolp==25)||(kolp==26)) k25++;
in2.close();
```

```
}
in0.close();
out<<"Всего: кол.-во 25 изотопных = "<<k25<<", кол.-во 5 изотопотных = "<<k5<<endl;
out.close();
return 0;
}
```

3.2. Иллюстрация работы программы

В следующих рисунках приведены иллюстрации программ на языке Delphi (рис.3.2.1) и Visual Studio C# (рис.3.2.2 - 3.2.6), коды которых приведены были выше. С помощью языка программирования C++ получены количественные результаты и сохранены в текстовых файлах с расширением txt и rtf. Для иллюстрации и обработки данных использована среда программирования Visual Studio C# 2017.

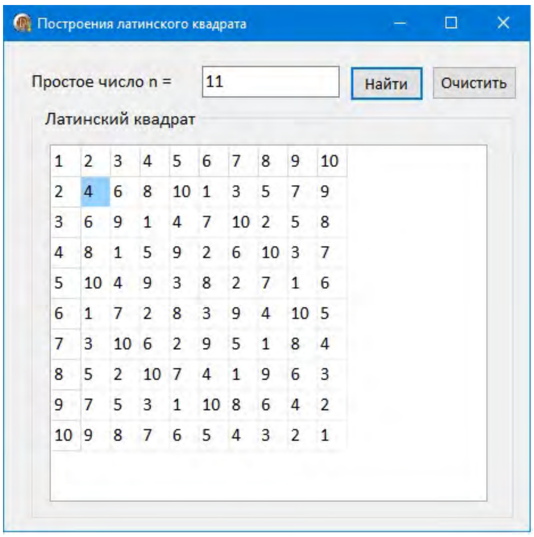


Рисунок 3.2.1. Построения квазигруппы в виде латинского квадрата чётного порядка $n = p - 1$, где p - простое число

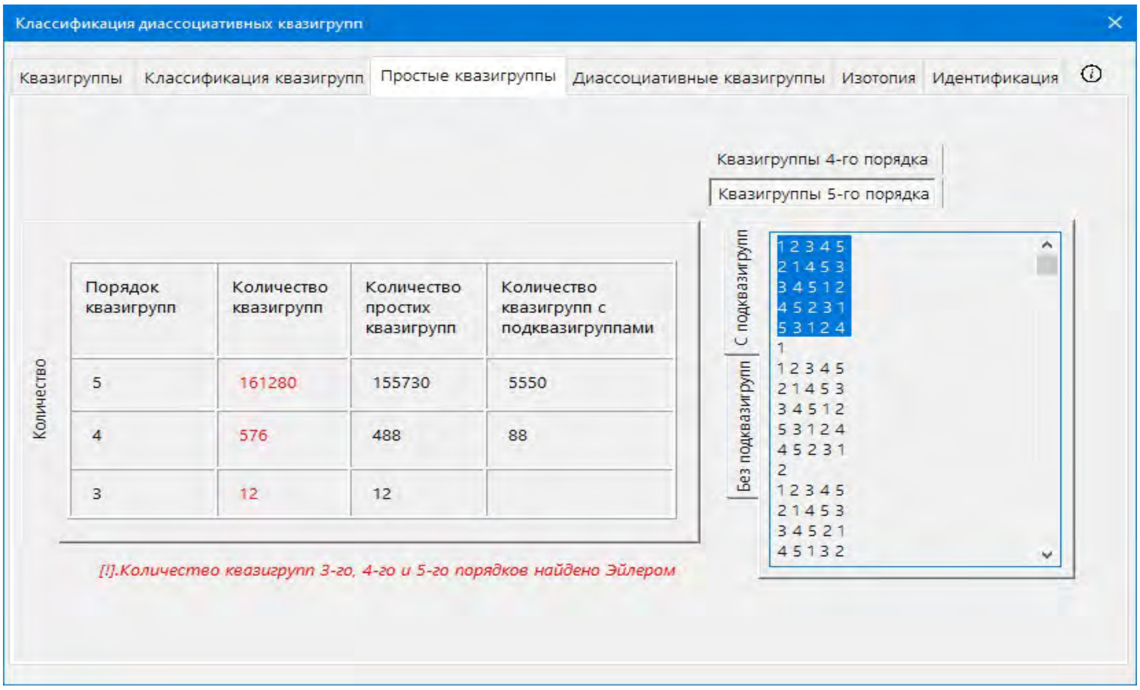


Рисунок 3.2.2. Нахождение квазигрупп 5 - го порядка с подквазигруппой 2-го порядка

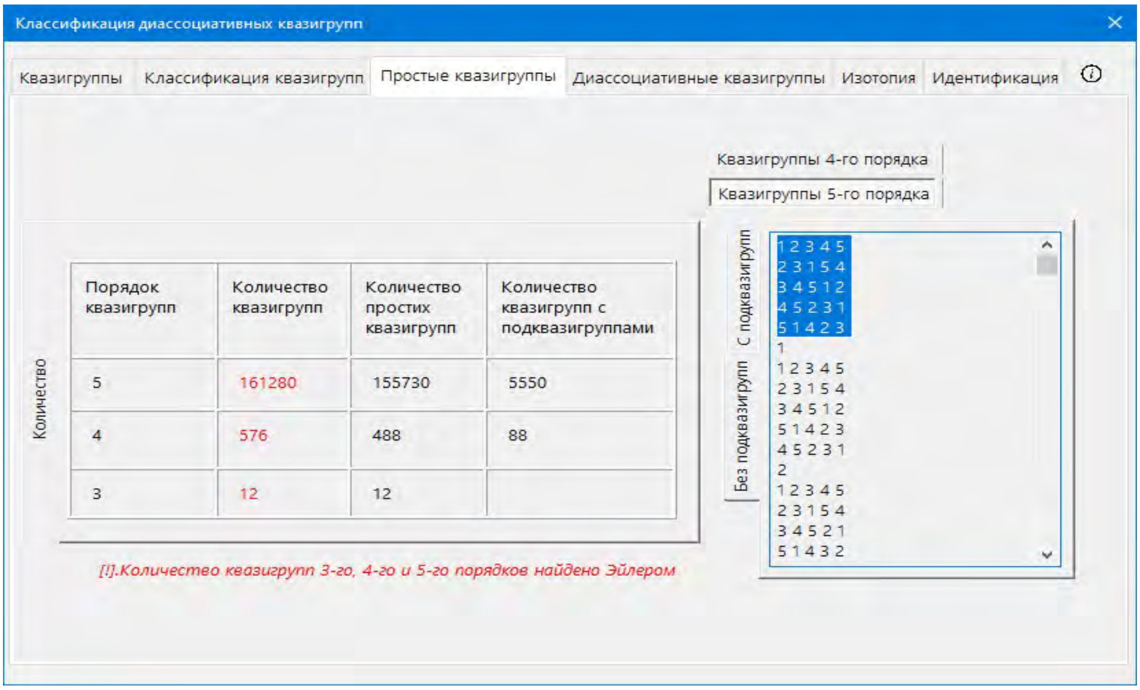


Рисунок 3.2.3. Нахождение квазигрупп 5 - го порядка без подквазигрупп 2-го порядка

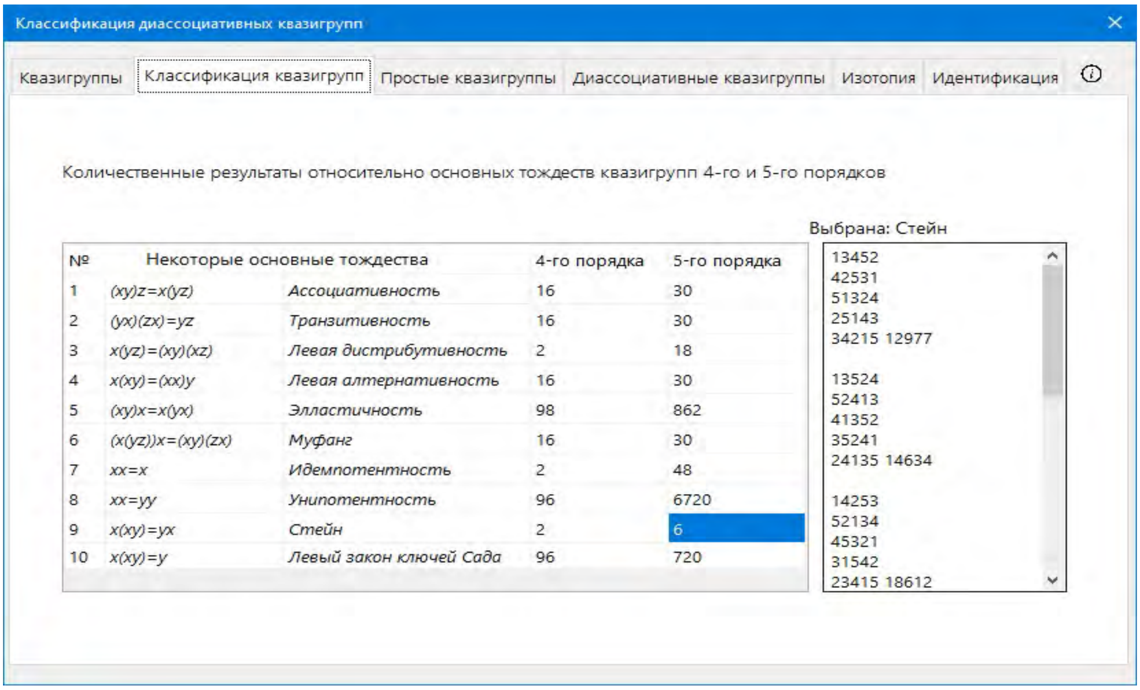


Рисунок 3.2.4. Классификация квазигрупп 5 - го пордяка (по тождеством Стейна)

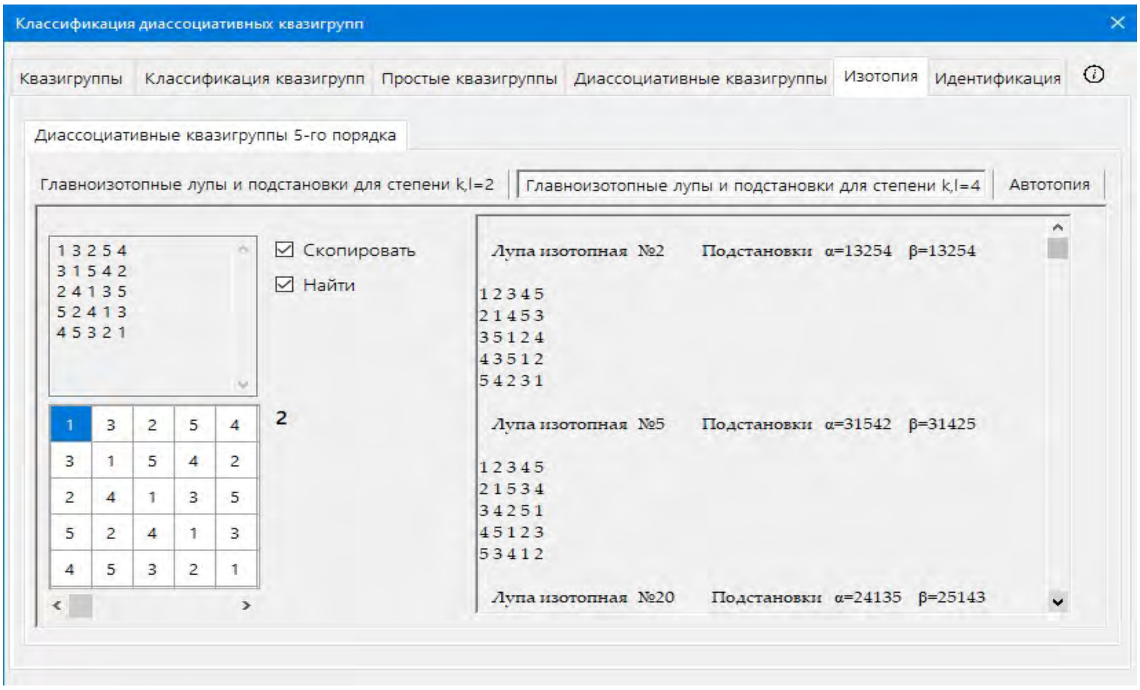


Рисунок 3.2.5. Нахождение леводиассоциативных квазигрупп 5 -го порядка степени 2

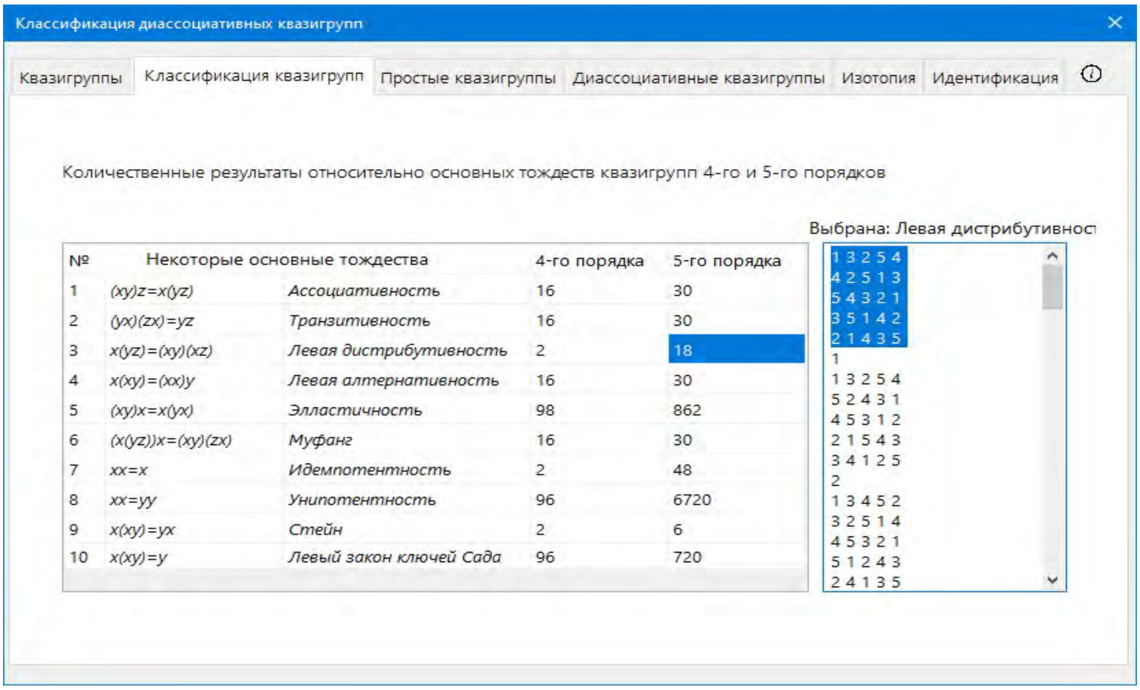


Рисунок 3.2.6. Нахождение диассоциативных дистрибутивных квазигрупп 5 -го порядка степени 4

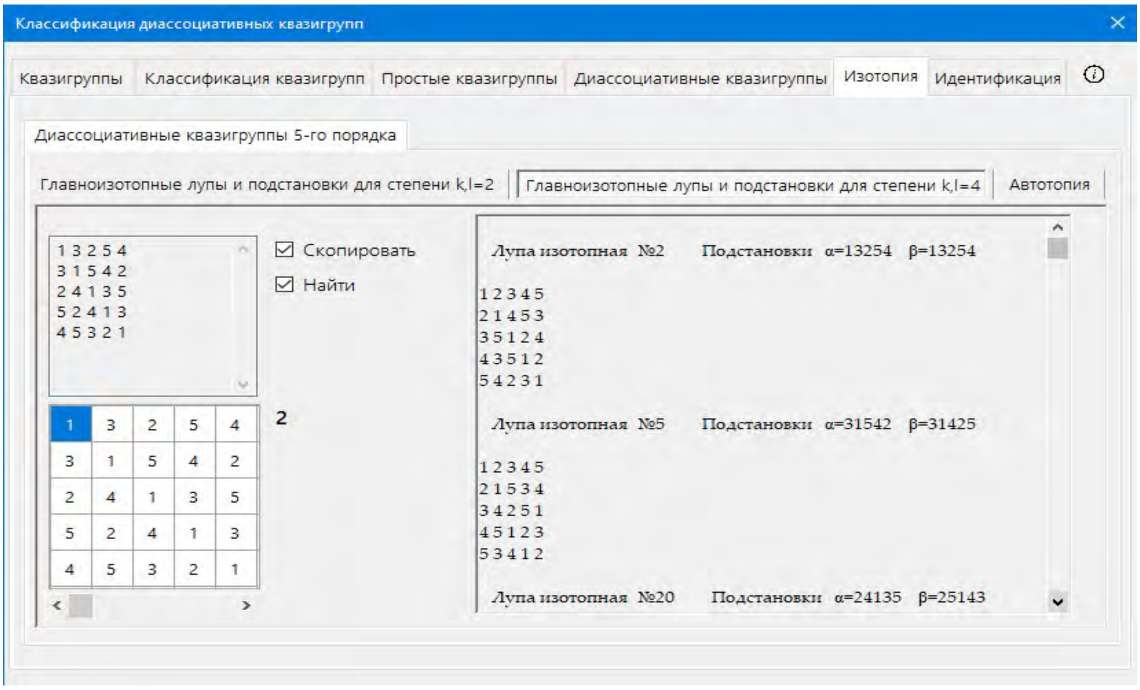


Рисунок 3.2.7. Нахождение главноизотопных луп для диассоциативной квазигруппы 5 - го порядка степени 4

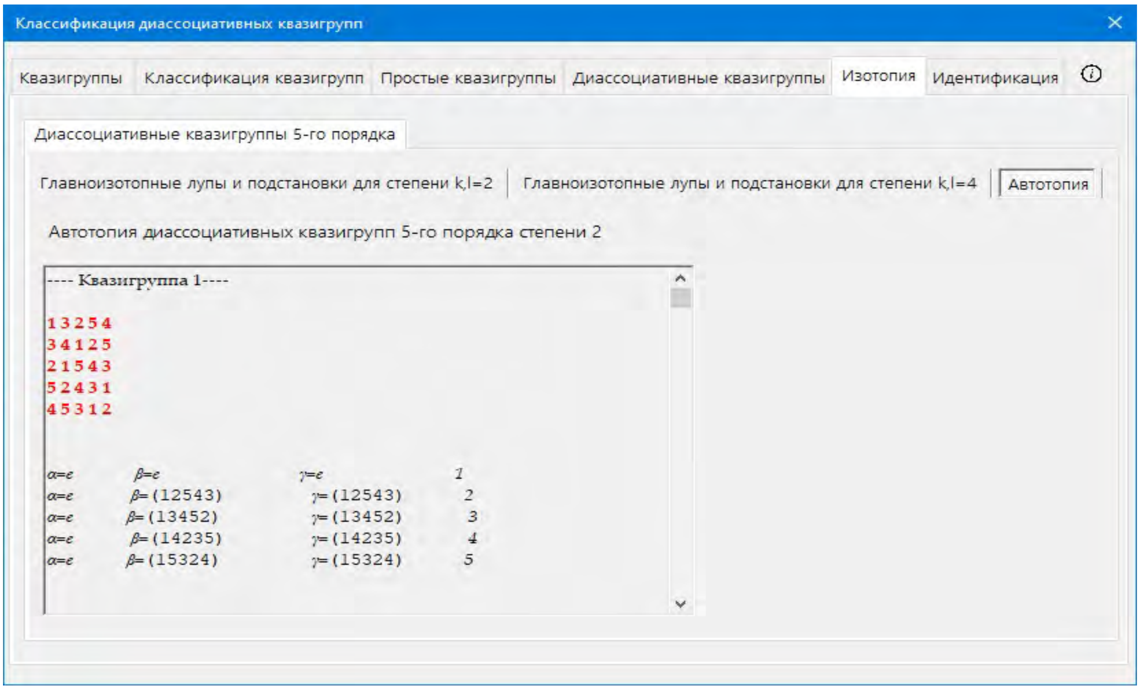


Рисунок 3.2.8. Классификация автотопии вида $\alpha, \beta, \gamma^{-1} = \varepsilon$ диассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени 2

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- разработана классификация квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков по основными тождествами и найден класс квазигрупп безподквазигрупп 4 - го и 5 - го порядка, [4-A, 5-A, 6-A, 7-A, 8-A, 9-A, 12-A];

- исследованы диассоциативные квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков степени $k(l)$, [2-A, 10-A, 11-A, 13-A];

- для некоторых классов диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l)$ найдены все главноизотопные лупы и все автотопии, [2-A, 3-A, 14-A];

- решена проблема В.Д. Белоусова об изотопии квазигруппы Стейна, [3-A, 14-A];

- на языке программирования разработана программа для построения латинских квадратов порядка $n = p - 1$, где p простое число, [1-A];

- на языке программирования разработана программа для классификации квазигрупп 5 - го порядка и для классификации диассоциативных квазигрупп 4 - го и 5 - го порядков, [7-A, 8-A, 9-A]

- на языке программирования разработана программа для нахождения главноизотопных луп диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2 и 4 и автотопии диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени 2, [3-A, 14-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический и практический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы в различных разделах общей теории групп, теории квазигрупп и неассоциативных алгебраических систем, и в криптографии.

Список литературы

[1]. Сушкевич А.К. Теория обобщённых групп [Текст] / А.К. Сушкевич // Харьков, Киев. :ОНТИ НКТП, 1937, 176с.

[2]. Sushkewitsch A.K. On a generalization of the associative law [Текст] / A.K. Sushkewitsch // Trans. Amer. Math. Soc, 1929, Vol. 31(1), P. 204 – 214.

[3]. Moufong R. Zur Structur von Altomativ Korpera [Текст] / R. Moufong // Math Ann. 1935, Vol. 110 (1), P. 416 – 430.

[4]. Bol G. Gewebe und Gruppen [Текст] / G. Bol // Math. Ann., 1937, Vol. 114 (1). P. 414 – 431.

[5]. Albert A. A. Quasigroups, I. [Текст] / A. A. Albert // Trans. Amer. Math. Soc. 1943, Vol. 54(3) P. 507 – 519.

[6]. Albert A. A. Quasigroups, II. [Текст] / A. A. Albert // Trans. Amer. Math. Soc. 1943, Vol. 55 (3) P. 401 – 409.

[7]. Bruck R.H. Some results in the theory of quasigroups [Текст] / R.H. Bruck // Trans. Amer. Math. Soc., 1944, V. 55, P. 19 – 52.

[8]. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп [Текст] / В.Д. Белоусов // М.: Наука, 1967, 223 с.

[9]. Белоусов В.Д. Элементы теории квазигрупп [Текст] / В.Д. Белоусов // Кишинев. :КГУ, 1981, 115 с.

[10]. Bruck R. H. A Survey of binary systems [Текст] / R. H. Bruck // Berlin: Springer Verlag. 1958. P. 185.

[11]. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп [Текст] / Г.Б. Белявская., А.Х. Табаров // Дискретная математика. РАН, 2009, Т. 21, Вып.1, С. 39 – 54.

[12]. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп [Текст] / Г.Б. Белявская., А.Х. Табаров // Дискретная математика, РАН, 1992, Т. 4, Вып. 2, С. 142 – 147.

[13]. Artamonov V.A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polynomially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations [Текст] / V.A. Artamonov, S. Chakrabarti, S. K. Pal // Discrete Applied Mathematics, V. 200 (2016), P. 5 – 17.

[14]. Артамонов В.А. Квазигруппы и их приложения [Текст] / В.А. Артамонов // Чебышевский сборник, 2018, Т. 19., Вып. 2., С. 111 – 122.

[15]. Denes J., Keedwell A. D. Latin squares and their applications [Текст] / J. Denes, A. D. Keedwell //. The Mathematical Gazette. 1974, Vol. 59. P. 547.

[16]. Euler L. Recherches sur une nouvelle especе de quarres magiques [Текст] / L. Euler // Middelburg, 1782.

[17]. Van Lint J.H., Wilson R.M. A Course in Combinatorics [Текст] / J.H. van Lint, R.M. Wilson // Cambridge University Press, 1992, P. 530.

[18]. McKay B.D., Wanless M.I. On the number of Latin Squares [Текст] / B.D. McKay, M.I. Wanless // Ann. Combin, 2005, No. 9, P. 335 – 344.

[19]. Тужилин М. Э. Латинские квадраты и их применение в криптографии [Текст] / М. Э. Тужилин // Прикладная дискретная математика, 2012, № 3, С. 47 – 52.

[20]. Bellaso G.B. II vero modo di scrivere in cifra con facilita, prestezza et securezza di Misser Giovan Battista Bellaso [Текст] / G.B. Bellaso // Stampato in Breffa per Iacobo Britannico, Bressa, 1564.

[21]. Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии [Текст] / М.М. Глухов // - Прикладная дискретная математика. 2008, № 2, С. 28 – 32.

[22]. SHCHERBACOV V.A. Quasigroups in cryptology [Текст] / V.A. SHCHERBACOV // Comput. Sci. J. Moldova. 2009, V.17, No.2, P. 193 – 228.

[23]. ТАБАРОВ А.Х., КАРИМОВ Ф. Линейные квазигруппы с дополнительными тождествами [Текст] / А.Х. ТАБАРОВ , Ф. КАРИМОВ // Вестник Таджикского национального университета, Серия естественных наук, 2011, № 2, С. 3 – 7.

[24]. ЩЕРБАКОВ В. А., ТАБАРОВ А. Х., ПУШКАШУ Д. И. О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами [Текст] / В. А. ЩЕРБАКОВ, А. Х. ТАБАРОВ, Д. И. ПУШКАШУ // Фундамент. и прикл. матем., 2008, Т. 14, Вып. 5, С. 237 – 251.

[25]. SHCHERBACOV V.A. On congruences of quasigroups [Текст] / V.A. SHCHERBACOV // Reg. in VINITI 1990, t. 4413 – B90, Moscow, 16p.

[26]. ТАБАРОВ А.Х. Простые линейные и алинейные квазигруппы [Текст] / А.Х. ТАБАРОВ // Вестник ТГНУ, серия естественных наук, 2007, № 3(35), С. 259 – 262.

[27]. ТАБАРОВ А.Х., ДАВЛАТБЕКОВ А.А., КОМИЛОВ О.О. Решение проблемы В.Д. Белоусова для класса BG - квазигрупп [Текст] / А.Х. ТАБАРОВ, А.А. ДАВЛАТБЕКОВ, О.О. КОМИЛОВ // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017, № 1/5, С. 38 – 41.

[28]. BRUCK R.H. Simple quasigroups [Текст] / R.H. BRUCK // Bull. Amer. Math. Soc., 1944, Vol. 50, No. 10, P. 769 – 781.

[29]. GARRISON G. N. Quasigroups [Текст] / G. N. GARRISON // Ann. of Math. 1940, Vol. 41, P. 474 – 484.

[30]. DRURY W.W. Subquasigroups of finite quasigroups [Текст] / W.W. DRURY // Pacific J. Math., 1957, No. 4, P. 1711 – 1714.

[31]. Комилов О.О., Ашуров Х.М., Джумаев Э.Х. Приложение отображения, сравнение по модулю и частотный анализ в криптографии [Текст] / О.О. Комилов, Х.М. Ашуров, Э.Х. Джумаев // Вестник таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2017, 1/1, С. 84-90.

[32]. Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами [Текст] / В. Д. Белоусов // УМН, 1965, Т. 20, Вып. 1(121), С. 75 – 146.

[33]. Sade A. Quasigroupes obeissant a certains lois [Текст] / A. Sade // Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul. 1957, Vol. 22. P. 151 – 184.

[34]. Sherbakov V.A. On orders of elements in quasigroups [Текст] / Sherbakov V.A. // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, 2004, No.2, P. 49 – 54.

[35]. Hall M., Paige L. Complete mappings of finite groups [Текст] / M. Hall, L. Paige // Pacific J. Math. 5 (1955), No 4, P. 541 – 549.

[36]. Шелохов А.М. Полная классификация изотопически инвариантных многообразий аналитических луп, определяемых правильными тождествами длины четыре [Текст] / А.М.Шелохов // Изв. вузов. Матем., 2017, № 3, С. 68 – 77.

[37]. Falcone E. Isotopy invariants in quasigroups [Текст] / E. Falcone // Trans. Amer. Math. Soc, 1970, Vol.151 (2), P. 511 – 526.

[38]. Burstin C., Mayer W. Distribitive Gruppen von endlicher Ordnung [Текст] / C. Burstin, W. Mayer // J. reine und angew. Math., 1929, No. 160, P. 111 – 130.

[39]. Stein S.K. Left distributive quasigroups [Текст] / S.K. Stein // Proc.Amer.Math. Soc., 1959, 10, No 4, P. 577 – 578.

[40]. Stein S.K. On the foundation of quasigroups [Текст] / S.K. Stein // Trans. Amer. Math. Soc. 1957, Vol. 85, P. 228 – 256.

[41]. Stein S. K. On a construction of Hosszu [Текст] / S. K. Stein // Publ. Math. Debrecen, 1959, No 1-2, P. 10 – 14.

[42]. Елисеев М. Е. Об автотопиях квазигрупп [Текст] / М. Е. Елисеев // Тр. ИММ УрО РАН, Т.17, № 1, 2011, С. 93 – 98.

[43]. Sade A. Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et antiadeliens [Текст] / A. Sade // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1960, ser. I, 74, No 2, P. 91 – 99.

[44]. Флоря И.А., Дидурик Н.Н. О некоторых изотопах квазигруппы Стейна [Текст] / И.А. Флоря, Н.Н. Дидурик // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико-математические и технические науки. Экономика и управление. 2014, № 3, С. 61 – 67.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1-А]. Комилов О.О. Латинские квадраты [Текст] / О.О. Комилов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2014, № 1/2(130), С. 64 – 67.

[2-А]. Комилов О.О. Диассоциативные квазигруппы малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Доклады НАН Таджикистана. 2020, Том 63, № 11-12, С. 665 – 671.

[3-А]. Табари А.Х., Комилов О.О. Изотопия и автотопия диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка [Текст] / А.Х. Табари, О.О. Комилов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2021, № 1, С. 89 – 101.

В других изданиях

[4-А]. Табаров А.Х., Комилов О.О. Изоморфные латинские квадраты малых порядков [Текст] / А.Х. Табаров, О.О. Комилов// Материалы международной научной конференции “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, посвящённой 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича, Душанбе, 27 – 28 апреля, 2015г., С. 39 – 40.

[5-А]. Комилов О.О. Изоморфизм и автоморфизм в квазигруппах [Текст] / О.О. Комилов // Материалы международной научно-практической конференции “Роль ИКТ в инновационном развитии экономики Республики Таджикиста”,ТУТ, Душанбе, 17 – 18 ноября, 2017г., С. 74 – 76.

[6-А]. Комилов О.О. Лево-дистрибутивные квазигруппы 5 - го порядка [Текст] /О.О. Комилов // Сборник научных статей Республиканской научно - практической конференции на тему: “Инновационное обеспечение устойчивого развития сельского хозайства”, Душанбе, 2018г., С. 195 – 198.

[7-А]. Комилов О.О. Алгоритм классификации квазигрупп малых порядков по тождествам [Текст] /О.О. Комилов // Материалы XI-международной научно – теоретической конференции, посвящённой 70 – летию образования ТНУ и 70 – летию д.ф.-м.н., проф. М.К. Юнуси, Душанбе, 27 – 28 декабря, 2018г., С. 137 – 143.

[8-А]. Комилов О.О. Классификация квазигрупп малых порядков по тождествам [Текст] / О.О. Комилов // Тезисы докладов. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110–летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша, Москва, МГУ, 2018г., С. 105 – 106.

[9-A]. Комилов О.О. Компьютерный анализ леводистрибутивных квазигрупп 5-го порядка [Текст] / О.О. Комилов // Двадцать шестая международная конференция, МКО-2019, Математика. Компьютер. Образование, г.Пущино, 28-января–2-февраля, 2019г., С. 156.

[10-A]. Комилов О.О. Диассоциативные квазигруппы малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Сборник тезисов XXVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. "Ломоносов – 2019", Москва, МГУ, 8–12 апреля 2019г., Секция "Вычислительная математика и кибернетика", Издательство: ООО "МАКС Пресс". С. 36 – 37.

[11-A]. Табаров А.Х., Давлатбеков А.А., Комилов О.О. Порядок элемента и обобщение идемпотентного элемента в квазигруппах [Текст] / А.Х. Табаров, А.А. Давлатбеков, О.О. Комилов // Международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высщей алгебры механико-математического факультета МГУ, Москва, 2019г., С. 60 – 61.

[12-A]. Комилов О.О. Квазигруппы без подквазигрупп малого порядка [Текст] / О.О. Комилов // Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа. Материалы международной конференции, посвящённой 60-летию академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусеновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича. Институт математики им. А.Джураева. Академия наук Республики Таджикистан. Таджикский национальный университет Душанбе, 13–14 декабря, 2019г., С. 279 – 280.

[13-A]. Табари А.Х., Комилов О.О. О допустимости диассоциативной квазигруппы [Текст] / А.Х. Табари, О.О. Комилов // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Материалы международной конференции, посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича, Душанбе, 25–26 декабря, 2020г., С. 321 – 322.

[14-A]. Комилов О.О. Решение задачи В.Д. Белоусова для некоторых классов диассоциативных квазигрупп [Текст] / О.О. Комилов // Вестник Филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г.Душанбе. Серия естественных наук. 2020г., Т. 1, С. 4 – 10.